

S015

LA PRÉDICTION DES PHÉNOMÈNES DES
SATELLITES GALILÉENS DE JUPITER

W. Thuillot

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes
UA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
75014 Paris

avril 1989

ABSTRACT: *This "Note Scientifique et Technique" gives details concerning the predictions of the phenomena of the Galilean Satellites of Jupiter. Since 1979 two new forms of predictions of these phenomena are published by the Bureau des Longitudes in "Supplements à la Connaissance des Temps", and we describe here the method used to obtain these ephemerides. The first method leads to a polynomial development of these predictions. The second one permits to obtain detailed predictions of these phenomena, including first and last contacts, and umbra and penumbra effects.*

INTRODUCTION

Depuis 1979 le Bureau des Longitudes publie dans des Suppléments à la Connaissance des Temps deux nouveaux types de prédictions des phénomènes des satellites galiléens de Jupiter.

Le premier type de prédictions se ramène en fait à une transformation des prédictions usuelles, qui permet alors de les obtenir sous forme de coefficients d'un développement polynômial. Le but est de disposer d'éphémérides très compactes et bien adaptées à l'utilisation d'une calculatrice, ou d'un micro ordinateur.

Le second type de prédictions est issu d'un nouvel algorithme qui, par l'utilisation d'hypothèses de non ponctualité du Soleil et des satellites, permet d'accéder à différentes phases d'un phénomène: contacts extérieurs et intérieurs, pénombre, ombre pure.

L'objet de cette Note Scientifique et Technique est de décrire les différents algorithmes utilisés pour construire ces éphémérides.

Une première partie montre l'intérêt de ces phénomènes, et donne des généralités sur les observations astrométriques de ces phénomènes, dont la réduction est basée sur des algorithmes analogues à celui décrit dans la partie suivante.

Celle-ci expose la méthode de prédiction des phénomènes dans les hypothèses usuelles de ponctualité du Soleil et des satellites. Ce sont ces prédictions que l'on retrouve dans différents annuaires et éphémérides, tels que l'Annuaire du Bureau des Longitudes, ou l'American Ephemeris. La troisième partie indique quelle méthode utiliser pour transformer ces prédictions et les mettre sous forme de développement polynômial. Enfin la quatrième partie donne l'algorithme utilisé pour calculer les prédictions de phénomènes dans les hypothèses de non ponctualité du Soleil et des satellites.

I. LES OBSERVATIONS ASTROMÉTRIQUES DES PHÉNOMÈNES :

Les satellites galiléens présentent la particularité d'évoluer sur des orbites presque coplanaires et proches de l'équateur de Jupiter. C'est pourquoi, à chaque révolution autour de la planète, on peut observer quatre types de phénomènes: des éclipses et des passages d'ombre sur la planète lorsque les satellites traversent le cône de lumière pointé vers le Soleil et s'appuyant sur Jupiter, et les occultations et passages devant la planète lorsqu'ils traversent le cône de visibilité pointé vers la Terre (Fig. 1).

Ces phénomènes ont été rapidement observés après la découverte des satellites en 1610, si bien que l'on possède un important capital d'observations très utiles pour comprendre les mouvements à longue période de ces satellites. Ce sont essentiellement les observations d'éclipses qui ont été utilisées dans le passé pour faire l'ajustement des constantes des théories des mouvements des satellites galiléens.

Ainsi la théorie de Laplace (1788) a été ajustée sur l'ensemble des éclipses de Delambre (1817), puis plus tard la théorie de Sampson (1921) l'a été sur l'ensemble plus restreint, mais de meilleure qualité, des éclipses de Harvard (Pickering, 1907). Ce dernier ensemble a d'ailleurs été également utilisé plus récemment par Lieske (1978, 1980) pour fournir des éphémérides modernes.

Dernièrement un regain d'intérêt a été montré pour ces observations anciennes, puisqu'elles jouent un rôle déterminant pour la recherche d'effets faibles soupçonnés, influençant le mouvement à longue période des satellites. Ainsi, Arlot *et al.* (1984) ont redécouvert et comparé aux théories modernes un lot important d'observations d'éclipses ayant appartenu à la série de Delambre perdue au début du siècle. Lieske (1986a, 1986b) a constitué un catalogue de plus de 16 000 éclipses comprenant la quasi totalité des observations d'éclipses faites entre 1652 et 1983, et a cherché à déterminer une variation séculaire du moyen mouvement de Io (Lieske, 1987). Fairhead *et al.* (1986, 1987) ont constitué un catalogue des observations d'occultations anciennes et ont montré leur intérêt pour l'étude des mouvements à longue période malgré leur précision plus faible que celle des éclipses.

