NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU BUREAU DES LONGITUDES

S037

MÉTHODES DE PERTURBATION EN MÉCANIQUE CÉLESTE

J.L. SAGNIER

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes
UA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
75014 Paris

février 1991

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU BUREAU DES LONGITUDES

S037

MÉTHODES DE PERTURBATION EN MÉCANIQUE CÉLESTE

J.L. SAGNIER

Service des Calculs et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes
UA 707
77, avenue Denfert-Rochereau
75014 Paris

février 1991

1. – SYSTÈMES DE PERTURBATION

1.1. – INTRODUCTION.

1.1.1. - Le présent cours, enseigné pendant les années universitaires 1989-1990 et 1990-1991, fait partie de l'option "Mécanique céleste" du DEA "Astronomie fondamentale, mécanique céleste et géodésie" de l'Observatoire de Paris. Il est un prolongement du cours de tronc commun professé par M.B. Elmabsout sous le titre "Bases analytiques de la mécanique céleste". L'objet de ce dernier est la présentation de méthodes de mécanique analytique, construites en formulation hamiltonienne, en vue de leur application à la mécanique céleste.

Il apparaît que de nombreux problèmes posés par l'astronomie dynamique peuvent être abordés avec avantage par cette voie. Cependant, ils conduisent à envisager des systèmes d'équations différentielles canoniques *non* séparables, ce qui constitue une difficulté essentielle. Une exception notable est celle du problème de Képler (étudié dans le cours de M.B. Elmabsout), qui est, lui, un des rares problèmes classiques séparables.

Une situation courante dans les applications est celle où l'on rencontre un système non séparable, mais "voisin" d'un système lui-même séparable (c'est justement, en général, celui du problème de Képler).

Historiquement, l'apparition fréquente de systèmes différentiels de cette nature a été le motif du développement de méthodes adaptées à ces situations : ce sont les méthodes de perturbation. Elles ont été établies "intuitivement" depuis Newton par des mathématiciens et astronomes comme Laplace, Lagrange, Le Verrier, Delaunay (etc), puis formalisées "mathématiquement" à la fin du siècle dernier par Poincaré (et d'autres).

L'exposé de telles méthodes est l'objet de ce cours.

1.1.2. - Sans nous imposer dès maintenant une formulation hamiltonienne, envisageons une famille de systèmes différentiels d'ordre $n \in N^*$, définis dans le champ réel :

$$\dot{x}_j = f_j(x_k, t, \varepsilon) \qquad (j, k = 1, 2, ..., n), \tag{1.1}$$

dépendant d'un "petit paramètre" ε, c'est à dire d'un paramètre réel défini dans un voisinage convenable de l'origine. Conformément à la notation habituelle en mécanique, le point $(\dot{})$ désigne la dérivation d/dt par rapport à la variable indépendante t (temps). Ici, les f_j sont des applications analytiques d'un domaine convenable $\Omega \subset R^n \times R \times R$ dans R^n. Sauf nécessité, on ne précisera plus dans la suite ce genre de conditions : en général, on aura affaire à de "bonnes fonctions". Considérons maintenant le système particulier, appartenant à la famille (1.1), défini en fixant $\varepsilon = 0$:

$$\dot{x}_j = f_j(x_k, t, 0) \qquad (j, k = 1, 2, ..., n). \tag{1.2}$$

(Dans la suite, on n'indiquera plus le domaine de définition des indices entiers figurant dans une équation lorsqu'il sera le même que dans l'équation précédente qui contient les mêmes indices).

La situation qui nous intéresse est celle où l'on connaît une information concernant les solutions de (1.2) - par exemple, l'expression de sa solution générale - sans disposer de l'information analogue relative aux solutions du système (1.1). On peut alors espérer que pour ε "suffisamment petit", les systèmes (1.1) soient "assez voisins" du système (1.2) pour qu'une technique idoine nous permette d'utiliser ce que l'on sait de ce dernier afin d'améliorer notre connaissance des solutions de (1.1).

Lorsque c'est le cas, on dira :

(a) que (1.1) est un système "perturbé" (ou "troublé");
(b) que (1.2) est le système "non perturbé" (ou "non troublé") associé à la famille (1.1);
(c) et que la technique idoine est une "méthode de perturbation".

1.1.3. - On vient de présenter la forme la plus générale (1.1) des systèmes de perturbation. Quand on rencontre de tels systèmes, il est généralement préférable de leur appliquer avant toute autre étude des changements de variables adaptés à la situation.

Dans le cas général (non hamiltonien), cette transformation de variables est celle issue de la méthode de la variation des constantes, que nous rappellerons. Puis nous en construirons une variante adaptée au cas hamiltonien et liée aux variables action angle. Nous appliquerons ces transformations à deux exemples importants : l'oscillateur quasi harmonique (qui est une source d'exemples simples mais instructifs), et le problème quasi képlérien (qui est l'exemple typique en mécanique céleste).

1.2. – MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES.

1.2.1. - Supposons connue la solution générale du système non perturbé (1.2), sous la forme :

$$x_j = \varphi_j(t, y_k), \tag{1.3}$$

où les y_k sont n constantes d'intégration indépendantes, de sorte qu'on peut résoudre (1.3) par rapport à ces dernières :

$$y_j = \psi_j(t, x_k). \tag{1.4}$$

1.2.2. - Occupons nous maintenant du système perturbé (1.1). Appliquons lui la transformation de variables ($x \rightarrow y$) définie par (1.3), ou, dans l'autre sens, par (1.4). Il vient :

$$\dot{y}_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\left[t, \varphi_k(t, y_l)\right] + \sum_m \frac{\partial \psi_j}{\partial x_m}\left[t, \varphi_k(t, y_l)\right] \cdot f_m\left[\varphi_k(t, y_l), t, \varepsilon\right] \tag{1.5}$$

$$(j, k, l, m = 1, 2, ..., n).$$

Lorsque ε est nul (cas non perturbé), les y_j sont des constantes et les dérivées $\dot{y}_j$ sont nulles, de sorte que :

$$0 = \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\left[t, \varphi_k(t, y_l)\right] + \sum_m \frac{\partial \psi_j}{\partial x_m}\left[t, \varphi_k(t, y_l)\right] \cdot f_m\left[\varphi_k(t, y_l), t, 0\right]. \tag{1.6}$$

Posons alors :

$$g_j(y_k, t, \varepsilon) = \sum_m \frac{\partial \psi_j}{\partial x_m}\left[t, \varphi_k(t, y_l)\right] \cdot \left\{f_m\left[\varphi_k(t, y_l), t, \varepsilon\right] - f_m\left[\varphi_k(t, y_l), t, 0\right]\right\}.$$

Alors, retranchant (1.6) de (1.5), il vient le système transformé :

$$\dot{y}_j = g_j(y_k,\, t,\, \varepsilon). \tag{1.7}$$

1.2.3. - Le système en y_j, (1.7) a exactement la même forme que le système initial (1.1). Il possède cependant une particularité, qui est que, comme le montre la définition des g_j :

$$g_j(y_k,\, t,\, 0) = 0, \tag{1.8}$$

ce qui n'est pas nécessairement le cas pour les f_j. Cette particularité sera exploitée dans la suite.

1.3. - HAMILTONIEN QUASI SÉPARABLE.

1.3.1. - Le système perturbé que nous considérons maintenant est un système canonique à n degrés de liberté (son ordre est donc $2n$ et non n). Ses variables conjuguées sont q_j, p_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), qui jouent le rôle des x_j du paragraphe précédent. Son hamiltonien $\mathcal{F}(q, p, \varepsilon)$ dépend du "petit paramètre" ε. Ce système s'écrit :

$$\dot{q}_j = +\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_j}(q,\, p,\, \varepsilon), \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j}(q,\, p,\, \varepsilon),$$

et, en posant :

$$\mathcal{F}_0(q,\, p) = \mathcal{F}(q,\, p,\, 0),$$

le système non perturbé associé, lui aussi canonique, est :

$$\dot{q}_j = +\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p_j}(q,\, p), \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial q_j}(q,\, p).$$

1.3.2. - Nous supposerons le hamiltonien $\mathcal{F}$ quasi séparable, cette propriété étant définie par la condition suivante.

Une transformation canonique au sens strict $(q,\, p) \rightarrow (\varphi^*,\, I^*)$ conduit à un nouveau hamiltonien

$$F^*(\varphi^*,\, I^*,\, \varepsilon) = \mathcal{F}\left[q\,(\varphi^*,\, I^*),\, p\,(\varphi^*,\, I^*),\, \varepsilon\right] + \Delta F\,(\varphi^*,\, I^*),$$

où ΔF est une variation du hamiltonien liée à la transformation et qui, notamment, est nulle lorsque la transformation est indépendante du temps. Dans le cas non perturbé ($\varepsilon = 0$), le nouveau hamiltonien est :

$$\begin{aligned} F_0^*(\varphi^*,\, I^*) &= F^*(\varphi^*,\, I^*, 0) \\ &= \mathcal{F}_0\left[q\,(\varphi^*, I^*), p\,(\varphi^*,\, I^*)\right] + \Delta F\,(\varphi^*,\, I^*). \end{aligned}$$

Notre hypothèse de quasi séparabilité est que cette transformation canonique existe et soit telle que le nouveau hamiltonien non perturbé

$$F_0^*(\varphi^*,\, I^*) = F_0^*(-,\, I^*)$$

ne dépende pas des variables φ^*.

