NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU BUREAU DES LONGITUDES

*S*005

PERTURBATIONS DU PREMIER ORDRE ET DÉRIVEES PREMIÈRES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT POUR UN COUPLE DE PLANÈTES : FORMULAIRES ET PROGRAMMES DE CALCUL

Jean-Louis Simon

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes
UA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
75014 Paris

deuxième édition, août 1986

Imprimé au CIRCE - Batiment 506 - 91405 ORSAY/CEDEX

TABLE DES MATIÈRES

OBJET

L'objet de cette note est de présenter les formulaires et les programmes permettant de calculer, pour un couple de planètes, les perturbations du premier ordre des masses et les dérivées premières des équations de Lagrange. Les développements sont obtenus par analyse harmonique.

Les programmes de calcul sont écrits en *Fortran* et sont disponibles à la demande. Le listage du programme de calcul des perturbations du premier ordre est donné en annexe.

Remarque

Dans cette deuxième édition, les formulaires ont été établis en utilisant la variable $\gamma = \sin \frac{i}{2}$ au lieu de l'inclinaison i.

Par ailleurs nous remercions L. Duriez pour ses remarques sur le programme de calcul des perturbations du premier ordre.

INTRODUCTION

Considérons un couple de planètes P, P'. Les équations du mouvement des deux planètes ont la forme :

$$\frac{d\sigma^i}{dt} = \mu F(\sigma^j). \tag{1}$$

σ^i et σ^j représentent les éléments des planètes (nous préciserons nos notations au paragraphe **I**) ; μ est un paramètre de l'ordre des masses. Lorsqu'on intègre le système (1) par une méthode d'accroissement ordre par ordre par rapport aux masses, on cherche à représenter la solution sous la forme :

$$\sigma^i = \sigma_0^i + \mu\Delta^1\sigma^i + \mu^2\Delta^2\sigma^i + \ldots \tag{2}$$

σ_0^i est la constante d'intégration de la variable σ^i ; $\Delta^1\sigma^i$ et $\Delta^2\sigma^i$ représentent les perturbations d'ordre 1 et 2 par rapport aux masses, de la variable σ^i. $\Delta^1\sigma^i$ et $\Delta^2\sigma^i$ sont solutions des équations :

$$\frac{d}{dt}\Delta^1\sigma^i = F(\sigma_0^i)\,, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta^2\sigma^i = \sum_j \frac{\partial F}{\partial\sigma^j}\,\Delta^1\sigma^j\,. \tag{4}$$

Les formulaires et les programmes que nous présentons ici permettent de calculer les perturbations du premier ordre $\Delta^1\sigma^i$ et les dérivées premières des seconds membres des équations $\partial F/\partial\sigma^j$ pour tous les éléments d'un couple quelconque de planètes, en fonction des masses et des constantes d'intégration σ_0^i. Les développements que l'on obtient ont la forme classique de séries de Fourier des deux longitudes λ et λ' (ou, plus exactement, des deux arguments $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$ définis au paragraphe **I.3**). Ils sont calculés par analyse harmonique, ce qui permet une grande rapidité de calcul et assure aux résultats une très bonne précision. Les programmes de calcul, écrits en *Fortran*, sont disponibles au *Bureau des Longitudes*.

Dans cette note, après avoir précisé nos notations, nous donnons les formulaires de calcul des seconds membres des équations (1) et de leurs dérivées premières, ainsi que le formulaire du développement par analyse harmonique d'une fonction de deux variables. Nous décrivons ensuite la méthode de calcul utilisée et donnons les principales caractéristiques des programmes.

Le formulaire de calcul et la programmation des dérivées premières des équations de Lagrange ont été en grande partie élaborés par C. Schilli lors de son stage de DEA (juin 1983).

I. NOTATIONS

1. La fonction perturbatrice et ses dérivées

Soit une planète P de masse m perturbée par une planète P' de masse m'. Nous notons σ^i (avec $1 \le i \le 6$) les variables représentant le mouvement de P, σ'^i (avec $1 \le i \le 6$) les variables représentant le mouvement de P' et σ^j (avec $1 \le j \le 12$) les variables représentant le mouvement de l'ensemble des deux planètes. Nous avons donc :

$$\{\sigma^j\} = \{\sigma^i\} + \{\sigma'^i\}\,. \tag{5}$$

Nous notons :

$\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ les vecteurs de position de $P(x,y,z)$ et $P'(x',y',z')$ dans un système héliocentrique ;

(6) $\mathbf{V}_k$ le vecteur de composantes $\begin{cases} (\partial x/\partial\sigma^k, \partial y/\partial\sigma^k, \partial z/\partial\sigma^k), & \text{pour } 1 \leq k \leq 6, \\ (\partial x'/\partial\sigma^k, \partial y'/\partial\sigma^k, \partial z'/\partial\sigma^k), & \text{pour } 7 \leq k \leq 12\,; \end{cases}$

$\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k$ les composantes du vecteur $\mathbf{V}_k$;

$\mathbf{V}_{kj}$ le vecteur $\partial\mathbf{V}_k/\partial\sigma^j$;

Posons :

(7) $$r = |\mathbf{V}|; \quad r' = |\mathbf{V}'|; \quad \Delta = |\mathbf{PP}'|.$$

La fonction perturbatrice s'écrit :

(8) $$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{VV}'}{r'^3}\right),$$

où f est la constante de la gravitation.
R est une fonction des variables σ^j. Nous notons :

(9) $$R_j = \frac{\partial R}{\partial\sigma^j}\,;$$
$$R_{kj} = \frac{\partial^2 R}{\partial\sigma^k\partial\sigma^j}$$

2. Variables osculatrices représentant le mouvement des planètes

Les formulaires des paragraphes **II** et **III** sont établis en utilisant les variables σ suivantes :

a : demi-grand axe

e : excentricité

(10) $\gamma = \sin\dfrac{i}{2}$ où i désigne l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique

ε : longitude moyenne de l'époque

ϖ : longitude du périhélie

Ω : longitude du noeud ascendant

ainsi que la variable :

(11) λ : longitude moyenne

λ et ε sont reliés par :

(12) $$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt}\,;$$

n est le moyen mouvement de la planète déduit de a par :

(13) $$n^2a^3 = f(1+m)\,.$$

Avec les variables (10) et (11) les équations du mouvement sont les équations de Lagrange. Nous considérerons toujours ces variables dans l'ordre suivant :

(14) ordre $a, e, \gamma, \varepsilon$ ou λ, ϖ, Ω pour les variables σ^i $(1 \leq i \leq 6)$,

ordre $a, e, \gamma, \varepsilon$ ou $\lambda, \varpi, \Omega, a', e', \gamma', \varepsilon'$ ou $\lambda', \varpi', \Omega'$ pour les variables σ^j $(1 \leq j \leq 12)$.

