NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU BUREAU DES LONGITUDES

S 028

Groupe de travail sur la lecture des

METHODES NOUVELLES DE LA MECANIQUE CELESTE

(H. Poincaré)

Comptes rendus

30 mars 1989

A. Chenciner Séries de Lindstedt.

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes,
UA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
75014 Paris

février 1990

Paul Appell déclarait en 1925, à propos des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* : "Il est probable que, pendant le prochain demi-siècle, ce livre sera la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux".

Aujourd'hui, près de cent ans après la parution des *Méthodes Nouvelles*, cette affirmation est toujours vérifiée. Cependant, l'éclatement de son contenu en différents domaines (Mécanique Céleste, Systèmes Dynamiques, Géométrie Différentielle,...) rend difficile la lecture de ce texte fondamental. Nombreux sont ceux qui l'ont cité, certains en ont étudié différents chapitres, mais rare sont ceux qui connaissent l'intégralité de ses trois volumes.

C'est pourquoi nous avons entrepris, à travers ce groupe de travail qui rassemble mathématiciens et astronomes, une lecture collective des *Méthodes Nouvelles*.

J. Laskar, A. Chenciner.

27.9.91

Groupe de travail sur la lecture des "Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.
Corrections à l'exposé "Séries de Lindstedt".

page 10, ligne 9 supprimer (y) dans la formule.

page 12, ligne 6 mettre un signe $-$ après le signe $=$

page 17, ligne 14 remplacer la phrase "Nous verrons dans le paragraphe 8 $\cdots$" par la page 17bis.

page 20, entre les lignes 23 et 24 Insérer comme Remarque 3 le contenu de la page 20 bis.

page 22, ligne 21 dans la parenthèse, après *appendices*, ajouter : *ainsi que les pages 43 bis et 51 bis.*

page 32, ligne 25 après *séries*, ajouter (*) et mettre en bas de page : (*) voir cependant L.H. Eliasson, Absolutely convergent series expansions for quasi-periodic motions, Reports of the department of Mathematics of the University of Stockholm, 1988.

pages 36 à 38 Remplacer par les nouvelles pages 36 à 38.

page 40, ligne 20 de l'Avertissement Ajouter le contenu de la page 40 bis

page 43 après la figure 1.3, insérer la page 43bis.

page 49, ligne -8 après *pas trop proches de 1*, insérer :
, et que leurs excentricités sont suffisamment faibles

page 50, ligne -3 après *c'est-à-dire*, insérer :
en particulier

page 51 de la ligne 12 après R^{4n}, à la ligne 17 jusqu'à "suffisamment petit", remplacer par la page 51bis.

page 51, ligne -3 après *sur*, insérer :
(une partie d')

page 52, ligne 1 après $(n = 2)$, insérer :
et supposons, comme nous l'avons dit, que l'espace des phases réduit est K^4 toute entière

page 58 Faire suivre 58 bis.

page 67, ligne -12 aprè *dans* K^4, insérer :
(d'un voisinage)

page 68 faire suivre la page 68bis.

Insérer après la figure 1.3, page 43.

Ce qui précède ne vaut bien entendu* que si ϵ est assez petit, c'est-à-dire si le moment cinétique est fixé suffisamment près de son maximum (mouvements circulaires directs) pour que la sphère ainsi définie soit toute entière contenue dans le domaine de définition des coordonnées séculaires :

$$|u_i|^2 = 2(L_i - G_i) = 2L_i(1 - \sqrt{1 - e^2}) \leq 2L_i = 2\Lambda_i \,, \; i = 1, 2 \,.$$

Si une telle hypothèse est réaliste dans le cas du système Soleil, Jupiter, Saturne ($\Lambda_J/\Lambda_S = 2.465$), elle ne l'est plus dès que l'un des Λ_i est très petit, en particulier dès que l'une des masses planétaires est sensiblement plus petite que l'autre, disons infinitésimale (voir l'Appendice 3) : le moment cinétique ne dépend alors pratiquement pas du mouvement de la planète de petite masse, et le fixer à une valeur non infinitésimalement proche du maximum ne contraint pas du tout ce mouvement qui peut a priori subir des collisions avec le soleil ou devenir rétrograde. L'espace des phases réduit, ou plus exactement la partie de celui-ci qui est décrite par les coordonnées de Poincaré, n'est plus alors $P_1(C)$ tout entier mais un disque ouvert de dimension deux contenu dans $P_1(C)$, obtenu comme quotient par l'application de Hopf d'une sous-variété de S^3 difféomorphe au produit $D^2 \times S^1$ d'un disque ouvert par un cercle. Un point singulier peut en particulier disparaitre (figure 1.3bis pour $m_1 \ll m_2$).

le rapport des masses $\sim 3,25$

cas étudié par Laplace

I, ce qu'aurait bien compris Leverrier.

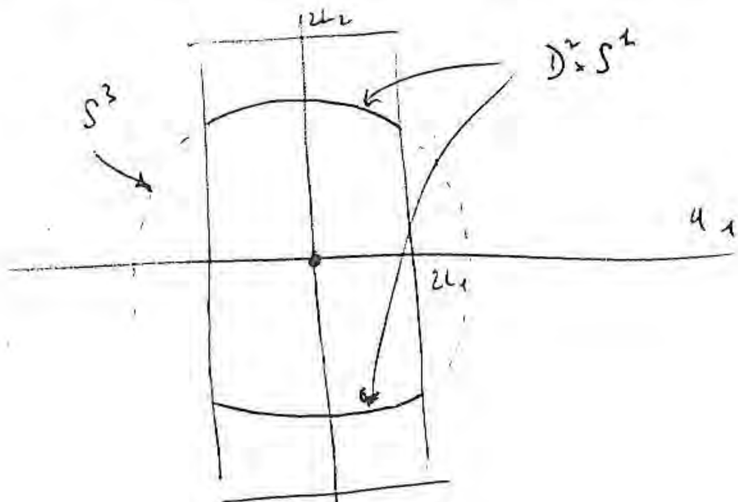

Figure 1.3bis

* Merci à Alain Albouy de me l'avoir rappelé!

Lorsque le rayon ϵ de cette sphère est suffisamment petit, celle-ci est toute entière contenue dans le domaine de définition des coordonnées de Poincaré (comparer à ce que nous avons dit dans l'Appendice 1) et les excentricités et les inclinaisons des mouvements séculaires considérés restent indéfiniment bornées (lire encore une fois l'Avertissement des appendices : le changement de coordonnées formel ne change rien à cette affirmation). Dans le cas contraire, qui se produit dès que ϵ n'est pas infinitésimal si certains Λ_i le sont, seul un morceau de la sphère difféomorphe au produit $D^{2n} \times S^{2n-1}$ d'un disque ouvert par une sphère est contenu dans le domaine qui nous intéresse; autrement dit, seules les excentricités et inclinaisons des planètes correspondant à des Λ_i assez grands sont bornées a priori par la fixation de la longueur du moment cinétique. Rappelons cependant que, dans tous les cas, la deuxième partie du *Théorème de Laplace* affirme que, dans l'approximation linéaire du système séculaire, les excentricités et les inclinaisons restent indéfiniment petites si elles le sont initialement (exercice : il faut non seulement fixer la longueur du moment cinétique et l'énergie mais intégrer le système linéaire et mettre en évidence ses tores invariants – voir Poincaré, *Leçons*, tome premier, chapitre VIII, paragraphe 152).(*)

Dans la suite de l'appendice nous nous plaçons dans le premier cas (i.e. nous supposons que ϵ est assez petit) :

(*) A partir de 3 planètes, le théorème de Laplace peut ê[tre] mis en défaut par la présence de résonances séculaires. Poincaré rappelle à ce propos que, suivant Le Verrier, une petite planète située entre le Soleil et Jupiter pourrait, sous l'ac[tion] conjuguée de Jupiter et Saturne, acquérir de grandes inclinaisons

(! résonance fréquence nœud astéroïde et fréquence nœud com[mune] Jupiter-Saturne)

[prov]ient de ce que pour 1+2 en petit paramètre séculaire, ne dépend que ~~[illegible]~~ des masses ~~[illegible]~~ globalement car le [illegible] alors que pour $1+n \geq 3$, ~~[illegible]~~ elle est la som[me] de différents poids 1+2 ⟹ les rapports interviennent des [illegible]

[illegible]

Remarque. Lorsque m_1 est petite, cela a un sens de prolonger le système séculaire aux régions de l'espace des phases où le mouvement de la première planète est très excentrique (et subit éventuellement des collisions – que l'on peut régulariser – avec le soleil) ou très incliné. Les coordonnées héliocentriques canoniques ne sont plus adaptées à de telles situations, la décomposition $H = H_0 + H_1$ du Hamiltonien devenant de la forme $\infty + \infty$. L'emploi des *coordonnées de Jacobi* élimine ce problème et leur emploi s'impose donc.

Séries de Lindstedt

par Alain Chenciner
Université Paris VII

Le chapitre IX, intitulé "Méthodes de MM. Newcomb et Lindstedt", inaugure la partie "Méthodes nouvelles" de l'ouvrage : alors que dans les "anciennes" méthodes de perturbation les mouvements étaient développés en séries contenant des termes séculaires (i.e. des termes pouvant croitre indéfiniment avec le temps), on cherche ici des solutions formelles dont la dépendance en temps soit quasi-periodique. Pour peu qu'elles convergent (et pour certaines la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser nous dit que c'est le cas !) de telles solutions fournissent des mouvements dans lesquels les corps restent éternellement (aussi bien dans le futur que dans le passé) à distance finie les uns des autres sans qu'aucune collision ne se produise jamais. Plus précisément, les mouvements en question restent éternellement proches de ceux qu'on obtient en considérant l'approximation de Lagrange (première moyennisation, que Poincaré étudie dans le chapitre X) du problème des $1+n$ corps. Deux "dégénérescences" compliquent la situation : d'une part le fait que la précession des périhélies et des nœuds s'annule avec la perturbation, c'est-à-dire pour un système de n problèmes de deux corps non couplés (approximation d'ordre 0), d'autre part la disparition de ces mêmes précessions dans l'approximation d'ordre 1 (celle de Lagrange) lorsqu'excentricités et inclinaisons s'annulent. Dans la terminologie d'Arnold, la première est une "dégénérescence propre", la deuxième une "dégéneresceance limite". Poincaré les étudie respectivement dans les chapitres XI et XII. Nous terminerons par l'étude du chapitre XIII, consacré à la divergence des séries : sans y croire vraiment, Poincaré est tout à fait conscient de la possibilité de la convergence de certaines séries de Lindstedt; c'est le fameux paragraphe 149, que nous éclairons à la lumière du théorème d'Arnold sur la stabilité du Système Solaire.

Table

1) Les différents types de séries de Lindstedt;
2) Des anciennes méthodes aux modernes et retour;
3) Un tore ou un feuilletage de tores ? (ou les ambiguïtés de Poincaré);
4) Existence des séries de Lindstedt dans le cas non dégénéré;
5) Dégénérescence propre;
6) Dégénérescence limite;
7) Problèmes de convergence;
8) Stabilité du système solaire ?

suivi de quatre appendices.

Bibliographie

Séries de Lindstedt.

[1] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume II, chapitres IX à XIII.

[2] J. Moser, *Stability theory in celestial mechanics* : article dans le recueil *The stability of the solar system and of small stellar systems*, p. 1-9, Kozai éditeur, I.A.U. (1974).

[3] V.I. Arnold, Neischtadt, Kozlov, *Encyclopædia of mathematical sciences, Dynamical systems*, volume III.

K.A.M.

[4] V.I. Arnold, *Small denominators III. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics.* Russian Math Surveys 18 (6) p.85-193 (1963);

[5] J. Moser, *Convergent series expansions for quasi-periodic motion.* Mat. Annalen 169 p. 136-176 (1967)

[6] J. Pöschel, *Integrability of Hamiltonians on Cantor sets.* Communications in Pure and Applied Math. XXXV, p. 653-695 (1982).

[7] H. Rüssmann, *Kleine Nenner II.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. p. 1-10 (1972).

[8] E. Zehnder, *An implicit function theorem for small divisors problems.* Bull. A.M.S. 80 (1) p.174-179 (1974)

On trouvera une bibliographie assez complète sur K.A.M. dans

[9] J.B. Bost, *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel,...).* Séminaire Bourbaki 639 (Février 1985).

Tores invariants de dimension non maximale

[10] B. Lieberman, *Existence of quasi-periodic solutions to the three-body problem.* Celestial mechanics. 3, p. 408-426 (1971)

[11] J. Moser, *On the theory of quasi-periodic motions.* SIAM review 8 (2) p.145-172 (1966);

[12] J. Moser, *Convergent series expansions for quasi-periodic motions.* Math. Annalen 169, p. 136-176 (1967);

[13] W.H. Jefferys, J. Moser, *Quasi-periodic solutions for the three-body problem.* Astronomical Journal 71 (7) p. 568-578 (1966);

[14] J. Moser, *Quasi-periodic solutions in the three-body problem.* Journal astrononomique 3, p. 1-9 (1968);

[15] J. Pöschel, *On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems.* Bonn (preprint) Avril 1988.

The method of representing the motion of the planets by a series of periodic terms is somewhat analogous to the epicycloid theory of Ptolemy, for each term alone is equivalent to the adding of a small circular motion to that previously existing. This theory is more complex than that of Ptolemy in that it adds epicycloid upon epicycloid without limit; it is simpler than that of Ptolemy in that it flows from one simple principle, the law of gravitation.

Moulton, *An introduction to Celestial Mechanics*, second edition, chapitre X.

Notations. D désigne un ouvert de R^n, et $T^n = R^n/(2\pi Z^n) = (R/2\pi Z)^n$ le tore de dimension n. On note $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ le point générique de D, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ celui de R^n ou son image dans T^n.