1.3.3. - On notera la parenté de cette transformation avec celle que l'on obtient par la méthode de Hamilton-Jacobi (voir cours de M.B. Elmabsout). Cependant, dans cette dernière, on veut que le nouveau hamiltonien soit indépendant de φ^* et de I^*. Ici, on est moins exigeant, mais le système non perturbé :

$$\dot{\varphi}^* = +\frac{\partial F_0^*}{\partial I^*}(-, I^*), \qquad \dot{I}^* = -\frac{\partial F_0^*}{\partial \varphi^*}(-, I^*) = 0$$

n'en est pas moins aisément intégrable, sa solution générale étant :

$$\varphi^* = \varphi_0^* + \frac{\partial F_0^*}{\partial I^*}(-, I_0^*) \, . \, t \, , \qquad I^* = I_0^* ,$$

où φ_0^*, I_0^* sont les valeurs initiales de φ^*, I^*.

1.3.4. - Reprenant les relations :

$$\begin{aligned} F^*(\varphi^*, I^*, \varepsilon) &= \mathcal{F}[q(\varphi^*, I^*), p(\varphi^*, I^*), \varepsilon] + \Delta F(\varphi^*, I^*), \\ F_0^*(-, I^*) &= \mathcal{F}[q(\varphi^*, I^*), p(\varphi^*, I^*), 0] + \Delta F(\varphi^*, I^*), \end{aligned}$$

il vient l'expression du nouveau hamiltonien :

$$F^*(\varphi^*, I^*, \varepsilon) = F_0^*(-, I^*) + \mathcal{F}[q(\varphi^*, I^*), p(\varphi^*, I^*), \varepsilon] - \mathcal{F}[q(\varphi^*, I^*), p(\varphi^*, I^*), 0]. \tag{1.9}$$

1.3.5. - Dans les applications à la mécanique céleste, on a l'habitude de faire encore une transformation canonique étendue $(\varphi^*, I^*) \to (I, \varphi)$ qui comporte une interversion des variables et un changement d'échelle :

$$I_j = \lambda_j I_j^*, \quad \varphi_j = \mu_j \varphi_j^*.$$

On sait qu'une telle transformation conserve la forme canonique des équations à condition que $k = \lambda_j \mu_j$ soit indépendant de l'indice j et que le hamiltonien soit multiplié par $-k$. I et φ vérifient alors le système canonique de hamiltonien :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = -kF^*(\varphi^*, I^*, \varepsilon).$$

Posons alors :

$$F_0(I, -) = -kF_0^*[-, I^*(I)]$$

et :

$$R(I, \varphi, \varepsilon) = -k\{\mathcal{F}[q(I, \varphi), p(I, \varphi), \varepsilon] - \mathcal{F}[q(I, \varphi), p(I, \varphi), 0]\}.$$

Alors le hamiltonien définitif est :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I, -) + R(I, \varphi, \varepsilon),$$

où R s'annule avec ε.

C'est la forme classique d'un hamiltonien quasi séparable. Nous l'utiliserons dans les exemples des hamiltoniens voisins de celui de l'oscillateur harmonique et de celui du problème de Képler.

1.4. - L'OSCILLATEUR QUASI HARMONIQUE.

1.4.1. - L'oscillateur harmonique à un degré de liberté a pour hamiltonien :

$$\mathcal{F}_0(q,\, p) = \frac{1}{2}\,(p^2 + \omega^2 q^2).$$

Le système canonique associé s'écrit :

$$\dot{q} = +\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial p} = p, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial q} = -\omega^2 q,$$

ou, sous forme non canonique :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \qquad p = \dot{q}.$$

Si l'on pose

$$\zeta = exp \quad i\omega\, t,$$

sa solution générale est :

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\left(q_0 - i\,\frac{p_0}{\omega}\right)\zeta + \frac{1}{2}\left(q_0 + i\,\frac{p_0}{\omega}\right)\zeta^{-1}, \\ p &= \frac{1}{2}(i\omega q_0 + p_0)\zeta - \frac{1}{2}(i\omega q_0 - p_0)\zeta^{-1}, \end{aligned}$$

où $q_0,\, p_0$ sont les valeurs initiales de $q,\, p$. On peut bien entendu écrire ceci sous la forme réelle plus compacte :

$$q = q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{\omega}\sin\omega t, \quad p = -\omega q_0 \sin\omega t + p_0 \cos\omega t.$$

1.4.2. - Un problème "voisin" de celui de l'oscillateur harmonique (oscillateur quasi harmonique) peut être défini par le hamiltonien

$$(1.11) \qquad \mathcal{F}(q,\, p,\, \varepsilon) = \mathcal{F}_0(q,\, p) + \mathcal{R}(q,\, p,\, \varepsilon)$$

où $\mathcal{R}$ s'annule avec ε. On a donc bien :

$$\mathcal{F}(q,\, p,\, 0) = \mathcal{F}_0(q,\, p)$$

conforménent aux notations du paragraphe 1.3. Nous allons effectuer les transformations déjà présentées dans ce dernier.

1.4.3. - Construisons d'abord une transformation canonique $(q,\, p) \to (\varphi^*,\, I^*)$ telle que dans le cas non perturbé ($\varepsilon = 0$), le nouveau hamiltonien $F_0^*(-,\, I^*)$ soit indépendant de φ^*. Nous la chercherons indépendante du temps, de sorte qu'il y aura invariance du hamiltonien ($\Delta F = 0$). On a donc

(a) la condition de canonicité

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi^*}\frac{\partial p}{\partial I^*} - \frac{\partial q}{\partial I^*}\frac{\partial p}{\partial \varphi^*} = 1,$$

(b) et la condition d'invariance du hamiltonien

$$\frac{1}{2}\,(p^2 + \omega^2 q^2) = F_0^*(-,\, I^*).$$

Nous disposons ainsi de deux équations pour déterminer les trois fonctions inconnues $p(\varphi^*, I^*)$, $q(\varphi^*, I^*)$ et $F_0^*(-, I^*)$ qui sont donc largement indéterminées : on en profitera pour choisir une solution particulière aussi simple que possible.

1.4.4. - La deuxième condition montre que pour I^* fixé, (q, p) appartient à l'ellipse d'équations paramétriques :

$$q = \frac{\sqrt{2F_0^*}}{\omega} \sin g, \quad p = \sqrt{2F_0^*} \cos g$$

où g est un paramètre indépendant de I^*, mais non de φ^*. Substituons ces expressions dans la condition de canonicité :

$$\left[\frac{\sqrt{2F_0^*}}{\omega} \cos g \frac{dg}{d\varphi^*}\right]\left[\frac{dF_0^*/dI^*}{\sqrt{2F_0^*}} \cos g\right] - \left[\frac{dF_0^*/dI^*}{\omega\sqrt{2F_0^*}} \sin g\right]\left[-\sqrt{2F_0^*} \sin g \frac{dg}{d\varphi^*}\right]$$

$$= \frac{1}{\omega} \frac{dF_0^*}{dI^*} \frac{dg}{d\varphi^*} = 1.$$

Cette équation admet la solution particulière triviale :

$$F_0^*(-, I^*) = I^*, \quad g(\varphi^*) = \omega\varphi^*,$$

de sorte que le changement de variables cherché peut s'écrire :

(1.12) $$q(\varphi^*, I^*) = \frac{\sqrt{2I^*}}{\omega} \sin \omega\varphi^*, \; p(\varphi^*, I^*) = \sqrt{2I^*} \cos \omega\varphi^*,$$

le nouveau hamiltonien se réduisant à I^*.

1.4.5. - Appliquons cette transformation canonique (1.12) au hamiltonien perturbé (1.11).

Le nouveau hamiltonien perturbé est :

$$F^*(\varphi^*, I^*, \varepsilon) = F_0^*(-, I^*) + R^*(\varphi^*, I^*, \varepsilon),$$

avec :

$$R^*(\varphi^*, I^*, \varepsilon) = \mathcal{R}[q(\varphi^*, I^*), p(\varphi^*, I^*), \varepsilon]$$
$$= \mathcal{R}\left(\frac{\sqrt{2I^*}}{\omega} \sin \omega\varphi^*, \sqrt{2I^*} \cos \omega\varphi^*, \varepsilon\right)$$

Bien entendu, comme $\mathcal{R}$, R^* s'annule avec ε.

1.4.6.- Faisons enfin la transformation $(\varphi^*, I^*) \to (I, \varphi)$ définie par

$$I = I^*/\omega, \quad \varphi = \omega\varphi^*$$

(avec interversion des variables), qui est celle du paragraphe 1.3.5 avec $\lambda = \omega^{-1}$, $\mu = \omega$, $k = 1$. Alors, le nouveau hamiltonien est :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I, -) + R(I, \varphi, \varepsilon)$$

avec

$$
\begin{aligned}
F_0(I, -) &= -F_0^*(-, \omega I) = -\omega I, \\
R(I, \varphi, \varepsilon) &= -R^*\left(\frac{\varphi}{\omega}, \omega I, \varepsilon\right) \\
&= -\mathcal{R}\left(\sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin\varphi, \sqrt{2\omega I}\cos\varphi, \varepsilon\right),
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

R étant évidemment nul avec ε.

Les équations différentielles transformées sont ainsi

$$
\dot{I} = +\frac{\partial F}{\partial \varphi} = +\frac{\partial R}{\partial \varphi}, \qquad \dot{\varphi} = -\frac{\partial F}{\partial I} = \omega - \frac{\partial R}{\partial I}
\tag{1.14}
$$

et c'est sous cette forme que nous étudierons les problèmes voisins de celui de l'oscillateur harmonique.

1.5. – LE PROBLÈME QUASI KÉPLÉRIEN.

