NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU BUREAU DES LONGITUDES

*S*013

CALCUL DES DÉRIVEES SECONDES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT POUR UN COUPLE DE PLANÈTES : FORMULAIRE ET PROGRAMMATION

Jean-Louis Simon

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes
UA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
75014 Paris

septembre 1986

Imprimé au CIRCE - Batiment 506 - 91405 ORSAY/CEDEX

TABLE DES MATIÈRES

OBJET

Cette note fait suite à la *Note Scientifique et Technique S005.* Elle donne le formulaire complet du calcul des dérivées secondes des équations de Lagrange ainsi que des indications sur la façon dont nous l'avons programmé.

INTRODUCTION

Considérons un couple de planètes P, P'. Les équations du mouvement des deux planètes ont la forme:

$$\frac{d\sigma^i}{dt} = \mu F(\sigma^j). \tag{1}$$

σ^i et σ^j représentent les éléments des planètes (nous préciserons nos notations au paragraphe **I**) ; μ est un paramètre de l'ordre des masses. Lorsqu'on intègre le système (1) par une méthode d'accroissement ordre par ordre par rapport aux masses, on cherche à représenter la solution sous la forme:

$$\sigma^i = \sigma_0^i + \mu\Delta^1\sigma^i + \mu^2\Delta^2\sigma^i + \mu^3\Delta^3\sigma^i + \ldots \tag{2}$$

σ_0^i est la constante d'intégration de la variable σ^i ; $\Delta^1\sigma^i$, $\Delta^2\sigma^i$ et $\Delta^3\sigma^i$ représentent les perturbations d'ordre 1, 2 et 3 par rapport aux masses, de la variable σ^i. $\Delta^1\sigma^i$, $\Delta^2\sigma^i$ et $\Delta^3\sigma^i$ sont solutions des équations:

$$\frac{d}{dt}\Delta^1\sigma^i = F(\sigma_0^i)\,, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta^2\sigma^i = \sum_j \frac{\partial F}{\partial\sigma^j}\,\Delta^1\sigma^j\,, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta^3\sigma^i = \sum_j \frac{\partial F}{\partial\sigma^j}\,\Delta^2\sigma^j + \frac{1}{2}\sum_{j_1 j_2} \frac{\partial^2 F}{\partial\sigma^{j_1}\partial\sigma^{j_2}}\,\Delta^1\sigma^{j_1}\,\Delta^1\sigma^{j_2}\,. \tag{5}$$

Nous avons présenté dans la Note $S005$ (Simon, 1985) les formulaires et les programmes permettant de calculer les perturbations du premier ordre $\Delta^1\sigma^i$ et les dérivées premières $\partial F/\partial\sigma^j$ des seconds membres des équations pour tous les éléments d'un couple quelconque de planètes, en fonction des masses et des constantes d'intégration σ_0^i.

Cette note concerne les dérivées secondes $\partial^2 F/\partial\sigma^{j_1}\partial\sigma^{j_2}$ des seconds membres des équations (1). Elle contient, après un rappel de nos notations et de la forme de nos équations, le formulaire complet du calcul des dérivées et des indications sur sa programmation et sur la précision des résultats obtenus.

I. NOTATIONS ET FORME DES ÉQUATIONS

1. Notations

D'une manière générale, nos notations sont celles de la note $S005$. Nous les résumons ici.

Soit une planète P de masse m perturbée par une planète P' de masse m'. Nous notons:

σ^i $(1 \le i \le 6)$, les variables représentant le mouvement de P ;

σ'^i $(1 \le i \le 6)$, les variables représentant le mouvement de P' ;

σ^j $(1 \le j \le 12)$, les variables représentant le mouvement de l'ensemble des deux planètes ;

σ_0^i, $\sigma_0'^i$, σ_0^j, les constantes d'intégration des variables σ^i, σ'^i, σ^j, respectivement.

Nos variables σ^i sont le demi-grand axe a, l'excentricité e, le sinus de la demi-inclinaison $\gamma = \sin\frac{i}{2}$, la longitude moyenne λ, la longitude du périhélie ϖ et la longitude du nœud Ω. Nous utiliserons aussi la longitude moyenne de l'époque ε déduite de λ par $d\lambda/dt = n + (d\varepsilon/dt)$ où n est le moyen mouvement de la planète déduit de a par :

(6) $$n^2a^3 = f(1+m) \qquad \text{où } f \text{ est la constante de la gravitation.}$$

Nous considérerons toujours nos variables dans l'ordre suivant :

(7) $$\begin{aligned} &\text{ordre} \quad a, e, \gamma, \lambda, \varpi, \Omega \quad \text{pour les variables } \sigma^i \ (1 \le i \le 6)\,, \\ &\text{ordre} \quad a, e, \gamma, \lambda, \varpi, \Omega, a', e', \gamma', \lambda', \varpi', \Omega' \quad \text{pour les variables } \sigma^j \ (1 \le j \le 12)\,. \end{aligned}$$

Nous notons également :

$\mathbf{W}$ et $\mathbf{W}'$ les vecteurs de position de $P(x,y,z)$ et $P'(x',y',z')$ dans un système héliocentrique ;

$\mathbf{V}$ l'un quelconque des vecteurs $\mathbf{W}$ ou $\mathbf{W}'$;

$$\mathbf{V}_k \text{ le vecteur de composantes } \begin{cases} (\partial x/\partial\sigma^k, \partial y/\partial\sigma^k, \partial z/\partial\sigma^k)\,, & \text{pour } 1 \le k \le 6, \\ (\partial x'/\partial\sigma^k, \partial y'/\partial\sigma^k, \partial z'/\partial\sigma^k)\,, & \text{pour } 7 \le k \le 12\,; \end{cases}$$

$\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k$ les composantes du vecteur $\mathbf{V}_k$;

$\mathbf{V}_{kj}$ le vecteur $\partial\mathbf{V}_k/\partial\sigma^j$; $\qquad \mathbf{V}_{kj_1j_2}$ le vecteur $\partial^2\mathbf{V}_k/\partial\sigma^{j_1}\partial\sigma^{j_2}$.