Ainsi par exemple, avec les conventions (14) et les notations (9), R_5 désignera la dérivée $\partial R/\partial\varpi$, $R_{2\,10}$, la dérivée $\partial^2 R/\partial e\,\partial\lambda'$.

Les résultats finals seront établis soit pour les variables (10) et (11), soit pour d'autres variables déduites des précédentes par un changement de variables simple. On considérera, en particulier :

(15) au lieu de e et ϖ, les variables k et h : $k = e\cos\varpi$; $h = e\sin\varpi$;

(16) au lieu de γ et Ω, les variables q et p : $q = \gamma\cos\Omega$; $p = \gamma\sin\Omega$.

3. Constantes d'intégration et arguments des séries de Fourier

Nous notons σ_0^i les constantes d'intégration des variables σ^i définies en (10). Par ailleurs nous notons :

(17) $\bar{n}$ le moyen mouvement moyen réel de la planète P déduit de l'observation,

(18) n_0 le moyen mouvement théorique de la planète P soumise à la seule attraction du Soleil.

n_0 se déduit de $\bar{n}$ par $n_0 = \bar{n} - \delta n$ où δn désigne l'ensemble des perturbations séculaires de la longitude moyenne. La constante d'intégration a_0 de la variable a se déduit de n_0 par :

(19)
$$n_0^2\, a_0^3 = f(1+m).$$

Enfin, lorsqu'on intègre l'équation (12) on cherche à développer λ et λ' sous une forme analogue à (2) :

(20)
$$\lambda = \bar{\lambda} + \mu\Delta^1\lambda + ...$$
$$\lambda' = \bar{\lambda}' + \mu\Delta^1\lambda' + ...$$

où $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$ sont définis par :

(21)
$$\bar{\lambda} = \varepsilon_0 + \bar{n}t; \quad \bar{\lambda}' = \varepsilon_0' + \bar{n}'t.$$

$\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$ seront les arguments angulaires des développements en séries de Fourier que nous allons rechercher.

II. FORMULAIRE DE CALCUL DES SECONDS MEMBRES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Avec les variables (10) les équations de Lagrange ont la forme suivante :

(22)
$$\frac{d\sigma^i}{dt} = F^i = \sum_{k=1}^{6} a^{ik} R_k\,, \qquad \text{avec } 1 \leq i \leq 6.$$

1. Calcul des coefficients de la matrice de Lagrange a^{ik}

On a :

(23)
$$a^{ik} = \frac{1}{na^2} A^{ik}\,,$$

où les coefficients A^{ik} sont les éléments de la matrice (6×6):

(24)
$$\begin{pmatrix} 0 & -L^t \\ L & 0 \end{pmatrix}.$$

L est une matrice (3×3) qui a pour éléments:

(25)
$$\begin{pmatrix} -2a & \dfrac{u_1(1-u_1)}{e} & \dfrac{\gamma}{2u_1} \\ 0 & \dfrac{u_1}{e} & \dfrac{\gamma}{2u_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4\gamma u_1} \end{pmatrix}.$$

L^t désigne la transposée de L, u_1 et u_2 sont définis par:

(26)
$$u_1 = \sqrt{1-e^2}\,; \quad u_2 = \sqrt{1-\gamma^2}\,.$$

2. Calcul des dérivées premières de la fonction perturbatrice R_k

On effectue le changement de variables angulaires:

(27)
$$\Omega = \Omega\,, \qquad \omega = \varpi - \Omega\,, \qquad M = \lambda - \varpi\,.$$

Notons:
R^* la fonction perturbatrice exprimée en fonction des nouvelles variables, ∂R^* le vecteur de composantes $(\partial R^*/\partial x,\ \partial R^*/\partial y,\ \partial R^*/\partial z)$. On peut écrire en utilisant les notations (6), :

(28)
$$R_k^* = \mathbf{V}_k\, \partial R^*\,.$$

a) Calcul des vecteurs $\mathbf{V}_k$.

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy, Oz. Posons:

(29)
$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 &= \cos i\ \mathbf{y}_1 + \sin i\ \mathbf{z}\,, \\ \mathbf{z}_2 &= -\sin i\ \mathbf{y}_1 + \cos i\ \mathbf{z}\,, \\ \mathbf{x}_1 &= \cos\Omega\ \mathbf{x} + \sin\Omega\ \mathbf{y}\,, \\ \mathbf{y}_1 &= -\sin\Omega\ \mathbf{x} + \cos\Omega\ \mathbf{y}\,. \end{aligned}$$

On a alors:

(30)
$$\mathbf{V} = (\cos E - e)\,\mathbf{A} + u_1 \sin E\ \mathbf{B}\,,$$

avec:

$$\mathbf{A} = a(\cos\omega\ \mathbf{x_1} + \sin\omega\ \mathbf{y_2})\,,$$
$$\mathbf{B} = a(-\sin\omega\ \mathbf{x_1} + \cos\omega\ \mathbf{y_2})\,. \tag{31}$$

E désigne l'anomalie excentrique que l'on calcule par l'équation de Kepler :

$$E - e\sin E = M\,. \tag{32}$$

$\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ne dépendent que de a, γ (par l'intermédiaire de i), ω et Ω. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a} = \frac{\mathbf{A}}{a}\,; && \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial a} = \frac{\mathbf{B}}{a}\,;\\
&\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \gamma} = \frac{2a}{u_2}\sin\omega\ \mathbf{z}_2\,; && \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \gamma} = \frac{2a}{u_2}\cos\omega\ \mathbf{z}_2\,;\\
&\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \omega} = \mathbf{B}\,; && \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \omega} = -\mathbf{A}\,;\\
&\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Omega} = a(\cos\omega\ \mathbf{y}_1 - \sin\omega\cos i\ \mathbf{x}_1)\,; && \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Omega} = a(-\sin\omega\ \mathbf{y}_1 - \cos\omega\cos i\ \mathbf{x}_1)\,;
\end{aligned} \tag{33}$$