1.5.1. - Nous allons formuler de la même manière un problème voisin de celui de Képler. Ici, le potentiel non perturbé (newtonien) est :

$$
U_0(q) = \frac{m\mu}{r} = m\mu\,(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{-1/2},
$$

avec les notations suivantes :

μ : constante d'attraction,

m : masse du corps étudié,

q_j : coordonnées cartésiennes du vecteur de position,

r : norme du vecteur de position.

L'énergie cinétique est :

$$
T = \frac{1}{2} m\,(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2),
$$

les variables conjuguées des q_j sont :

$$
p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = m\dot{q}_j,
$$

de sorte que :

$$
T(p) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).
$$

D'où le hamiltonien non perturbé :

$$
\mathcal{F}_0(q, p) = T(p) - U_0(q) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - m\mu\,(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{-1/2}.
$$

1.5.2. - Un problème voisin du problème káplérien peut être défini par un potentiel perturbé :

$$
U(q, \varepsilon) = U_0(q) + m\mathcal{R}(q, \varepsilon)
$$

où la fonction perturbatrice $\mathcal{R}$ s'annule avec ε. Le hamiltonien perturbé sera donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q, p, \varepsilon) &= T(p) - U(q, \varepsilon) \\ &= \left[\mathcal{F}_0(q, p) + U_0(q)\right] - \left[U_0(q) + m\mathcal{R}(q, \varepsilon)\right] \\ &= \mathcal{F}_0(q, p) - m\mathcal{R}(q, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.5.3. - La transformation canonique $(q, p) \longrightarrow (\varphi^*, I^*)$ s'obtient en plusieurs étapes, décrites en détail dans le cours de M.B. Elmabsout.

Soient les éléments orbitaux classiques :

a : demi grand axe,	τ : instant de passage au périastre,
e : excentricité,	ω : argument de la latitude du périastre,
$\mathcal{I}$: inclinaison,	Ω : longitude du noeud ascendant,

l'anomalie moyenne :

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t - \tau)$$

et l'énergie du cas non perturbé :

$$E = \mathcal{F}_0(q, p) = -\frac{m\mu}{2a}.$$

On fait une transformation canonique conduisant à des coordonnées sphériques, puis on applique la méthode de Hamilton Jacobi. Cette dernière permet de définir une seconde transformation canonique conduisant à des variables conjuguées (B, A). Dans le système transformé, et pour le cas non perturbé ($\varepsilon = 0$), le nouveau hamiltonien est nul, de sorte que les composantes de B et A sont alors constantes (variables de Jacobi).

Leur expression est :

$$\begin{cases} B_1 = -\tau = M\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} - t, & A_1 = mE = -\frac{m^2\mu}{2a}, \\ B_2 = \omega, & A_2 = m\sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}, \\ B_3 = \Omega, & A_3 = m\sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}\,.\cos\mathcal{I}. \end{cases}$$

1.5.4. - L'étape suivante consiste à construire une nouvelle transformation $(B, A) \longrightarrow (\varphi^*, I^*)$, canonique, ces dernières variables constituant la première forme des variables de Delaunay :

$$\begin{cases} \varphi_1^* = l^* = \sqrt{m}\,.\,M, & I_1^* = L^* = \sqrt{m\mu a}, \\ \varphi_2^* = g^* = \omega, & I_2^* = G^* = m\sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \\ \varphi_3^* = h^* = \Omega, & I_3^* = H^* = m\sqrt{\mu a(1 - e^2)}\,.\cos\mathcal{I}, \end{cases}$$

le nouveau hamiltonien non perturbé étant :

$$F_0^*(-, I^*) = F_0^*(L^*) = -\frac{m^2\mu^2}{2L^{*2}} = -\frac{m\mu}{2a} = E.$$

Ce hamiltonien n'est plus nul, donc la transformation canonique $(B, A) \longrightarrow (\varphi^*, I^*)$ dépend du temps. Mais il est égal à $\mathcal{F}_0(q, p)$, de sorte que la transformation canonique globale $(q, p) \longrightarrow (\varphi^*, I^*)$ est, elle, indépendante du temps.

1.5.5. - Appliquons maintenant la transformation $(q,\, p) \to (\varphi^*,\, I^*)$ au système perturbé de hamiltonien (1.15). Ce dernier étant invariant dans cette transformation, il devient :

$$F^*(\varphi^*,\, I^*,\, \varepsilon) = F_0^*(L^*) - mR^*(\varphi^*,\, I^*,\, \varepsilon),$$

où

$$R^*(\varphi^*,\, I^*, \varepsilon) = \mathcal{R}[\, q\,(\varphi^*,\, I^*),\, \varepsilon\,]$$

s'annule avec ε.

1.5.6. - Faisons enfin la transformation canonique étendue $(\varphi^*,\, I^*) \to (I,\, \varphi)$ définie comme dans le paragraphe 1.3.5, avec :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{m}},\ \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{m}},\ \lambda_2 = \frac{1}{m},\ \mu_2 = 1,\ \lambda_3 = \frac{1}{m},\ \mu_3 = 1; \quad k = \frac{1}{m}.$$

Les nouvelles variables (interverties) sont la deuxième forme des variables de Delaunay, définies par :

$$\begin{cases} I_1 = L = \sqrt{\mu a}, & \varphi_1 = l = M, \\ I_2 = G = \sqrt{\mu a\,(1-e^2)}, & \varphi_2 = g = \omega, \\ I_3 = H = \sqrt{\mu a\,(1-e^2)}\,.\cos \mathcal{I}, & \varphi_3 = h = \Omega. \end{cases}$$

Le nouveau hamiltonien est alors :

(1.16)
$$F\,(I,\, \varphi,\, \varepsilon) = F_0(L) + R\,(I,\, \varphi,\, \varepsilon),$$

où :

$$F_0(L) = -\frac{1}{m}F_0^*[\, L^*(L)\,] = \frac{\mu^2}{2L^2},$$

et :

$$\begin{aligned} R\,(I,\, \varphi,\, \varepsilon) &= -\frac{1}{m}\left[-mR^*(\varphi^*,\, I^*,\, \varepsilon)\right] \\ &= \mathcal{R}\left[\, q\,(I,\, \varphi),\, \varepsilon\,\right] \end{aligned}$$

Dans les applications pratiques en mécanique céleste, on utilise généralement les variables de Delaunay sous leur deuxième forme $(I,\, \varphi)$, et donc le hamiltonien (1.16). On voit que pour l'obtenir, il suffit d'ajouter au hamiltonien non perturbé $\mu^2/2L^2$ la fonction perturbatrice $\mathcal{R}$ exprimée en fonction de ces variables de Delaunay.

1.6. – EXERCICES.

1.6.1. - Déterminer la solution du système différentiel :

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\omega x_1,$$

(ω est une constante strictement positive) en fonction du temps t et des valeurs initiales $(y_1,\, y_2)$ de $(x_1,\, x_2)$.

On envisage maintenant le système perturbé :

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\omega x_1 + \varepsilon\omega x_1 x_2.$$

En utilisant la méthode du paragraphe 1.2, construire les équations aux variations associées aux variables y_1 et y_2 et montrer qu'elles ont la forme :

$$\dot{y}_j = \varepsilon\,(A_j \cos\omega t + B_j \sin\omega t + C_j \cos 3\omega t + D_j \sin 3\omega t),$$

où $j = 1,\ 2$ et les A_j, B_j, C_j, et D_j sont des fonctions de y_1 et y_2 que l'on déterminera.

1.6.2. - Soit le hamiltonien d'un oscillateur harmonique, perturbé, et à deux degrés de liberté :

$$\mathcal{F}(q,\, p,\, \varepsilon) = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2\, q_1^2 + \omega_2^2\, q_2^2 + 2\varepsilon\omega_1\omega_2 q_1 q_2).$$

Construire un changement de variables canoniques $(q,\, p) \rightarrow (I,\, \varphi)$ en s'inspirant du paragraphe 1.4 et déterminer l'expression du nouveau hamiltonien $F(I,\, \varphi,\, \varepsilon)$. Ecrire explicitement les équations canoniques associées à ces hamiltoniens, aussi bien en variables $(q,\, p)$ qu'en variables $(I,\, \varphi)$.

Déterminer la solution non perturbée ($\varepsilon = 0$) de valeurs $q_j = 0$, $p_j = p_{j0}$ pour $t = t_0$.

1.6.3. - On rappelle que le rapport du rayon vecteur r au demi grand axe a s'exprime dans le mouvement képlérien comme une série de Fourier de l'anomalie moyenne l, dont les cœfficients dépendent de l'excentricité e, et dont les termes principaux sont :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\,.\,\cos l - \frac{e^2}{2}\,.\,\cos 2l + 0\,(e^3).$$

On considère le potentiel perturbé :

$$U = \frac{m\mu}{r}\left(1 + \frac{\varepsilon a_0}{r}\right)$$

où a_0 est une constante et ε un petit paramètre.

Construire le hamiltonien associé à ce problème, en variables de Delaunay $(L,\, G,\, H;\, l,\, g,\, h)$. Il sera commode d'utiliser dans un premier temps les variables $(a,\, e,\, l)$. On négligera les termes de l'ordre de e^3.

Ecrire les équations en $\dot{L}$, $\dot{G}$, $\dot{H}$ et $\dot{l}$, $\dot{g}$, $\dot{h}$, dont les seconds membres pourront être exprimés en fonction de $(a,\, e,\, l)$.

2. - SÉRIES DE TAYLOR DU PETIT PARAMÈTRE.