Soit $F : D \times T^n \to R$ un hamiltonien que, comme Poincaré, nous supposerons analytique. $F(x, y)$ désignera aussi bien une fonction sur $D \times R^n$ 2π-périodique en chacun des y_i, qu'une fonction sur $D \times T^n$.

Le *Problème général de la Dynamique* selon Poincaré est l'étude d'une famille $F(x, y, \mu)$ de tels hamiltoniens dépendant analytiquement d'un petit paramètre μ et devenant intégrable lorsque μ s'annule :

$$F(x, y, \mu) = F_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i F_i(x, y).$$

Suivant les cas, le petit paramètre est une masse, une excentricité, une inclinaison, l'inverse d'une distance $\cdots$ quant au hamiltonien intégrable $F_0(x)$, c'est en général celui d'une collection de problèmes de Kepler non couplés.

1) Les différents types de séries de Lindstedt

Suivant [2], on introduit dans ce paragraphe trois types de *séries de Lindstedt* : séries à fréquences variables, séries à fréquences fixes, séries à énergie et rapport des fréquences fixes. Tout ceci est implicite dans Poincaré qui choisit cependant, comme Lindstedt, les séries à fréquences variables. Ce sont en effet ces dernières qui s'opposent le plus naturellement aux séries à fréquences fixes que fournissent les anciennes méthodes. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant (voir également la dernière remarque du paragraphe 4).

Pour le moment, nous nous placerons dans la situation la plus simple, celle où F s'écrit

$$F(x, y, \mu) = F_0(x) + \mu F_1(x).$$

En particulier, quel que soit μ, F est complètement intégrable et (x, y) est un système de coordonnées *action-angle* pour F.

Les équations de Hamilton que, contrairement à Poincaré, nous écrirons

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}(x, y, \mu), \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y, \mu), \qquad (H_\mu)$$

ont évidemment pour solutions les fonctions quasi-périodiques

$$x_i = \bar{x}_i, \quad y_i = \bar{y}_i + \omega_i(\bar{x}, \mu)t, \quad i = 1, \cdots, n,$$

où on a noté $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ et où les $\omega_i(x, \mu)$ sont les dérivées partielles

$$\omega_i(x, \mu) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x).$$

On notera souvent sans indices i les formules ci-dessus en introduisant le *vecteur de fréquences*

$$\omega(x, \mu) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \omega^0(x) + \mu\omega^1(x).$$

Si les *conditions initiales* $(\bar{x}, \bar{y}) = (x^0, y^0)$ sont fixées indépendamment de μ, on obtient une famille de solutions quasi-périodiques de la famille d'équations (H_μ), dont les fréquences $n(\mu) = \omega(x^0, \mu)$ dépendent en général de μ. C'est l'exemple le plus trivial de série de Lindstedt.

Mais, plutôt que les conditions initiales, on peut chercher à rendre indépendantes du paramètre μ les fréquences (ce sera indispensable dans l'optique des théorèmes K.A.M.). Il suffit pour cela de choisir des données initiales $\big(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu)\big)$ qui satisfassent l'équation

$$\omega\big(\bar{x}(\mu), \mu\big) = \omega\big(x^0, 0\big) = \omega^0(x^0) = n^0, \quad \bar{x}(0) = x^0.$$

Le théorème des fonctions implicites dit que c'est possible pour μ assez petit dès que la matrice

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x^0, 0) = \frac{\partial\omega^0}{\partial x}(x^0) = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}(x^0)$$

est inversible, c'est-à-dire si le hamiltonien F_0 est *isochroniquement non dégénéré* au point x^0.

Enfin, on peut désirer que l'*énergie* des solutions soit indépendante de μ. On ne peut plus alors fixer les fréquences, mais il est en général possible de les fixer à homothétie près; il suffit en effet de choisir des données initiales vérifiant

$$\begin{cases} \omega\big(\bar{x}(\mu), \mu\big) & = \lambda(\mu) n^0, \\ F\big(\bar{x}(\mu), \mu)\big) & = \text{constante}. \end{cases}$$

C'est possible dès que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}(x^0) & \frac{\partial F_0}{\partial x}(x^0) \\ {}^{tr}\frac{\partial F_0}{\partial x}(x^0) & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible, c'est-à-dire dès qu'au point x^0 le hamiltonien F_0 est *iso-énergétiquement non dégénéré*.

2) Des anciennes méthodes aux modernes et retour.

Dans ce paragraphe encore nous considérons un hamiltonien $F(x,y,\mu)$ complètement intégrable mais nous ne supposons plus que (x,y) soient des coordonnées action-angle pour F. Nous supposons au contraire qu'elles proviennent de coordonnées action-angle (χ, w) par le changement de coordonnées symplectique*

$$\begin{cases} x &= \chi + \mu \cos w\,, \\ y &= w\,. \end{cases}$$

On supposera que, dans les coordonnées (χ, w), F devient

$$C(\chi, w) = C_0(\chi) + \mu C_1(\chi)\,, (\text{avec obligatoirement } C_0 = F_0)\,,$$

dont les solutions, quasi-périodiques, sont de la forme

$$\chi = \bar{\chi}\,, \quad w = \bar{w} + \varpi(\bar{\chi}, \mu)t = \bar{w} + \varpi^0(\bar{\chi})t + \mu\varpi^1(\bar{\chi})t\,.$$

On obtient ainsi les solutions du système hamiltonien (H_μ) associé à F sous la forme de séries de Lindstedt

- à fréquences variables $\varpi(x^0, \mu) = n^0 + \mu n^1$:

$$\begin{cases} x = x^0 + \mu\cos(y^0 + n^0 t + \mu n^1 t)\,, \\ y = y^0 + n^0 t + \mu n^1 t\,. \end{cases}$$

- à fréquences fixes $n^0 = \varpi(x^0, 0)$:

$$\begin{cases} x = x^0 + \mu(\alpha_1 + \cos(y^0 + n^0 t)) + \mu^2\alpha_2 + \cdots\,, \\ y = y^0 + n^0 t\,. \end{cases}$$

- à énergie et rapport des fréquences fixes :

$$\begin{cases} x = x^0 + \mu[\alpha_1 + \cos(y^0 + \lambda(\mu)n^0 t)] + \mu^2\alpha_2 + \cdots\,, \\ y = y^0 + \lambda(\mu)n^0 t\,. \end{cases}$$

On a utilisé les étranges notations

$$\bar{\chi}(\mu) = x^0 + \mu\alpha_1 + \mu^2\alpha_2 + \cdots\,, \quad \bar{w}(\mu) = y^0$$

* Le caractère symplectique peut être vérifié directement; on peut également remarquer que ce changement de coordonnées est engendré par la fonction génératrice $S(\chi, y) = \chi\cdot y + \mu\sum \sin y_i$.

pour les conditions initiales, afin de rester aussi proches que possible des notations de Poincaré.

Développons maintenant ces séries, qui sont toutes de la forme

$$\begin{cases} x = \bar{\chi}(\mu) + \mu \cos(y^0 + \varpi^0(\bar{\chi}(\mu))t + \mu\varpi^1(\bar{\chi}(\mu))t), \\ y = y^0 + \varpi^0(\bar{\chi}(\mu))t + \mu\varpi^1(\bar{\chi}(\mu))t, \end{cases}$$

en séries de puissances de μ. On obtient des "séries à l'ancienne"

$$\begin{cases} x & = x^0 + \mu(\alpha_1 + \cos(y^0 + n^0 t)) \\ & \quad +\mu^2 \left[\alpha_1 - \left(\frac{\partial\varpi^0}{\partial x}(x^0)\cdot\alpha_1 + n^1\right) t \sin(y^0 + n^0 t)\right] + O(\mu^3), \\ y & = y^0 + n^0 t + \mu\left(\frac{\partial\varpi^0}{\partial x}(x^0)\cdot\alpha_1 + n^1\right) t + O(\mu^2), \end{cases}$$

contenant des *termes séculaires*, et développées en les fréquences fixes $n^0 = \varpi^0(x^0)$. Nous avons vu dans l'exposé de J. Laskar la façon dont Lindstedt avait originellement cherché à supprimer ces termes séculaires en rendant variables les fréquences tout en laissant fixes les données initiales, et il pourrait sembler que c'est bien le passage des développements en fréquences fixes aux développements en fréquences variables qui fait la différence entre méthodes anciennes et méthodes nouvelles. Cependant, ce qui précède nous montre clairement que le même but, supprimer les termes séculaires, peut être atteint a priori d'une infinité de manières, et en particulier en conservant des développements à fréquences fixes : il suffit de faire dépendre convenablement du paramètre μ les données initiales. A titre d'exemple, la première étape doit voir l'élimination du terme

$$\frac{\partial\varpi^0}{\partial x}(x^0)\cdot\alpha_1 + n^1,$$

qui n'est autre que le terme d'ordre 1 en μ de $\varpi(\bar{\chi}(\mu),\mu)$.

3) Un tore ou un feuilletage de tores ? (ou les ambiguïtés de Poincaré).

Dans les exemples intégrables des deux premiers paragraphes, chaque solution de (H_μ) est quasi-périodique : plus précisément, elle est de la forme

$$\begin{cases} x &= x^0 + \mu\Phi_1(w) + \mu^2\Phi_2(w) + \cdots , \\ y &= w + \mu\Psi_1(w) + \mu^2\Psi_2(w) + \cdots , \end{cases} \qquad (L_\mu)$$

où les Φ_j et les Ψ_j sont des applications de R^n dans R^n 2π-périodiques en chacune des variables w_i, et où $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ est un n-uple de fonctions du temps de la forme

$$w_i(t) = \bar{w}_i(\mu) + n_i(\mu)t ,$$

les $\bar{w}_i(\mu)$ et les $n_i(\mu)$ étant elles-mêmes développables en séries de puissances de μ.

Une solution formelle des équations (H_μ) associées à un hamiltonien $F(x, y, \mu)$ sera appelée une *série de Lindstedt* si elle est de la forme (L_μ). Le lecteur mettra sans peine ces expressions sous la forme que leur donne Poincaré au début du paragraphe 125.

Dans l'espace de phase $D \times R^n$, l'adhérence de la courbe intégrale définie par une série de Lindstedt convergente est, à μ fixé, un tore $\mathcal{T}_\mu$ dont la dimension peut aller de 1 (orbite périodique) lorsqu'il existe un réel T non nul et des entiers p_i tels que pour tout i on ait $n_i(\mu)T = p_i$, à n (orbite quasi-périodique de type "général") s'il n'existe entre les fréquences $n_i(\mu)$ aucune *résonance*, c'est-à-dire aucune relation de la forme

$$k \cdot n(\mu) = \sum_{i=1}^{n} k_i n_i(\mu) = 0 ,$$

dans laquelle $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ soit une suite d'entiers (positifs ou négatifs) non tous nuls.

Nous sommes ainsi amenés tout naturellement à rechercher, comme le fait Poincaré, non pas des solutions particulières formelles des équations (H_μ), mais des *tores formellement invariants* de ces équations. De plus, la forme des solutions montre que, toujours au niveau formel, il doit exister sur ces tores des coordonnées $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$ dans lesquelles la restriction des équations soit un champ de vecteur constant : dans le cas non résonant où l'adhérence de la courbe intégrale (L_μ) est de dimension n, de telles coordonnées θ sont évidemment $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ qui vérifient

$$\frac{dw_i}{dt} = n_i(\mu) , \quad i = 1, \cdots, n .$$

Cette dernière propriété, jointe à la densité dans le tore des courbes intégrales du flot, contraint considérablement un tore invariant d'un système hamiltonien : remarquons en effet avec Herman que la forme Ω induite sur un tel tore par la forme symplectique

$$dx \wedge dy = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\,,$$

qui est invariante par le flot des équations (H_μ), est nécessairement constante dans les coordonnées θ, et s'écrit

$$\Omega = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} d\theta_i \wedge d\theta_j\,.$$

Mais la forme symplectique $dx \wedge dy$ étant le cobord de la *forme de Liouville* $x \cdot dy = \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i$, Ω est également un cobord; étant constante, elle est forcément nulle.

Nous chercherons donc un tore formellement invariant sur lequel la forme induite par la forme symplectique s'annule, et nous le chercherons même de la dimension maximale, c'est-à-dire de dimension n (cas non résonants). Un tel tore est dit *Lagrangien*. La forme même de (L_μ) montre qu'on doit chercher ces tores "près" des tores $\{x^0\} \times T^n$, c'est-à-dire comme graphes d'une application (formelle) Σ_μ de T^n dans D. La condition d'être lagrangien équivaut alors à l'existence d'une application $y \mapsto S_\mu(y)$ dont Σ_μ soit la dérivée :

$$\Sigma_\mu(y) = \frac{dS_\mu}{dy}(y)\,,$$

et la théorie classique de Hamilton-Jacobi nous apprend que la seule condition que doit vérifier l'application S_μ est d'être une solution globale de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$F\left(\frac{dS_\mu}{dy}(y), y, \mu\right) = c(\mu)\,,$$

où $c(\mu)$ est une constante (rappelons que, moralement, μ est fixé). Tout ceci ne doit pas nous étonner puisque les variétés lagrangiennes invariantes peuvent être considérées comme des solutions géométriques globales de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Malheureusement, sans autre hypothèse, il n'est pas clair qu'un tore lagrangien $\mathcal{T}_\mu$, défini comme le graphe de la dérivée Σ_μ d'une solution globale S_μ de l'équation de Hamilton-Jacobi, possède des coordonnées dans lesquelles les équations de Hamilton (H_μ) deviennent un champ de vecteurs constant (i.e. quasi-périodique !). Cette dernière propriété n'est assurée que si le tore appartient à une famille à n paramètres $\chi = (\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n)$ de tels tores définie par une *solution complète* $S_\mu(\chi, y)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$F\left(\frac{\partial S_\mu(\chi,y)}{\partial y}(y), y, \mu\right) = C(\chi,\mu). \qquad (HJ_\mu)$$

Une telle solution complète est en effet la *fonction génératrice* d'un difféomorphisme symplectique $\mathcal{D}_\mu$

$$(\chi, w) \mapsto (x, y),$$

défini implicitement par l'identité

$$dS_\mu = w \cdot d\chi + x \cdot dy,$$

c'est-à-dire par les équations

$$x = \frac{\partial S_\mu}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial S_\mu}{\partial \chi};$$

et dans les coordonnées (χ, w) le Hamiltonien $F(x, y, \mu)$ prend la forme $C(\chi, \mu)$ indépendante de angles w, donc *complètement intégrable* : sur le tore qui nous intéresse, défini dans les nouvelles coordonnées par une équation de la forme $\chi = \bar{\chi}$, et paramétré par les angles w, les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial C}{\partial \chi}(\bar{\chi}, \mu).$$

On remarquera que seule est intervenue l'existence de la famille pour χ appartenant à un voisinage infinitésimal de $\bar{\chi}$: il suffit même de savoir dériver par rapport à χ au point $\bar{\chi}$. Ceci sera fondamental dans le paragraphe suivant.