$(\cos E - e)$ et $u_1\sin E$ ne dépendent que de e et M, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial e}(\cos E - e) = -\frac{\sin^2 E}{1 - e\cos E} - 1\,; && \frac{\partial}{\partial M}(\cos E - e) = -\frac{\sin E}{1 - e\cos E}\,;\\
&\frac{\partial}{\partial e}(u_1\sin E) = -\frac{e\sin E}{u_1} + \frac{u_1\cos E\sin E}{1 - e\cos E}\,; && \frac{\partial}{\partial M}(u_1\sin E) = \frac{u_1\cos E}{1 - e\cos E}\,.
\end{aligned} \tag{34}$$

Les formules (29) à (34) permettent de calculer les vecteurs $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4, \mathbf{V}_5, \mathbf{V}_6$. On a, en particulier, $\mathbf{V}_1 = \dfrac{\mathbf{V}}{a}$.

b) Calcul du vecteur ∂R^*

De la formule (8), on tire :

$$\partial R^* = fm'\left(\frac{\mathbf{V}' - \mathbf{V}}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{V}'}{r'^3}\right)\,. \tag{35}$$

Δ, Δ^3 et r'^3 se calculent à partir de :

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\,; \tag{36}$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\,. \tag{37}$$

Le vecteur $\mathbf{V}$ et ses coordonnées x, y, z se déduisent des formules (30) et (31). $\mathbf{V}'$ et ses coordonnées x', y', z' se calculent par des formules analogues à (30) et (31) avec des variables primées.
On revient ensuite aux variables angulaires de départ, on a :

$$R_4 = R_4^*\,;\quad R_5 = R_5^* - R_4^*\,;\quad R_6 = R_6^* - R_5^*\,. \tag{38}$$

III. FORMULAIRE DE CALCUL DES DÉRIVÉES PREMIÈRES DES SECONDS MEMBRES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Les dérivées premières des seconds membres des équations de Lagrange sont données par des équations de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^j}\left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right) = F^i_j = \sum_{k=1}^{6} a^{ik}_j R_k + \sum_{k=1}^{6} a^{ik} R_{kj}\,, \quad \text{avec } 1 \leq j \leq 12. \tag{39}$$

Le formulaire du paragraphe **II** permet de calculer les quantités R_k et a^{ik}. Il reste à calculer les dérivées premières des coefficients de la matrice de Lagrange a^{ik}_j et les dérivées secondes de la fonction perturbatrice R_{kj}.

1. Calcul des dérivées premières des coefficients de la matrice de Lagrange a^{ik}_j

De la formule (23), on tire :

$$a^{ik}_j = \left(\frac{1}{na^2}\right)_j A^{ik} \quad + \quad \frac{1}{na^2} A^{ik}_j\,. \tag{40}$$

On a :

$$\left(\frac{1}{na^2}\right)_1 = -\frac{1}{2na^3}\,, \quad \left(\frac{1}{na^2}\right)_j = 0, \quad \text{pour } 2 \leq j \leq 12\,; \tag{41}$$

$$A^{ik}_j = 0, \quad \text{pour } 4 \leq j \leq 12\,; \tag{42}$$

$$A^{ik}_j = \begin{pmatrix} 0 & -L^t_j \\ L_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq 3\,. \tag{43}$$

où L_1, L_2, L_3 sont des matrices (3×3) données par :

$$L_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 - \dfrac{1}{u_1} - \dfrac{u_1(1-u_1)}{e^2} & \dfrac{e\gamma}{2u_1^3} \\ 0 & -\dfrac{u_1}{e^2} - \dfrac{1}{u_1} & \dfrac{e\gamma}{2u_1^3} \\ 0 & 0 & \dfrac{e}{4\gamma u_1^3} \end{pmatrix}. \tag{45}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2u_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2u_1} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{4u_1\gamma^2} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

2. Calcul des dérivées secondes de la fonction perturbatrice R_{kj}

On effectue le changement de variables angulaires défini en (27) et on calcule d'abord R^*_{kj}. De (28), on déduit :

$$R^*_{kj} = \mathbf{V}_k \partial^2 R^* \mathbf{V}_j + \mathbf{V}_{kj}\, \partial R^*\,, \tag{47}$$

où $\partial^2 R^*$ est l'opérateur défini par la matrice $(\partial^2 R^*)$:

(48)

$$(\partial^2 R^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \end{pmatrix} \ (1 \le j \le 6), \quad (\partial^2 R^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial x'} & \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y'} & \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z'} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y'} & \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z'} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z'} & \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z'} & \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial z'} \end{pmatrix} \ (7 \le j \le 12).$$

Les formules du paragraphe **II 2*a*** permettent de calculer $\mathbf{V}_k$ et $\mathbf{V}_j$ ($\mathbf{V}_j$ pour $7 \le j \le 12$ se calculant comme $\mathbf{V}_j$ pour $1 \le j \le 6$ en changeant x, y, z en x', y', z'). Les formules du paragraphe **II 2*b*** permettent de calculer ∂R^*.

Il reste à calculer les vecteurs $\mathbf{V}_{kj}$ et les éléments de la matrice $(\partial^2 R^*)$.

a) Calcul des vecteurs $\mathbf{V}_{kj}$

Les seules dérivées secondes des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ différentes de 0 sont :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial a \partial \gamma} = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \gamma}\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial a \partial \gamma} = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \gamma}\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial a \partial \omega} = \frac{\mathbf{B}}{a}\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial a \partial \omega} = -\frac{\mathbf{A}}{a}\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial a \partial \Omega} = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Omega}\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial a \partial \Omega} = \frac{1}{a}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Omega}\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \gamma^2} = \frac{2a}{u_2^3}\gamma \sin\omega\ \mathbf{z}_2 - \frac{4a}{u_2^2}\sin\omega\ \mathbf{y}_2\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \gamma^2} = \frac{2a}{u_2^3}\gamma \cos\omega\ \mathbf{z}_2 - \frac{4a}{u_2^2}\cos\omega\ \mathbf{y}_2\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \gamma \partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \gamma}\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \gamma \partial \omega} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \gamma}\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \gamma \partial \Omega} = \frac{2a}{u_2}\sin\omega \sin i\ \mathbf{x}_1\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \gamma \partial \Omega} = \frac{2a}{u_2}\cos\omega \sin i\ \mathbf{x}_1\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \omega^2} = -\mathbf{A}\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \omega^2} = -\mathbf{B}\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \omega \partial \Omega} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Omega}\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \omega \partial \Omega} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Omega}\,;\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \Omega^2} = a(-\cos\omega\ \mathbf{x}_1 - \sin\omega \cos i\ \mathbf{y}_1)\,; && \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \Omega^2} = a(\sin\omega\ \mathbf{x}_1 - \cos\omega \cos i\ \mathbf{y}_1).
\end{aligned} \tag{49}$$