Tous ces travaux de réduction d'observations de phénomènes ont nécessité l'utilisation d'algorithmes de calcul. Il n'existe pas de différences fondamentales entre ceux destinés à la prédiction et ceux destinés à la réduction: les prédictions usuelles d'éclipses se font pour des hypothèses de ponctualité du Soleil et des satellites, or on montre que les dates d'éclipses ainsi prédites correspondent à la chute d'éclat de moitié du satellite ce qui est une quantité observable. On trouve ces différents algorithmes dans Laplace (1788), Andoyer (1915), Sampson (1909) pour ce qui concerne les algorithmes anciens mal adaptés aux calculs sur ordinateur, et dans Peters (1977), Lieske (1978, 1987) et Thuillot (1983) pour les algorithmes plus modernes. Des différences existent entre ces algorithmes, notamment en ce qui concerne la prise en compte des effets dus à l'aberration. Cette note est également destinée à réviser ce problème. Les écarts qui peuvent apparaître dans les résultats restent toutefois sans conséquence pour des prédictions ou des analyses d'observations anciennes pour lesquelles la précision demandée est faible.

II. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE PRÉDICTION DES PHÉNOMÈNES DANS DES HYPOTHÈSES DE PONCTUALITÉ :

a. Prédiction des phénomènes géométriques :

Dans un premier temps, on peut établir l'algorithme de calcul des phénomènes géométriques, c'est-à-dire ne tenant pas compte des effets dus à la vitesse finie de la lumière. On considère donc les satellites, le Soleil et la Terre réduits à leur centre, dont les mouvements relatifs dans un repère jovien sont donnés par des théories de Mécanique Céleste. Jupiter est représenté par un ellipsoïde sans atmosphère. Dans ces hypothèses, calculer les instants des phénomènes revient à calculer les instants où le satellite concerné est sur une surface conique (Fig. 1). Il s'agit de la surface s'appuyant sur la planète, et pointée vers la Terre pour les occultations et les passages, ou vers le Soleil pour les éclipses et les ombres. Les coordonnées de ce satellite vérifient donc l'équation de la surface, et c'est sur la recherche de vérification de ce critère qu'est basé l'algorithme.

On peut écrire matriciellement l'équation de l'ellipsoïde sous la forme :

$$(1) \quad X^t M X - a^2 = 0$$

où M est la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

a est le rayon équatorial de la planète,

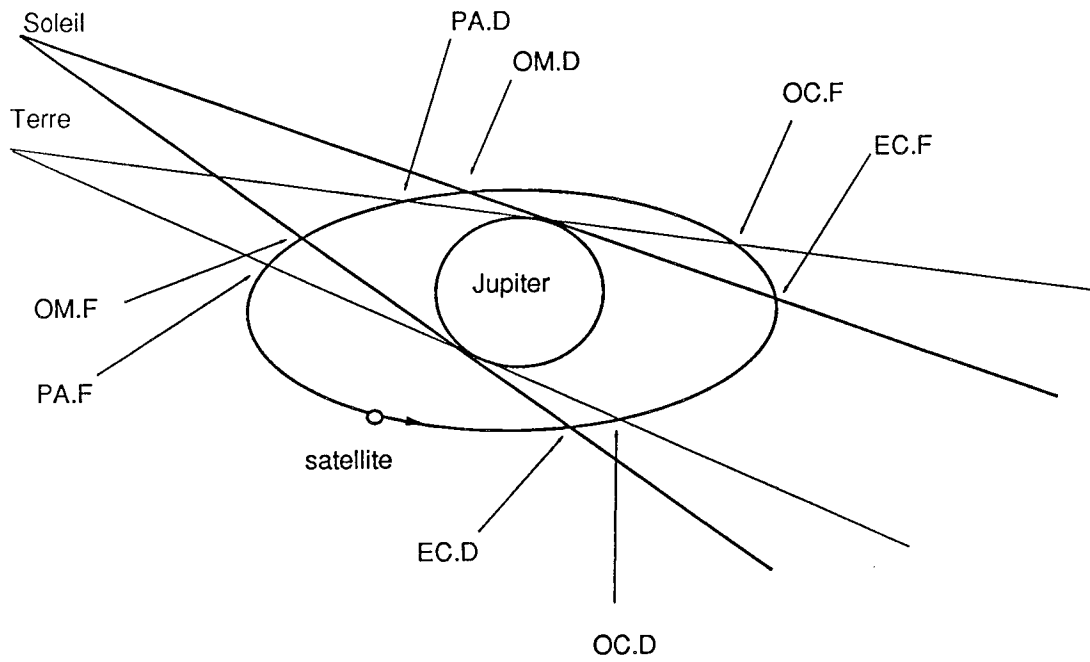


Figure 1 : Définition des débuts (D) et fins (F) des phénomènes observables dans le système galiléen : éclipses (EC), occultations (OC), passages devant la planète (PA), passages d'ombre sur la planète (OM)

X est la colonne des coordonnées d'un point de l'ellipsoïde et X' la transposée, ρ est lié à l'aplatissement géométrique ϵ de Jupiter par la relation :

$$(2) \quad \rho = (1 - \epsilon)^{-2}$$

Soit Q la matrice colonne des coordonnées du point représentant le satellite. En cas de phénomène lié au Soleil, éclipse ou passage d'ombre, on peut montrer grâce à (1) que l'équation suivante est vérifiée :

$$(3) \quad (S^t M Q - a^2)^2 - (S^t M S - a^2) (Q^t M Q - a^2) = 0$$

cette équation a donc la forme :

$$(4) \quad \Delta(S, Q) = 0$$

où S est la colonne des coordonnées du Soleil. On trouve de même une équation analogue pour les phénomènes liés à la Terre, avec T la colonne des coordonnées jovielles de la Terre :