Poincaré est en ces matières légèrement ambigu : cherchant un tore non résonant, il le fait ensuite dépendre de paramètres, puis dérive par rapport à ces paramètres pour trouver les fréquences, sans se préoccuper explicitement de l'éventualité de l'apparition de dénominateurs nuls dans les séries définissant la fonction génératrice $S_\mu(\chi, y)$. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'on peut donner un sens à tout ce que fait Poincaré, mais il faut prendre quelques précautions puisqu'il s'agit quand même de parler de la dérivée d'une fonction définie sur un ensemble de Cantor.

4) Existence des séries de Lindstedt dans le cas non dégénéré.
Il s'agit de trouver une "fonction" $S_\mu(\chi, y) = S(\chi, y, \mu)$ de la forme

$$S(\chi, y, \mu) = \chi \cdot y + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i S_i(\chi, y)$$

telle que les dérivées partielles $\frac{\partial S_i}{\partial \chi}$ et $\frac{\partial S_i}{\partial y}$ soient 2π-périodiques en les variables y_j, et que soit satisfaite formellement une équation de la forme

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y}(\chi, y, \mu), y, \mu\right) = C(\chi, \mu). \qquad (HJ_\mu)$$

Le choix de $\chi \cdot y$, c'est-à-dire d'une fonction génératrice de l'identité, comme terme d'ordre 0 en μ vient simplement de ce qu'ayant déjà supposé que $F(x, y, 0)$ ne dépend pas des angles y, il n'y a aucun intérêt à modifier ce premier terme. On notera enfin que le mot "fonction" est à prendre pour le moment avec un grain de sel puisqu'il s'agit d'expressions formelles et que le domaine de définition n'est pas précisé. Un des buts de ce paragraphe est justement de déterminer le sens qu'il faut lui donner.

Les contraintes de périodicités font qu'à une fonction arbitraire de χ près (correspondant à un déphasage angulaire sans importance), la fonction S_i peut s'écrire

$$S_i(\chi, y) = \alpha_i \cdot y + s_i(\chi, y),$$

où $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \cdots, \alpha_{i,n})$ appartient à R^n, et s_i est 2π-périodique de valeur moyenne nulle en les variables y_j.
L'identification des termes en μ dans le développement en série de (HJ_μ) fournit alors

$$\omega^0(\chi) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial y}(\chi, y) + F_1(\chi, y) = C_1(\chi), \qquad (E_1(\chi))$$

où l'on a utilisé la notation

$$\omega^0(x) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(x)$$

pour le vecteur de fréquences du hamiltonien non perturbé $F_0(x)$.
La résolution à paramètre $\chi = x^0$ fixé, donc la détermination d'un tore lagrangien invariant particulier (dépendant de μ), est possible dès que x^0 est suffisamment non résonant, c'est-à-dire dès qu'il appartient à l'un des sous-ensembles $D_{K,\nu}$ de D définis de la manière suivante :

$$D_{K,\nu} = \left\{x^0 \in D,\, \forall k \in Z^n - \{0\},\, |k \cdot \omega^0(x^0)| \geq \frac{K}{|k|^\nu}\right\}.$$

La série de Fourier de $s_1(x^0, y)$,

$$s_1(x^0, y) = \sum_{k=(k_1,\cdots k_n)\in Z^n-\{0\}} \sigma_k(x^0)e^{ik\cdot y},$$

est uniquement déterminée à partir de celle de $F_1(x^0, y)$,

$$F_1(x^0, y) = \sum_{k=(k_1,\cdots k_n)\in Z^n} f_k(x^0)e^{ik\cdot y},$$

par les identités

$$\sigma_k(x^0) = \frac{f_k(x^0)}{ik\cdot\omega^0(x^0)}.$$

Il n'est pas difficile de voir que, les coefficients de la série de Fourier d'une fonction analytique décroissant plus vite que n'importe quelle puissance de $|k|$ et la croissance des *petits dénominateurs* $ik\cdot\omega^0(x^0)$ étant polynomiale en $|k|$, la série obtenue définit une fonction analytique en y dès que x^0 est dans l'un des $D_{K,\nu}$.

Quant à α_1 et $C_1(x^0)$, ils doivent être choisis de façon à vérifier

$$C_1(x^0) - \omega^0(x^0)\cdot\alpha_1 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} F_1(x^0, y)\, dy.$$

On résoud de même par récurrence les équations qui proviennent de l'identification des termes en $\mu^j, j \geq 2$, dans le développement en série de (HJ_μ) : celles-ci sont en effet de la forme

$$\omega^0(\chi)\cdot\frac{\partial S_j}{\partial y}(\chi, y) + \Phi_j(\chi, y) = C_j(\chi), \qquad (E_j(\chi))$$

où le terme $\Phi_j(\chi, y)$ est un polynôme en les $\frac{\partial S_i}{\partial y}(\chi, y), i < j$, à coefficients analytiques en χ, y.

Une fois choisis les α_j, on obtient, pour tout x^0 dans l'un des $D_{K,\nu}$, une série formelle en μ, $S(x^0, y, \mu)$, dont les coefficients sont des fonctions analytiques de y, et une série formelle en μ, $C(x^0, \mu)$. Le problème est maintenant de "dériver" ces séries par rapport à $\chi_1, \cdots, \chi_n$.

Dérivons formellement les équations $(E_j(\chi))$ par rapport au paramètre χ_k; on obtient de nouvelles équations, qu'on notera $\left(\frac{\partial E_j}{\partial \chi_k}(\chi)\right)$,

$$\omega^0(\chi)\cdot\frac{\partial^2 S_j}{\partial\chi_k\partial y}(\chi, y) + \frac{\partial\omega^0}{\partial x}(\chi)\cdot\frac{\partial S_j}{\partial y}(\chi, y) + \frac{\partial\Phi_j}{\partial\chi_k}(\chi, y) = \frac{\partial C_j}{\partial\chi_k}(\chi).$$

Supposons par récurrence que, pour $x^0 \in D_{K,\nu}$ et $i < j$, des fonctions $\frac{\partial S_i}{\partial \chi_k}(x^0, y)$, analytiques en y, et des réels $\frac{\partial C_i}{\partial \chi_k}(x^0)$ aient été déterminés, qui vérifient les équations $\left(\frac{\partial E_i}{\partial \chi_k}(x^0)\right)$. On montre comme précédemment l'existence d'une fonction analytique en y,

$$\varphi_j(x^0, y) = \frac{\partial S_j}{\partial \chi_k}(x^0, y),$$

et d'un réel

$$D_j(x^0) = \frac{\partial C_j}{\partial \chi_k}(x^0),$$

vérifiant l'équation $\left(\frac{\partial E_j}{\partial \chi_k}(x^0)\right)$. Cette dernière s'écrit en effet

$$\omega^0(x^0) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(x^0, y) + \Psi_j(x^0, y) = D_j(x^0), \qquad \left(\frac{\partial E_j}{\partial \chi_k}(x^0)\right)$$

où Ψ_j est un polynôme en les $\frac{\partial S_i}{\partial y}(x^0, y)$ et $\frac{\partial^2 S_i}{\partial \chi_k \partial y}(x^0, y), i < j$, à coefficients analytiques en χ, y.

Bien entendu, rien n'empêche de continuer et de déterminer ainsi les "dérivées" d'ordre supérieur $\frac{\partial^\alpha S}{\partial \chi_1^{\alpha_1} \cdots \chi_n^{\alpha_n}}(x^0, y, \mu)$, $\frac{\partial^\alpha C}{\partial \chi_1^{\alpha_1} \cdots \chi_n^{\alpha_n}}(x^0, \mu)$, dont le statut est le même respectivement que celui de $S(x^0, y, \mu)$ et $C(x^0, \mu)$, et qui vérifient les relations habituelles de commutation.

Autrement dit, pour tout élément x^0 de $D_{K,\nu}$, on peut déterminer des $S_j(\chi, y)$ et des $C_j(\chi)$ qui sont des séries formelles* en $(\chi - x^0)$ (c'est-à-dire en les $(\chi_i - x_i^0), i = 1, \cdots, n$) à coefficients analytiques en y, qui vérifient les équations $(E_j(\chi))$.

Ainsi que nous l'avons déjà noté dans le paragraphe précédent, ceci suffit** à assurer la quasi-périodicité du mouvement sur le tore lagrangien formel d'équation $x = \frac{\partial S}{\partial y}(x^0, y, \mu)$. On en déduit l'existence de séries de Lindstedt, définies implicitement par

$$\begin{cases} x = x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \frac{\partial s_i}{\partial y}(x^0, y), \\ y + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \frac{\partial s_i}{\partial \chi}(x^0, y) = w = \bar{w}(\mu) + \frac{\partial C}{\partial \chi}(x^0, \mu) t. \end{cases}$$

* Remarquons que, pour $j=1$, on a identité comme séries formelles en $(\chi - x^0)$, entre $C_1(\chi) - \omega^0(\chi) \cdot \alpha_1$ et $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} F_1(\chi, y)\, dy$. En particulier, $C_1(\chi)$ est défini et analytique pour tout χ.

** Bien entendu l'ordre 1 suffit déjà, c'est ce qu'on utilisera dans le paragraphe 7.

Si l'on choisit, comme le fait Poincaré, d'annuler tous les α_i, on obtient des séries de Lindstedt à fréquence variable. Si au contraire on choisit les α_i de façon à ce que $\frac{\partial C_i}{\partial \chi}(x^0)$ s'annule pour tout $i \geq 1$, on obtient des séries de Lindstedt à fréquences fixes. Notons que les α_i sont astreints à vérifier les identités

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \chi}(x^0,y)\,dy = \frac{\partial C_j}{\partial \chi}(x^0) - \frac{\partial \omega^0}{\partial x}(x^0)\cdot \alpha_j\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \omega^0}{\partial x}(x^0)\cdot \alpha_j = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \chi}(x^0,y)\,dy\,.$$

Le second membre est déterminé dès que les α_i, $i < j$ (et donc les $\frac{\partial S_i}{\partial y}(x^0,y)$, $i < j$) le sont. Les α_j peuvent donc être choisis de façon à annuler les $\frac{\partial C_j}{\partial \chi}(x^0)$ dès que l'application linéaire $\frac{\partial \omega^0}{\partial x}(x^0)$ est inversible, c'est-à-dire dès que le hamiltonien non perturbé F_0 vérifie la condition de *non-dégénérescence isochronique*

$$\det \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}(x^0) \neq 0\,.$$

Notons que cette condition assure en même temps la non vacuité de la réunion des sous-ensembles $D_{K,\nu}$ et même le fait que leur complémentaire dans D est de mesure de Lebesgue nulle.

On obtiendrait de même des séries de Lindstedt à énergie fixée et rapports de fréquences fixes à la condition que F_0 vérifie la condition de *non-dégénérescence isoénergétique* que nous avons explicitée dans le premier paragraphe.

Remarques. 1) Il n'est peut être pas inutile d'insister sur le fait que les α_i déterminés dans les deux derniers cas dépendent du choix de x^0. Bien entendu, cela signifie simplement qu'à chaque choix de x^0 dans $D_{K,\nu}$ correspond une "fonction" génératrice dont les coefficients $S_i(\chi, y, \mu)$ sont des séries formelles en $(\chi - x^0)$, et non pas que, dans l'expression d'une telle "fonction" génératrice, les α_i dépendent de χ.

On aurait pu également suivre de plus près le paragraphe 1 en choisissant tous les α_i nuls et en faisant varier la "donnée initiale"

$$\bar{\chi}(\mu) = x^0 + \sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\alpha_i$$

de façon que (dans le cas des fréquences fixes) soit vérifiée l'identité

$$\frac{\partial C}{\partial \chi}(\bar{\chi}(\mu),\mu) = \omega^0(x^0).$$

2) Pöschel montre dans [5] que les $S_i(\chi, y)$ (resp. $C_i(\chi)$) sont des fonctions C^∞ au *sens de Whitney* sur chaque fermé $D_{K,\nu} \times T^n$ (resp. $D_{K,\nu}$). Ceci équivaut à l'existence d'un prolongement C^∞ de ces "fonctions" à $D \times T^n$ (resp. D) tout entier et donne une interprétation simple de leurs dérivées par rapport à χ.