Les seules dérivées secondes de $(\cos E - e)$ et de $u_1 \sin E$ différentes de 0 sont :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(\cos E - e)}{\partial e^2} = -\frac{3\sin^2 E\cos E}{(1-e\cos E)^2} + \frac{e\sin^4 E}{(1-e\cos E)^3}\,;\\
&\frac{\partial^2(\cos E - e)}{\partial e\partial M} = -\frac{2\sin E\cos E}{(1-e\cos E)^2} + \frac{e\sin^3 E}{(1-e\cos E)^3}\,;\\
&\frac{\partial^2(\cos E - e)}{\partial M^2} = -\frac{\cos E}{(1-e\cos E)^2} + \frac{e\sin^2 E}{(1-e\cos E)^3}\,;\\
(50)\qquad &\frac{\partial^2(u_1\sin E)}{\partial e^2} = -\frac{\sin E}{u_1^3} - \frac{2e\sin E\cos E}{u_1(1-e\cos E)} + \frac{u_1(2\sin E\cos^2 E - \sin^3 E)}{(1-e\cos E)^2}\\
&\qquad - \frac{eu_1\sin^3 E\cos E}{(1-e\cos E)^3}\,;\\
&\frac{\partial^2(u_1\sin E)}{\partial e\partial M} = -\frac{e\cos E}{u_1(1-e\cos E)} + \frac{u_1(\cos^2 E - \sin^2 E)}{(1-e\cos E)^2} - \frac{eu_1\sin^2 E\cos E}{(1-e\cos E)^3}\,;\\
&\frac{\partial^2(u_1\sin E)}{\partial M^2} = -\frac{u_1\sin E}{(1-e\cos E)^2} - \frac{eu_1\sin E\cos E}{(1-e\cos E)^3}\,.
\end{aligned}
$$

Les formules (49) et (50) permettent, à l'aide des formules (29) à (33) du paragraphe **II**, de calculer les vecteurs $\mathbf{V}_{kj}$ différents de 0. (Notons, en particulier que $\mathbf{V}_{kj} = 0$ pour $7 \le j \le 12$).

b) Calcul de la matrice $(\delta^2 R^*)$

Notons V et V' les matrices lignes $V = (x\,y\,z)$, $V' = (x'\,y'\,z')$, V^t et V'^t les matrices colonnes transposées de V et V' et I la matrice unité (3×3). On a :

$$(51\,\text{a})\qquad \partial^2 R^* = \frac{fm'}{\Delta^3}\left(\frac{3(V'-V)(V'^t - V^t)}{\Delta^2} - I\right), \quad \text{pour } 1 \le j \le 6\,;$$

$$(51\,\text{b})\qquad \partial^2 R^* = \frac{fm'}{\Delta^3}\left(I - \frac{3(V'-V)(V'^t - V^t)}{\Delta^2}\right) - \frac{fm'}{r'^3}\left(I - \frac{3V'V'^t}{r'^3}\right), \quad \text{pour } 7 \le j \le 12.$$

c) Retour aux variables angulaires de départ

Une fois les dérivées R^*_{kj} calculées, on revient aux variables de départ par les formules :

$$
\begin{aligned}
&R_{k\,4} = R^*_{k\,4}\,;\quad R_{k\,5} = R^*_{k\,5} - R^*_{k\,4}\,;\quad R_{k\,6} = R^*_{k\,6} - R^*_{k\,5}\,;\ \text{pour } 1 \le k \le 3\\
&R_{k\,10} = R^*_{k\,10}\,;\quad R_{k\,11} = R^*_{k\,11} - R^*_{k\,10}\,;\quad R_{k\,12} = R^*_{k\,12} - R^*_{k\,11}\,;\ \text{pour } 1 \le k \le 3\\
&R_{4\,4} = R^*_{4\,4}\,;\quad R_{4\,5} = R^*_{4\,5} - R^*_{4\,4}\,;\quad R_{4\,6} = R^*_{4\,6} - R^*_{4\,5}\,;\\
&R_{4\,10} = R^*_{4\,10}\,;\quad R_{4\,11} = R^*_{4\,11} - R^*_{4\,10}\,;\quad R_{4\,12} = R^*_{4\,12} - R^*_{4\,11}\,;\\
(52)\qquad &R_{5\,5} = R^*_{5\,5} - 2R^*_{4\,5} + R^*_{4\,4}\,;\quad R_{5\,6} = R^*_{5\,6} - R^*_{5\,5} - R^*_{4\,6} + R^*_{4\,5}\,;\\
&R_{5\,10} = R^*_{5\,10} - R^*_{4\,10}\,;\quad R_{5\,11} = R^*_{5\,11} - R^*_{5\,10} - R^*_{4\,11} + R_{4\,10}\,;\\
&R_{5\,12} = R^*_{5\,12} - R^*_{5\,11} - R^*_{4\,12} + R^*_{4\,11}\,;\\
&R_{6\,6} = R^*_{6\,6} - 2R^*_{5\,6} + R^*_{5\,5}\,;\quad R_{6\,10} = R^*_{6\,10} - R^*_{5\,10}\,;\\
&R_{6\,11} = R^*_{6\,11} - R^*_{6\,10} - R^*_{5\,11} + R^*_{5\,10}\,;\quad R_{6\,12} = R^*_{6\,12} - R^*_{6\,11} - R^*_{5\,12} + R^*_{5\,11}.
\end{aligned}
$$