Posons : $\quad r = |\mathbf{W}|$; $\quad r' = |\mathbf{W}'|$; $\quad \Delta = |\mathbf{PP}'|$. La fonction perturbatrice R est une fonction des variables σ^j qui s'écrit :

(8) $$R = fm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}'}{r'^3}\right),$$

Nous notons :

∂R le vecteur de composantes $(\partial R/\partial x, \partial R/\partial y, \partial R/\partial z)$;

$(\partial^2 R)$ l'opérateur défini par la matrice $\partial^2 R$:

$$\partial^2 R = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \end{pmatrix},$$

lorsque l'opérateur $(\partial^2 R)$ s'applique au vecteur $\mathbf{V}_j$ avec $1 \le j \le 6$;

$$\partial^2 R = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial x'} & \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y'} & \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z'} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y'} & \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial y'} & \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z'} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z'} & \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z'} & \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial z'} \end{pmatrix},$$

lorsque l'opérateur $(\partial^2 R)$ s'applique au vecteur $\mathbf{V}_j$ avec $7 \le j \le 12$;

$(\partial_x^2 R) = \partial(\partial^2 R)/\partial x$, lorsque $(\partial_x^2 R)$ est multiplié par $\overline{x}_j$ avec $1 \le j \le 6$

$(\partial_x^2 R) = \partial(\partial^2 R)/\partial x'$, lorsque $(\partial_x^2 R)$ est multiplié par $\overline{x}_j$ avec $7 \le j \le 12$;

et des notations analogues pour les opérateurs $(\partial_y^2 R)$ et $(\partial_z^2 R)$.

Enfin, soit X une fonction scalaire des variables σ^j, nous notons :

$$X_k = \partial X/\partial\sigma^k, \quad X_{kj} = \partial^2 X/\partial\sigma^k\partial\sigma^j \quad \text{etc.} \tag{9}$$

2. Équations

Les équations de Lagrange ont la forme :

$$\frac{d\sigma^i}{dt} = F^i = \sum_{k=1}^{6} a^{ik} R_k\,, \qquad \text{avec } 1 \le i \le 6, \tag{10}$$

où les coefficients a^{ik} sont des fonctions des variables σ^i (plus précisément des variables métriques a, e, γ).

Les dérivées premières et secondes de ces équations s'écrivent, en utilisant les notations (9), sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^j}\left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right) = F^i_j = \sum_{k=1}^{6} a^{ik}_j R_k + \sum_{k=1}^{6} a^{ik} R_{kj}\,, \quad \text{avec } 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j \le 12\,; \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^{j_1}\partial\sigma^{j_2}}\left(\frac{d\sigma^i}{dt}\right) = F^i_{j_1j_2} = \sum_{k=1}^{6} a^{ik}_{j_1j_2} R_k + \sum_{k=1}^{6} a^{ik}_{j_1} R_{kj_2} + \sum_{k=1}^{6} a^{ik}_{j_2} R_{kj_1} + \sum_{k=1}^{6} a^{ik} R_{kj_1j_2}\,. \tag{12}$$

$$(\text{avec } 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j_1 \le j_2 \le 12).$$

II. FORMULAIRE DE CALCUL DES DÉRIVÉES SECONDES DES SECONDS MEMBRES DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Considérons les seconds membres des équations (12). Les formulaires des paragraphes I et II de la note $S005$ permettent de calculer, respectivement, les quantités a^{ik} et R_k, et les quantités $a^{ik}_{j_1}, a^{ik}_{j_2}, R_{kj_1}$ et R_{kj_2} ; il reste donc à calculer les quantités $a^{ik}_{j_1j_2}$ et $R_{kj_1j_2}$.

1. Calcul des dérivées secondes des coefficients de la matrice de Lagrange $a^{ik}_{j_1j_2}$

De la formule (40) de la note $S005$, on tire :

$$a^{ik}_{j_1j_2} = \left(\frac{1}{na^2}\right)_{j_1j_2} A^{ik} + \left(\frac{1}{na^2}\right)_{j_1} A^{ik}_{j_2} + \left(\frac{1}{na^2}\right)_{j_2} A^{ik}_{j_1} + \left(\frac{1}{na^2}\right) A^{ik}_{j_1j_2} \tag{13}$$

Les coefficients A^{ik} sont donnés par la formule (24) de la note $S005$; les coefficients $A^{ik}_{j_1}, A^{ik}_{j_2}, \left(\frac{1}{na^2}\right)_{j_1}$ et $\left(\frac{1}{na^2}\right)_{j_2}$ sont donnés par les formules du paragraphe II 1 de cette même note.

On a :

$$(14)\qquad na2_{11} = \frac{3}{4na^4}\,, \quad \left(\frac{1}{na^2}\right)_{j_1j_2} = 0 \quad \text{pour } j_1 \text{ ou } j_2 \neq 1\,;$$

$$(15)\qquad A^{ik}_{j_1j_2} = 0 \quad \text{pour } A^{ik}_{j_1j_2} \neq A^{ik}_{22}, \quad A^{ik}_{j_1j_2} \neq A^{ik}_{23}, \quad A^{ik}_{j_1j_2} \neq A^{ik}_{33}\,;$$

$$A^{ik}_{j_1j_2} = \begin{pmatrix} 0 & -L^t_{j_1j_2} \\ L_{j_1j_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } 2 \leq j_1 \leq j_2 \leq 3\,.$$

où L_{22}, L_{23}, L_{33} sont des matrices (3×3) données par :

$$(16)\qquad L_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e}{u_1^3} + \frac{1-2u_1}{u_1 e} + \frac{2u_1(1-u_1)}{e^3} & \frac{\gamma}{2u_1^3}\left(1 + \frac{3e^2}{u_1^2}\right) \\ 0 & -\frac{e}{u_1^3} + \frac{1}{eu_1} + \frac{2u_1}{e^3} & \frac{\gamma}{2u_1^3}\left(1 + \frac{3e^2}{u_1^2}\right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\gamma u_1^3}\left(1 + \frac{3e^2}{u_1^2}\right) \end{pmatrix}\;;$$

$$(17)\qquad L_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{e}{2u_1^3} \\ 0 & 0 & \frac{e}{2u_1^3} \\ 0 & 0 & -\frac{e}{4\gamma^2 u_1^3} \end{pmatrix}\;;$$

$$(18)\qquad L_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2u_1\gamma^3} \end{pmatrix}\,.$$

Dans ces formules, L^t désigne la transposée de L, u_1 et u_2 sont définis par:

$$(19)\qquad u_1 = \sqrt{1-e^2}\,; \quad u_2 = \sqrt{1-\gamma^2}\,.$$

2. Calcul des dérivées troisièmes de la fonction perturbatrice $R_{kj_1j_2}$

On effectue le changement de variables angulaires :

$$(20)\qquad \begin{aligned} \Omega &= \Omega\,, \\ \omega &= \varpi - \Omega\,, \\ M &= \lambda - \varpi\,. \end{aligned}$$

Notons R^* la fonction perturbatrice exprimée en fonction des nouvelles variables. $R^*_{kj_1j_2}$ s'écrit, avec nos notations, :

$$
\begin{aligned}
R_{kj_1j_2} = {} & \mathbf{V}_k \{\overline{x}_{j_2}(\partial_x^2 R) + \overline{y}_{j_2}(\partial_y^2 R) + \overline{z}_{j_2}(\partial_z^2 R)\}\,\mathbf{V}_{j_1} + \mathbf{V}_{kj_2}(\partial^2 R)\,\mathbf{V}_{j_1} \\
& + \mathbf{V}_k(\partial^2 R)\,\mathbf{V}_{j_1j_2} + \mathbf{V}_{kj_1}(\partial^2 R)\,\mathbf{V}_{j_2} + \mathbf{V}_{kj_1j_2}\,\partial R\,.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Les formules du paragraphe II 2a de la note S005 permettent de calculer $\mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}_{j_1}$, $\mathbf{V}_{j_2}$, $\overline{x}_{j_2}$, $\overline{y}_{j_2}$, $\overline{z}_{j_2}$; les formules du paragraphe II 2b permettent de calculer ∂R^*, celles du paragraphe III 2a permettent de calculer $\mathbf{V}_{kj_2}$, $\mathbf{V}_{j_1j_2}$ et $\mathbf{V}_{kj_1}$ et celles du paragraphe III 2b, $\partial^2 R^*$.