3) A la fin du paragraphe 128, Poincaré remarque que c'est sans doute la dégénérescence du Problème de trois corps qui a empêché Lindstedt de découvrir la possibilité d'écrire des séries à fréquences fixées.

5) Dégénérescence propre.

La dégénérescence du problème de Kepler implique celle de la plupart des problèmes de perturbation issus de la mécanique céleste : dans les théories planétaires, par exemple, le hamiltonien non troublé F_0 est celui d'un certain nombre de problèmes de Kepler non couplés; il ne dépend pas de toutes les variables d'action x mais seulement de certaines d'entre elles (L,L',$\cdots$) que l'on réunit sous la dénomination $x' = (x_1, \cdots, x_p)$. On note de même $x'' = (x_{p+1}, \cdots, x_n)$, c'est-à-dire

$$x = (x', x''), \quad y = (y', y'').$$

Les angles y'' restent fixes au cours du mouvement non perturbé, ce qui explique la terminologie *angles rapides, angles lents* (resp. *actions rapides, actions lentes*) utilisée respectivement pour les variables y', y'' (resp. x', x''). Le hamiltonien troublé s'écrit

$$F(x, y, \mu) = F_0(x') + \mu F_1(x, y) + \mu^2 F_2(x, y) + \cdots .$$

On notera

$$\omega^0(x') = \frac{\partial F_0}{\partial x'}(x') \in R^p .$$

Cherchons comme précédemment un changement formel de coordonnées symplectique

$$\mathcal{D}_\mu : (\chi, w) \mapsto (x, y)$$

de fonction génératrice

$$\begin{cases} S(\chi, y, \mu) = \chi \cdot y + \mu S_1(\chi, y) + \mu^2 S_2(\chi, y) + \cdots , \\ S_i(\chi, y) = \alpha_i \cdot y + s_i(\chi, y) , \end{cases}$$

où les s_i sont périodiques de moyenne nulle en y, tel que

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y}(\chi, y, \mu), y, \mu\right) = C(\chi, \mu) = C_0(\chi) + \mu C_1(\chi) + \mu^2 C_2(\chi) + \cdots$$

L'identification des termes d'ordre 0 en μ montre que

$$C_0(\chi) = F_0(\chi') ,$$

où on a noté par analogie $\chi = (\chi', \chi'')$; celle des termes d'ordre 1 donne

$$\frac{\partial F_0}{\partial x'}(\chi') \cdot \frac{\partial S_1}{\partial y'}(\chi, y) + F_1(\chi, y) = C_1(\chi) ,$$

c'est-à-dire

$$\omega^0(\chi')\cdot\frac{\partial s_1}{\partial y'}(\chi,y)+F_1(\chi,y)=C_1(\chi)-\omega^0(\chi')\cdot\alpha_1'\,, \qquad (DE_1(\chi))$$

où l'on a noté $\alpha_i=(\alpha_i',\alpha_i'')$ la décomposition du vecteur α_i en composantes rapides et composantes lentes.

Dans cette équation, les actions χ et les angles lents y'' apparaissent comme des paramètres. Soit

$$R_1(x,y'')=\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{T^p}F_1(x,y',y'')\,dy'$$

la *partie séculaire* de la perturbation à l'ordre 1, obtenue en moyennant F_1 par rapport aux angles rapides. Une condition nécessaire de résolubilité formelle en $\chi=x^0$ de l'équation ci-dessus étant l'identité (entre séries formelles en $(\chi-x^0)$)

$$R_1(\chi,y'')=C_1(\chi)-\omega^0(\chi')\cdot\alpha_1'\,,$$

il faut que R_1 soit indépendant des angles lents y'', ce que nous supposerons désormais. Nous verrons dans le paragraphe 8 comment remplir cette condition dans le Problème planétaire des n corps. Lorsqu'elle est satisfaite, on peut résoudre $(DE_1(\chi))$ au point $\chi=x^0$ (c'est-à-dire, comme dans le paragraphe 4, avec des séries formelles en $(\chi-x^0)$) dès que $x^0=(x'^0,x''^0)$ appartient à l'un des sous-ensembles $D'_{K,\nu}$ de D définis par

$$D'_{K,\nu}=\left\{x^0\in D\,,\,\forall k'\in Z^p-\{0\}\,,\,|k'\cdot\omega^0(x'^0)|\geq\frac{K}{|k'|^\nu}\right\}.$$

On obtient ainsi $C_1(\chi)$ et

$$S_1(\chi,y)=\alpha_1'\cdot y'+s_1'(\chi,y)+\alpha_1''\cdot y''+s_1''(\chi,y'')\,,$$

formule dans laquelle le vecteur $\alpha_1''\in R^{n-p}$ et la "fonction" $s_1''(\chi,y'')$, 2π-périodique en les angles lents, sont arbitraires.

Nous noterons dans la suite

$$\omega^1(x)=\frac{\partial R_1}{\partial x''}(x)\,.$$

L'identification des termes d'ordre 2 en μ donne (avec des notations évidentes)

$$\omega^0(\chi')\cdot\frac{\partial S_2}{\partial y'}(\chi,y)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F_0}{\partial x'^2}(\chi')\cdot\left(\frac{\partial S_1}{\partial y'}(\chi,y)\right)^2$$
$$+\frac{\partial F_1}{\partial x}(\chi,y)\cdot\frac{\partial S_1}{\partial y}(\chi,y)+F_2(\chi,y)=C_2(\chi)\,.$$

Si l'on groupe sous la dénomination $\Phi_2(\chi, y)$ les termes déjà déterminés, on obtient une équation de la forme

$$\begin{aligned}\omega^0(\chi')\cdot\frac{\partial s_2}{\partial y'}(\chi,y)+\frac{\partial F_1}{\partial x''}(\chi,y)\cdot\frac{\partial s_1''}{\partial y''}(\chi,y'')+\Phi_2(\chi,y)&\\ =C_2(\chi)-\omega^0(\chi')\cdot\alpha_2'-\frac{\partial F_1}{\partial x''}(\chi,y)\cdot\alpha_1''&,\end{aligned}\qquad (DE_2(\chi))$$

qui, intégrée sur les angles rapides y', devient

$$\begin{aligned}\omega^1(\chi)\cdot\frac{\partial s_1''}{\partial y''}(\chi,y'')+\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{T^p}\Phi_2(\chi,y',y'')\,dy'&\\ =C_2(\chi)-\omega^0(\chi')\cdot\alpha_2'-\omega^1(\chi)\cdot\alpha_1''&.\end{aligned}\qquad (\tilde{D}E_2(\chi))$$

Une condition nécessaire de résolubilité formelle en $\chi = x^0$ de cette dernière équation est l'identité suivante entre séries formelles en $(\chi - x^0)$,

$$C_2(\chi)-\omega^0(\chi')\cdot\alpha_2'-\omega^1(\chi)\cdot\alpha_1''=R_2(\chi),$$

où

$$\begin{aligned}R_2(\chi)=\frac{1}{(2\pi)^{n-p}}\int_{T^{n-p}}\left(\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{T^n}\Phi_2(\chi,y',y'')\,dy'\right)dy''&\\ =\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\Phi_2(\chi,y)\,dy&\end{aligned}$$

dépend du choix qu'on a fait de α_1' dans l'étape précédente. Si elle est vérifiée, et si x^0 appartient à l'un des sous-ensembles $D''_{K,\nu}$ de D définis par

$$D''_{K,\nu}=\left\{x^0\in D\,,\ \forall k''\in Z^{n-p}-\{0\}\,,\ |k''\cdot\omega^1(x^0)|\geq\frac{K}{|k''|^\nu}\right\},$$

on détermine $s_1''(\chi, y'')$. Enfin, l'équation $(DE_2(\chi))$ fournit $s_2(\chi, y)$ à une fonction de y'' près. On obtient ainsi $C_2(\chi)$ et

$$S_2(\chi,y)=\alpha_2'\cdot y'+s_2'(\chi,y)+\alpha_2''\cdot y''+s_2''(\chi,y''),$$

où comme auparavant, le vecteur $\alpha_2'' \in R^{n-p}$ et la "fonction" $s_2''(\chi, y'')$, 2π-périodique en les angles lents, sont arbitraires.

Les étapes suivantes sont identiques et fournissent entre les α_j et les $C_j(\chi)$ les relations

$$C_j(\chi)-\omega^0(\chi')\cdot\alpha_j'-\omega^1(\chi)\cdot\alpha_{j-1}''=R_j(\chi),$$

où $R_j(\chi)$ dépend du choix que l'on a fait des α_i, $i < j-2$ et de α'_{j-1}.

Supposons maintenant comme Arnold que *la moyennisation à l'ordre 1 lève la dégénérescence*, c'est-à-dire que l'application

$$x \mapsto \left(\omega^0(x'), \omega^1(x)\right)$$

est un difféomorphisme local en $\chi = x^0$, autrement dit que

$$\det \frac{\partial^2 F_0}{\partial x'^2}(x'^0) \neq 0\,, \quad \text{et} \quad \det \frac{\partial^2 R_1}{\partial x''^2}(x^0) \neq 0\,.$$

Le théorème des fonctions implicites montre qu'on peut alors choisir les α_i (dépendant de x^0) de façon à annuler les $\frac{\partial C_i}{\partial \chi'}(x^0)$ pour $i \geq 1$ et les $\frac{\partial C_i}{\partial \chi''}(x^0)$ pour $i \geq 2$. On obtient ainsi, pour tout x^0 appartenant à l'intersection d'un sous-ensemble $D'_{K,\nu}$ et d'un sous-ensemble $D''_{K,\nu}$, des séries de Lindstedt dont les fréquences sont de la forme

$$\left(\omega^0(x'^0), \mu\,\omega^1(x^0)\right).$$

Celles-ci représentent le plus proche analogue que l'on puisse obtenir des séries à fréquences fixes dans les cas dégénérés. Ici aussi, la condition que la dégénérescence soit levée à l'ordre 1 implique que l'ensemble des x^0 qui conviennent est non vide (et même de mesure pleine).

Remarques. 1) Si la partie séculaire $R_1(x, y'')$ de $F_1(x, y)$ dépend effectivement des angles lents y'', on ne peut plus en général exiger que le nouvel hamiltonien $C(\chi, w)$ soit indépendant des angles w, mais on peut faire en sorte qu'il ne dépende que des angles lents w''. Autrement dit, on peut résoudre (dans le même sens que ci-dessus) une équation de Hamilton-Jacobi de la forme

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y}(\chi, y, \mu), y, \mu\right) = C\left(\chi, \frac{\partial S}{\partial \chi''}(\chi, y, \mu), \mu\right).$$

Au niveau des termes de degré 0 et 1 en μ, l'identification donne les mêmes équations que précédemment au remplacement près de $C_1(\chi)$ par $C_1(\chi, y'')$; à partir du degré 2 on obtient, compte tenu de l'identité $\frac{\partial C_1}{\partial y''}(\chi, y'') = \frac{\partial R_1}{\partial y''}(\chi, y'')$, des équations de la forme ($i \geq 2$)

$$\begin{aligned}\omega^0(\chi') \cdot \frac{\partial s_i}{\partial y'}(\chi, y) + \frac{\partial F_1}{\partial x''}(\chi, y) \cdot \frac{\partial s''_{i-1}}{\partial y''}(\chi, y'') + \Phi_i(\chi, y) \\ = \frac{\partial R_1}{\partial y''}(\chi, y'') \cdot \frac{\partial s''_{i-1}}{\partial \chi''}(\chi, y'') + C_i(\chi, y'') \\ -\omega^0(\chi') \cdot \alpha'_i - \frac{\partial F_1}{\partial x''}(\chi, y) \cdot \alpha''_{i-1}\,,\end{aligned}$$

qui, moyennées sur les angles rapides y', deviennent

$$\{R_1, s''_{i-1}\}''(\chi, y'') + \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{T^p} \Phi_i(\chi, y)\, dy'$$
$$= C_i(\chi, y'') - \omega^0(\chi') \cdot \alpha'_i - \frac{\partial R_1}{\partial x''}(\chi, y'') \cdot \alpha''_{i-1}\,.$$

On a noté $\{R_1, s''_{i-1}\}''$ le crochet de Poisson des fonctions R_1 et s''_{i-1} en les variables χ'', y'' (les χ' jouant le rôle de paramètres), c'est-à-dire la dérivée de Lie de s''_{i-1} suivant le flot des équations de Hamilton associées au Hamiltonien R_1 (en les variables χ'', y'').

Il est très facile de résoudre ces équations — on peut choisir s''_{i-1} quelconque — ce qui montre l'existence de $S(\chi, y, \mu)$ transformant F en un Hamiltonien $C(\chi, w'')$ indépendant des angles lents. La fonction génératrice S est définie comme série formelle en μ dont les coefficients sont des séries formelles en $(\chi - x^0)$ à coefficients fonctions analytiques en y, pourvu que x^0 appartienne à l'un de $D'_{K,\nu}$. Bien qu'identique à (et même plus simple que) celui de Poincaré, ce procédé est connu sous le nom de *méthode de Von Zeipel d'élimination des angles rapides.* Notons que la nature (angulaire ou non) des variables x'', y'' importe peu; ce sont de simples paramètres (voir le paragraphe 8 et l'appendice 4).

2) Supposer comme nous l'avons fait l'annulation de certaines des fréquences du Hamiltonien non troublé F_0 revient, à changement linéaire symplectique près de coordonnées, à supposer l'existence de relations de résonance

$$k \cdot \omega^0(x^0) = 0\,, \quad k \in Z^n - \{0\}\,,$$

entre les fréquences composant $\omega^0(x^0)$.