IV. DÉVELOPPEMENT PAR ANALYSE HARMONIQUE D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

Soit F une fonction de deux variables angulaires indépendantes θ et θ' qu'on cherche à développer sous la forme :

$$F = \sum_{j,k} (A_{jk} \cos j\theta \cos k\theta' + B_{jk} \sin j\theta \sin k\theta' + C_{jk} \cos j\theta \sin k\theta' + D_{jk} \sin j\theta \cos k\theta') \,, \tag{53}$$

où $j = 0, 1, 2, ..., p$; $k = 0, 1, 2, ..., p'$;
et où les quantités A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, D_{jk} sont des coefficients numériques. Posons :

$$\alpha = \frac{\pi}{p} \,; \quad \alpha' = \frac{\pi}{p'} \,; \tag{54}$$

$$F_q(\theta') = F(q\alpha, \theta') \quad \text{pour } q = 0, 1, 2, ..., 2p - 1. \tag{55}$$

Les coefficients A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, D_{jk} sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \rho \sum_{q=0}^{2p-1} c_k^q \cos jq\alpha, \quad C_{jk} = \rho \sum_{q=0}^{2p-1} s_k^q \cos jq\alpha, \quad \text{pour } j = 0, 1, ..., p, \\ B_{jk} &= \rho \sum_{q=0}^{2p-1} s_k^q \sin jq\alpha, \quad D_{jk} = \rho \sum_{q=0}^{2p-1} c_k^q \sin jq\alpha, \quad \text{pour } j = 0, 1, ..., p - 1, \end{aligned} \tag{56}$$

les coefficients c_k^q et s_k^q étant donnés par :

$$\begin{aligned} c_k^q &= \frac{1}{p'} \sum_{i=0}^{2p'-1} F_q(i\alpha') \cos ki\alpha', \quad \text{pour } k = 0, 1, ...p', \\ s_k^q &= \frac{1}{p'} \sum_{i=0}^{2p'-1} F_q(i\alpha') \sin ki\alpha', \quad \text{pour } k = 0, 1, ...p' - 1. \end{aligned} \tag{57}$$

Le facteur multiplicatif ρ est égal à :

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & \text{pour } j \text{ et } k \neq 0, \text{ avec } j \neq p \text{ et } k \neq p' \\ \dfrac{1}{2p} & \text{pour } j = 0 \text{ ou } p, \text{ avec } k \neq 0 \text{ et } k \neq p' \text{ et pour } k = 0 \text{ ou } p', \text{ avec } j \neq 0 \text{ et } j \neq p' \\ \dfrac{1}{4p} & \text{pour } j = 0 \text{ ou } p, \text{ avec } k = 0 \text{ ou } p' \end{cases} \tag{58}$$

A la fin de l'analyse on peut exprimer F sous la forme d'une série de Fourier à deux arguments :

$$F(\theta, \theta') = \sum_{j,k} \left[\overline{A_{jk}} \cos(j\theta + k\theta') + \overline{B_{jk}} \sin(j\theta + k\theta') + \overline{C_{jk}} \cos(j\theta - k\theta') + \overline{D_{jk}} \sin(j\theta - k\theta')\right] \,, \tag{59}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{A_{jk}} &= \frac{1}{2}(A_{jk} - B_{jk}) \,; \quad \overline{B_{jk}} = \frac{1}{2}(C_{jk} + D_{jk}) \,; \\ \overline{C_{jk}} &= \frac{1}{2}(A_{jk} + B_{jk}) \,; \quad \overline{D_{jk}} = \frac{1}{2}(C_{jk} - D_{jk}). \end{aligned} \tag{60}$$

Enfin, notons X_{jk} l'un quelconque des coefficients A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, D_{jk} : si l'approximation (53) a été calculée pour des multiples $p\theta$ et $p'\theta'$ de θ et θ' suffisamment élevés, une bonne estimation de l'erreur commise sur X_{jk} est :

(61) $$\Delta(X_{jk}) = |X_{2p-j.k}| + |X_{j.2p'-k}|\,.$$

$X_{2p-j.k}$ et $X_{j.2p'-k}$ sont des coefficients qui apparaîtraient dans un développement de F calculé jusqu'aux multiples $2p\theta$ et $2p'\theta'$ de θ et θ'.

V. CALCUL PRATIQUE

1. Principe

Soient p et p' deux entiers fixés et α et α' les quantités déduites de p et p' par la relation (54). Donnons aux variables σ^j autres que λ et λ' les valeurs σ_0^j et aux variables λ et λ' les valeurs $\lambda = \overline{\lambda} = q\alpha(q = 0, 1, ..., 2p-1)$, $\lambda' = \overline{\lambda'} = i\alpha'(i = 0, 1, ..., 2p'-1)$. Les formulaires des paragraphes **II** et **III** nous permettent alors d'effectuer $4pp'$ substitutions numériques des équations (22) et des équations (39). A partir des $4pp'$ valeurs numériques $F^i(q\alpha, i\alpha')$, $F^i_j(q\alpha, i\alpha')$ ainsi obtenues, on développe ensuite les fonctions F^i et F^i_j en séries de Fourier de $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda'}$ à l'aide des formules du paragraphe **IV**. On peut, finalement, mettre ces fonctions sous la forme :

(62) $$F^i = \sum_{i_1 i_2} a^i_{i_1 i_2} \cos(i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'}) + \sum_{i_1 i_2} b^i_{i_1 i_2} \sin(i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'}),$$

(63) $$F^i_j = \sum_{i_1 i_2} a^{ij}_{i_1 i_2} \cos(i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'}) + \sum_{i_1 i_2} b^{ij}_{i_1 i_2} \sin(i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'}),$$

où $a^i_{i_1 i_2}$, $b^i_{i_1 i_2}$, $a^{ij}_{i_1 i_2}$, $b^{ij}_{i_1 i_2}$ sont des coefficients numériques et où les indices i_1 sont des entiers positifs, les indices i_2, des entiers. Les perturbations du premier ordre s'obtiennent par intégration par rapport au temps des fonctions (62) :

(64) $$\Delta^1\sigma^i = \int F^i(\overline{\lambda}, \overline{\lambda'})dt = \sum_{i_1 i_2} \frac{a^i_{i_1 i_2}}{i_1\tilde{n} + i_2\tilde{n}'} \sin(i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'}) - \sum_{i_1 i_2} \frac{b_{i_1 i_2}}{i_1\tilde{n} + i_2\tilde{n}'} \cos(i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'})\,.$$

Enfin $\Delta^1\lambda$ s'obtient par double intégration à partir des équations (12) et (13) :

(65) $$\Delta^1\lambda = \int n\,dt + \Delta^1\varepsilon = -\frac{3n_0}{2a_0}\int \Delta^1 a\,dt + \Delta^1\varepsilon\,.$$

n_0 et a_0 ont été définis au paragraphe **I 3**.