2.1. - PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

2.1.1. - Reprenons le système perturbé (1.1) :

$$\dot{x}_j = f_j(x_k, t, \varepsilon) \qquad (j, k = 1, 2, ..., n). \tag{2.1}$$

La première méthode de perturbation qui, historiquement, ait été développée pour traiter ce type de systèmes, est fondée sur le théorème de Cauchy-Poincaré, et elle a été utilisée bien avant que ce théorème n'ait été établi. On connaît la proposition de Cauchy qui affirme que, les f_j étant analytiques dans un domaine

$$\Omega \subset \Re^n \times \Re \times \Re,$$

la solution de (2.1) correspondant à des conditions initiales données existe, est unique, et est analytique par rapport à la variable indépendante t ainsi que par rapport aux conditions initiales. Le théorème de Cauchy-Poincaré étend ce résultat en posant que cette solution est également analytique par rapport au petit paramètre ε.

La solution est donc somme d'une série convergente :

$$x_j = \sum_s \varepsilon^s x_j^{(s)} = x_j^{(0)} + \varepsilon x_j^{(1)} + \varepsilon^2 x_j^{(2)} + 0(\varepsilon^3) \qquad (s \in N), \tag{2.2}$$

et nous nous proposons de substituer au système (2.1) vérifié par x_j, un ensemble de systèmes vérifés par les $x_j^{(s)}$.

2.1.2. - Pour construire ces systèmes, nous faisons les opérations suivantes.

(a) On développe les fonctions analytiques f_j au voisinage de $\varepsilon = 0$.

$$f_j(x_k, t, \varepsilon) = \sum_\lambda \varepsilon^\lambda f_j^{(\lambda)}(x_k, t) \qquad (\lambda \in N), \tag{2.3}$$

avec :

$$f_j^{(\lambda)}(x_k, t) = \frac{1}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda f_j}{\partial \varepsilon^\lambda} (x_k, t, 0).$$

(b) On substitue (2.2) dans (2.3)

$$f_j(x_k, t, \varepsilon) = \sum_\lambda \varepsilon^\lambda f_j^{(\lambda)} \left(x_k^{(0)} + \sum_\mu \varepsilon^\mu x_k^{(\mu)}, t \right) \qquad (\lambda \in N, \mu \in N^*) \tag{2.4}$$

(c) On développe les $f_j^{(\lambda)}$ en série de Taylor au voisinage de $x_k = x_k^{(0)}$.

$$f_j^{(\lambda)}(x_k^{(0)} + \varepsilon x_k^{(1)} + \varepsilon^2 x_k^{(2)} + 0(\varepsilon^3), t) = f_j^{(\lambda)}(x_k^{(0)}, t) + \sum_u \frac{\partial f_j^{(\lambda)}}{\partial x_u} \left(x_k^{(0)}, t \right) . [\varepsilon x_u^{(1)} + \varepsilon^2 x_u^{(2)} + 0(\varepsilon^3)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_u\sum_v \frac{\partial^2 f_j^{(\lambda)}}{\partial x_u \partial x_v}\left(x_k^{(0)}, t\right) . \left[\varepsilon x_u^{(1)} + 0\ (\varepsilon^2)\right] . \left[\varepsilon x_v^{(1)} + 0\ (\varepsilon^2)\right] + 0\,(\varepsilon^3)$$

(2.5)
$$= f_j^{(\lambda)}(x_k^{(0)}, t) + \varepsilon \sum_u x_u^{(1)} \frac{\partial f_j^{(\lambda)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right)$$
$$+ \varepsilon^2\left[\sum_u x_u^{(2)}\frac{\partial f_j^{(\lambda)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \sum_u\sum_v x_u^{(1)} x_v^{(1)}\frac{\partial^2 f_j^{(\lambda)}}{\partial x_u \partial x_v}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right] + 0\,(\varepsilon^3).$$

(d) On substitue les développements (2.5) des $f_j^{(\lambda)}$ dans le développement (2.4) de f_j.

$$f_j(x_k, t, \varepsilon) = \left\{ f_j^{(0)}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \varepsilon \sum_u x_u^{(1)}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \varepsilon^2\left[\sum_u x_u^{(2)}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_u\sum_v x_u^{(1)} x_v^{(1)}\frac{\partial^2 f_j^{(0)}}{\partial x_u \partial x_v}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right]\right\}$$
$$+ \varepsilon\left\{ f_j^{(1)}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \varepsilon \sum_u x_u^{(1)}\frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right\}$$
$$+ \varepsilon^2\left\{ f_j^{(2)}(x_k^{(0)}, t)\right\} + 0\,(\varepsilon^3)$$
$$= f_j^{(0)}(x_k^{(0)}, t) + \varepsilon\left[\sum_u x_u^{(1)}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + f_j^{(1)}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right]$$
$$+ \varepsilon^2\left[\sum_u x_u^{(2)}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \sum_u\sum_v x_u^{(1)} x_v^{(1)}\frac{\partial^2 f_j^{(0)}}{\partial x_u \partial x_v}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right.$$
$$\left. + \sum_u x_u^{(1)}\frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + f_j^{(2)}\left(x_k^{(0)}, t\right)\right] + 0\,(\varepsilon^3),$$

qu'on peut écrire :

(2.6)
$$f_j(x_k, t, \varepsilon) =$$
$$f_j^{(0)}(x_k^{(0)}, t) + \sum_s \varepsilon^s\left[\sum_u x_u^{(s)}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \Phi_s\left(x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(s-1)}, t\right)\right]$$
$$(s \in N^*),$$

avec en particulier :

(2.7)
$$\Phi_1(x_k^{(0)}, t) = f_j^{(1)}(x_k^{(0)}, t),$$
$$\Phi_2(x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, t) = \sum_u\sum_v x_u^{(1)} x_v^{(1)}\frac{\partial^2 f_j^{(0)}}{\partial x_u \partial x_v}(x_k^{(0)}, t) + \sum_u x_u^{(1)}\frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial x_u}(x_k^{(0)}, t) + f_j^{(2)}(x_k^{(0)}, t).$$

2.1.3. - On déduit alors de (2.1), (2.2) et (2.6) :

$$\dot{x}_j = \dot{x}_j^{(0)} + \sum_s \varepsilon^s \dot{x}_j^{(s)} = f_j(x_k, t, \varepsilon)$$
$$= f_j^{(0)}(x_k^{(0)}, t) + \sum_s \varepsilon^s\left[\sum_u x_u^{(s)}\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u}\left(x_k^{(0)}, t\right) + \Phi_j^{(s)}\left(x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(s-1)}, t\right)\right].$$

Identifions les coefficients des mêmes puissances de ε de ces deux séries de Taylor de même somme. A l'ordre zéro en ε :

$$\dot{x}_j^{(0)} = f_j^{(0)}(x_k^{(0)}, t) = f_j(x_k^{(0)}, t, 0). \tag{2.8}$$

Cette relation montre que le terme principal $x_j^{(0)}$ de x_j vérifie le système non perturbé ($\varepsilon = 0$). C'est une propriété générale des solutions obtenues par des méthodes de perturbation. Conformément à notre hypothèse, nous en connaissons la solution générale et nous imposerons que $x_j^{(0)}$ soit cette solution générale. Elle dépend ainsi de n constantes arbitraires et indépendantes, de sorte que nous pourrons limiter la recherche des $x_j^{(s)}(s \in N^*)$ à celle de solutions particulières, sans pour autant limiter la généralité de la solution perturbée x_j.

A des ordres s strictement positifs en ε, il vient :

$$\dot{x}_j^{(s)} - \sum_u x_u^{(s)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u} \left(x_k^{(0)}, t\right) = \Phi_j^{(s)} \left(x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots x_k^{(s-1)}, t\right) \tag{2.9}$$

qui, pour $s = 1, 2, \dots$, etc., constitue l'ensemble des systèmes différentiels destinés à déterminer les $x_j^{(s)}$.

2.1.4. - Le système différentiel :

$$\dot{\xi}_j - \sum_u \xi_u \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u} \left(x_k^{(0)}(t), t\right) = \Phi_j(t) \tag{2.10}$$

est un système linéaire non homogène et à coefficients dépendant du temps. On supposera qu'on sait le résoudre (conformément à une remarque déjà faite, une solution particulière suffit).

Alors, par récurrence, on saura déterminer les $x_j^{(s)}$ jusqu'à une valeur de s aussi grande qu'on le souhaite, car les systèmes (2.9) auront toujours la forme (2.10). Ainsi, connaissant la solution (générale) non perturbée $x_j^{(0)}(t)$, on aura, pour $s = 1$:

$$\dot{x}_j^{(1)} - \sum_u x_u^{(1)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u} (x_k^{(0)}, t) = \Phi_j^{(1)} [x_k^{(0)}(t), t],$$

qui a la forme (2.10) et détermine donc $x_j^{(1)}(t)$. Puis, pour $s = 2$,

$$\dot{x}_j^{(2)} - \sum_u x_u^{(2)} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_u} (x_k^{(0)}, t) = \Phi_j^{(2)} [x_k^{(0)}(t), x_k^{(1)}(t), t],$$

qui, de même, détermine $x_j^{(2)}(t)$. Et ainsi de suite.

2.1.5. - On observera que l'exécution de la méthode présentée suppose la réalisation de deux hypothèses : notre capacité à calculer la solution générale du système non perturbé (2.8), et, d'autre part, notre capacité à déterminer une solution particulière de systèmes linéaires de la forme (2.10).

La première condition est une hypothèse de base de toute méthode de perturbation. En ce qui concerne la seconde, elle peut toujours être vérifiée. En effet, si l'on fait subir préalablement au système perturbé (2.1) la transformation de variables présentée dans le paragraphe 1.2 (méthode de la variation des constantes), on a vu que le système transformé est tel que les fonctions $f_j(x_k, t, 0)$, égales aux $f_j^{(0)}(x_k, t)$, sont identiquement nulles.