Terminologie : Si $H(x', y', \xi, \eta, \cdots) = H_0(x') + H_1(x',, y', \xi, \eta, \cdots)$ est tel que $|H_1|$ soit petit devant $|H_0|$, nous appellerons *système séculaire* associé à H le système dont le Hamiltonien

$$\tilde{H}(x', \xi, \eta, \cdots) = H_0(x') + \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{T^p} H_1(x', y', \xi, \eta \cdots)\, dy'$$

est obtenu à partir de H par moyennisation sur les angles y'. Il nous arrivera également de considérer $\tilde{H}$ comme une famille de Hamiltoniens paramétrée par x', et d'appeler encore *systèmes séculaires* les systèmes obtenus en fixant une valeur de x'.

Nous prenons soin de donner une définition indépendante de l'introduction d'un petit paramètre, car cette dernière a toujours un caractère plus ou moins artificiel (voir la note 1 à la fin de l'appendice 2).

6) Dégénérescence limite.

Dans un flot hamiltonien complètement intégrable, deux mécanismes distincts font dégénérer des tores invariants de dimension maximale en tores invariants de dimension inférieure au nombre n de degrés de liberté:

— la *résonance* : un tore invariant de dimension n se décompose en famille à $n-p$ paramètres de tores invariants de dimension p (figure 1). C'est essentiellement le phénomène qui nous a occupé dans le paragraphe précédent.

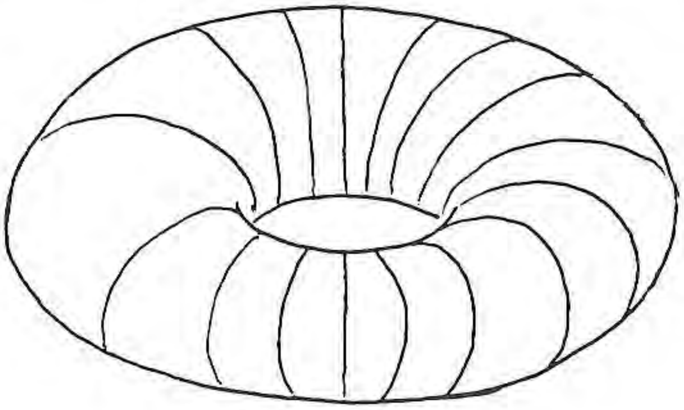

Figure 1

— la *dégénérescence limite* : des tores $T^n = (T^1)^n$ voient certains de leurs facteurs T^1 se réduire à un point; c'est ce qui se produit au voisinage d'un *tore invariant normalement elliptique* T^p (figure 2) dont l'exemple le plus simple ($p = 0$) est celui de l'équilibre d'un oscillateur harmonique.

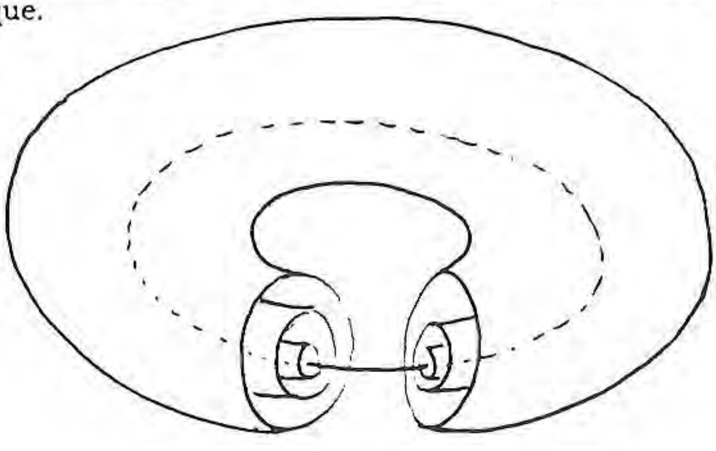

Figure 2

Une telle dégénérescence se produit dans les systèmes séculaires associés au Problème planétaire des n corps et complique l'obtention des séries de Lindstedt correspondant à des mouvements presque circulaires et peu inclinés.

Prenant comme exemple le Problème des trois corps dans le plan (appendice 1), nous noterons $\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i$, $i = 1, 2$, les variables de Poincaré associées à chacun des Problèmes de Kepler qui représentent en première approximation le mouvement des deux planètes fictives définies par les coordonnées héliocentriques canoniques (le choix des coordonnées de Jacobi n'aurait rien changé : voir l'exposé de J. Laskar sur la fonction perturbatrice, paragraphe 4.1). L'espace des phases est de dimension 8, il y a deux angles rapides λ_1, λ_2 (les *longitudes moyennes*), et deux angles lents h_1, h_2 (les opposés des *longitudes* (= *arguments* g_1, g_2 dans le cas planaire) *des périhélies*, arguments respectifs des nombres complexes $u_1 = \xi_1 + i\eta_1$ et $u_2 = \xi_2 + i\eta_2$). La conservation du moment cinétique

$$G_1 + G_2 = \Lambda_1 + \Lambda_2 - \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2)$$

implique la *complète intégrabilité* du *système séculaire*. Ce dernier, dont le Hamiltonien

$$\tilde{H} = H_0(\Lambda_1, \Lambda_2) + \tilde{H}_1(\Lambda_1, \Lambda_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$$

s'obtient en moyennant par rapport à λ_1 et λ_2 la fonction pertubatrice H_1, laisse ainsi invariants non seulement Λ_1 et Λ_2 mais aussi $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2$. C'est l'avatar planaire du *Théorème de stabilité de Laplace* : au niveau séculaire, les grands axes sont invariables et les excentricités restent bornées *(lire à ce point l'avertissement des appendices)*. Le développement de Taylor à l'origine de $\tilde{H}_1$ en les variables ξ_i et η_i ne contient que des termes de degré pair, et cette série commence par une forme quadratique définie négative (voir l'appendice 1). Pour chaque valeur de Λ_1 et Λ_2, l'origine est donc une singularité *elliptique* du système dans R^4 de Hamiltonien $\tilde{H}_1^{\Lambda_1,\Lambda_2}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \tilde{H}_1(\Lambda_1, \Lambda_2, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$, et les hypersurfaces $\tilde{H}_1^{\Lambda_1,\Lambda_2} =$ constante assez proches de l'origine sont difféomorphes à des sphères de dimension trois. Ces sphères, de même que celles de moment cinétique constant, sont feuilletées par des tores invariants qui remplissent le complémentaire d'un couple d'orbites périodiques enlacées. Dans l'approximation du système séculaire, et pour des excentricités assez petites, l'espace des phases de dimension huit est donc rempli par la réunion de quatre familles de tores invariants* (figure 3 que l'on comparera à la figure 1.3 de l'appendice 1)):

— la famille à deux paramètres (Λ_1, Λ_2) des tores de dimension deux d'équations

$$\xi_1 = \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0\,,\ \Lambda_1 = \text{ constante}, \Lambda_2 = \text{ constante};$$

* il en est de même si, introduisant un petit paramètre de l'ordre des masses planétaires (appendice 2, note 1), on tronque F à l'ordre 2 en ce paramètre : la symétrie qui force la complète intégrabilité ne disparait pas.

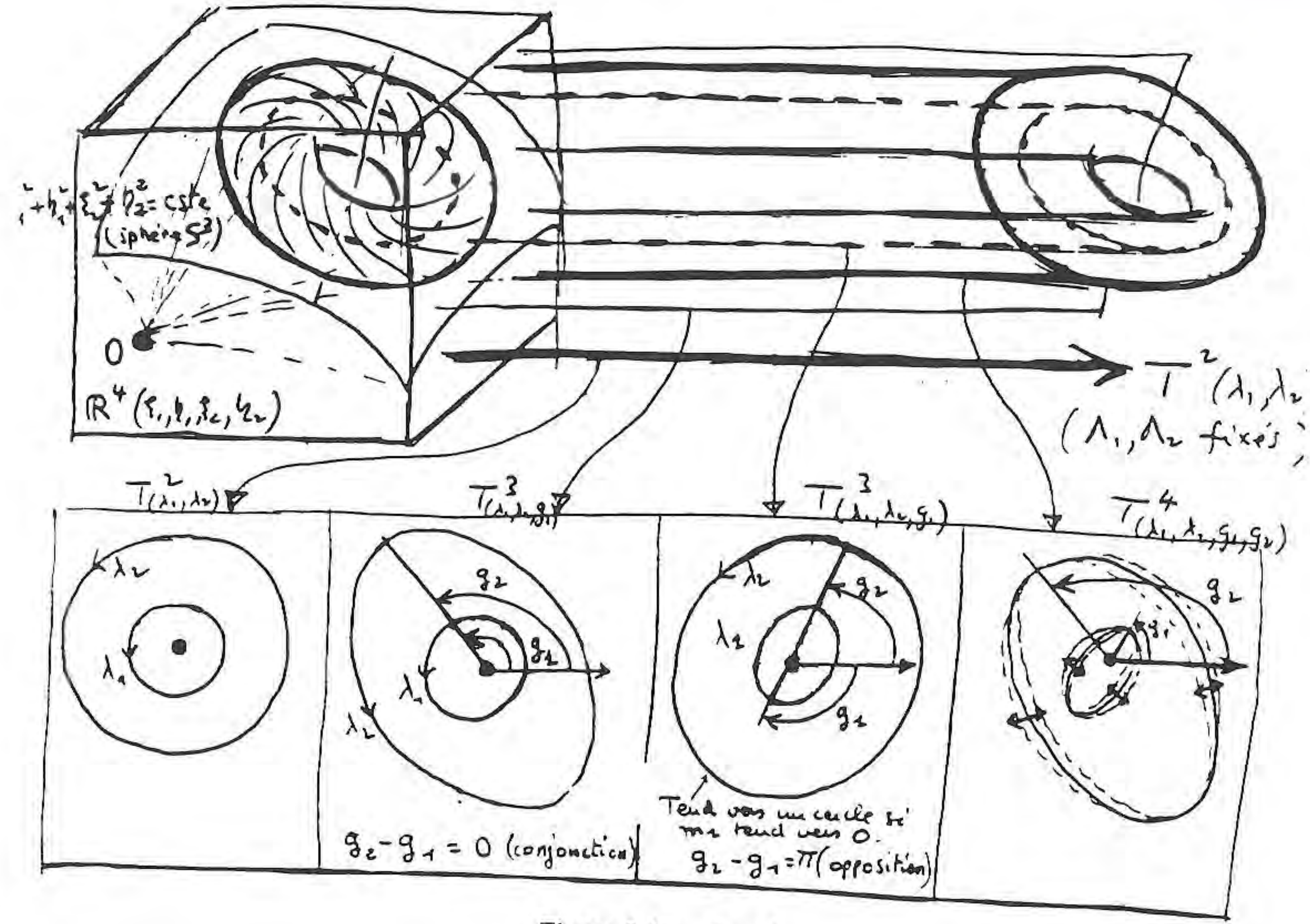

Figure 3 ($m_1 < m_2$)

ces tores correspondent à des mouvements dans lesquels les planètes décrivent des orbites circulaires;

— deux familles à trois paramètres (Λ_1, Λ_2, moment cinétique) de tores de dimension trois; l'invariance par rotation implique que ces tores correspondent à des mouvements dans lesquels les deux ellipses décrites par les planètes ont leurs excentricités fixées (rappelons que Λ_1 et Λ_2 étant constants dans les mouvements séculaires, les grands axes sont toujours fixés) et admettent un mouvement commun de précession de leurs périhélies, dont les directions sont d'ailleurs confondues (appendice 1). Lorsque la masse de l'une des deux planètes tend vers zéro, l'ellipse décrite par l'autre tend vers un cercle en cas d'opposition (voir l'appendice 3).

— une famille à quatre paramètres (Λ_1, Λ_2, moment cinétique, énergie) de tores de dimension quatre correspondant à des mouvements dans lesquels les deux planètes décrivent un mouvement elliptique avec précessions des périhélies et petites oscillations des excentricités. Ce sont ces derniers dont les séries de Lindstedt tentent de décrire les perturbations.

Le cadre général dans lequel envisager ce type de dégénérescence est celui d'une famille dépendant de μ de Hamiltoniens

$$H(x',y',\xi,\eta,\mu) = H_0(x') + \mu H_1(x',y',\xi,\eta) + \mu^2 H_2(x',y',\xi,\eta) + \cdots$$

définis sur $R^p \times T^p \times R^{2(n-p)}$. On suppose que la famille de systèmes séculaires associée à $H_0 + \mu H_1$, définie par la famille de Hamiltoniens

$$H_0(x') + \mu \tilde{H}_1(x',\xi,\eta),$$

où

$$\tilde{H}_1(x',\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{T^p} H_1(x',y',\xi,\eta)\, dy',$$

est telle que

$$\forall x', \ \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \xi}(x',0,0) = \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \eta}(x',0,0) = 0;$$

autrement dit, que le système séculaire correspondant à une valeur quelconque de μ laisse invariants les tores de dimension p

$$\mathcal{T}_{x'} = \{x'\} \times T^p \times \{0\} \subset R^p \times T^p \times R^{2(n-p)}.$$

Enfin, on suppose les systèmes séculaires *complètement intégrables*, et plus précisément que les tores d'équations

$$x' = \text{constante}, \quad \xi_i^2 + \eta_i^2 = \text{constante}, \ i = 1, \cdots, n,$$

sont invariants (noter que dans le cas du Problème des trois corps ξ, η ne sont les coordonnées de Poincaré que pour le Problème restreint circulaire !). En particulier, dans l'ouvert difféomorphe à $R^n \times T^n$ défini par les conditions $\xi_i^2 + \eta_i^2 \neq 0$, $i = 1, \cdots, n$, les coordonnées (symplectiques) (x', x'', y', y'') définies par

$$\xi_i = \sqrt{2x_i''} \cos y_i'', \quad \eta_i = \sqrt{2x_i''} \sin y_i'', \quad i = 1, \cdots, n,$$

sont des *coordonnées action-angle* : elles transforment $H(x',y',\xi,\eta,\mu)$ en $F(x',x'',y',y'',\mu)$ et $\tilde{H}_1(x',\xi,\eta)$ en $R_1(x',x'')$ indépendant de y''. La dynamique de $H_0(x') + \mu \tilde{H}_1(x',\xi,\eta)$ est analogue à celle décrite sur la figure 3. Nous la représenterons symboliquement par la figure 4.