2. Variables angulaires de l'analyse harmonique

Au lieu des variables $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda'}$ on peut très bien prendre comme arguments de l'analyse harmonique des variables déduites des précédentes par un changement de variables simple. Il est particulièrement intéressant d'utiliser les variables :

(66) $$\theta = \overline{\lambda'} - \overline{\lambda}$$
$$\theta' = \overline{\lambda'}$$

En effet, si on développe la fonction perturbatrice R en série de Fourier de θ et $\theta'(R = \sum_{i_1 i_2} A_{i_1 i_2} \cos(i_1\theta + i_2\theta'))$, le coefficient $A_{i_1 i_2}$ de l'argument $(i_1\theta + i_2\theta')$ a en facteur $\alpha^{|i_1|}\beta^{|i_2|}$ où :

(67) α désigne le rapport des demi-grands axes $\dfrac{a}{a'}$,

β est un petit paramètre de l'ordre des excentricités et des inclinaisons que nous appellerons *caractéristique* de l'argument $i_1\theta + i_2\theta'$.

Pour un couple de planètes P, P' considéré, les valeurs numériques p et p' des bornes de l'analyse pourront être choisies en fonction des valeurs numériques de α et des excentricités et inclinaisons et ce choix de variables angulaires de l'analyse permet de limiter d'une manière importante le nombre de substitutions à effectuer. Une fois l'analyse terminée on remet sans difficultés les développements sous les formes (62) ou (63).

3. Changement de variables

Pour obtenir les perturbations du premier ordre des variables (15) et (16), on utilise les formules :

$$\frac{dk}{dt} = \cos\varpi_0 \frac{de}{dt} - e_0 \sin\varpi_0 \frac{d\varpi}{dt}\,; \tag{68}$$

$$\frac{dh}{dt} = \sin\varpi_0 \frac{de}{dt} + e_0 \cos\varpi_0 \frac{d\varpi}{dt}\,;$$

$$\frac{dq}{dt} = \cos\Omega_0 \frac{d\gamma}{dt} - \gamma_0 \sin\Omega_0 \frac{d\Omega}{dt}\,; \tag{69}$$

$$\frac{dp}{dt} = \sin\Omega_0 \frac{d\gamma}{dt} + \gamma_0 \cos\Omega_0 \frac{d\Omega}{dt}\,.$$

Pour les dérivées premières :

a) Dérivées des équations $\dfrac{da}{dt}$ *et* $\dfrac{d\lambda}{dt}$ *par rapport aux variables* $k, h, q, p, k', h', q', p'$.
On utilise les formules :

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{d}{dt}\right) = \cos\varpi_0 \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{d}{dt}\right) - \frac{\sin\varpi_0}{e_0}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\frac{d}{dt}\right)\,; \tag{70}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{d}{dt}\right) = \sin\varpi_0 \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{d}{dt}\right) + \frac{\cos\varpi_0}{e_0}\frac{\partial}{\partial\varpi}\left(\frac{d}{dt}\right)\,;$$

(71) $\dfrac{\partial}{\partial q}$ et $\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{d}{dt}\right) =$ formules analogues aux formules (70),

avec changement de : e_0 en γ_0, ϖ_0 en Ω_0, $\dfrac{\partial}{\partial e}$ en $\dfrac{\partial}{\partial\gamma}$, et $\dfrac{\partial}{\partial\varpi}$ en $\dfrac{\partial}{\partial\Omega}$.

Pour les dérivées $\dfrac{\partial}{\partial k'}, \dfrac{\partial}{\partial h'}, \dfrac{\partial}{\partial q'}, \dfrac{\partial}{\partial p'}\left(\dfrac{d}{dt}\right)$, on a des formules analogues aux formules (70) et (71), les variables étant primées.

b) Dérivées des équations $\frac{dk}{dt}$ *et* $\frac{dh}{dt}$ *par rapport aux variables* $a, \lambda, k, h, q, p, a', \lambda', k', h', q', p'$.

Elles sont données par :

$$
(72)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{dk}{dt}\right) &= E^k_\sigma \frac{de}{dt} + P^k_\sigma \frac{d\varpi}{dt} + \cos\varpi_0 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{de}{dt}\right) - e_0 \sin\varpi_0 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right),\\
\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{dh}{dt}\right) &= E^h_\sigma \frac{de}{dt} + P^h_\sigma \frac{d\varpi}{dt} + \sin\varpi_0 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{de}{dt}\right) + e_0 \cos\varpi_0 \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right),
\end{aligned}
$$

où les coefficients $E^k_\sigma, P^k_\sigma, E^h_\sigma, P^h_\sigma$ ne sont différents de 0 que pour les quatre dérivées $\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{dk}{dt}\right)$, $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{dk}{dt}\right), \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{dh}{dt}\right), \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{dh}{dt}\right)$:

$$
(73)\qquad
\begin{aligned}
&E^k_k = \frac{\sin^2\varpi_0}{e_0}\,; \quad E^h_k = E^k_h = -\frac{\sin\varpi_0\cos\varpi_0}{e_0}\,; \quad E^h_h = \frac{\cos^2\varpi_0}{e_0}\,;\\
&P^k_k = 0\,; \quad P^h_k = 1\,; \quad P^k_h = -1\,; \quad P^h_h = 0\,.
\end{aligned}
$$

Dans les formules (72), lorsque les variables σ sont différentes des variables a et λ, les dérivées $\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{de}{dt}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)$ se calculent par des formules analogues aux formules (70).

c) Dérivées des équations $\frac{dq}{dt}$ *et* $\frac{dp}{dt}$.

Elles se calculent par des formules analogues aux formules (72) et (73), en les transformant par les relations (71).

VI. LES PROGRAMMES

1. Caractéristiques communes

Les deux programmes de calcul des perturbations du premier ordre et des dérivées premières des équations de Lagrange sont écrits en langage FORTRAN V.