Il reste à calculer les vecteurs $\mathbf{V}_{kj_1j_2}$ et les quantités $\partial_x^2 R^*$, $\partial_y^2 R^*$, $\partial_z^2 R^*$.

a) Calcul des vecteurs $\mathbf{V}_{kj_1j_2}$

Rappelons d'abord quelques résultats. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy, Oz. Posons :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_2 &= \cos i\ \mathbf{y}_1 + \sin i\ \mathbf{z}\,, \\
\mathbf{z}_2 &= -\sin i\ \mathbf{y}_1 + \cos i\ \mathbf{z}\,, \\
\mathbf{x}_1 &= \cos\Omega\ \mathbf{x} + \sin\Omega\ \mathbf{y}\,, \\
\mathbf{y}_1 &= -\sin\Omega\ \mathbf{x} + \cos\Omega\ \mathbf{y}\,.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Le vecteur $\mathbf{V}$ est alors donné par :

$$
\mathbf{V} = (\cos E - e)\,\mathbf{A} + u_1 \sin E\,\mathbf{B}\,, \tag{23}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= a(\cos\omega\ \mathbf{x_1} + \sin\omega\ \mathbf{y_2})\,, \\
\mathbf{B} &= a(-\sin\omega\ \mathbf{x_1} + \cos\omega\ \mathbf{y_2})\,.
\end{aligned} \tag{24}
$$

E désigne l'anomalie excentrique que l'on calcule par l'équation de Kepler :

$$
E - e\sin E = M\,. \tag{25}
$$

Les dérivées premières des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont données par les formules (33) de la note S005, les dérivées secondes, par les formules (49) ; les seules dérivées troisièmes des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ différentes de 0 sont :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial a\partial\gamma^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\gamma^2}\,; &&\frac{\partial^3\mathbf{B}}{\partial a\partial\gamma^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial\gamma^2}\,; \\
&\frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial a\partial\gamma\partial\omega} = \frac{1}{a}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\gamma}\,; &&\frac{\partial^3\mathbf{B}}{\partial a\partial\gamma\partial\omega} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\gamma}\,; \\
&\frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial a\partial\gamma\partial\Omega} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\gamma\partial\Omega}\,; &&\frac{\partial^3\mathbf{B}}{\partial a\partial\gamma\partial\Omega} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial\gamma\partial\Omega}\,; \\
&\frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial a\partial\omega^2} = -\frac{\mathbf{A}}{a}\,; &&\frac{\partial^3\mathbf{B}}{\partial a\partial\omega^2} = -\frac{\mathbf{B}}{a}\,; \\
&\frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial a\partial\omega\partial\Omega} = \frac{1}{a}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\Omega}\,; &&\frac{\partial^3\mathbf{B}}{\partial a\partial\omega\partial\Omega} = -\frac{1}{a}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\Omega}\,; \\
&\frac{\partial^3\mathbf{A}}{\partial a\partial\Omega^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\Omega^2}\,; &&\frac{\partial^3\mathbf{B}}{\partial a\partial\Omega^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\Omega^2}\,;
\end{aligned} \tag{26}
$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\gamma^3} = -\frac{6a}{u_2^5}\sin\omega\cos i\,\mathbf{z}_2 - \frac{12a\gamma}{u_2^4}\sin\omega\,\mathbf{y}_2\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\gamma^3} = -\frac{6a}{u_2^5}\cos\omega\cos i\,\mathbf{z}_2 - \frac{12a\gamma}{u_2^4}\cos\omega\,\mathbf{y}_2\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\gamma^2\partial\omega} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial\gamma^2}\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\gamma^2\partial\omega} = -\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial\gamma^2}\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\gamma^2\partial\Omega} = 4a\sin\omega\,\mathbf{x}_1\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\gamma^2\partial\Omega} = 4a\cos\omega\,\mathbf{x}_1\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\gamma\partial\omega^2} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial\gamma}\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\gamma\partial\omega^2} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial\gamma}\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\gamma\partial\omega\partial\Omega} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial\gamma\partial\Omega}\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\gamma\partial\omega\partial\Omega} = -\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial\gamma\partial\Omega}\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\gamma\partial\Omega^2} = \frac{2a}{u_2}\sin\omega\sin i\,\mathbf{y}_1\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\gamma\partial\Omega^2} = \frac{2a}{u_2}\cos\omega\sin i\,\mathbf{y}_1\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\omega^3} = -\mathbf{B}\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\omega^3} = \mathbf{A}\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\omega^2\partial\Omega} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial\Omega}\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\omega^2\partial\Omega} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial\Omega}\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\omega\partial\Omega^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial\Omega^2}\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\omega\partial\Omega^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial\Omega^2}\,;$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial\Omega^3} = a(-\cos\omega\,\mathbf{y}_1 + \sin\omega\cos i\,\mathbf{x}_1)\,; \qquad \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial\Omega^3} = a(\sin\omega\,\mathbf{y}_1 + \cos\omega\cos i\,\mathbf{x}_1)\,.$$