Mais voilà, même dans le meilleur des mondes possibles où le système de Hamiltonien $H(x',y',\xi,\eta,\mu)$ serait encore complètement intégrable pour μ non nul, on ne pourrait raisonnablement s'attendre à ce que les tores invariants $\mathcal{T}_{x'}$ du système séculaire correspondant restent invariants. Ils

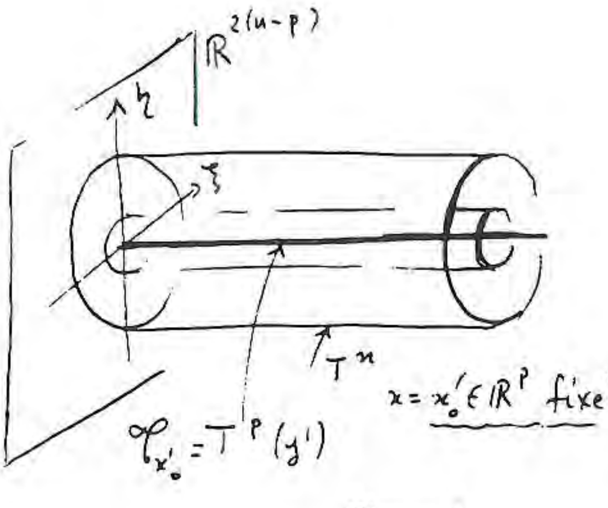

Figure 4

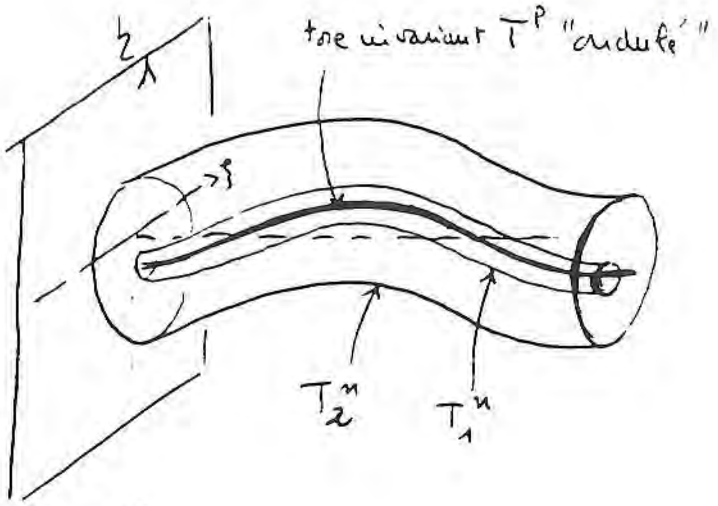

Figure 5

seront au mieux déformés en tores invariants de dimension p "ondulés" proches des premiers (figure 5).

Il est clair sur cette figure que si T_1^n est un tore invariant de dimension n trop proche d'un tel tore invariant "ondulé" T^p (son "âme"), il ne sera pas le graphe d'une application

$$(y', y'') \mapsto (x', x''),$$

alors que ce sera le cas d'un tore invariant T_2^n plus éloigné de son âme. Il s'agit, même dans le cas intégrable, d'une figure simpliste puisqu'elle correspond à $n - p = 1$, mais elle suffit à éclairer le phénomène.

Dans une situation aussi simple le remède est clair : il faut remplacer le tore $\mathcal{T}_{x'_0}$ d'équations

$$x' = x'_0, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0,$$

par un tore T^p "ondulé" invariant. Un tel "changement de coordonnées", qui est possible dès qu'on sait prouver l'existence des tores "ondulés", avait déjà été mis en œuvre par Hill dans sa théorie de la lune (p est alors égal à 1 et le tore "ondulé" est une *orbite périodique intermédiaire*). Dans le cas du Problème plan des trois corps, les tores invariants de dimension deux du système séculaire donnent naissance, dans le Problème complet, aux *orbites périodiques de la première sorte* de Poincaré*, caractérisées par les valeurs de l'énergie et du moment cinétique. Ces dernières doivent donc servir de base à tout système de coordonnées dans lequel on voudrait étudier les séries de Lindstedt correspondant à des mouvements dont les excentricités sont petites par rapport aux masses.

* Elles deviennent effectivement des orbites périodiques lorsqu'on passe au quotient par le groupe des rotations, qui laisse invariant le système.

Indiquons enfin comment cette "difficulté des petites excentricités" se traduit au niveau analytique dans la recherche des séries de Lindstedt : il suffit de remarquer que par construction, F_1 se prolonge, au voisinage de $x'' = 0$, en une fonction analytique en les $\sqrt{x_i''}$:

$$F_1(x', x'', y', y'') = H_1(x', y', \sqrt{2x''} \cos y'', \sqrt{2x''} \sin y'')$$

(nous avons noté de manière condensée $\sqrt{x''} = \left(\sqrt{x_1''}, \cdots, \sqrt{x_{n-p}''}\right)$, etc$\cdots$).

Reprenant mot à mot les calculs du paragraphe précédent, on cherche donc une fonction $S(\chi, y)$ telle que

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right) + \mu H_1\left(\frac{\partial S}{\partial y'}, y', \sqrt{2\frac{\partial S}{\partial y''}} \cos y'', \sqrt{2\frac{\partial S}{\partial y''}} \sin y''\right) + \cdots = C(\chi, \mu).$$

La nouveauté consiste en l'apparition d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{2x_i''}}$ dans les expressions donnant $\frac{\partial F_1}{\partial x_i''}$ et $\frac{\partial R_1}{\partial x_i''}$. Si H_1 possède effectivement des termes linéaires en (ξ, η), ces dérivées ne seront pas bornées lorsque x_i'' tend vers zero et le calcul perd son sens. Or c'est en particulier ces termes que l'on supprime si l'on choisit des coordonnées (ξ, η) dans lesquelles les tores $\mathcal{T}_{x'}$ restent invariants pour le système troublé (appendice 4).

Remarque. J. Laskar m'a indiqué que le problème des petites excentricités et inclinaisons se pose effectivement dans l'étude des satellites d'Uranus. La superposition aux mouvements séculaires des mouvements à courtes périodes donne des fonctions ξ et η dont les graphes ressemblent plus à la figure 7 qu'à la figure 6.

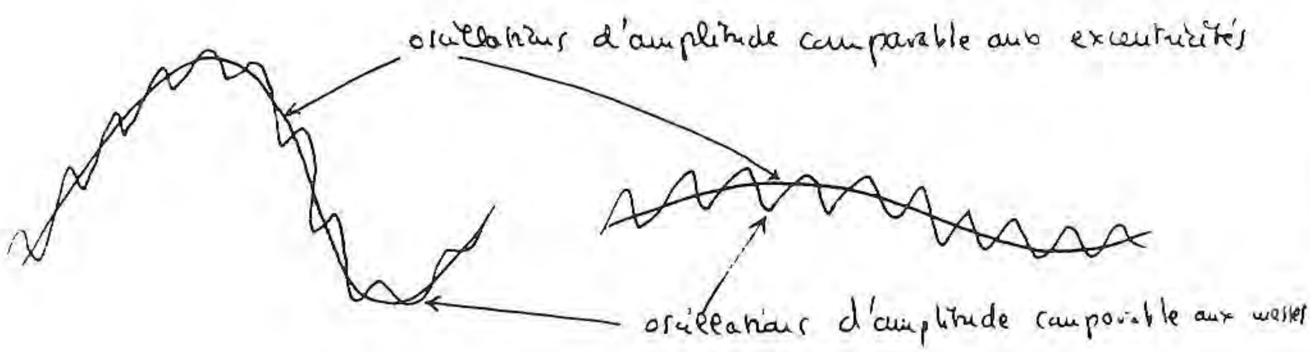

Figure 6 Figure 7

7) Problèmes de convergence.

> ···; or ce qui fait que les développements de M. Lindstedt sont certainement divergents c'est ceci. S'ils convergeaient il n'y aurait jamais de libration, et il y en a certainement.
>
> H. Poincaré, *Lettre à Mittag-Leffler*, 5 février 1889.

La phrase mise en exergue indique bien la nature avant tout géométrique de l'intuition de Poincaré. C'est d'ailleurs encore ainsi que l'on raisonne aujourd'hui : si les développements à fréquences variables (les seuls, rappelons-le, envisagés par Lindstedt) convergeaient, les valeurs de μ pour lesquelles il y a résonance correspondraient à la situation "*non générique*" d'un tore feuilleté par des tores invariants de dimension inférieure — comme le dit Poincaré, il n'y aurait pas de libration. En fait, si toutes les séries de Lindstedt convergeaient, il y aurait *complète intégrabilité* dans le sens très fort (analyticité par rapport au paramètre μ des intégrales) qu'excluent les résultats du premier volume.

Au niveau de l'analyse, les problèmes de convergence* se rencontrent à deux niveaux :

(i) le niveau, élémentaire, de la définition même des séries de Lindstedt, c'est-à-dire des séries trigonométriques définissant les $s_i(x^0, y)$ et les $\frac{\partial s_i}{\partial X}(x^0, y)$. Nous avons vu que celles-ci convergent dès que le vecteur des fréquences $\omega^0(x^0)$ (resp. le vecteur $(\omega^0(x'^0), \omega^1(x^0))$ dans le cas dégénéré) satisfait à certaines conditions diophantiennes. Sans écrire ces conditions, Poincaré sait très bien que si l'on fait varier continûment ces fréquences, il y a alternance infinie de situations de convergence et de divergence, autrement dit que les valeurs du paramètre pour lesquelles il y a convergence aussi bien que celles pour lesquelles il y a divergence sont partout denses (pages 97, 98). Poincaré propose comme remède la troncation des séries trigonométriques d'une façon qui sera mot pour mot reprise par Arnold dans sa démonstration du théorème de Kolmogorov.

(ii) le niveau de la convergence des séries de Lindstedt à fréquences fixes comme séries en puissances de μ. Ce problème est incommensurablement plus délicat et n'a été résolu (par Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder) que plus de cinquante ans après la mort de Poincaré. Ni la méthode de Kolmogorov ni celle d'Arnold ne fournissent en fait la convergence de ces séries. L'idée de Kolmogorov est au contraire de fixer μ (assez petit), c'est-à-dire le Hamiltonien, et un

* Il n'y a problème que si le système a plus d'un degré de liberté.

"bon" vecteur de fréquences Ω (ce dernier sera de la forme $\omega^0(x^0)$ dans le cas non dégénéré et $(\omega^0(x'^0), \mu\omega^1(x^0))$ en cas de dégérescence propre). On cherche alors un tore invariant du système correspondant sur lequel le flot soit équivalent à un flot linéaire de fréquences Ω. Les cas proprement dégénérés et les cas non dégénérés ne diffèrent à ce niveau que par l'ordre de grandeur des composantes de la "torsion", c'est-à-dire de la dérivée par rapport aux variables d'action $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du vecteur de fréquences $\omega^0(x)$ (ou $(\omega^0(x'^0), \mu\omega^1(x^0))$) : la dégénérescence propre fait apparaitre de *petites torsions.*

Dans le cas non dégénéré, et dans ce cas seulement, on peut faire varier le paramètre μ tout en fixant Ω. S'il s'avère que le tore lagrangien obtenu correspondant à ce vecteur de fréquences dépend analytiquement de μ, cela montrera par comparaison la convergence de la série de Lindstedt à fréquences fixes correspondante. Une telle dépendance analytique se trouve discutée dans l'article cité de Moser en 1967, mais le plus simple est sans doute de se convaincre qu'elle découle du *théorème des fonctions implicites de Zehnder* dont ce dernier déduit le théorème de Kolmogorov-Arnold.

La méthode proposée par Kolmogorov et celle effectivement utilisée par Arnold diffèrent sur un point important mais se rattachent toutes deux à ce que Poincaré nomme la *méthode de Newcomb.* Cette dernière n'est autre, comme Poincaré lui-même le remarque, que la méthode classique de *variation des constantes* itérée à l'infini : on cherche, pour χ variant dans un domaine G_1 bien choisi, une solution approchée de l'équation de Hamilton-Jacobi, c'est-à-dire une fonction $S(\chi, y, \mu)$ telle que

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y}(\chi, y, \mu), y, \mu\right) = C(\chi, \mu) + \mu^2 D(\chi, y, \mu).$$

C'est la première étape de la méthode qui nous a fourni les séries de Lindstedt.
Les "constantes" sont les $\chi_i, i = 1, \ldots, n$, et résoudre l'équation à $O(\mu^2)$ près revient à trouver des "constantes" qui, dans le domaine G_1, vérifient

$$\frac{d\chi_i}{dt} = O(\mu^2).$$

Si l'on peut remplacer $F_0(x)$ par $C(\chi, \mu)$ et μ par μ^2 et itérer le processus, on obtiendra à la $k^{ième}$ étape des "constantes" χ_i^k qui, dans un certain domaine G_k, vérifient

$$\left|\frac{d\chi_i^k}{dt}\right| \leq A_k \mu^{2^k} ;$$

pour peu que la forte décroissance des μ^{2^k} l'emporte sur la croissance des A_k et que la composition de la suite de changements de coordonnées converge, on obtiendra à la limite de vraies constantes

$$(\chi_i^\infty)_{i=1\cdots n} \in \cap_k G_k \,,$$

c'est-à-dire des tores lagrangiens analytiques.