$$(5) \quad \Delta(T, Q) = 0$$

Il se trouve cependant des cas où le cône ne s'appuie pas sur l'ellipsoïde mais sur une courbe plane qui est le terminateur ou le limbe. C'est le cas pour les débuts d'ombre et les fins de passage avant l'opposition, ou pour les fins d'ombre et les débuts de passage après l'opposition. On doit alors prendre en compte l'effet de phase de Jupiter qui retarde ces débuts de phénomènes, ou avance ces fins de phénomènes (Fig. 1). On est alors amené à vérifier d'autres équations (Thuillot, 1983). Par exemple pour les passages d'ombre :

$$(6) \quad (a^2 - S^t M S)(a^2 - T^t M Q)^2 + 2(a^2 - S^t M Q)(a^2 - T^t M Q)(T^t M S - a^2) + (a^2 - Q^t M Q)(T^t M S - a^2)^2 = 0$$

soit :

$$(7) \quad \Delta'(S, Q, T) = 0$$

qui remplace l'équation (4).

On trouverait une équation analogue pour les passages devant la planète affectés par l'effet de phase :

$$(8) \quad \Delta'(T, Q, S) = 0$$

qui remplace l'équation (5).

Le processus de recherche d'un phénomène est un processus dichotomique qui donne la date t pour laquelle les coordonnées des différents corps vérifient une des équations précédentes. On utilise dans cette recherche les propriétés suivantes :

$$(9) \quad \begin{array}{l} \Delta(S, Q) \text{ et } \Delta'(S, Q, T) \text{ sont positifs si } Q \text{ est à l'intérieur du cône de lumière,} \\ \hspace{10em} \text{négatifs si } Q \text{ est à l'extérieur} \\ \Delta(T, Q) \text{ et } \Delta'(T, Q, S) \text{ sont positifs si } Q \text{ est à l'intérieur du cône de visibilité,} \\ \hspace{10em} \text{négatifs si } Q \text{ est à l'extérieur} \end{array}$$

Il faut de plus tenir compte du fait que certains phénomènes peuvent être invisibles bien que calculables. C'est souvent le cas pour les trois premiers satellites à cause du recouvrement des cônes de lumière et d'ombre sur une zone s'étendant au voisinage de l'orbite de Ganymède. Cette particularité fait que certaines éclipses ne sont pas visibles car le satellite est toujours occulté, ou certaines occultations sont invisibles car le satellite est toujours éclipsé.

b. Effets de l'aberration dans le cas des occultations et passages :

L'algorithme précédent doit être corrigé de façon à tenir compte du fait que la vitesse de la lumière est finie, et donc que les cônes à considérer ne sont pas les cônes géométriques définis précédemment. Le problème est très semblable à celui de l'introduction des corrections d'aberration dans le calcul des dates de phénomènes mutuels des satellites galiléens (Arlot, 1986). Il a également été récemment clarifié par Lieske (1987) en ce qui concerne les éclipses.

Considérons tout d'abord le problème de l'occultation d'un objet M_1 par un objet M_2 , observée depuis la Terre, ces trois astres étant en mouvement dans un repère héliocentrique fixe. Un observateur terrestre percevra à l'instant t l'occultation de M_1 par M_2 lorsque les vecteurs TM_1 et TM_2 seront confondus. Prendre en compte l'aberration revient à définir ces vecteurs non plus de façon géométrique par la formule :

$$(10) \quad \mathbf{TM}_i = \mathbf{SM}_i(t) - \mathbf{ST}(t) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

mais maintenant par la formule :

$$(11) \quad \mathbf{TM}_i = \mathbf{SM}_i(t - \tau_i) - \mathbf{ST}(t) \quad \text{avec } \tau_i = TM_i/c \quad \text{pour } i = 1, 2$$

où c est la vitesse de la lumière.

Appliquons ce formulaire aux occultations et passages : les vecteurs définissant le phénomène sont donnés par :

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{TJ} = \mathbf{SJ}(t - \tau) - \mathbf{ST}(t) & \text{avec } \tau = TJ/c \\ \mathbf{TQ} = \mathbf{SQ}(t - \tau') - \mathbf{ST}(t) & \text{avec } \tau' = TQ/c \end{cases}$$

En fait l'algorithme décrit précédemment utilise des coordonnées jovicentriques, la combinaison des relations précédentes conduit à

$$(13) \quad \mathbf{JQ} = \mathbf{TQ} - \mathbf{TJ} = \left[\mathbf{SJ}(t - \tau') - \mathbf{SJ}(t - \tau) \right] + \mathbf{JQ}(t - \tau')$$

En pratique τ et τ' diffèrent de moins de 7 secondes de temps, si bien que la quantité entre crochets devient négligeable. Les points T et Q de l'algorithme précédent (formules 4 à 8) doivent donc être pris à un instant corrigé par les formules (12) et (13). Aucune distinction n'est à faire selon que l'on calcule un passage devant la planète ou une occultation.

c. Effets de l'aberration dans le cas des éclipses et des ombres :