Les dérivées premières de $(\cos E - e)$ et de $u_1 \sin E$ sont données par les formules (34) de la note $S005$, les dérivées secondes, par les formules (50). Posons :

$$w = 1 - e\cos E\,; \tag{27}$$

les seules dérivées troisièmes différentes de 0 sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3(\cos E - e)}{\partial e^3} &= \frac{4\sin^4 E - 12\sin^2 E\cos^2 E}{w^3} + \frac{13e\sin^4 E\cos E}{w^4} - \frac{3e^2\sin^6 E}{w^5}\,;\\
\frac{\partial^3(\cos E - e)}{\partial e^2\partial M} &= \frac{3\sin^3 E - 6\sin E\cos^2 E}{w^3} + \frac{10e\sin^3 E\cos E}{w^4} - \frac{3e^2\sin^5 E}{w^5}\,;\\
\frac{\partial^3(\cos E - e)}{\partial e\partial M^2} &= \frac{2\sin^2 E - 2\cos^2 E}{w^3} + \frac{7e\sin^2 E\cos E}{w^4} - \frac{3e^2\sin^4 E}{w^5}\,;\\
\frac{\partial^3(\cos E - e)}{\partial M^3} &= \frac{\sin E}{w^3} + \frac{4e\sin E\cos E}{w^4} - \frac{3e^2\sin^3 E}{w^5}\,;\\
\frac{\partial^3(u_1\sin E)}{\partial e^3} &= -\frac{3e\sin E}{u_1^5} - \frac{(1+2e^2)\sin E\cos E}{u_1^3 w} - \frac{2\sin E\cos E}{u_1 w} + \frac{e(3\sin^3 E - 6\sin E\cos^2 E)}{u_1 w^2}\\
&\quad + \frac{3e^2\sin^3 E\cos E}{u_1 w^3} + \frac{u_1(6\cos^3 E\sin E - 10\sin^3 E\cos E)}{w^3}\\
&\quad + \frac{eu_1(3\sin^5 E - 10\sin^3 E\cos^2 E)}{w^4} + \frac{3e^2 u_1\sin^5 E\cos E}{w^5}\,;
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{\partial^3(u_1\sin E)}{\partial e^2\partial M} = -\frac{\cos E}{u_1^3 w} + \frac{2e(\sin^2 E-\cos^2 E)}{u_1 w^2} + \frac{2e^2\sin^2 E\cos E}{u_1 w^3} + \frac{u_1(2\cos^3 E - 7\sin^2 E\cos E)}{w^3}$$
$$+\frac{eu_1(3\sin^4 E - 7\sin^2 E\cos^2 E)}{w^4} + \frac{3e^2u_1\sin^4 E\cos E}{w^5};$$
$$\frac{\partial^3(u_1\sin E)}{\partial e\partial M^2} = \frac{e\sin E}{u_1 w^2} + \frac{e^2\sin E\cos E}{u_1 w^3} - \frac{4u_1\sin E\cos E}{w^3} + \frac{eu_1(3\sin^3 E - 4\sin E\cos^2 E)}{w^4}$$
$$+\frac{3e^2u_1\sin^3 E\cos E}{w^5};$$
$$\frac{\partial^3(u_1\sin E)}{\partial M^3} = -\frac{u_1\cos E}{w^3} + \frac{eu_1(3\sin^2 E-\cos^2 E)}{w^4} + \frac{3e^2u_1\sin^2 E\cos E}{w^5}.$$

Les vecteurs $\mathbf{V}_{kj_1j_2}$ différents de 0 se calculent alors facilement, en dérivant la formule (23). (Notons, en particulier que $\mathbf{V}_{kj_1j_2}=0$ pour $7\le j_1$ ou $j_2\le 12$).

b) Calcul des quantités $\partial_x^2R^*$, $\partial_y^2R^*$, $\partial_z^2R^*$.

Notons V et V' les matrices lignes $V=(x\,y\,z)$, $V'=(x'\,y'\,z')$, V^t et V'^t les matrices colonnes transposées de V et V' et I la matrice unité (3×3).

Notons Q_1, Q_2, Q_3, Q'_1, Q'_2, Q'_3 les matrices (3×3) :

$$Q_1=\begin{pmatrix}2(x'-x) & y'-y & z'-z\\ y'-y & 0 & 0\\ z'-z & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad Q_2=\begin{pmatrix}0 & x'-x & 0\\ x'-x & 2(y'-y) & z'-z\\ 0 & z'-z & 0\end{pmatrix}$$

(29)
$$Q_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & x'-x\\ 0 & 0 & y'-y\\ x'-x & y'-y & 2(z'-z)\end{pmatrix}\qquad Q'_1=\begin{pmatrix}2x' & y' & z'\\ y' & 0 & 0\\ z' & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$Q'_2=\begin{pmatrix}0 & x' & 0\\ x' & 2y' & z'\\ 0 & z' & 0\end{pmatrix}\qquad Q'_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & x'\\ 0 & 0 & y'\\ x' & y' & 2z'\end{pmatrix}$$

On a alors,

pour $1\le j_1\le j_2\le 6$:

(30)
$$\partial_x^2R^* = \frac{15fm'}{\Delta^7}(x'-x)(V'-V)(V'^t-V^t) - \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((x'-x)I+Q_1\right),$$
$$\partial_y^2R^* = \frac{15fm'}{\Delta^7}(y'-y)(V'-V)(V'^t-V^t) - \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((y'-y)I+Q_2\right),$$
$$\partial_z^2R^* = \frac{15fm'}{\Delta^7}(z'-z)(V'-V)(V'^t-V^t) - \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((z'-z)I+Q_3\right);$$

pour $1 \leq j_1 \leq 6$ et $7 \leq j_2 \leq 12$:

$$
(31) \qquad
\begin{aligned}
\partial_x^2 R^* &= -\frac{15fm'}{\Delta^7}(x'-x)(V'-V)(V'^t-V^t) + \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((x'-x)I + Q_1\right) , \\
\partial_y^2 R^* &= -\frac{15fm'}{\Delta^7}(y'-y)(V'-V)(V'^t-V^t) + \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((y'-y)I + Q_2\right) , \\
\partial_z^2 R^* &= -\frac{15fm'}{\Delta^7}(z'-z)(V'-V)(V'^t-V^t) + \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((z'-z)I + Q_3\right) ;
\end{aligned}
$$

pour $7 \leq j_1 \leq j_2 \leq 12$:

$$
(32) \qquad
\begin{aligned}
\partial_x^2 R^* = {} & \frac{15fm'}{\Delta^7}(x'-x)(V'-V)(V'^t-V^t) - \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((x'-x)I + Q_1\right) \\
& - \frac{15fm'}{r'^7}x'V'V'^t + \frac{3fm'}{r'^5}(x'I + Q'_1) , \\
\partial_y^2 R^* = {} & \frac{15fm'}{\Delta^7}(y'-y)(V'-V)(V'^t-V^t) - \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((y'-y)I + Q_2\right) \\
& - \frac{15fm'}{r'^7}y'V'V'^t + \frac{3fm'}{r'^5}(y'I + Q'_2) , \\
\partial_z^2 R^* = {} & \frac{15fm'}{\Delta^7}(z'-z)(V'-V)(V'^t-V^t) - \frac{3fm'}{\Delta^5}\left((z'-z)I + Q_3\right) \\
& - \frac{15fm'}{r'^7}z'V'V'^t + \frac{3fm'}{r'^5}(z'I + Q'_3) .
\end{aligned}
$$

c) Retour aux variables de départ

Une fois les dérivées $R^*_{kj_1j_2}$ calculées, on revient aux variables de départ par les formules suivantes. Pour $1 \leq k \leq 3$ on a:

$$
(33) \qquad
\begin{aligned}
& R_{k\,4\,4} = R^*_{k\,4\,4} ; \quad R_{k\,4\,5} = R^*_{k\,4\,5} - R^*_{k\,4\,4} ; \quad R_{k\,4\,6} = R^*_{k\,4\,6} - R^*_{k\,4\,5} ; \\
& R_{k\,5\,5} = R^*_{k\,5\,5} - 2R^*_{k\,4\,5} + R^*_{k\,4\,4} ; \quad R_{k\,5\,6} = R^*_{k\,5\,6} - R^*_{k\,5\,5} - R^*_{k\,4\,6} + R^*_{k\,4\,5} ; \\
& R_{k\,6\,6} = R^*_{k\,6\,6} - 2R^*_{k\,5\,6} + R^*_{k\,5\,5} ; \\
& R_{k\,4\,10} = R^*_{k\,4\,10} ; \quad R_{k\,4\,11} = R^*_{k\,4\,11} - R^*_{k\,4\,10} ; \quad R_{k\,4\,12} = R^*_{k\,4\,12} - R^*_{k\,4\,11} ; \\
& R_{k\,5\,10} = R^*_{k\,5\,10} - R^*_{k\,4\,10} ; \quad R_{k\,5\,11} = R^*_{k\,5\,11} - R^*_{k\,5\,10} - R^*_{k\,4\,11} + R^*_{k\,4\,10} ; \\
& R_{k\,5\,12} = R^*_{k\,5\,12} - R^*_{k\,5\,11} - R^*_{k\,4\,12} + R^*_{k\,4\,11} ; \quad R_{k\,6\,10} = R^*_{k\,6\,10} - R^*_{k\,5\,10} ; \\
& R_{k\,6\,11} = R^*_{k\,6\,11} - R^*_{k\,6\,10} - R^*_{k\,5\,11} + R^*_{k\,5\,10} ; \quad R_{k\,6\,12} = R^*_{k\,6\,12} - R^*_{k\,6\,11} - R^*_{k\,5\,12} + R^*_{k\,5\,11} .
\end{aligned}
$$

Les autres dérivées $R_{kj_1j_2}$ sont données par :

$$
\begin{gathered}
R_{4\,4\,4} = R^*_{4\,4\,4}\,; \quad R_{4\,4\,5} = R^*_{4\,4\,5} - R^*_{4\,4\,4}\,; \quad R_{4\,4\,6} = R^*_{4\,4\,6} - R^*_{4\,4\,5}\,; \\
R_{4\,5\,5} = R^*_{4\,5\,5} - 2R^*_{4\,4\,5} + R^*_{4\,4\,4}\,; \quad R_{4\,5\,6} = R^*_{4\,5\,6} - R^*_{4\,5\,5} - R^*_{4\,4\,6} + R^*_{4\,4\,5}\,; \\
R_{4\,6\,6} = R^*_{4\,6\,6} - 2R^*_{4\,5\,6} + R^*_{4\,5\,5}\,; \quad R_{5\,5\,5} = R^*_{5\,5\,5} - 3R^*_{4\,5\,5} + 3R^*_{4\,4\,5} - R^*_{4\,4\,4}\,; \\
R_{5\,5\,6} = R^*_{5\,5\,6} - R^*_{5\,5\,5} - 2R^*_{4\,5\,6} + 2R^*_{4\,5\,5} + R^*_{4\,4\,6} - R^*_{4\,4\,5}\,; \\
R_{5\,6\,6} = R^*_{5\,6\,6} - 2R^*_{5\,5\,6} + 2R^*_{4\,5\,6} + R^*_{5\,5\,5} - R^*_{4\,6\,6} - R^*_{4\,5\,5}\,; \\
R_{6\,6\,6} = R^*_{6\,6\,6} - 3R^*_{5\,6\,6} + 3R^*_{5\,5\,6} - R^*_{5\,5\,5}\,;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
R_{4\,4\,10} = R^*_{4\,4\,10}\,; \quad R_{4\,4\,11} = R^*_{4\,4\,11} - R^*_{4\,4\,10}\,; \quad R_{4\,4\,12} = R^*_{4\,4\,12} - R^*_{4\,4\,11}\,; \\
R_{4\,5\,10} = R^*_{4\,5\,10} - R^*_{4\,4\,10}\,; \quad R_{4\,5\,11} = R^*_{4\,5\,11} - R^*_{4\,5\,10} - R^*_{4\,4\,11} + R^*_{4\,4\,10}\,; \\
R_{4\,5\,12} = R^*_{4\,5\,12} - R^*_{4\,5\,11} - R^*_{4\,4\,12} + R^*_{4\,4\,11}\,; \quad R_{4\,6\,10} = R^*_{4\,6\,10} - R^*_{4\,5\,10}\,; \\
R_{4\,6\,11} = R^*_{4\,6\,11} - R^*_{4\,6\,10} - R^*_{4\,5\,11} + R^*_{4\,5\,10}\,; \quad R_{4\,6\,12} = R^*_{4\,6\,12} - R^*_{4\,6\,11} - R^*_{4\,5\,12} + R^*_{4\,5\,11}\,; \\
R_{4\,10\,10} = R^*_{4\,10\,10}\,; \quad R_{4\,10\,11} = R^*_{4\,10\,11} - R^*_{4\,10\,10}\,; \quad R_{4\,10\,12} = R^*_{4\,10\,12} - R^*_{4\,10\,11}\,; \\
R_{4\,11\,11} = R^*_{4\,11\,11} - 2R^*_{4\,10\,11} + R^*_{4\,10\,10}\,; \quad R_{4\,11\,12} = R^*_{4\,11\,12} - R^*_{4\,11\,11} - R^*_{4\,10\,12} + R^*_{4\,10\,11}\,; \\
R_{4\,12\,12} = R^*_{4\,12\,12} - 2R^*_{4\,11\,12} + R^*_{4\,11\,11}\,;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
R_{5\,5\,10} = R^*_{5\,5\,10} - 2R^*_{4\,5\,10} + R^*_{4\,4\,10}\,; \\
R_{5\,5\,11} = R^*_{5\,5\,11} - R^*_{5\,5\,10} - 2R^*_{4\,5\,11} + 2R^*_{4\,5\,10} + R^*_{4\,4\,11} - R^*_{4\,4\,10}\,; \\
R_{5\,5\,12} = R^*_{5\,5\,12} - R^*_{5\,5\,11} - 2R^*_{4\,5\,12} + 2R^*_{4\,5\,11} + R^*_{4\,4\,12} - R^*_{4\,4\,11}\,; \\
R_{5\,6\,10} = R^*_{5\,6\,10} - R^*_{5\,5\,10} - R^*_{4\,6\,10} + R^*_{4\,5\,10}\,; \\
R_{5\,6\,11} = R^*_{5\,6\,11} - R^*_{5\,6\,10} - R^*_{5\,5\,11} + R^*_{5\,5\,10} - R^*_{4\,6\,11} + R^*_{4\,6\,10} + R^*_{4\,5\,11} - R^*_{4\,5\,10}\,; \\
R_{5\,6\,12} = R^*_{5\,6\,12} - R^*_{5\,6\,11} - R^*_{5\,5\,12} + R^*_{5\,5\,11} - R^*_{4\,6\,12} + R^*_{4\,6\,11} + R^*_{4\,5\,12} - R^*_{4\,5\,11}\,; \\
R_{5\,10\,10} = R^*_{5\,10\,10} - R^*_{4\,10\,10}\,; \quad R_{5\,10\,11} = R^*_{5\,10\,11} - R^*_{5\,10\,10} - R^*_{4\,10\,11} + R^*_{4\,10\,10}\,; \\
R_{5\,10\,12} = R^*_{5\,10\,12} - R^*_{5\,10\,11} - R^*_{4\,10\,12} + R^*_{4\,10\,11}\,; \\
R_{5\,11\,11} = R^*_{5\,11\,11} - 2R^*_{5\,10\,11} + R^*_{5\,10\,10} - R^*_{4\,11\,11} + 2R^*_{4\,10\,11} - R^*_{4\,10\,10}\,; \\
R_{5\,11\,12} = R^*_{5\,11\,12} - R^*_{5\,11\,11} - R^*_{5\,10\,12} + R^*_{5\,10\,11} - R^*_{4\,11\,12} + R^*_{4\,11\,11} + R^*_{4\,10\,12} - R^*_{4\,10\,11}\,; \\
R_{5\,12\,12} = R^*_{5\,12\,12} - 2R^*_{5\,11\,12} + R^*_{5\,11\,11} - R^*_{4\,12\,12} + 2R^*_{4\,11\,12} - R^*_{4\,11\,11}\,;
\end{gathered} \tag{34}
$$