Donc (2.10) se réduit à:

$$\dot{\xi}_j = \Phi_j(t),$$

qui est immédiatement intégrable par quadratures.

2.2. – CAS DU HAMILTONIEN QUASI SÉPARABLE.

2.2.1. - Adaptons la méthode précédente à un hamiltonien quasi séparable mis sous la forme du paragraphe 1.3:

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I) + R(I, \varphi, \varepsilon), \tag{2.11}$$

où R s'annule avec ε. On développe ce hamiltonien en série de Taylor de ε au voisinage de l'origine, de sorte qu'en posant:

$$F_\lambda(I, \varphi) = \frac{1}{\lambda!}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}(I, \varphi, 0),$$

il vient:

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I) + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda F_\lambda(I, \varphi) \qquad (\lambda \in N^*).$$

Nous chercherons la solution du système canonique qui lui est associé sous la forme de séries de Taylor:

$$I = I^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda I^{(\lambda)}, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \varphi^{(\lambda)}.$$

Les équations canoniques vérifiées par I, φ s'écrivent ainsi:

$$\dot{I}^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \dot{I}^{(\lambda)} = 0 + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial F_\lambda}{\partial \varphi}\left(I^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda I^{(\lambda)}, \varphi^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \varphi^{(\lambda)}\right)$$

$$\dot{\varphi}^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \dot{\varphi}^{(\lambda)} = -\frac{\partial F_0}{\partial I}\left(I^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda I^{(\lambda)}\right) - \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial F_\lambda}{\partial I}\left(I^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda I^{(\lambda)}, \varphi^{(0)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \varphi^{(\lambda)}\right)$$

2.2.2. - On développe maintenant les seconds membres en séries de Taylor au voisinage de $I^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$.

$$\begin{aligned}
\dot{I}_j^{(0)} + \varepsilon \dot{I}_j^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{I}_j^{(2)} + 0(\varepsilon^3) = \\
0 + \varepsilon \Bigg\{ \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_j}\left(I^{(0)}, \varphi^{(0)}\right) + \sum_u \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_j \partial I_u}\left(I^{(0)}, \varphi^{(0)}\right) . \left[\varepsilon I_u^{(1)} + 0\,(\varepsilon^2)\right] \\
+ \sum_u \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_j \partial \varphi_u}\left(I^{(0)}, \varphi^{(0)}\right) . \left[\varepsilon \varphi_u^{(1)} + 0\,(\varepsilon^2)\right] + 0\,(\varepsilon^3) \Bigg\} \\
+ \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_j}\left(I^{(0)}, \varphi^{(0)}\right) + 0\,(\varepsilon) \right\} + 0\,(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

soit :

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_j^{(0)}+\varepsilon \dot{I}_j^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{I}_j^{(2)} + 0\,(\varepsilon^3) &= 0 + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_j}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}) \\
&+ \varepsilon^2 \Big\{ \sum_u \Big[I_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_j \partial I_u} \left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) + \varphi_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_j \partial \varphi_u} \left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) \Big] \\
&\qquad + \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_j} \left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) \Big\} \\
&+ 0\,(\varepsilon^3).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

De même, pour l'équation en $\dot{\varphi}$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_j^{(0)} + \varepsilon \dot{\varphi}_j^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{\varphi}_j^{(2)} + 0\,(\varepsilon^3) = \\
&- \Big\{ \frac{\partial F_0}{\partial I_j}\,(I^{(0)}) + \sum_u \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_j \partial I_u}\,(I^{(0)}) \,.\, [\varepsilon I_u^{(1)} + \varepsilon^2 I_u^{(2)} + 0\,(\varepsilon^3)\,] \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_u \sum_v \frac{\partial^3 F_0}{\partial I_j \partial I_u \partial I_v}\,(I^{(0)}) \,.\, [\varepsilon I_u^{(1)} + 0\,(\varepsilon^2)] \,.\, [\varepsilon I_v^{(1)} + 0\,(\varepsilon^2)\,] + 0\,(\varepsilon^3) \Big\} \\
&- \varepsilon \Big\{ \frac{\partial F_1}{\partial I_j}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}) + \sum_u \frac{\partial^2 F_1}{\partial I_j \partial I_u}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}) \,.\, [\varepsilon I_u^{(1)} + 0\,(\varepsilon^2)\,] \\
&\qquad + \sum_u \frac{\partial^2 F_1}{\partial I_j \partial \varphi_u}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}) \,.\, [\varepsilon \varphi_u^{(1)} + 0\,(\varepsilon^2)\,] + 0\,(\varepsilon^2) \Big\} \\
&- \varepsilon^2 \Big\{ \frac{\partial F_2}{\partial I_j}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}) + 0\,(\varepsilon) \Big\} + 0\,(\varepsilon^3),
\end{aligned}
$$

soit :

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_j^{(0)}+\varepsilon \dot{\varphi}_j^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{\varphi}_j^{(2)} + 0\,(\varepsilon^3) &= - \frac{\partial F_0}{\partial I_j}\,(I^{(0)}) \\
&- \varepsilon \Big\{ \sum_u I_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_j \partial I_u} \left(I^{(0)}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial I_j} \left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) \Big\} \\
&- \varepsilon^2 \Big\{ \sum_u I_u^{(2)} \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_j \partial I_u} \left(I^{(0)}\right) + \frac{1}{2} \sum_u \sum_v I_u^{(1)} I_v^{(1)} \frac{\partial^3 F_0}{\partial I_j \partial I_u \partial I_v} \left(I^{(0)}\right) \\
&\quad + \sum_u I_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial I_j \partial I_u} \left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) + \sum_u \varphi_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial I_j \partial \varphi_u} \left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) \Big\} + 0\,(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

2.2.3. - Identifions maintenant dans (2.12) et (2.13) les coefficients des mêmes puissances de ε. D'abord, pour les termes indépendants de ε, on obtient le système non perturbé en $I^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$:

$$
\dot{I}^{(0)} = 0, \quad \dot{\varphi}^{(0)} = - \frac{\partial F_0}{\partial I}\,(I^{(0)}) = \omega_0(I^{(0)})
$$

dont la solution générale de conditions initiales I_0, φ_0 est trivialement :

$$
I^{(0)} = I_0, \quad \varphi^{(0)} = \varphi_0 + \omega_0(I_0)\,.\,t
$$

les équations suivantes sont de la forme :

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_j^{(s)} &= \Phi_j^{(s)}(I^{(0)},\, \varphi^{(0)},\, I^{(1)},\, \varphi^{(1)},\, \ldots,\, I^{(s-1)},\, \varphi^{(s-1)}) \\
\dot{\varphi}_j^{(s)} &= \Psi_j^{(s)}(I^{(0)},\, \varphi^{(0)},\, I^{(1)},\, \varphi^{(1)},\, \ldots,\, I^{(s-1)},\, \varphi^{(s-1)},\, I^{(s)})
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

avec :

$$\Phi_j^{(1)}(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}) = \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_j}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}),$$

$$\Psi_j^{(1)}(I^{(0)},\, \varphi^{(0)},\, I^{(1)}) = -\sum_u I_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_j \partial I_u}\,\left(I^{(0)}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial I_j}\,\left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right),$$

$$\Phi_j^{(2)}(I^{(0)},\, \varphi^{(0)},\, I^{(1)},\, \varphi^{(1)}) = \sum_u \left[I_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_j \partial I_u}\,\left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) + \varphi_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_j \partial \varphi_u}\,\left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) \right]$$
$$+ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_j}\,(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}),$$

$$\Psi_j^{(2)}(I^{(0)},\, \varphi^{(0)},\, I^{(1)},\, \varphi^{(1)},\, I^{(2)}) = -\sum_u I_u^{(2)} \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_j \partial I_u}\,\left(I^{(0)}\right) - \frac{1}{2} \sum_u \sum_v I_u^{(1)} I_v^{(1)} \frac{\partial^3 F_0}{\partial I_j \partial I_u \partial I_v}\,\left(I^{(0)}\right)$$
$$- \sum_u \left[I_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial I_j \partial I_u}\,\left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) + \varphi_u^{(1)} \frac{\partial^2 F_1}{\partial I_j \partial \varphi_u}\,\left(I^{(0)},\, \varphi^{(0)}\right) \right],$$

etc.

2.2.4. - On peut alors résoudre par quadratures toutes les équations (2.14), l'une après l'autre. Connaissant la solution $(I^{(0)},\, \varphi^{(0)})$ du système non perturbé, on peut résoudre l'équation en $\dot{I}_j^{(1)}$. On connaît alors en plus $I_j^{(1)}$ et on peut résoudre l'équation en $\dot{\varphi}_j^{(1)}$.

Plus généralement, quand on connaît $I^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$, $I^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$, ..., $I^{(s-1)}$, $\varphi^{(s-1)}$, on peut résoudre la première équation (2.14) et, ayant ainsi déterminé $I^{(s)}$, on peut résoudre la seconde, qui fournit $\varphi^{(s)}$.

2.3. – PENDULE SIMPLE CIRCULATOIRE (SÉRIE DE FOURIER).

2.3.1. - Pour illustrer cette méthode, nous prendrons successivement deux exemples : celui du pendule simple (dans le cas de la circulation), puis celui d'un oscillateur harmonique subissant une perturbation du troisième degré. Dans les deux cas, conformément à la règle du jeu, les systèmes non perturbés associés sont intégrables. En revanche, contrairement à ce qui se passe dans les applications réelles, les systèmes perturbés le sont aussi. On pourra ainsi construire les séries de Fourier des solutions exactes, qu'il sera instructif de comparer aux résultats de la méthode de perturbation.