Pour établir le formulaire de correction à utiliser dans le cas des éclipses tout d'abord, il suffit de considérer qu'une éclipse est en fait une occultation du Soleil par Jupiter vu depuis le satellite, et dont le signal (le satellite s'allume ou s'éteint) est ensuite transmis à la Terre. La formule (11) s'applique donc pour un observateur situé sur le satellite et on obtient :

$$(14) \quad \mathbf{QJ} = \mathbf{SJ}(t - \tau'') - \mathbf{SQ}(t) \quad \text{avec} \quad \tau'' = QJ/c$$

$$(15) \quad \mathbf{QS} = \mathbf{QS}(t)$$

En fait, on doit utiliser des coordonnées jovicentriques, et donc combiner ces deux équations, on obtient alors :

$$(16) \quad \mathbf{JS} = \mathbf{JS}(t - \tau'')$$

Notons que (14) s'écrit aussi

$$(17) \quad \mathbf{QJ} = \left[\mathbf{SJ}(t - \tau'') - \mathbf{SJ}(t) \right] + \mathbf{QJ}(t)$$

et que l'expression entre crochet est négligeable. Les points S et Q de l'algorithme précédemment décrit doivent donc maintenant être pris à l'instant t corrigé de la quantité τ'' selon les relations (16) et (17). Cependant l'instant t correspond au phénomène observé depuis le satellite, l'observateur terrestre le verra, lui, à la date :

$$(18) \quad t_0 = t + TQ/c$$

Le trajet TQ parcouru par la lumière est la distance qui sépare le satellite Q à l'instant de l'émission t et la Terre à l'instant de la réception $t + \frac{TQ}{c}$. On a donc :

$$(19) \quad \mathbf{TQ} = \mathbf{SJ}(t) - \mathbf{ST}(t + \tau') + \mathbf{JQ}(t) \quad \text{avec} \quad \tau' = TQ/c$$

Contrairement aux phénomènes liés au cône de visibilité, les éclipses et passages d'ombre nécessitent un formulaire de correction différent. En effet, suivant le même raisonnement que pour les éclipses, on considère qu'un passage d'ombre est en fait une occultation du Soleil par le satellite, vue depuis Jupiter. La formule (11) conduit alors à définir les vecteurs :

$$(20) \quad \mathbf{JQ} = \left[\mathbf{SJ}(t - \tau'') - \mathbf{SJ}(t) \right] + \mathbf{JQ}(t - \tau'')$$

$$(21) \quad \mathbf{JS} = \mathbf{JS}(t)$$

Ce sont des relations qu'il faut comparer aux relations (16) et (17). Ici encore, il faut calculer le temps de transmission du signal à l'observateur terrestre par une formule analogue à (18) :

$$(22) \quad t_0 = t + TJ/c$$

Le trajet de lumière est ici défini par :

$$(23) \quad \mathbf{TJ} = \mathbf{SJ}(t) - \mathbf{ST}(t + \tau) \quad \text{avec} \quad \tau = TJ/c$$

d. Effets de l'aberration pour les phénomènes affectés par la phase :

Certains passages de satellite devant la planète se déroulent du côté du terminateur. Le formulaire décrit précédemment nécessite alors de connaître la position jovicentrique du Soleil qui crée ce terminateur. Pour un observateur terrestre, Jupiter est vu à l'instant t dans la position héliocentrique qu'il occupait à l'instant $t - \tau$, suivant la formule (12). Le terminateur n'est autre que la courbe de contact du cône de lumière et de l'ellipsoïde. C'est donc le formulaire des corrections d'aberration des ombres qui nous indique quelle doit être la position jovicentrique du Soleil à utiliser : la formule (21) indique que le Soleil est pris dans la position qu'il occupe à l'instant de l'observateur situé sur Jupiter. Il faut donc adjoindre aux équations (12) et (13) l'équation suivante :

$$(24) \quad \mathbf{JS} = \mathbf{JS}(t - \tau)$$

De même certains passages d'ombre se déroulent dans la zone invisible depuis la Terre, car situés au-delà du limbe de la planète. Le formulaire précédent (7) nécessite alors de connaître la position jovicentrique de la Terre. Cette position a été définie par (23) de façon à calculer le trajet de lumière. On retrouve d'ailleurs ce résultat à partir de l'équation (12), en imaginant que l'observateur terrestre observe à l'instant $t + TJ/c$, l'ombre pénétrant dans le cône de visibilité, comme le ferait un satellite lors d'un passage devant la planète.

III. LA FORMULATION POLYNÔMIALE DES PRÉDICTIONS DE PHÉNOMÈNES :

Une fois établies les prédictions de phénomènes suivant le formulaire précédent, il est possible de transformer ces prédictions pour les mettre sous forme de développements polynômiaux. Le but de cette transformation est de rendre les éphémérides très compactes, et facilement programmables. Par une méthode de ce type on arrive à représenter tous les phénomènes d'une année en quelques coefficients (de 8 à 14 pour assurer une précision meilleure que la minute). Notons que l'on peut dénombrer annuellement environ 3 000 phénomènes, dont près de 206 phénomènes d'un même type (occultation, passage, éclipse ou ombre) pour Io, et 22 pour Callisto.