$$
\begin{gathered}
R_{6\,6\,10} = R^*_{6\,6\,10} - 2R^*_{5\,6\,10} + R^*_{5\,5\,10}\,; \\
R_{6\,6\,11} = R^*_{6\,6\,11} - R^*_{6\,6\,10} - 2R^*_{5\,6\,11} + 2R^*_{5\,6\,10} + R^*_{5\,5\,11} - R^*_{5\,5\,10}\,; \\
R_{6\,6\,12} = R^*_{6\,6\,12} - R^*_{6\,6\,11} - 2R^*_{5\,6\,12} + 2R^*_{5\,6\,11} + R^*_{5\,5\,12} - R^*_{5\,5\,11}\,; \\
R_{6\,10\,10} = R^*_{6\,10\,10} - R^*_{5\,10\,10}\,; \quad R_{6\,10\,11} = R^*_{6\,10\,11} - R^*_{6\,10\,10} - R^*_{5\,10\,11} + R^*_{5\,10\,10}\,; \\
R_{6\,10\,12} = R^*_{6\,10\,12} - R^*_{6\,10\,11} - R^*_{5\,10\,12} + R^*_{5\,10\,11}\,; \\
R_{6\,11\,11} = R^*_{6\,11\,11} - 2R^*_{6\,10\,11} + R^*_{6\,10\,10} - R^*_{5\,11\,11} + 2R^*_{5\,10\,11} - R^*_{5\,10\,10}\,; \\
R_{6\,11\,12} = R^*_{6\,11\,12} - R^*_{6\,11\,11} - R^*_{6\,10\,12} + R^*_{6\,10\,11} - R^*_{5\,11\,12} + R^*_{5\,11\,11} + R^*_{5\,10\,12} - R^*_{5\,10\,11}\,; \\
R_{6\,12\,12} = R^*_{6\,12\,12} - 2R^*_{6\,11\,12} + R^*_{6\,11\,11} - R^*_{5\,12\,12} + 2R^*_{5\,11\,12} - R^*_{5\,11\,11}\,;
\end{gathered}
$$

III. CALCUL PRATIQUE

1. Principe

Nous développons les seconds membres de nos équations par analyse harmonique, de la manière suivante. Notons $\overline{\lambda} = \varepsilon_0 + nt$, $\overline{\lambda'} = \varepsilon'_0 + n't$. Soient p et p' deux entiers fixés, posons $\alpha = \frac{\pi}{p}$, $\alpha' = \frac{\pi}{p'}$ Nous donnons aux variables σ^j autres que λ et λ' les valeurs σ_0^j et aux variables λ et λ' les valeurs $\lambda = \overline{\lambda} = q\alpha\,(q = 0, 1, ...2p-1), \lambda' = \overline{\lambda'} = i\alpha'\,(i = 0, 1, ...2p'-1)$.

Les méthodes de calcul décrites au paragraphe précédent nous permettent de calculer $4pp'$ valeurs numériques des seconds membres de nos équations à partir desquelles on peut développer ces seconds membres sous la forme :

$$F = \sum_{j,k} \left(A_{jk}\cos j\overline{\lambda}\cos k\overline{\lambda'} + B_{jk}\sin j\overline{\lambda}\sin k\overline{\lambda'} + C_{jk}\cos j\overline{\lambda}\sin k\overline{\lambda'} + D_{jk}\sin j\overline{\lambda}\cos k\overline{\lambda'}\right), \tag{35}$$

où $j = 0, 1, 2, ..., p$; $k = 0, 1, 2, ..., p'$.

Finalement, on exprime F sous la forme d'une série de Fourier à deux arguments :

$$F(\overline{\lambda}, \overline{\lambda'}) = \sum_{j,k} \left[\overline{A_{jk}}\cos(j\overline{\lambda} + k\overline{\lambda'}) + \overline{B_{jk}}\sin(j\overline{\lambda} + k\overline{\lambda'}) + \overline{C_{jk}}\cos(j\overline{\lambda} - k\overline{\lambda'}) + \overline{D_{jk}}\sin(j\overline{\lambda} - k\overline{\lambda'})\right], \tag{36}$$

Les formules permettant de calculer les coefficients $A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, D_{jk}, \overline{A_{jk}}, \overline{B_{jk}}, \overline{C_{jk}}, \overline{D_{jk}}$ sont données au paragraphe IV de la note S005.

Au lieu des variables $\overline{\lambda}$ et $\overline{\lambda'}$ on peut très bien prendre comme arguments de l'analyse harmonique des variables déduites des précédentes par un changement de variables simple. Il est particulièrement intéressant d'utiliser les variables :

$$\begin{aligned} \theta &= \overline{\lambda'} - \overline{\lambda} \\ \theta' &= \overline{\lambda'} \end{aligned} \tag{37}$$

Ce choix de variables, qui tient compte du fait que les coefficients de la fonction perturbatrice décroissent rapidement en fonction de la caractéristique de l'argument, minimise les valeurs de p et p' et diminue d'une manière importante le nombre des substitutions dans les seconds membres.