2.3.2. - Soit un pendule simple de masse m et de longeur l, se mouvant dans un plan vertical, et désignons par g l'accélération de la pesanteur. Repérons sa position par l'angle q qu'il fait avec la verticale descendante. On montre aisément que le hamiltonien associé à ce système est :

$$\mathcal{F}\,(q,\, p) = \frac{1}{2ml^2}\, p^2 - mgl\,.\cos q,$$

où :

$$p = ml^2 \dot{q}$$

est la variable conjuguée de q. On fait le changement de variables $(q,\, p) \to (I,\, \varphi)$ défini par :

$$\varphi = q, \quad I = p/ml^2,$$

de sorte que I et φ vérifient le système canonique de hamiltonien :

$$F(I,\varphi) = -\frac{1}{ml^2}\,\mathcal{F}(q,p) = -\frac{1}{2}\,I^2 + \frac{g}{l}\,\cos\varphi.$$

Afin de traiter ce système comme un système de perturbation, on posera :

$$g/l = \varepsilon I_0^2$$

où ε sera réputé voisin de zéro. Notre hamiltonien prend donc la forme :

$$F(I,\varphi,\varepsilon) = -\frac{1}{2}\,I^2 + \varepsilon I_0^2\cos\varphi. \tag{2.15}$$

On cherchera la solution qui prendra pour un instant initial t_0 la valeur $(I_0,\,0)$.

2.3.3. - Il est aisé de déterminer la solution exacte. Le système est autonome et admet donc l'intégrale de l'énergie :

$$F(I,\varphi,\varepsilon) = -\frac{1}{2}\,I^2 + \varepsilon I_0^2\cos\varphi = F(I_0,0,\varepsilon) = -\frac{1}{2}\,I_0^2 + \varepsilon I_0^2,$$

soit :

$$I\left(= -\frac{\partial F}{\partial I} = \dot\varphi\right) = \pm I_0\sqrt{1-4\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Dans le second membre, le signe est + pour $t = t_0$, car alors $\varphi = 0$, $I = I_0$. Pour d'autres instants, il ne peut être changé que si le radicande s'annule : alors $\dot\varphi$ change de signe et on a un mouvement de libration. Ici, on suppose ε petit, de sorte qu'il n'y a jamais de changement de signe. $\dot\varphi$ conserve son signe initial et on a un mouvement de circulation. Alors :

$$I_0 dt = \left(1-4\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-1/2} d\varphi, \tag{2.16}$$

puis :

$$I_0(t-t_0) = 2\int_0^{\varphi}\left(1-4\varepsilon\sin^2\frac{\rho}{2}\right)^{-1/2} d\left(\frac{\rho}{2}\right) = 2\mathbf{F}\left(\varphi,\,2\sqrt{\varepsilon}\right),$$

$$\varphi = \mathbf{am}\left[\frac{I_0}{2}\,(t-t_0),\,2\sqrt{\varepsilon}\right],$$

$$I = I_0\sqrt{1-4\varepsilon\,.\,\sin^2\{\frac{1}{2}\mathbf{am}\,[\,\frac{I_0}{2}\,(t-t_0),2\sqrt{\varepsilon}]\}},$$

où l'on a utilisé l'intégrale elliptique incomplète de première espèce $\mathbf{F}$ et sa fonction réciproque, l'amplitude **am**. La solution dépend du temps t, du paramètre ε et des deux constantes t_0, I_0.

2.3.4. - Pour notre usage ultérieur, il est préférable de considérer les séries de Fourier associées à ces solutions. Nous allons en calculer les termes principaux. D'abord (2.16) se développe en :

$$\begin{aligned}
I_0 dt &= \left[1 + 2\varepsilon\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{2} + 6\varepsilon^2\,.\,\sin^4\frac{\varphi}{2} + 0\,(\varepsilon^3)\right].\,d\varphi\\
&= \left[1+\varepsilon\,(1-\cos\varphi) + \frac{3}{4}\varepsilon^2(3-4\cos\varphi+\cos 2\varphi) + 0\,(\varepsilon^3)\right].\,d\varphi\\
&= \left[1+\varepsilon+\frac{9}{4}\varepsilon^2 + 0\,(\varepsilon^3)\right].\,d\varphi + \left[-\varepsilon\cos\varphi - 3\varepsilon^2\cos\varphi + \frac{3}{4}\varepsilon^2\cos 2\varphi + 0\,(\varepsilon^3)\right].\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Intégrons de t_0 à t :

$$I_0(t-t_0) = \left[1+\varepsilon+\frac{9}{4}\varepsilon^2+0\left(\varepsilon^3\right)\right].\varphi+\left[-\varepsilon\sin\varphi-3\varepsilon^2\sin\varphi+\frac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi+0\left(\varepsilon^3\right)\right].$$

Au cours d'une révolution complète du pendule, la variation de φ est égale à 2π. Soit T la variation correspondante de t (période), dont l'expression est :

$$T = \frac{2\pi}{I_0}\left[1+\varepsilon+\frac{9}{4}\varepsilon^2+0\left(\varepsilon^3\right)\right], \tag{2.17}$$

et la fréquence assiociée est :

$$\frac{2\pi}{T} = I_0\left[1-\varepsilon-\frac{5}{4}\varepsilon^2+0\left(\varepsilon^3\right)\right]. \tag{2.18}$$

2.3.5. - Introduisons l'angle auxiliaire

$$\varphi^* = \frac{2\pi}{T}(t-t_0) \tag{2.19}$$

qui a une variation uniforme de même fréquence que celle de φ. Il vient :

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \frac{2\pi}{I_0T}.I_0(t-t_0) = \frac{2\pi}{I_0T}\left[\frac{I_0T}{2\pi}.\varphi-\varepsilon\sin\varphi-3\varepsilon^2\sin\varphi+\frac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi+0\left(\varepsilon^3\right)\right]\\ &= \varphi+\left[1-\varepsilon+0\left(\varepsilon^2\right)\right]\left[-\varepsilon\sin\varphi-3\varepsilon^2\sin\varphi+\frac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi+0\left(\varepsilon^3\right)\right]\\ &= \varphi-\varepsilon\sin\varphi-2\varepsilon^2\sin\varphi+\frac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi+0\left(\varepsilon^3\right).\end{aligned}$$

On peut résoudre cette équation en φ :

$$\varphi = \varphi^*+\varepsilon\sin\varphi^*+0\left(\varepsilon^2\right) = \varphi^*+\varepsilon\sin(\varphi^*+\varepsilon\sin\varphi^*)+2\varepsilon^2\sin\varphi^*-\frac{3}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi^*+0\left(\varepsilon^3\right),$$

soit :

$$\varphi = \varphi^*+\varepsilon\sin\varphi^*+2\varepsilon^2\sin\varphi^*+\frac{1}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi^*+0\left(\varepsilon^3\right). \tag{2.20}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}I = \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi^*}{dt}.\frac{d\varphi}{d\varphi^*} = \frac{2\pi}{T}\frac{d\varphi}{d\varphi^*}\\ &= I_0\left(1-\varepsilon-\frac{5}{4}\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon\cos\varphi^*+2\varepsilon^2\cos\varphi^*+\frac{1}{4}\varepsilon^2\cos 2\varphi^*\right)+0\left(\varepsilon^3\right)\end{aligned}$$

soit :

$$I = I_0\left(1-\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi^*-\frac{5}{4}\varepsilon^2+\varepsilon^2\cos\varphi^*+\frac{1}{4}\varepsilon^2\cos 2\varphi^*+0\left(\varepsilon^3\right)\right). \tag{2.21}$$

On vérifie que pour $t=t_0$, $\varphi^*=0$ donc $I=I_0$.

Les expressions (2.21) et (2.20), accompagnées de (2.19) et (2.18), fournissent la solution.

2.3.6. - On observera que l'on n'obtient pas ici des séries de Taylor. En effet, les coefficients des puissances de ε dans (2.20), (2.21) dépendent eux-mêmes de ε par l'intermédiaire de φ^* et T. Pour obtenir des séries de Taylor, on posera :

$$\varphi^{(0)} = I_0(t - t_0),$$

qui est un angle voisin de φ^* mais indépendant, lui, de ε. D'où :

$$\varphi^* = \varphi^{(0)}\left(1 - \varepsilon - \frac{5}{4}\varepsilon^2 + 0\,(\varepsilon^3)\right)$$

$$\cos\varphi^* = \cos\varphi^{(0)} + \varepsilon\varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)} + 0\,(\varepsilon^2)$$
$$\sin\varphi^* = \sin\varphi^{(0)} - \varepsilon\varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + 0\,(\varepsilon^2)$$

et, en subtituant dans (2.21), (2.20) :

$$I = I_0\left[1 + \varepsilon\left(-1 + \cos\varphi^{(0)}\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{5}{4} + \varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)} + \cos\varphi^{(0)} + \frac{1}{4}\cos 2\varphi^{(0)}\right) + 0\,(\varepsilon^3)\right], \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\varphi =\,&\varphi^{(0)} + \varepsilon\,(-\varphi^{(0)} + \sin\varphi^{(0)})\\ &+ \varepsilon^2\left(-\frac{5}{4}\varphi^{(0)} - \varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + 2\sin\varphi^{(0)} + \frac{1}{8}\sin 2\varphi^{(0)}\right) + 0\,(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{2.23}$$

(Ici aussi, on vérifiera que $(I,\,\varphi)$ prend la valeur $(I_0,\,0)$ pour $t = t_0$, c'est à dire $\varphi^{(0)} = 0$, et aussi que : $d\varphi/d\varphi^{(0)} = \dot\varphi/\dot\varphi^{(0)} = I/I_0$).

2.4. - PENDULE SIMPLE CIRCULATOIRE (SÉRIES DE TAYLOR).