Plusieurs représentations polynômiales sont possibles. Les premières éphémérides de ce type qui ont été publiées étaient sous forme de coefficients de polynômes de Tchebychev (Thuillot, 1983), mais plus récemment, ce sont des développements polynômiaux plus simples d'utilisation qui ont été adoptés (Suppléments à la Connaissance des Temps relatifs aux satellites galiléens de Jupiter à partir de 1985 et Éphémérides des Satellites de Jupiter, Saturne et Uranus). C'est ce type de développement qui est décrit dans ce qui suit.

a. Principe :

A chaque révolution de rang N sur un intervalle de temps $\{\theta_0, \theta_1\}$ un satellite est impliqué dans un phénomène d'éclipse, de passage, de passage d'ombre et d'occultation, pourvu que son orbite soit

suffisamment proche de l'écliptique. Pour un phénomène particulier, on peut alors construire une fonction discrète des écarts entre les dates précises des phénomènes t et des dates approchées par une fonction linéaire du temps. Si P est la période synodique du satellite cette fonction discrète peut donc être donnée par :

$$(25) \quad \tau(t) = t - (\theta_0 + NP) \quad \text{avec} \quad N = \text{partie entière de } (t - \theta_0)/P$$

On constate alors que bien que discontinue cette fonction semble être un échantillonnage de fonction polynômiale continue et se trouve de ce fait adaptée à la mise sous forme de coefficients de Tchebychev moyennant l'usage d'interpolations (Thuillot, 1983).

Le principe de ces éphémérides est de fournir les coefficients du développement de cette quantité de façon à permettre ensuite le calcul de toute date de phénomène suivant la méthode décrite dans ce chapitre. Si t_0 est une date quelconque autour de laquelle on cherche un phénomène, on calcule tout d'abord le rang de la révolution synodique à laquelle cette date appartient :

$$(26) \quad N = \text{partie entière de } (t_0 - \theta_0)/P$$

Puis on calcule une première approximation τ_0 de la quantité τ par son expression polynômiale connue par ses coefficients. Cette expression est soit basée sur des coefficients de Tchebychev soit basée sur des coefficients du temps ; le chapitre suivant en donnera le développement. On peut ensuite en déduire la date approchée du phénomène par :

$$(27) \quad t_1 = \theta_0 + NP + \tau_0$$

Une deuxième approximation obtenue en réitérant le calcul précédent avec t_1 à la place de t_0 suffit en général pour assurer une précision meilleure que la minute de temps, avec une représentation polynômiale de degré 7.

b. Le développement polynômial

L'algorithme de mise sous forme de polynôme de Tchebychev est classique (Lanczos, 1952) et a déjà été appliqué à plusieurs éphémérides de position publiées dans la *Connaissance des Temps* (depuis 1979) et des *Suppléments à la Connaissance des Temps* (Vu, 1977). Il conduit à la représentation suivante de la quantité définie précédemment par (25). On a

$$(28) \quad \tau = \sum_{n=0}^m C_n T_n(x)$$

où C_n est un coefficient de Tchebychev d'ordre n , et les quantités $T_n(x)$ sont définies par une relation de récurrence :

$$(29) \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}$$

avec

$$T_0(x) = 1$$

et

$$T_1(x) = x$$

La variable x est liée à la date approchée du phénomène t par la relation :

$$(30) \quad x = 2(t - \theta_0)/P - 1$$

Ces expressions définissent le développement de τ sous forme de polynôme de Tchebychev. On peut cependant transformer celui-ci dans un but de simplification. En effet l'expression développée de τ peut aussi être ordonnée en fonction des puissances de x . Cette expression prend alors la forme d'un polynôme de x de degré m :

$$(31) \quad \tau = \sum_{n=0}^m C'_n x^n$$

où les C'_n sont de nouveaux coefficients issus de cette opération de réarrangement, qui se déduisent donc facilement des précédents coefficients C_n . Les éphémérides basées sur ce nouveau développement nécessitent alors un calcul plus simple que celui basé sur le développement en coefficients de Tchebychev.

IV. LES PHÉNOMÈNES DANS LES HYPOTHÈSES DE NON PONCTUALITÉ :

Dans le chapitre II est donné un algorithme de calcul des dates des phénomènes des satellites galiléens, dans des hypothèses de ponctualité du Soleil, et des satellites. Mais il est possible également de calculer ces phénomènes en tenant compte de la non ponctualité de ces corps. On obtient alors des prédictions plus détaillées, puisqu'il est possible de calculer des dates de contact extérieur ou intérieur avec les cônes de lumière ou de visibilité. Il devient également possible de tenir compte de la pénombre dans le cas des éclipses. Ce type de prédictions donne accès à différentes phases des phénomènes, il peut être un outil intéressant pour l'analyse d'observations anciennes qui étaient généralement des observations de premiers ou de derniers éclats, ou des observations de contacts. Il ne saurait cependant pas être destiné à analyser des observations photométriques modernes qui nécessitent, elles, des modèles photométriques de phénomènes.