Plus précisément, on raisonne comme suit : ayant fixé μ, on décompose le Hamiltonien analytique réel $H = F_\mu$ en une somme $H_0(x) + H_1(x, y)$ de fonctions analytiques*, dans laquelle la "perturbation" H_1 (ou plutôt sa complexifiée) vérifie

$$|H_1(x, y)| \leq M$$

pour tous les (x, y) tels que x appartienne à un certain domaine G de C^n et y vérifie $|\mathrm{Im} y| \leq \rho$.

On cherche alors la fonction génératrice $S(\chi, y) = \chi \cdot y + S_1(\chi, y)$ d'un changement de coordonnées symplectique analytique

$$(x, y) \mapsto (\chi, w)\,,$$

qui transforme H en une somme $H_0^1(\chi) + H_1^1(\chi, w)$ telle que

$$|H_1^1(\chi, w)| \leq A_1 M^2$$

dès que χ appartient à un domaine G_1 et w vérifie $|\mathrm{Im} w| \leq \rho_1$.

Comme dans la première étape de la construction des séries de Lindstedt, on est confrontés à l'équation

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}(\chi) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial y}(\chi, y) + H_1(\chi, y) = \text{ expression indépendante de } y\,,$$

mais on ne cherche maintenant à la résoudre qu'approximativement et pour χ appartenant à G_1.

Deux stratégies sont possibles :

(i) celle de Kolmogorov (qu'a reprise Moser), où (supposant qu'il n'y a pas de petite torsion, c'est-à-dire pas de dégénérescence), on commence par fixer un vecteur de fréquences ω tel que

$$\forall k \in Z^n - \{0\}\,, \, |k \cdot \omega| \geq \frac{K}{|k|^\nu}\,,$$

et un x^0 vérifiant $\omega^0(x^0) = \frac{\partial H_0}{\partial x}(x^0) = \omega$. On ne retient alors de H_0 que les trois propriétés suivantes :

* Suivant que l'on considère ou non un problème non dégénéré, on posera $H_0 = F_0$ ou $H_0 = F_0 + \mu F_1$; dans le deuxième cas cela suppose qu'on ait pu rendre F_1 indépendant des angles y par changement de coordonnées.

1) le tore d'équations $x = x^0$ est invariant,

2) la dynamique sur ce tore est donnée par $\frac{dy}{dt} = \omega$,

3) H_0 est non dégénéré en x^0.

Ces trois propriétés sont résumées dans la formule

$$H_0(x) = h_0 + \omega \cdot (x - x^0) + Q(x - x^0, x - x^0) + O(|x - x^0|^3),$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée (qui pourrait d'ailleurs dépendre des angles y, auquel cas la condition de non-dégénérescence porte sur sa moyenne sur le tore T^n). On cherche alors à montrer l'existence d'un changement de coordonnées symplectique défini au voisinage du tore d'équation $x = x^0$, qui mette le Hamiltonien H sous la même forme. La dite forme étant invariante par les changements de coordonnées symplectiques

$$(x, y) \mapsto (\chi = x + O(|x - x^0|^2), w = y + O(|x - x^0|)),$$

c'est-à-dire ceux définis par une fonction génératrice

$$S(\chi, y) = \chi \cdot y + O(|\chi - x^0|^2),$$

on ne perd rien en se limitant au groupe des changements de coordonnées symplectiques définis par des fonctions génératrices affines en $(\chi - x^0)$:

$$S(\chi, y) = A(y) + B(y) \cdot (\chi - x^0).$$

A chaque étape, on ne retient donc de la construction des séries de Lindstedt à fréquences fixes que la partie affine de la série formelle en $\chi - x^0$ qui définit S_1. Autrement dit, on résoud une équation de la forme

$$\omega^0(\chi) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial y}(\chi, y) + H_1(\chi, y) = C_1(\chi) + O(|\chi - x^0|^2),$$

en choisissant α_1 de façon que $\frac{\partial C_1}{\partial \chi}(x^0)$ s'annule (ce qui permet de remplacer $C_1(\chi)$ par $C_1(x^0)$). S'il n'y avait pas de problème de petits dénominateurs (ce qui se produit s'il n'y a qu'un degré de liberté, cas qu'on conseille au lecteur d'expliciter), $\frac{\partial S_1}{\partial y}$ serait exactement d'ordre M et on obtiendrait à l'issue de ce premier changement de coordonnées un hamiltonien de la forme

$$h_1 + \omega \cdot (\chi - x^0) + Q_1(y)(\chi - x^0, \chi - x^0) + 0(|\chi - x^0|^3) + O(M^2),$$

où la constante h_1 et la forme quadratique $Q_1(y)$ diffèrent respectivement de h_0 et $Q(y)$ par des termes de l'ordre de M. Si M est assez petit, la condition de non-dégénérescence n'est pas détruite et on peut recommencer en remplaçant M par M^2 et ainsi de suite.

En réalité, les petits dénominateurs introduisent des corrections dans ces estimations : de l'hypothèse sur $|H_1|$, on déduit que le coefficient de Fourier $h_k(x)$ de $H_1 = \sum h_k(x)e^{i(k\cdot y)}$ vérifie

$$|h_k(x)| \leq Me^{-|k|\rho};$$

le coefficient de Fourier correspondant $s_k(x)$ de S_1 vérifie donc

$$|s_k(x)| \leq \frac{|k|^\nu}{K} Me^{-|k|\cdot\rho}.$$

On en déduit une inégalité du même type pour les coefficients de Fourier de $\frac{\partial S_1}{\partial y}$ puis une estimation de la forme

$$\left|\frac{\partial S_1}{\partial y}\right| \leq \text{constante} \times (\rho - \epsilon - \rho_1)^{-n} \times M$$

dès que y vérifie $|\text{Im}y| \leq \rho_1$.

On peut alors montrer (il faut travailler !) la convergence du processus, et donc l'existence d'un tore lagrangien invariant analytique sur lequel les équations se résuisent à $\frac{dy}{dt} = \omega$. Un tel théorème est par exemple énoncé dans le court article de Moser intitulé *Construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations*, paru dans les *Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo (1969)*, page 65.

Note : Je dois à A. Albouy de m'avoir montré que ce qu'Arnold indique à tort dans *Petits dénominateurs III* comme étant la méthode de Kolmogorov (qu'il n'adopte pas), et qui consiste en le choix d'un S_1 solution de l'équation

$$\omega \cdot \frac{\partial S_1(\chi, y)}{\partial y} + H_1(\chi, y) = C_1(\chi),$$

ne permet pas d'itérer le changement de coordonnées. On trouve en effet à la première étape un Hamiltonien de la même forme que celui donné par la méthode de Kolmogorov, à l'addition près d'un terme linéaire en $\chi - x^0$ d'ordre* M, dont on peut d'ailleurs supposer que la moyenne en y est nulle. Si un tel terme est bien d'ordre M^2 dans un domaine où $|\chi - x^0|$ est d'ordre M, il en est de même du terme quadratique qui contrôle la torsion, d'où un sérieux problème.

* on oublie ici l'influence des petits dénominateurs.

(ii) celle d'Arnold qui, nous l'avons dit, se trouve déjà en germe chez Poincaré : on écrit

$$\omega^0(\chi)\cdot\frac{\partial S_1}{\partial y}+H_1=\left[\omega^0(\chi)\cdot\frac{\partial S_1}{\partial y}+H_1^N\right]+\left[H_1-H_1^N\right],$$

où H_1^N est la somme des harmoniques de H_1 d'ordre $\leq N$:

$$H_1^N(\chi,y)=\sum_{|k|=1}^{N}h_k(\chi)e^{ik\cdot y}.$$

On égale le premier crochet à la moyenne $\bar{H}_1^N(\chi)$ de $H_1^N(\chi,y)$, et on choisit le nombre N de façon que $H_1-H_1^N$ soit d'ordre M^2. L'avantage de la méthode est que les conditions sur χ pour qu'il n'y ait pas de dénominateur nul (resp. pour avoir une bonne estimation de $\frac{\partial S_1}{\partial y}$) sont d'éviter un nombre *fini* de résonances (resp. un petit voisinage de ce nombre fini de résonances); plus précisément, s'il n'y a pas de petite torsion, S_1 sera définie dans l'*ouvert*

$$G_{K,\nu}^N=\left\{\chi,\forall k,0<|k|\leq N,\left|k\cdot\omega^0(\chi)\right|\geq\frac{K}{|k|^\nu}\right\};$$

l'inconvénient de la méthode est qu'en itérant indéfiniment le procédé, on ne contrôle pas exactement les fréquences pour lesquelles on prouve la convergence (on intersecte les $G_{K,\nu}^N$ privés d'un "petit voisinage du bord" pour les valeurs successives $N_1<N_2<\cdots$).

Arnold montre ainsi l'existence d'un ensemble de Cantor (de mesure de Lebesgue positive) de tores lagrangiens invariants sur lesquels la dynamique est quasi-périodique; la bonne dépendance en μ de ces tores, qui, comme nous l'avons dit, peut être prouvée simplement en suivant la démonstration de Zehnder, implique alors la convergence des séries de Lindstedt à fréquences fixées dans le cas non-dégénéré. Notons qu'on ne dispose encore d'aucune démonstration directe de la convergence de ces séries ! Enfin, s'il ne croyait pas à cette convergence, Poincaré n'en a pas pour autant écarté l'éventualité : les ligne qui suivent sont un remarquable témoignage de son génie.

> On peut enfin se demander ce qui arriverait si l'on choisissait les valeurs moyennes des fonctions φ_i et ψ_i de telle sorte que $n_i=n_i^0$, $n_i^1=n_i^2=\cdots=n_i^p=\cdots=0$. Dans ce cas, les n_i ne dépendent plus de μ, mais seulement des x_i^0. Ne peut-il pas arriver que les séries (2) convergent quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement

choisies ? Supposons pour simplifier qu'il y ait deux degrés de liberté; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ? Les raisonnements de ce chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.

H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles*
paragraphe 149, p. 104 (1893).

N.B. Comme le signale J. Moser au début de *Stable and random motions in dynamical systems*, on trouve dans le volume 35 (1912) des *Acta Mathematica* un ensemble, édité par Mittag-Leffler, de lettres de Weierstrass qui ont trait à ces problèmes de convergence (en particulier pages 31 et 56) : contrairement à Poincaré, Weierstrass croyait à la convergence des séries représentant les mouvements quasi-périodiques. J. Moser pense même que c'est en prenant connaissance des critiques de Weierstrass au mémoire de 1889 que Poincaré aurait ajouté le fameux paragraphe 149, mais ce point n'est pas établi.

8) Stabilité du système solaire ?

Par système solaire il faut entendre ici un problème planétaire de $1+n$ corps dans lequel les orbites des n planètes sont presque circulaires (de même orientation) et presque coplanaires. Le système hamiltonien correspondant est du même type que celui décrit à la fin du paragraphe 6 (Problème des trois corps dans le plan), à deux différences près :

(*i*) le système séculaire associé n'est pas complètement intégrable*,

(*ii*) il y a, indépendamment des valeurs des masses, une résonance dans le système (non indépendance des divers nœuds).

Le point (*i*) n'est pas trop gênant si on ne s'intéresse qu'à un petit voisinage de l'origine dans R^{4n} (coordonnées $\xi_1, \eta_1, p_1, q_1, \ldots \xi_n, \eta_n, p_n, q_n$, voir l'appendice 2) correspondant à des excentricités et des inclinaisons petites. La théorie de Birkhoff (issue directement des idées de *formes normales* de Poincaré) montre que, dans un tel voisinage, les systèmes séculaires sont très bien approchés par des systèmes complètement intégrables : une singularité *elliptique* est en général *formellement* complètement intégrable. On peut alors, quitte à changer la signification de μ, écrire la décomposition $F = F_0 + \mu F_1 + \cdots$ du Hamiltonien de façon que les systèmes séculaires $F_0 + \mu R_1$ associés soient complètement intégrables.

De même, (*ii*) n'est pas un obstacle à l'étude des séries de Lindstedt car la résonance en question traduit simplement l'existence d'intégrales premières (les composantes du moment cinétique), et disparait si on travaille sur le *système réduit*. Une difficulté nouvelle se présente cependant si l'on veut comprendre les séries associées à des mouvements de très petites excentricités : après réduction, les tores invariants de dimension non maximale ne correspondent plus à des orbites périodiques et leur perturbation pose le problème difficile de la perturbation des tores invariants normalement elliptiques de dimension non maximum (voir l'appendice 4 et l'article cité de Pöschel).

Bien que les séries de Lindstedt ne convergent pas (il n'y a pas de série à fréquences fixes) il est encore possible de montrer l'existence de tores lagrangiens invariants. C'est le fameux article d'Arnold sur la stabilité du système solaire, formellement analogue à son prédécesseur traitant du cas non-dégénéré, mais tenant compte en sus des deux types de dégénérescence (propre et limite) que l'on a discutés. En voici l'articulation au niveau formel :

* il n'y a pas de démonstration mathématique de cette assertion, ce qui n'empêche pas d'y croire. Dans le cas du système solaire, les travaux récents de J. Laskar mettent numériquement en évidence le fait que, sur deux cent millions d'années, l'orbite du système séculaire (d'ordre 2, il est vrai, voir appendice 2, note 2) qui nous concerne n'est pas quasi-périodique.