2. Programmation

Le programme de calcul des dérivées secondes calcule les 936 dérivées correspondant à un couple de planètes ; ses caractéristiques générales sont celles indiquées au paragraphe VI 1 de la note S005.

Ce programme ne calcule pas globalement toutes les dérivées de chacune des planètes car la place mémoire nécessaire dépasserait les possibilités de l'ordinateur. Nous avons donc organisé la programmation de la façon suivante : parmi les variables σ^j distinguons les variables métriques (a, e, i, a', e', i') que nous notons η^j et les variables angulaires $(\lambda, \varpi, \Omega, \lambda', \varpi', \Omega')$ que nous notons θ^j. Nous avons séparé les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2}{\partial\sigma^{j_1}\partial\sigma^{j_2}}\left(\dfrac{d\sigma^i}{dt}\right)$ en 16 groupes de dérivées différents. La formule (12) se simplifie lorsque j_1 et j_2 ne sont pas tous les deux compris entre 1 et 6 ou lorsque σ^j correspond aux variables angulaires θ^j. Finalement, en considérant nos variables dans l'ordre (7), on peut écrire ces 16 groupes de dérivées sous la forme :

(38 a)
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\eta^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}_{j_1j_2}R_k+\sum_{k=4}^{6}a^{ik}_{j_1}R_{kj_2}+\sum_{k=4}^{6}a^{ik}_{j_2}R_{kj_1}+\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\theta^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{3}a^{ik}_{j_1}R_{kj_2}+\sum_{k=1}^{3}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 b)
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\theta^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}_{j_1}R_{kj_2}+\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^{j_1}\partial\theta^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{3}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 c)
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^{j_1}\partial\theta^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 d)
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\eta^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{3}a^{ik}_{j_1j_2}R_k+\sum_{k=1}^{3}a^{ik}_{j_1}R_{kj_2}+\sum_{k=1}^{3}a^{ik}_{j_2}R_{kj_1}+\sum_{k=1}^{3}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 e)
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\eta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}_{j_1}R_{kj_2}+\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^{j_1}\partial\eta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{3}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 f)
$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}_{j_1}R_{kj_2}+\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{3}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 g)
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^{j_1}\partial\eta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 h)
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)=\sum_{k=4}^{6}a^{ik}R_{kj_1j_2}$$

(38 i) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\eta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{3} a^{ik}_{j_1} R_{kj_2} + \sum_{k=1}^{3} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 j) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{3} a^{ik}_{j_1} R_{kj_2} + \sum_{k=1}^{3} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 k) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta'^{j_1}\partial\eta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right) = \sum_{k=4}^{6} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 l) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta'^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right) = \sum_{k=4}^{6} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 m) $$\frac{\partial^2}{\partial\theta'^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right) = \sum_{k=4}^{6} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 n) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta'^{j_1}\partial\eta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{3} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 o) $$\frac{\partial^2}{\partial\eta'^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{3} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

(38 p) $$\frac{\partial^2}{\partial\theta'^{j_1}\partial\theta'^{j_2}}\left(\frac{d\theta^i}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{3} a^{ik} R_{kj_1j_2}$$

Chaque groupe de dérivées se calcule à partir d'un même groupe de dérivées de la fonction perturbatrice. Les substitutions numériques et les analyses harmoniques sont effectuées sur les dérivées de la fonction perturbatrice elles-mêmes. Les dérivées se calculent ensuite directement à partir des équations (38). Cette organisation permet de diminuer le nombre d'analyses harmoniques à effectuer et, surtout, d'utiliser un nombre restreint de tableaux de manœuvre ce qui entraîne un gain très important en place mémoire et donc en coût de calcul. A titre indicatif, le programme avec les bornes $p = 32$, $p' = 12$ occupe une place mémoire de 900K.

3. Vérification du calcul des dérivées

Le calcul des dérivées secondes est assez complexe et présente des risques d'erreur. Nous avons donc vérifié la validité de notre formulaire et de nos résultats en recalculant ces dérivées à partir des dérivées premières, par une méthode d'interpolation numérique. Les développements en série de Fourier des seconds membres de (4) sont des fonctions $F(\sigma_0^j)$ des constantes d'intégration σ_0^j $(1 \leq j \leq 12)$. Soient σ_0^k l'une quelconque des constantes σ_0^j et $\Delta\sigma_0^k$ une variation numérique de σ_0^k ; q étant un entier positif, négatif ou nul, posons :

(19) $$\sigma_q^k = \sigma_0^k + q\,\Delta\sigma_0^k\,; \quad F_q = F(\sigma_q^k, \sigma_0^j)\,,$$

où F_q est la fonction F correspondant à la valeur σ^k_q de la variable σ^k et aux valeurs σ^j_0 des variables σ^j autres que σ^k. Les développements F_q s'obtiennent par la méthode du paragraphe **III.1.**

Formons le tableau aux différences centrales :

$$\begin{array}{llllllll}
\sigma^k_3 & F_{-3} & & & & & & \\
 & & \delta^1_{-\frac{5}{2}} & & & & & \\
\sigma^k_2 & F_{-2} & & \delta^2_{-2} & & & & \\
 & & \delta^1_{-\frac{3}{2}} & & \delta^3_{-\frac{3}{2}} & & & \\
\sigma^k_1 & F_{-1} & & \delta^2_{-1} & & \delta^4_{-1} & & \\
 & & \delta^1_{-\frac{1}{2}} & & \delta^3_{-\frac{1}{2}} & & \delta^5_{-\frac{1}{2}} & \\
\sigma^k_0 & F_0 & & \delta^2_0 & & \delta^4_0 & & \delta^6_0 \\
 & & \delta^1_{\frac{1}{2}} & & \delta^3_{\frac{1}{2}} & & \delta^5_{\frac{1}{2}} & \\
\sigma^k_1 & F_1 & & \delta^2_1 & & \delta^4_1 & & \\
 & & \delta^1_{\frac{3}{2}} & & \delta^3_{\frac{3}{2}} & & & \\
\sigma^k_2 & F_2 & & \delta^2_2 & & & & \\
 & & \delta^1_{\frac{5}{2}} & & & & & \\
\sigma^k_3 & F_3 & & & & & &
\end{array}$$

avec :

(40)
$$\begin{aligned} \delta^1_h &= F_{h+\frac{1}{2}} - F_{h-\frac{1}{2}} \, ; \\ \delta^p_h &= \delta^{p-1}_{h+\frac{1}{2}} - \delta^{p-1}_{h-\frac{1}{2}} \, ; \end{aligned}$$

où p est un entier positif et où les δ^p_h ne sont définies que pour les valeurs de h égales à un entier $+\frac{1}{2}$ si p est impair, à un entier si p est pair.