On peut trouver dans Tisserand (1896) un formulaire permettant de faire ce type de calcul de façon approchée. Ce chapitre donne un algorithme dichotomique qui permet après quelques itérations d'atteindre la meilleure précision dans ces hypothèses. C'est cette méthode qui est utilisée dans les prédictions détaillées des phénomènes publiées dans le Supplément à la Connaissance des Temps relatif aux satellites Galiléens de Jupiter.

a. Influence de la non ponctualité du Soleil :

Dans les calculs précédents le modèle utilisé prenait une représentation ponctuelle du Soleil. Dans ce qui suit on trouvera une modélisation non ponctuelle du Soleil, appliquée aux phénomènes qui lui sont liés : les éclipses et les passages d'ombre.

Contrairement aux hypothèses du chapitre I, le Soleil est maintenant modélisé par une sphère centrée sur le point S , si bien que le cône de lumière qu'il faut maintenant utiliser est une surface s'appuyant d'une part sur cette sphère et d'autre part sur l'ellipsoïde modélisant Jupiter (Fig. 2). L'algorithme de

prédiction des éclipses et des passages d'ombre sur la planète est basé sur un processus itératif décrit dans ce qui suit :

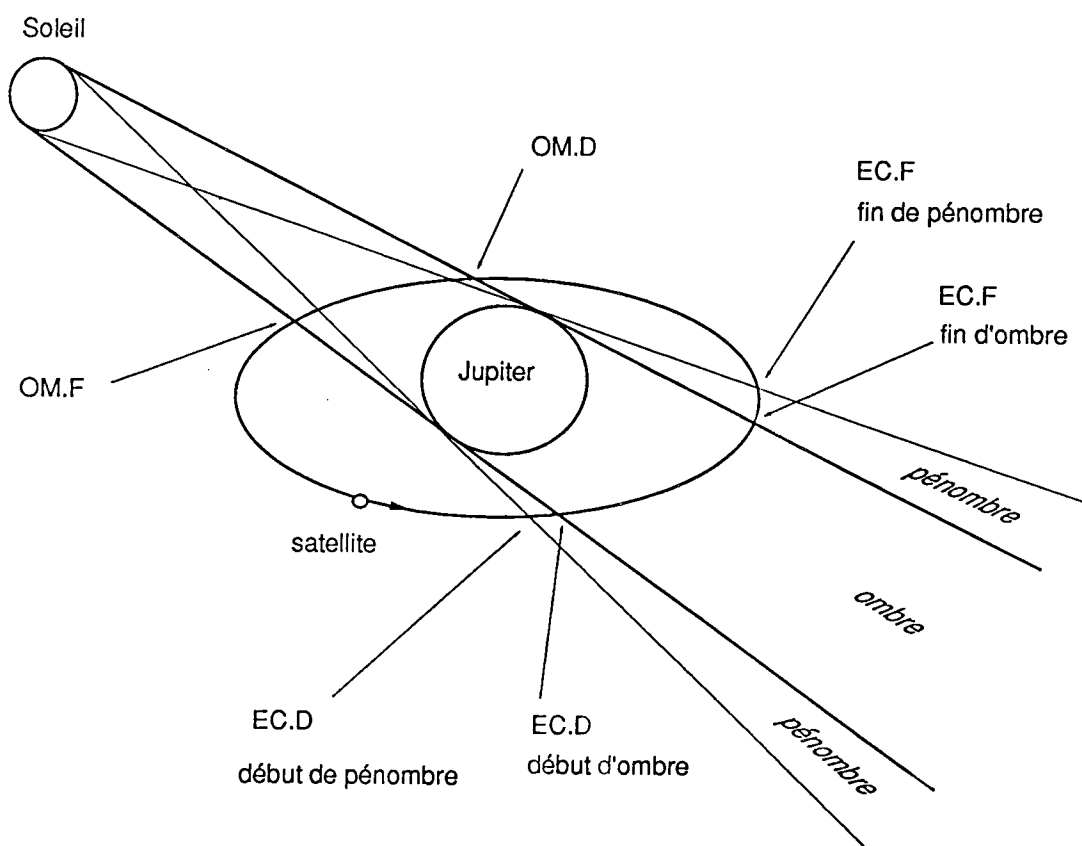


Figure 2 : Définition des différentes phases des phénomènes liés au Soleil modélisé par une sphère.

Soient N_1 et N_0 les vecteurs normaux respectivement à l'ellipsoïde et à la sphère, en des points M_1 et M_0 . La condition à vérifier pour que la droite $M_1 M_0$ soit une droite génératrice de la surface de contact cherchée est la suivante :

$$(32) \quad N_1 = \mu N_0 \quad (\mu \text{ scalaire})$$

Sachant que l'équation matricielle de l'ellipsoïde est donnée par (1), et celle de la sphère de rayon r_0

par :

$$(33) \quad (X - S)(X - S)^t = r_0^2$$

On peut également écrire (32) sous la forme matricielle :

$$(34) \quad MM_1 = \mu(M_0 - S)$$

où M est la matrice déjà définie dans (1), M_1 , M_0 , S désignant les colonnes des coordonnées des points M_1 , M_0 , et S . Notons que pour la surface définissant l'ombre pure μ est positif, alors que pour celle définissant la pénombre il est négatif (Fig. 2).