Ces programmes concernent un couple de planètes. Dans leur moniteur la planète perturbée est repérée par l'indice IP qui peut prendre les valeurs $IP = 1$ ou $IP = 2$. La valeur $IP = 1$ *correspond toujours à la planète la plus proche du Soleil* (planète dite *intérieure*). En principe l'indice IP varie de 1 à 2, chaque planète du couple étant successivement considérée comme la planète perturbée mais l'utilisateur peut n'étudier qu'une seule des planètes en forçant l'indice IP à la valeur 1 ou 2 (cas, par exemple, des petites planètes perturbées par les planètes principales).

Sous réserve, naturellement, de modifications dues à un changement de compilateur ou de langage de programmation, les seules opérations à effectuer avant d'utiliser les programmes sont les suivantes :

— entrée des données correspondant au couple étudié. Ces données sont les constantes d'intégration e_0, γ_0, ϖ_0 et Ω_0, les moyens mouvements n et n_0 et les inverses des masses $1/m$. Ces données sont entrées en BLOCK DATA dans les tableaux $NNN\,(n)$, $NNZ\,(n_0)$, $E\,(e_0)$, $G\,(\gamma_0)$, $PI\,(\varpi_0)$, $OMGA\,(\Omega_0)$, $TAN\,(1/m)$. Tous ces tableaux sont des tableaux à deux dimensions. Pour chaque tableau *le premier élément correspond toujours à la planète intérieure*, n et n_0 sont exprimés en radians par milliers d'années, ϖ_0 et Ω_0 sont exprimés en radians, l'unité de masse est la masse du Soleil.

— choix des bornes p et p' de l'analyse harmonique. Ces bornes sont représentées par les identificateurs KP et KPP et choisies par l'instruction PARAMETER ($KP =$, $KPP =$). Ce choix commande, comme on l'a vu plus haut, le nombre de substitutions numériques à effectuer ($4pp'$) et a donc une influence sur le temps de calcul. Il influe également sur la place en mémoire prise par le programme, les dimensions de nombreux tableaux étant des fonctions de KP et KPP.

— choix de la précision de sortie. Cette précision est représentée par l'identificateur EPS et choisie par l'instruction PARAMETER ($EPS =$). EPS est exprimé en radians (premier ordre) ou en radians par milliers d'années (dérivées premières). Il s'agit d'une précision de sortie : les programmes ne conservant en sortie (impression, envoi sur disque, etc.) que les termes supérieurs à EPS mais il faut insister sur le fait que, une fois choisies les bornes p et p', le calcul lui-même est effectué sans limitation de précision.

— choix des variables. Ce choix s'effectue à l'aide de l'identificateur IVA dont la valeur est donnée par l'instruction PARAMETER ($IVA =$). La correspondance entre la valeur de IVA et le choix de variables est la suivante :

$IVA = 1$ correspond aux variables $a, e, \gamma, \lambda, \varpi, \Omega$.

$IVA = 2$ correspond aux variables a, λ, k, h, q, p.

Par ailleurs les arguments θ et θ' de l'analyse harmonique sont des combinaisons linéaires des arguments $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda'}$:

$$\theta = i_1\overline{\lambda} + i_2\overline{\lambda'}; \quad \theta' = j_1\overline{\lambda} + j_2\overline{\lambda'}, \tag{74}$$

où i_1, i_2, j_1 et j_2 sont des entiers.

i_1, i_2, j_1, j_2 sont représentés par les identificateurs $IN1$, $IN2$, $JN1$, $JN2$ dont les valeurs sont données par une instruction PARAMETER. Conformément à ce qui a été indiqué au paragraphe **V 2**, on utilisera le plus souvent l'instruction PARAMETER ($IN1 = -1$, $IN2 = 1$, $JN1 = 0$, $JN2 = 1$).

2. Programme de calcul du premier ordre

Ce programme calcule les douze perturbations du premier ordre $\Delta^1\sigma$ correspondant à un couple de planètes. La programmation découle très directement de la méthode de calcul exposée au paragraphe V 1. Pour chaque planète :

— On calcule d'abord les $4pp'$ substitutions numériques des seconds membres des équations. Cette substitution s'effectue par l'entrée MONHAR de la procédure DEBMHR. Les résultats sont stockés dans le tableau $DXDT$ dimensionné $(2p, 2p', 6)$.

— On effectue l'analyse harmonique des six fonctions $\frac{d\sigma}{dt}$ obtenues (entrée ANHARM de la procédure DEBANH). Les résultats sont stockés dans le tableau A dimensionné $(2p+1, 2p'+1, 4)$.

— On effectue l'intégration (entrée INTEG de la procédure DEBINT). Les résultats sont stockés dans le tableau R dimensionné $(p+1, p'+1, 4)$.

— En sortie (entrée SORTIE de la procédure DEBSOR) on met les résultats sous forme de séries de Fourier par rapport aux arguments $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}'$ et on les range par coefficients décroissants en ne conservant que les termes supérieurs à la précision de sortie. On peut, de plus, imprimer et (ou) envoyer sur disque les résultats.

3. Programme de calcul des dérivées premières

Ce programme calcule les 144 dérivées $\dfrac{\partial}{\partial \sigma^j}\left(\dfrac{d\sigma^i}{dt}\right)$ correspondant à un couple de planètes.

Nous n'avons pas, comme pour le premier ordre, calculé globalement les 72 dérivées de chacune des planètes car le programme aurait présenté l'inconvénient d'une place mémoire très importante. Nous avons préféré organiser la programmation en séparant les dérivées en plusieurs groupes, de la façon suivante : parmi les variables σ^j distinguons les variables métriques (a, e, i, a', e', i') que nous notons η et les variables angulaires $(\lambda, \varpi, \Omega, \lambda', \varpi', \Omega')$ que nous notons θ. Pour chaque planète nous avons calculé successivement les dérivées : $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta'}\left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta'}\left(\dfrac{d\eta}{dt}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta'}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta'}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$.