2.4.1. - On se propose d'obtenir ces mêmes séries par la méthode du paragraphe 2.2, c'est à dire en feignant de ne pas connaître la solution exacte. Avec les notations de 2.2 :

$$F_0(I) = -\frac{1}{2}I^2, \quad F_1(I,\,\varphi) = I_0^2\cos\varphi, \quad F_k(I,\varphi) = 0 \quad (k > 1),$$

d'où la solution du système non perturbé :

$$I^{(0)} = I_0, \quad \varphi^{(0)} = I_0(t - t_0).$$

On a choisi pour $(I^{(0)},\,\varphi^{(0)})$ la solution de valeur $(I_0,\,0)$ quand $t = t_0$, de sorte que, pour s positif, les $(I^{(s)},\,\varphi^{(s)})$ doivent prendre la valeur $(0,\,0)$ au même instant. On aura remarqué que $(I_0,\,\varphi^{(0)})$ s'identifient aux $(I_0,\,\varphi^{(0)})$ du paragraphe précédent.

2.4.2. - On a maintenant :

$$\Phi^{(1)} = -I_0^2\sin\varphi^{(0)}, \qquad \Psi^{(1)} = I^{(1)},$$
$$\Phi^{(2)} = -I_0^2\varphi^{(1)}\cos\varphi^{(0)}, \quad \Psi^{(2)} = I^{(2)}, \text{ etc.}$$

Avant de déterminer successivement $I^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$, $I^{(2)}$, $\varphi^{(2)}$, notons les relations suivantes :

$$\int_{t_0}^{t} dt = \frac{1}{I_0}\,\varphi^{(0)}, \quad \int_{t_0}^{t} \sin\varphi^{(0)} dt = \frac{1}{I_0}(1-\cos\varphi^{(0)}), \int_{t_0}^{t} \cos\varphi^{(0)} dt = \frac{1}{I_0}\sin\varphi^{(0)},$$

$$\int_{t_0}^{t} \sin 2\varphi^{(0)} dt = \frac{1}{2I_0}\left(1-\cos 2\varphi^{(0)}\right), \quad \int_{t_0}^{t} \cos 2\varphi^{(0)} dt = \frac{1}{2I_0}\sin 2\varphi^{(0)},$$

$$\int_{t_0}^{t} \varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)} dt = \frac{1}{I_0}\left[\sin\varphi^{(0)} - \varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)}\right],$$

$$\int_{t_0}^{t} \varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)} dt = \frac{1}{I_0}\left[-1+\cos\varphi^{(0)} + \varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)}\right].$$

2.4.3. - Commençons par :

$$\dot{I}^{(1)} = \Phi^{(1)} = -I_0^2\sin\varphi^{(0)},$$

d'où :

(2.24)
$$I^{(1)} = -I_0(1-\cos\varphi^{(0)}).$$

Puis :

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \Psi^{(1)} = -I_0(1-\cos\varphi^{(0)}),$$

d'où :

(2.25)
$$\varphi^{(1)} = -\varphi^{(0)} + \sin\varphi^{(0)}.$$

2.4.4. - A l'ordre deux en ε :

$$\dot{I}^{(2)} = \Phi^{(2)} = -I_0^2(-\varphi^{(0)} + \sin\varphi^{(0)})\cos\varphi^{(0)} = I_0^2\left(\varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi^{(0)}\right),$$

d'où :

$$I^{(2)} = I_0\left(-1+\cos\varphi^{(0)} + \varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\varphi^{(0)}\right),$$

soit :

(2.26)
$$I^{(2)} = I_0\left(-\frac{5}{4} + \varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)} + \cos\varphi^{(0)} + \frac{1}{4}\cos 2\varphi^{(0)}\right).$$

Enfin

$$\dot{\varphi}^{(2)} = \Psi^{(2)} = I_0\left(-\frac{5}{4} + \varphi^{(0)}\sin\varphi^{(0)} + \cos\varphi^{(0)} + \frac{1}{4}\cos 2\varphi^{(0)}\right)$$

d'où :

$$\varphi^{(2)} = -\frac{5}{4}\varphi^{(0)} + \sin\varphi^{(0)} - \varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + \sin\varphi^{(0)} + \frac{1}{8}\sin 2\varphi^{(0)}$$

soit :

(2.27)
$$\varphi^{(2)} = -\frac{5}{4}\varphi^{(0)} - \varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)} + 2\sin\varphi^{(0)} + \frac{1}{8}\sin 2\varphi^{(0)}$$

On vérifie que (2.24), (2.25), (2.26) et (2.27) confirment (2.22) et (2.23).

2.5. – OSCILLATEUR HARMONIQUE PERTURBÉ (SÉRIES DE FOURIER).

2.5.1. - Considérons le hamiltonien :

$$\mathcal{F}(q, p, \varepsilon) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) - \frac{\varepsilon\omega^2}{Q} q^3, \tag{2.28}$$

où ε est un petit paramètre et Q une constante de même dimension que q. Il sera commode de poser :

$$q = \rho Q, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}p^2 + \omega^2 Q^2 \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \varepsilon\rho^3\right].$$

Soient t_0 une valeur de t pour laquelle p s'annule, et $q_1 = \rho_1 Q$ la valeur correspondante de q. Alors, l'intégrale de l'énergie :

$$2\mathcal{F}(q, p, \varepsilon) = p^2 + \omega^2 Q^2(\rho^2 - 2\varepsilon\rho^3) = 2\mathcal{F}(q_1, 0, \varepsilon) = \omega^2 Q^2(\rho_1^2 - 2\varepsilon\rho_1^3)$$

nous donne :

$$p^2 = \omega^2 Q^2 (\rho - \rho_1)\left[2\varepsilon\rho^2 - (1 - 2\varepsilon\rho_1)(\rho + \rho_1)\right]. \tag{2.29}$$

C'est l'équation générale des trajectoires dans le plan (q, p) : elles constituent une famille de cubiques dépendant d'un paramètre ρ_1. L'équation du second degré :

$$2\varepsilon\rho^2 - (1 - 2\varepsilon\rho_1)(\rho + \rho_1) = 0$$

admet une racine ρ_2 voisine de $-\rho_1$ qui se développe aisément par rapport à ε :

$$\rho_2 = -\rho_1 + 2\varepsilon\rho_1^2 - 4\varepsilon^2\rho_1^3 + 0(\varepsilon^3). \tag{2.30}$$

Comme la somme des racines de l'équation considérée est $(1 - 2\varepsilon\rho_1)/2\varepsilon$, l'autre racine ρ_3 admet le développement :

$$\rho_3 = \frac{1}{2\varepsilon} - 2\varepsilon\rho_1^2 + 4\varepsilon^2\rho_1^3 + 0(\varepsilon^3). \tag{2.31}$$

L'équation (2.29) prend donc la forme :

$$p^2 = 2\varepsilon\omega^2 Q^2 (\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)(\rho_3 - \rho). \tag{2.32}$$

2.5.2. - Introduisons la variable u définie par :

$$\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\sin^2 u, \quad d\rho = Q^{-1}dq = 2(\rho_2 - \rho_1)\sin u \,.\, \cos u \,.\, du,$$

de sorte que

$$p^2 = 2\varepsilon\omega^2 Q^2 (\rho_3 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_1)^2 \sin^2 u \,.\, \cos^2 u \left(1 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_1}\sin^2 u\right).$$

Par ailleurs :

$$p^2 = \dot{q}^2 = \left(\frac{dq}{du}\right)^2 \dot{u}^2 = 4Q^2(\rho_2 - \rho_1)^2 \sin^2 u \cos^2 u \,.\, \dot{u}^2.$$

En posant :

$$A^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(\rho_3 - \rho_1), \quad k^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_3 - \rho_1}$$

et en comparant entre elles les deux dernières expressions de p^2, il vient :

$$\dot{u} = A\,(1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}$$

(en choisissant la détermination de u telle que celui-ci soit croissant). Donc :

$$A\,dt = (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du. \tag{2.33}$$

On tire aisément de (2.30) et (2.31) les développements :

$$A = \frac{\omega}{2}\left[1 - \varepsilon\rho_1 - \frac{5}{2}\varepsilon^2\rho_1^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^3\rho_1^3 + 0\,(\varepsilon^4)\right] \tag{2.34}$$

$$A^{-1} = \frac{2}{\omega}\left[1 + \varepsilon\rho_1 + \frac{7}{2}\varepsilon^2\rho_1^2 + \frac{9}{2}\varepsilon^3\rho_1^3 + 0\,(\varepsilon^4)\right] \tag{2.35}$$

$$k^2 = -4\varepsilon\rho_1\left[1 + \varepsilon\rho_1 + 8\varepsilon^2\rho_1^2 + 0\,(\varepsilon^3)\right] \tag{2.36}$$

2.5.3. - Il s'agit maintenant de développer (2.33).

$$\begin{aligned} A\,dt &= \left[1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 u + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 u + 0\,(k^6)\right] du \\ &= \left[1 + \frac{1}{4}k^2(1 - \cos 2u) + \frac{3}{64}k^4(3 - 4\cos 2u + \cos 4u) + 0\,(k^6)\right] du, \end{aligned}$$

d'où, en posant :

$$\begin{aligned} T &= \pi A^{-1}\left[1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + 0\,(k^6)\right], \\ A\,dt &= \frac{AT}{\pi}du + \left[-\frac{1}{4}k^2 \cos 2u - \frac{3}{16}k^4 \cos 2u + \frac{3}{64}k^4 \cos 4u + 0\,(k^6)\right] du. \end{aligned} \tag{2.37}$$

On introduit alors l'angle auxiliaire :