Pour $-3 \leq q \leq 3$, la dérivée $F_k = \partial F / \partial \sigma^k$ se calcule par la formule d'interpolation (Mineur, 1966) :

(41)
$$F_k = \frac{1}{2}(\delta^1_{\frac{1}{2}} + \delta^1_{-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{12}(\delta^3_{\frac{1}{2}} + \delta^3_{-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{60}(\delta^5_{\frac{1}{2}} + \delta^5_{-\frac{1}{2}}) \, .$$

Nous avons calculé nos dérivées par cette méthode, pour le couple Jupiter-Saturne, en prenant $\Delta\sigma^i_0 = 10^{-4}$ pour les variables métriques, 2×10^{-3} pour les variables angulaires. Pour toutes les variables et pour les deux planètes, les différences entre les dérivées ainsi calculées et celles obtenues à partir de notre formulaire portaient, dans le plus mauvais cas, sur le onzième chiffre significatif. Le calcul des dérivées par la méthode d'interpolation est beaucoup plus long que le calcul direct à partir du formulaire mais il est intéressant de remarquer qu'un calcul d'interpolation fait en prenant $-1 \leq q \leq 1$ dans les formules (39) à (41) donne tout de même 5 ou 6 chiffres significatifs, tout en conduisant à des temps de calcul raisonnables.

4. Précision et temps de calcul

Les résultats que nous présentons dans ce paragraphe concernent le couple Jupiter-Saturne. Nous avons utilisé comme arguments de l'analyse harmonique les variables θ et θ' définies par (37).

Nous avons estimé la précision de notre programme en comparant entre elles des versions utilisant des valeurs des bornes de l'analyse harmonique p et p' différentes et, également, en effectuant des comparaisons à des résultats obtenus par une autre méthode (résultats issus de développements analytiques). Les tableaux 1 et 2 illustrent ces diverses comparaisons. Ces tableaux concernent la dérivée $\frac{\partial^2}{\partial e_J \partial a_S}\left(\frac{d\lambda_S}{dt}\right)$ (Saturne perturbée par Jupiter). Le tableau 1 donne, pour un certain nombre de termes de la dérivée représentée, l'argument (en fonction de θ, θ' et en fonction de $\overline{\lambda}_J, \overline{\lambda}_S$) l'amplitude du terme considéré ainsi que les écarts sur les amplitudes entre les deux versions ($p = 32$, $p' = 12$) et ($p = 48$, $p' = 16$). Le premier argument correspond au plus gros terme de la série, le dernier, à celui pour lequel l'écart est maximum. Le tableau 2 donne les écarts entre la version ($p = 32$, $p' = 12$) et les résultats provenant de développements analytiques. Les résultats sont conformes à ce que l'on pouvait prévoir. Dans le tableau 1, les coefficients des arguments $i\overline{\lambda}_J + j\overline{\lambda}_S$ pour lesquels i et j sont petits sont connus avec une très grande précision, les écarts maximums correspondent à des arguments pour lesquels i et j sont élevés. Les écarts avec les résultats issus de développements analytiques sont satisfaisants pour les arguments pour lesquels la fonction perturbatrice a des puissances faibles des excentricités ou du rapport des demi-grands axes $\alpha = a_J/a_S$ en facteur ; les écarts maximums correspondent à des arguments pour lesquels la fonction perturbatrice a des puissances élevées des excentricités ou de α en facteur (tableau 2 : α^{14} en facteur de l'argument $12\,\theta + 2\,\theta'$) et pour lesquels la précision des développements analytiques est limitée. En définitive le programme de calcul des dérivées secondes ($p = 32$, $p' = 12$) donne des résultats d'une grande précision, nettement meilleure que celle obtenue à partir de développements analytiques.

Tableau 1. Calcul des dérivées secondes des équations de Lagrange par analyse harmonique : écarts entre les résultats des programmes utilisant les bornes d'analyse ($p = 32$, $p' = 12$) et ($p = 48$, $p' = 16$) pour la dérivée $\frac{\partial^2}{\partial e_J \partial a_S}\left(\frac{d\lambda_S}{dt}\right)$ (Saturne perturbée par Jupiter). L'unité est l'UA^{-1} par (milliers d'années)^2.

Argument		Amplitude	(32, 12)− (48, 16)
(θ, θ')	$(\overline{\lambda}_J, \overline{\lambda}_S)$	$(UA/1000\,\text{ans})$	
$2\,\theta + \theta'$	$2\,\overline{\lambda}_J - 3\,\overline{\lambda}_S$	6 (amplitude maximale)	7×10^{-13}
$12\,\theta + 2\,\theta'$	$12\,\overline{\lambda}_J - 14\,\overline{\lambda}_S$	0.3	1×10^{-10}
$21\,\theta + 3\,\theta'$	$21\,\overline{\lambda}_J - 24\,\overline{\lambda}_S$	0.005	7×10^{-9}
$28\,\theta - \theta'$	$28\,\overline{\lambda}_J - 27\,\overline{\lambda}_S$	4×10^{-5}	2×10^{-6}
$31\,\theta - 3\,\theta'$	$31\,\overline{\lambda}_J - 28\,\overline{\lambda}_S$	1×10^{-5}	1×10^{-5} (écart maximum)

Tableau 2. Comparaison entre le calcul des dérivées secondes des équations de Lagrange par analyse harmonique ($p = 32$, $p' = 12$) et à partir de développements analytiques (DA) pour la dérivée $\frac{\partial^2}{\partial e_J \partial a_S}\left(\frac{d\lambda_S}{dt}\right)$ (Saturne perturbée par Jupiter). L'unité est l'UA^{-1} par (milliers d'années)^2.

Argument		Amplitude	(32, 12)− DA
(θ, θ')	$(\overline{\lambda}_J, \overline{\lambda}_S)$	$(UA^{-1}/(1000\,\text{ans})^2)$	
$2\,\theta + \theta'$	$2\,\overline{\lambda}_J - 3\,\overline{\lambda}_S$	6 (amplitude maximale)	1×10^{-6}
$6\,\theta$	$6\,\overline{\lambda}_J - 6\,\overline{\lambda}_S$	0.6	2×10^{-4}
$12\,\theta + 2\,\theta'$	$12\,\overline{\lambda}_J - 14\,\overline{\lambda}_S$	0.3	3×10^{-3} (écart maximum)

Par ailleurs ce programme est rapide, il donne le calcul des 936 dérivées du couple Jupiter-Saturne en moins de 2 minutes de temps CPU sur le NAS 9080 (SY1) du CIRCE ce qui représente un gain de temps d'un facteur 5, environ, par rapport au calcul effectué à partir de développements analytiques et pour une précision bien supérieure.

BIBLIOGRAPHIE

Mineur, H. : 1966, Techniques de calcul numérique, Chap. 4, Dunod

Simon, J.L. : 1986, *Note Scientifique et Technique du Bureau des Longitudes S005* 2e édition