L'équation paramétrée en λ de la droite génératrice $M_1 M_0$ est :

$$(35) \quad (1 + \lambda) M_1 - \lambda M_0 = Q$$

où comme précédemment Q est la colonne des coordonnées d'un point courant de cette droite, ce sera la colonne des coordonnées du satellite au moment du phénomène. De (34) et (35) on peut tirer les coordonnées du point M_1 :

$$(36) \quad M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\lambda\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\lambda\beta} \end{pmatrix} (Q + \lambda S)$$

avec

$$\alpha = 1 - \frac{1}{\mu}$$

$$\beta = 1 - \frac{\rho}{\mu}$$

Ce point M_1 vérifie également l'équation de l'ellipsoïde (1), ce qui donne une équation du deuxième degré en λ . Il faut alors exprimer que λ est solution double car $M_1 M_0$ est tangente à l'ellipsoïde, on obtient alors la condition :

$$(37) \quad (S^t M' S - a^2 \alpha)^2 - (S^t M' S - a^2 \alpha^2)(Q^t M' Q - a^2) = 0$$

avec M' matrice définie par :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \left(\frac{1+\lambda\alpha}{1+\lambda\beta} \right)^2 \end{pmatrix}$$

La solution double λ correspondante s'écrit :

$$(38) \quad \lambda = - \frac{S^t M' Q - a^2 \alpha}{S^t M' S - a^2 \alpha^2}$$

Cette nouvelle équation (37) est à vérifier par les coordonnées d'un satellite au moment d'une éclipse ou d'un passage d'ombre. Elle est à comparer avec l'équation (2) son analogue du cas ponctuel. Ce qui caractérise cette nouvelle équation est la présence maintenant des coefficients α , β qui dépendent de μ , et du paramètre λ . La recherche de la solution Q est semblable à celle décrite précédemment cependant il est nécessaire de connaître λ et μ qui interviennent à chaque itération.

b. Description du processus itératif du cas sans effet de phase :

Le calcul des phénomènes liés au Soleil, dans le cadre des hypothèses de non ponctualité est basé sur un processus itératif. Cela consiste à déterminer les paramètres μ et λ , définis précédemment, et ceci pour une date donnée, puis, et comme dans le cas ponctuel, à faire évoluer les positions des corps : satellite, Jupiter, Soleil et Terre, jusqu'à ce que l'équation (37) soit vérifiée.

Si on remarque que l'équation (34) peut également grâce à (33) s'écrire :

$$(39) \quad \mu^2 = \frac{1}{r_0^2} (M_1^t M^2 M_1)$$

On peut constater que du fait que la quantité entre parenthèses est proche de α^2 , μ sera proche de $\pm(a/r_0)$. Ceci constituera donc une bonne approximation de départ. D'autre part α et β étant proches, la matrice M' de l'équation (37) sera proche de la matrice M (indépendante de λ , α , β), ce qui sera également l'approximation de départ. La relation (37) donnera alors par dichotomie une solution Q correspondant à ces valeurs initiales. On en déduit une valeur de λ par (38), de M_1 par (36), de μ par (39), d'où une nouvelle équation (37). On réitère le processus qui converge rapidement vers la solution Q , pour la date cherchée du phénomène.

c. Influence de l'effet de phase :

Le formulaire précédent s'applique indifféremment aux phénomènes d'éclipses ou de passages d'ombre sur Jupiter. Cependant un autre formulaire doit être établi pour tenir compte de l'effet de phase affectant les passages d'ombre, lorsque cela est nécessaire. Dans ce cas la surface cônica à considérer s'appuie d'une part sur la sphère représentant le Soleil, et d'autre part non plus sur l'ellipsoïde, mais sur le limbe de Jupiter, dont l'équation est donnée par le système des équations :

$$(40) \quad \begin{cases} T^t M X = a^2 \\ X^t M X = a^2 \end{cases}$$

La condition de tangence de la surface cônica n'est plus donnée par (32). On exprime maintenant que le plan tangent à la sphère et au limbe, contenant la génératrice du cône, appartient à un faisceau de plans dont la charnière est la tangente au limbe au point de contact M_1 . On remplace alors (32) par la condition de coplanarité des normales N_0 et N_1 , et de la normale N au plan du limbe, toutes trois perpendiculaires à la charnière. On a alors à la place de (32) :

$$(41) \quad \mathbf{N}_1 = \mu \mathbf{N}_0 + \nu \mathbf{N} \quad (\mu \text{ et } \nu \text{ scalaires})$$

soit matriciellement et à la place de (34) :

$$(42) \quad M M_1 - \mu M_0 = \nu M T - \mu S$$

On exprime ensuite que la droite génératrice M_1M_0 dont l'équation est donnée par (35) s'appuie sur la sphère représentant le Soleil, et sur le limbe de Jupiter. La condition (42) donne alors :

$$(43) \quad M_1 = K \left(Q + \lambda \left(S - \frac{\nu}{\mu} MT \right) \right)$$

Cette expression substituée dans l'équation du limbe (40), vérifiée par M_1 donne deux équations :

$$(44) \quad \lambda = \frac{a^2 - T^t M K Q}{T^t M K \left(S - \frac{\nu}{\mu} MT \right) - a^2}$$

$$(45) \quad \left[K \left(Q + \lambda \left(S - \frac{\nu}{\mu} MT \right) \right) \right]^t M \left[K \left(Q + \lambda \left(S - \frac{\nu}{\mu} MT \right) \right) \right] - a^2 = 0$$