1) *élimination des angles rapides :* le Hamiltonien du Problème planétaire des $1+n$ corps dans R^3 peut être mis sous la forme

$$F(x',y',\xi,\eta) = F_0(x') + \mu F_1(x',y',\xi,\eta) + \cdots,$$

où μ est de l'ordre des masses des planètes (voir la note 1 à la fin de l'appendice 2). Les variables rapides (x',y') (essentiellement les demi grand axes et les longitudes moyennes des ellipses Kepleriennes qui servent d'approximations aux mouvements) varient dans un domaine $D^n \times T^n \subset R^n \times T^n$, alors que les variables lentes (ξ,η) varient dans $\Delta^{4n} \subset R^{4n}$ et décrivent la position dans R^3 de ces n ellipses*.

Le premier pas de la construction des séries de Lindstedt dans le cas dégénéré (paragraphe 5 remarque 1, où l'on choisit $\alpha_1'' = s_1'' = 0$) fournit la fonction génératrice

$$\chi' \cdot y' + \mu S_1(\chi',y',u,\eta)$$

d'un changement de coordonnées symplectique

$$(\chi',w',u,v) \mapsto (x',y',\xi,\eta),$$

défini comme jet d'ordre infini le long de $D_{K,\nu} \times T^n \times \Delta^{4n}$, qui transforme F en un hamiltonien C indépendant des angles rapides w' à l'ordre 1 des masses :

$$C(\chi',w',u,v) = C_0(\chi') + \mu C_1(\chi',u,v) + O(\mu^2).$$

Le système de Hamiltonien $C_0 + \mu C_1$ est (à l'addition près d'un éventuel terme $\mu\alpha_1' \cdot \omega^0(\chi')$ que nous ignorerons) le *système séculaire* de $F_0 + \mu F_1$, ou encore le *système séculaire à l'ordre 1 des masses* de F (voir la note 2 à la fin de l'appendice 2).

Remarque : on peut remplacer le domaine de définition du changement de coordonnées formel par le sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $D^n \times T^n \times \Delta^{4n}$ défini par

$$\mathcal{D} = \left\{ (\chi',w',u,v), \forall k' \in A_1(\chi',u,v), |k' \cdot \omega^0(\chi')| \geq \frac{K}{|k'|^\nu} \right\},$$

où $A_1(\chi',u,v) \subset Z^n - \{0\}$ est l'ensemble des n-uplets d'entiers non tous nuls k' tels que le coefficient du terme en $e^{i(k' \cdot y')}$ de la décomposition

* On se reportera à l'appendice 2 : $x'=(\Lambda_1 \cdots \Lambda_n)$, $y'=(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$, $\xi=(\xi_1,p_1 \cdots \xi_n,p_n)$, $\eta=(\eta_1,q_1 \cdots \eta_n,q_n)$. Il eut été préférable d'appeler p le nombre de planètes pour se conformer aux notations du paragraphe 5 mais nul n'est parfait.

de Fourier en y' de $F_1(\chi', y', u, \eta)$ soit non nul. $\mathcal{D}$ est le complémentaire d'un voisinage de

$$\mathcal{S} = \left\{(\chi', w', u, v), \exists k' \in A_1(\chi', u, v), k' \cdot \omega^0(\chi') = 0\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$, dont le rôle est fondamental dans les problèmes de non-intégrabilité, est appelé *ensemble séculaire* par Poincaré. Notons que $C_0(\chi') = F_0(\chi')$ et $C_1(\chi', u, v)$, somme de $\alpha_1' \cdot \omega^0(\chi')$ et de la moyenne sur T^n (coordonnées w') de $F_1(\chi', w', u, v)$, sont tous deux définis non seulement sur $\mathcal{D}$, mais en fait sur le domaine $D^n \times T^n \times \Delta^{4n}$ tout entier (à l'exception peut être d'un petit voisinage du bord). Cependant, au voisinage de $\mathcal{S}$, certaines combinaisons des angles rapides deviennent lentes et on ne peut plus les éliminer par moyennisation. C'est le domaine des *séries de Bohlin* où certains tores résonants de $C_0 + \mu C_1$ sont remplacés par des tores invariants de dimension inférieure et les variétés invariantes associées à ceux d'entre eux qui sont hyperboliques (à un degré de liberté, c'est le remplacement d'une orbite périodique (tore T^1) par le flot d'un "pendule").

2) *Mise sous forme normale de Birkhoff du système séculaire :*
Le paragraphe 5 nous a appris que l'on pouvait construire des séries de Lindstedt chaque fois que le système séculaire $C_0 + \mu C_1$ était complètement intégrable, c'est-à-dire chaque fois que les systèmes C_1 (paramétrés par χ') l'étaient. Ce n'est pas *a priori* le cas lorsqu'on s'intéresse aux mouvements dans l'espace R^3 mais la théorie de Birkhoff, très proche de l'application que fait Poincaré des séries de Lindstedt dans le chapitre X, montre qu'au voisinage de l'origine (qui est un point singulier de C_1 pour chaque valeur de χ', voir l'appendice 2), il existe un changement de coordonnées symplectique

$$(u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$$

défini par une fonction génératrice $\Sigma(\chi', \tilde{u}, v)$ dépendant du paramètre χ', qui transforme C_1 en un hamiltonien commutant* à des termes d'ordre $2k + 2$ près avec la partie quadratique de son développement de Taylor. Il suffit pour cela que les valeurs propres du champ hamiltonien linéaire défini par ce dernier hamiltonien évitent un nombre fini de résonances (voir J. Moser, *Lectures on Hamiltonian systems, Memoirs of the AMS, 1968*, qui traite également le cas résonant). Le changement de coordonnées symplectique

$$(\chi', w', u, v) \mapsto (\tilde{\chi}', \tilde{w}', \tilde{u}, \tilde{v})$$

* au sens du crochet de Poisson, ce qui équivaut à l'annulation du crochet de Lie des champs hamiltoniens associés.

défini par la fonction génératrice

$$\tilde{\chi}' \cdot w' + \Sigma(\tilde{\chi}', \tilde{u}, v)$$

est défini sur $D^n \times T^n \times \Delta^{4n}$ tout entier (à l'exception d'un petit voisinage du bord) et transforme $C_0(\chi') + \mu C_1(\chi', u, v)$ en $\tilde{C}_0(\tilde{\chi}') + \mu \tilde{C}_1(\tilde{\chi}', \tilde{u}, \tilde{v})$, où

$$\tilde{C}_1(\tilde{\chi}', \tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{1 \leq |j| \leq k} c_j(\tilde{\chi}')(\tilde{u}_1^2 + \tilde{v}_1^2)^{j_1} \cdots (\tilde{u}_{2n}^2 + \tilde{v}_{2n}^2)^{j_{2n}}$$

$$+ 0\left(\sum (\tilde{u}_i^2 + \tilde{v}_i^2)^{k+1}\right).$$

Comme nous l'avons remarqué, il y a une résonance dans le système (voir l'appendice 2), mais la symétrie qu'elle traduit implique justement l'annulation des termes qui feraient obstruction à l'existence du changement de coordonnées (on pourrait également travailler dans le système après réduction où ce problème disparait).

Se limitant à un voisinage de l'origine dans Δ^{4n} de la forme

$$\sum_{j=1}^{2n} (\tilde{u}_j^2 + \tilde{v}_j^2) < \epsilon,$$

et supposant que

$$\mu = \kappa \epsilon^{k+1}, \quad \kappa < 1,$$

on peut choisir $\tilde{\mu} = \epsilon^{k+1}$ comme nouveau petit paramètre, et écrire le nouvel hamiltonien sous la forme

$$H_0(\tilde{\chi}') + \tilde{\mu} H_1(\tilde{\chi}', \tilde{u}, \tilde{v}) + 0(\tilde{\mu}^2),$$

où $H_0 + \tilde{\mu} H_1$ est maintenant complètement intégrable. Il ne reste plus qu'à se placer dans des coordonnées action-angle de ce système intégrable (ou plutôt du système obtenu par réduction du moment cinétique) pour satisfaire aux exigences du paragraphe 5 et prouver l'existence de séries de Lindstedt dont les fréquences*

$$\Omega = (\Omega_0, \tilde{\mu}\Omega_1) \in R^n \times R^{2n-2}$$

vérifient

$$\begin{cases} \forall k = (k', k'') \in (Z^n - \{0\}) \times (Z^{2n-2} - \{0\}), \\ |k' \cdot \Omega^0| \geq \dfrac{K}{|k'|^\nu}, \quad |k'' \cdot \Omega^1| \geq \dfrac{K}{|k''|^\nu}. \end{cases}$$

* Dans l'espace de phases non réduit, il y a une fréquence de plus (une précession commune des nœuds, voir l'appendice 2), ce qui donne pour la dimension des tores n (fréquences rapides) + $2n-1$ (fréquences lentes : n pour les périhélies, $n-1$ pour les nœuds).

Ces séries ne convergent pas, mais la méthode d'Arnold s'applique encore au système réduit, et fournit des tores lagrangiens invariants analytiques de fréquences $\Omega = (\Omega_0, \tilde{\mu}\Omega_1) \in R^n \times R^{2n-2}$ telles que

$$\forall k = (k', k'') \in Z^n \times Z^{2n-2} - \{(0,0)\},\ |k \cdot \Omega| \geq \begin{cases} \frac{K}{|k|^\nu} \text{ si } k' \neq 0, \\ \frac{\tilde{\mu}K}{|k|^\nu} \text{ sinon} \end{cases}.$$

On notera que ce ne sont pas toutes les fréquences pour lesquelles les séries de Lindstedt sont définies.

L'une des difficultés de la démonstration est de vérifier que la *torsion* ne s'annule pas; bien que l'affirmant dans le cas général, Arnold ne le vérifie explicitement que dans le cas du Problème plan des $(1+2)$ corps, et dans la limite d'un rapport infini des distances des deux planètes au soleil.

On trouvera dans l'appendice 2 l'interprétation de la condition

$$\mu < \tilde{\mu} = \epsilon^{k+1}$$

(Arnold fait fonctionner sa démonstration avec $k = 3$) : ϵ est d'ordre 2 en les excentricités et les inclinaisons des ellipses séculaires, et la condition est que les masses soient assez petites par rapport aux excentricités et aux inclinaisons * pour qu'on évite le problème de la dégénérescence limite évoqué dans le paragraphe 6.

On obtient ainsi dans l'espace de phase du problème (avant ou après réduction) un ensemble de Cantor (de mesure positive) de tores lagrangiens invariants. On sait bien que ceci ne prouve la stabilité des mouvements que dans le cas de deux degrés de liberté, laissant dans les autres cas la porte ouverte à une éventuelle *diffusion d'Arnold*, très lente mais inexorable à (très !) long terme. C'est une forme de stabilité certes moins forte, mais plus rigoureuse, que celles de Laplace ou Poisson (appendice 2, note 2). Rappelons cependant que les valeurs de $\tilde{\mu}$ auxquelles le théorème s'applique sont beaucoup trop petites pour être réalistes.

Quant aux tores invariants de dimension non maximale, le théorème d'Eliasson, Rüssmann, et Pöschel (voir l'article de Pöschel) permet sans doute d'en montrer l'existence dans les cas de dégénérescence limite (tores invariants normalement elliptiques) mais jusqu'à maintenant seul le cas du problème plan des $1+2$ corps a été traité complètement : l'article cité de B. Lieberman prouve l'existence, lorsque le rapport des grands axes est assez petit, de tores invariants de dimension trois correspondant à des mouvements dans lesquels les directions des périhélies

* elles-mêmes supposées petites pour que le système séculaire soit presque intégrable.

des deux planètes restent indéfiniment proches (perturbations des mouvements décrits dans l'appendice 1). Dans le problème spatial des 1+2 corps, il serait intéressant de comprendre ce que deviennent les tores invariants du système séculaire correspondant à la singularité $\Sigma^{\odot}$ (appendice 2, figure 2.3). Malheureusement, dans le cas planétaire, ces tores sont normalement elliptiques et ont deux dimensions de moins que les tores lagrangiens, ce qui rend leurs perturbations difficiles à étudier (appendice 4). Lorsque les inclinaisons sont assez grandes, cependant, ces tores deviennent normalement hyperboliques et il est beaucoup plus facile de controler leur destin dans une perturbation; une telle généralisation au cas où les mouvements moyens sont incommensurables, de la théorie des orbites périodiques de la troisième sorte de Poincaré, est faite dans l'article cité de Jefferys et Moser.

Il n'existe par contre aucune théorie des perturbations de tores résonants (i.e. feuilletés par des tores invariants de dimension inférieure) : une telle théorie serait l'analogue pour des tores invariants d'une théorie des orbites périodiques de deuxième espèce*.

En définitive, ce n'est que dans le cas du *Problème restreint circulaire plan des trois corps*, qui se ramène à un système hamiltonien à deux degrés de liberté par passage au repère tournant, que la stabilité est effectivement prouvée ainsi que l'existence des tores (ici orbites périodiques) de dimension non maximale. Ce système, bien qu'analytiquement beaucoup plus compliqué, ressemble par les dimensions à l'exemple simple traité par Poincaré dans le chapitre XII (appendice 3).

N.B. Merci à Alain Albouy pour un premier survol du volume II des *Méthodes nouvelles* et de nombreuses corrections des premières versions de ce texte, à Michel Herman pour son aide éclairée dans l'exposition des problèmes de convergence, et à J. Laskar pour de fructueuses discussions qui m'ont aidé à garder un peu les pieds sur les planètes. Merci également au Bureau des Longitudes, au Département de Mathématiques de l'Université de Nice, à D. Bennequin et aux organisateurs des "Moments symplectiques" à Luminy, aux organisateurs du colloque Epistémologie et Géométrie, et à l'E.N.S. de Lyon, de m'avoir permis d'exposer certaines parties de ces notes à différents stades de ma compréhension du sujet.

* Voir cependant les travaux de Trechtchov sur l'apparition de tores invariants normalement hyperboliques.