Chaque groupe de dérivées se calcule à partir d'un même groupe de dérivées de la fonction perturbatrice. Sans entrer dans le détail du programme qui est plus compliqué que celui du calcul du premier ordre on peut dire que les substitutions numériques et les analyses harmoniques sont effectuées sur les dérivées de la fonction perturbatrice elles-mêmes. Les dérivées des équations se calculent ensuite directement à partir de (39). Cette organisation permet de diminuer le nombre d'analyses harmoniques à effectuer (126 au lieu de 144) et, surtout, d'utiliser un nombre restreint de tableaux de manoeuvre ce qui entraîne un gain très important en place mémoire et donc en coût de calcul. A titre indicatif, le programme avec les bornes $p = 32$, $p' = 12$ occupe une place mémoire de 468K sur le NAS 9080 du CIRCE (contre 2500K pour un programme calculant globalement toutes les dérivées).

4. Précision et temps de calcul

Nous avons estimé la précision de nos programmes en comparant entre elles des versions utilisant des valeurs des bornes de l'analyse harmonique p et p' différentes et, également, en effectuant des comparaisons à des résultats obtenus par une autre méthode (résultats issus de développements analytiques). Les tableaux 1 et 2 illustrent ces diverses comparaisons. Le tableau 1 concerne les perturbations du premier ordre de la longitude de Saturne $\Delta\lambda_S$. Il donne l'écart maximum et les écarts correspondant aux deux arguments $2\lambda_J - 5\lambda_S$ et $\lambda_j - \lambda_S$ entre les résultats des deux versions $(p = 24, p' = 16)$ et $(p = 48, p' = 32)$ et entre les résultats de la version $(p = 24, p' = 16)$ et ceux obtenus à partir de développements analytiques. Le tableau 2 concerne la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial \varpi_S}\left(\dfrac{da_S}{dt}\right)$. Il donne l'écart maximun et l'écart pour l'argument $2\lambda_J - 3\lambda_S$, correspondant au plus gros terme de la série entre les deux versions $(p = 24, p' = 12)$ et $(p = 32, p' = 16)$ et entre la version $(p = 24, p' = 12)$ et les résultats obtenus à partir de développements analytiques. Les résultats des comparaisons entre des versions utilisant des bornes d'analyse différentes sont conformes à ce que laissait prévoir la formule (61) : les coefficients des arguments $i\lambda + j\lambda'$ pour lesquels i et j sont petits sont connus avec une très grande précision, les écarts maximums correspondent à des arguments pour lesquels i et j sont élevés. Les résultats issus de développements analytiques provenaient de développements à l'ordre 6 par rapport aux excentricités et inclinaisons. Pour les arguments de *caractéristique* faible les écarts sont petits et tout à fait satisfaisants. Les écarts maximums correspondent à des arguments de *caractéristique* 4 ou 6 pour lesquels la précision des développements analytiques est évidemment limitée. En résumé on peut considérer que, pour le couple Jupiter-Saturne, les programmes de calcul du premier ordre ($p = 24, p' = 16$) et de calcul des dérivées ($p = 24, p' = 12$) donnent des résultats d'une grande précision, nettement meilleure que celle des résultats obtenus à partir de développements analytiques.

Tableau 1. Perturbations du premier ordre de la longitude de Saturne : écarts entre les résultats des programmes utilisant les bornes d'analyse ($p = 24, p' = 16$) et ($p = 48, p' = 32$) ; écarts entre les résultats du programme ($p = 24, p' = 16$) et ceux obtenus à partir de développements analytiques (DA). L'unité est la seconde de degré ($''$).

Amplitude du plus gros terme de la série (argument $2\lambda_J - 5\lambda_S$) : 2614$''$			
	Ecart maximum	Ecart pour $2\lambda_J - 5\lambda_S$	Ecart pour $\lambda_J - \lambda_S$
(24, 16) − (48,32)	7×10^{-7} (argument $31\lambda_J - 34\lambda_S$)	4×10^{-10}	2×10^{-12}
(24, 16) − DA	3×10^{-2} (argument $4\lambda_J - 10\lambda_S$)	2×10^{-3}	3×10^{-6}

Tableau 2. Demi-grand axe de Saturne : dérivée $\dfrac{\partial}{\partial \varpi_S}\left(\dfrac{da_S}{dt}\right)$:
écarts entre les résultats des programmes ($p = 24, p' = 12$) et ($p = 32, p' = 16$) ; écarts entre les résultats du programme ($p = 24, p' = 12$) et ceux obtenus à partir de développements analytiques (DA). L'unité est le radian par milliers d'années ($rd/1000$ ans).

Amplitude du plus gros terme (argument $2\lambda_J - 3\lambda_S$) : 0,6 $rd/1000$ ans		
	Ecart maximum	Ecart pour $2\lambda_J - 3\lambda_S$
(24, 12) − (32,16)	6×10^{-7} (argument $32\lambda_J - 36\lambda_S$)	1×10^{-14}
(24, 12) − DA	8×10^{-4} (argument $8\lambda_J - 12\lambda_S$)	8×10^{-9}

Ces programmes sont, en outre, très rapides : le programme de calcul du premier ordre ($p = 24, p' = 16$) donne les perturbations mutuelles de Jupiter et Saturne en 2^s de temps CPU sur le NAS 9080 (SY1) du CIRCE ; le programme de calcul des dérivées ($p = 24, p' = 12$) donne les 144 dérivées correspondant au couple Jupiter-Saturne en moins de 15^s de temps CPU. Ceci représente un gain de temps d'un facteur compris entre 5 et 10 par rapport au calcul effectué à partir de développements analytiques et pour une précision bien supérieure comme on vient de le voir.

Enfin il faut insister sur la souplesse d'utilisation que permet le choix des paramètres p et p' : pour un couple moins perturbé que le couple Jupiter-Saturne on choisira des bornes moins élevées ce qui entrainera un gain en temps de calcul très important.

BIBLIOGRAPHIE

1. Sur le formulaire de calcul des seconds membres des équations

Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M. : 1975, *Celes. Mech.* **5**, 317
Levallois, J.J., Kovalevsky, J. : 1971, Géodésie Générale, Géodésie Spatiale T4, Eyrolles, Paris

2. Sur le formulaire de calcul des dérivées

Schilli, C. : 1983, Rapport de stage de DEA, Bureau des Longitudes Paris

3. Sur le développement par analyse harmonique d'une fonction de deux variables

Brouwer, D., Clemence, G.M. : 1961, Methods of Celestial Mechanics, p. 113
Simon, J.L., Francou, G. : 1982, *Astron. Astrophys.* **114**, 125

ANNEXE

Listage du programme de calcul des perturbations du premier ordre