Ces deux équations sont analogues aux équations (37) et (38) du cas sans effet de phase. Elles permettent, moyennant la connaissance de μ et ν , de calculer la solution Q et la date correspondante.

d. Description du processus itératif du cas avec effet de phase :

De même que précédemment, la recherche de la solution Q se fait par un processus itératif. Cela permet de déterminer μ , ν et λ pour une date donnée, puis, comme dans le cas ponctuel on fait évoluer les différents corps : satellite, Jupiter, Soleil, Terre jusqu'à trouver la solution approchée Q de l'équation (45), et donc la date correspondante cherchée. Considérant que \mathbf{N}_0 est perpendiculaire à $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0$ par définition, on peut tirer de (42) les relations vérifiées par μ et ν :

$$(46) \quad \begin{aligned} \mu &= \frac{(M_0 - S)^t (M M_1 - \nu MT)}{r_0^2} \\ \nu &= \frac{(M_0 - M_1)^t M M_1}{(M_0 - M_1)^t T} \end{aligned}$$

Ces relations remplacent la relation (41) du cas sans effet de phase, et permettent de réajuster les valeurs de μ et ν au cours des itérations. De même que dans le cas précédent, la valeur initiale de ν est prise égale à $\pm a/r_0$.

e. Effet de la non ponctualité des satellites :

Après avoir accédé aux phénomènes liés à l'ombre pure, et à la pénombre, par l'introduction de la non ponctualité du Soleil tel que cela est décrit précédemment, on peut accéder aux différentes phases de ces phénomènes liées à la non ponctualité des satellites : les premiers et derniers contacts (ou contacts extérieurs et intérieurs). Lieske (1981) a donné un formulaire qui permet d'introduire cet effet.

Soit l'équation d'une surface cônica mise en jeu dans la modélisation des phénomènes, par exemple :

$$(49) \quad \Delta(T, Q) = 0$$

les algorithmes précédents permettent de calculer la date t , où le centre du satellite Q vérifie cette équation, date à laquelle on peut observer le "milieu" du phénomène. On peut alors calculer les contacts

du satellite avec la surface, par une approximation linéaire, en calculant la projection de sa vitesse \mathbf{V} sur la normale à la surface, et en déduisant le temps δt mis pour que la pénétration varie d'un rayon de satellite R soit :

$$(50) \quad \delta t = \frac{R \cdot |\text{grad } \Delta|}{\mathbf{V} \cdot \text{grad } \Delta}$$

on peut d'ailleurs tenir compte dans ce formulaire de l'effet de phase sur le satellite lui-même, qui peut atteindre 7 secondes dans le cas de Callisto (Fairhead et al., 1986).

RÉFÉRENCES

- Andoyer, H. : 1915, *Bull. Astron.* **32**, 177
Arlot, J.E., Morando, B., Thuillot, W. : 1984, *Astron. Astrophys.* **136**, 142
Arlot, J.E. : 1986, Note Technique PHEMU 85 n° 33
Connaissance des Temps : (depuis 1979) Nouvelle série, Bureau des Longitudes, Paris
Delambre, J.B.J. : 1817, Tables écliptiques des Satellites de Jupiter, Paris
Fairhead, L., Arlot, J.E., Thuillot, W. : 1986, *Astron. Astrophys.* **169**, 360
Fairhead, L., Arlot, J.E., Jannot, Y., Thuillot, W. : 1987, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **68**, 81
Laplace, P.S. : 1788, Œuvres complètes de Laplace, 309 Gauthier-Villars (Éd. 1895)
Lanczos, C. : 1952, Natl. Bur. Std. U.S., *Applied Maths. Series* **9**
Lieske, J.H. : 1978, *Astron. Astrophys.* **65**, 83
Lieske, J.H. : 1980, *Astron. Astrophys.* **82**, 340
Lieske, J.H. : 1981, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **44**, 209
Lieske, J.H. : 1986a, *Astron. Astrophys.* **154**, 61
Lieske, J.H. : 1986b, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **63**, 143
Lieske, J.H. : 1987, *Astron. Astrophys.* **176**, 146
Peters, C.F. : 1975, *Cel. Mech.* **12**, 99
Pickering, E.C. : 1907, *Harvard Ann.* **52**, Part I, 1
Sampson, R.A. : 1909, *Harvard Ann.* **52**,
Sampson, R.A. : 1921, Mem. Roy. Astron. Soc. **63**, Part II, 153
Supplément à la Connaissance des Temps : (depuis 1979) Satellites galiléens de Jupiter, phénomènes et configurations, Bureau des Longitudes, Paris
Supplément à la Connaissance des Temps : (depuis 1986) Éphémérides des Satellites de Jupiter, Saturne et Uranus, Bureau des Longitudes, Paris. Éditions de Physique
Thuillot, W. : 1983, *Astron. Astrophys.* **127**, 63
Tisserand, F. : 1896, Traité de Mécanique Céleste IV, Gauthier-Villars, Paris
Vu, D.T. : 1977, *Astron. Astrophys. Suppl.* **30**, 361