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}\,(t - t_0), \tag{2.38}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\sigma}{2}\right) &= \frac{\pi}{T}\,dt = \frac{\pi}{AT}\,.\,A\,dt \\ &= du + \frac{\pi}{AT}\left[-\frac{1}{4}\,k^2 \cos 2u - \frac{3}{16}k^4 \cos 2u + \frac{3}{64}k^4 \cos 4u + 0\,(k^6)\right] du. \end{aligned}$$

Comme, d'après (2.37),

$$\frac{\pi}{AT} = 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{5}{64}k^4 + 0\,(k^6),$$

il vient :

$$d\left(\frac{\sigma}{2}\right) = du + \left[-\frac{1}{4}\,k^2\cos 2u - \frac{1}{8}k^4\cos 2u + \frac{3}{64}k^4\cos 4u + 0\left(k^6\right)\right]du.$$

Comme pour $t = t_0$, $\rho = \rho_1$, $u = 0$, d'où $\sigma = 0$, cette relation s'intègre en :

$$\frac{\sigma}{2} = u - \frac{1}{8}k^2\sin 2u - \frac{1}{16}k^4\sin 2u + \frac{3}{256}k^4\sin 4u + 0\left(k^6\right),$$

et elle s'inverse en :

$$u = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{8}k^2\sin\sigma + \frac{1}{16}k^4\sin\sigma + \frac{1}{256}k^4\sin 2\sigma + 0\left(k^6\right). \tag{2.39}$$

soit :

$$\begin{aligned}\cos 2u = \cos\sigma &- \frac{1}{8}k^2 + \frac{1}{8}k^2\cos 2\sigma \\ &- \frac{1}{16}k^4 - \frac{3}{256}k^4\cos\sigma + \frac{1}{16}k^4\cos 2\sigma + \frac{3}{256}k^4\cos 3\sigma + 0\left(k^6\right)\end{aligned}$$

Au moyen de (2.36) :

$$\cos 2u = \cos\sigma + \varepsilon\rho_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\sigma\right) + \varepsilon^2\rho_1^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\cos\sigma + \frac{1}{2}\cos 2\sigma + \frac{3}{16}\cos 3\sigma\right) + 0\left(\varepsilon^3\right),$$

et, comme par définition de u :

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{2\rho_1}\left(\rho_2 + \rho_1\right) - \frac{1}{2\rho_1}\left(\rho_2 - \rho_1\right)\cos 2u,$$

il vient :

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \cos\sigma + \varepsilon\rho_1\left(\frac{3}{2} - \cos\sigma - \frac{1}{2}\cos 2\sigma\right) + \varepsilon^2\rho_1^2\left(-3 + \frac{29}{16}\cos\sigma + \cos 2\sigma + \frac{3}{16}\cos 3\sigma\right) + 0\left(\varepsilon^3\right), \tag{2.40}$$

qui, compte tenu de

$$q = \rho Q, \quad p = \dot q = \frac{2\pi}{T}\frac{dq}{d\sigma}, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T}\left(t - t_0\right)$$

$$\frac{2\pi}{T} = 2A\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + 0\left(k^6\right)\right)^{-1} = \omega\left(1 + 0\,.\,\varepsilon\rho_1 - \frac{15}{4}\varepsilon^2\rho_1^2 + 0\left(\varepsilon^3\right)\right),$$

fournit la solution.

2.5.4. - Explicitons cette solution :

$$\begin{aligned}q &= \rho_1 Q\Big[\cos\sigma + \varepsilon\rho_1\left(\frac{3}{2} - \cos\sigma - \frac{1}{2}\cos 2\sigma\right) + \varepsilon^2\rho_1^2\Big(-3 + \frac{29}{16}\cos\sigma \\ &\qquad\qquad + \cos 2\sigma + \frac{3}{16}\cos 3\sigma\Big) + 0\left(\varepsilon^3\right)\Big], \\ p &= \omega\rho_1 Q\Big[-\sin\sigma + \varepsilon\rho_1(\sin\sigma + \sin 2\sigma) + \varepsilon^2\rho_1^2\Big(\frac{31}{16}\sin\sigma - 2\sin 2\sigma \\ &\qquad\qquad - \frac{9}{16}\sin 3\sigma\Big) + 0\left(\varepsilon^3\right)\Big], \\ \sigma &= \omega\left(1 - \frac{15}{4}\varepsilon^2\rho_1^2 + 0\left(\varepsilon^3\right)\right).(t - t_0),\end{aligned} \tag{2.41}$$

et, en posant $\psi^{(0)} = \omega\,(t - t_0)$, calculons les premiers termes de sa série de Taylor par rapport à ε :

$$\cos\sigma = \cos\psi^{(0)} + \frac{15}{4}\,\varepsilon^2\rho_1^2\,\psi^{(0)}\,\sin\psi^{(0)} + 0\,(\varepsilon^3),$$
$$\sin\sigma = \sin\psi^{(0)} - \frac{15}{4}\,\varepsilon^2\rho_1^2\,\psi^{(0)}\,\cos\psi^{(0)} + 0\,(\varepsilon^3),$$

d'où :

$$(2.42)\quad \begin{aligned} \frac{q}{\rho_1 Q} &= \cos\psi^{(0)} + \varepsilon\rho_1\left[\frac{3}{2} - \cos\psi^{(0)} - \frac{1}{2}\cos 2\psi^{(0)}\right] \\ &\quad + \varepsilon^2\rho_1^2\left[\frac{15}{4}\,\psi^{(0)}\,\sin\psi^{0} - 3 + \frac{29}{16}\cos\psi^{(0)} + \cos 2\psi^{(0)} + \frac{3}{16}\cos 3\psi^{(0)}\right] + 0\,(\varepsilon^3), \\ \frac{p}{\omega\rho_1 Q} &= -\sin\psi^{(0)} + \varepsilon\rho_1\left[\sin\psi^{(0)} + \sin 2\psi^{(0)}\right] \\ &\quad + \varepsilon^2\rho_1^2\left[\frac{15}{4}\psi^{(0)}\,\cos\psi^{(0)} + \frac{31}{16}\sin\psi^{(0)} - 2\sin 2\psi^{(0)} - \frac{9}{16}\sin 3\psi^{(0)}\right] + 0\,(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

On vérifie bien que pour $t = t_0$, p s'annule, $q = \rho_1 Q$ et d'autre part que $p = dq/dt$.

2.6. – OSCILLATEUR HARMONIQUE PERTURBÉ (SÉRIES DE TAYLOR).

2.6.1. - On reprend le hamiltonien (2.28) :

$$\mathcal{F}\,(q,\,p,\,\varepsilon) = \frac{1}{2}\,(p^2 + \omega^2 q^2) - \frac{\varepsilon\omega^2}{Q}\,q^3,$$

et on lui applique la transformation $(q,\,p) \rightarrow (I,\,\varphi)$ du paragraphe (1.4), définie par :

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}}\,\sin\varphi, \quad p = \sqrt{2I\omega}\,\cos\varphi.$$

Avec les notations de (1.4) :

$$F_0 = -\omega I,$$
$$\mathcal{R}\,(q,\,p,\,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon\omega^2}{Q}\,q^3,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} R\,(I,\,\varphi,\,\varepsilon) = -\mathcal{R} &= \frac{\varepsilon\omega^2}{Q}\left(\frac{2I}{\omega}\right)^{3/2}\sin^3\varphi \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{\varepsilon\omega^2}{Q}\left(\frac{2I}{\omega}\right)^{3/2}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

2.6.2. - Nous considérons donc le hamiltonien :

$$F\,(I,\,\varphi,\varepsilon) = -\omega I + \frac{1}{4}\varepsilon\omega^2 Q^{-1}\left(\frac{2I}{\omega}\right)^{3/2}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi).$$

En variables (q, p), on a choisi les conditions initiales (q_0, p_0) définies par :

$$t = t_0, \; q(t_0) = q_0 = \rho_1 Q \,(< 0), \; p(t_0) = p_0 = 0,$$

de sorte qu'en variables (I, φ) :

$$(2.43) \qquad \begin{aligned} & I(t_0) = I_0 = \frac{1}{2}\omega\rho_1^2 Q^2 \quad \text{ou :} \left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{1/2} = -\rho_1 Q, \\ & \varphi(t_0) = \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Il sera donc commode d'utiliser à la place de φ la variable

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

qui s'annule à l'instant initial.

La solution du système non perturbé qui admet ces conditions initiales est :

$$(2.44) \qquad I^{(0)} = I_0, \quad \psi^{(0)} = \omega(t - t_0),$$

de sorte que $\psi^{(0)}$ à la même signification que dans le paragraphe (2.5.4).

2.6.3. - On se propose maintenant d'appliquer la méthode du paragraphe (2.2). Avec les notations correspondantes :

$$F_0(I, -) = -\omega I, \; F_1(I, \varphi) = \frac{1}{4}\omega^2 Q^{-1}\left(\frac{2I}{\omega}\right)^{3/2}(-3\cos\psi - \cos 3\psi),$$

tandis que les F_λ pour λ supérieur à 1 sont identiquement nuls. En vue du calcul des $\Phi^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, nous devons calculer les dérivées partielles de F_1 pour $(I, \psi) = (I^{(0)}, \psi^{(0)})$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial I} &= \frac{3}{4}\omega Q^{-1}\left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{1/2}(-3\cos\psi^{(0)} - \cos 3\psi^{(0)}) = \frac{3}{4}\omega\rho_1(3\cos\psi^{(0)} + \cos 3\psi^{(0)}), \\
\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} &= \frac{3}{4}\omega^2 Q^{-1}\left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{3/2}(\sin\psi^{(0)} + \sin 3\psi^{(0)}) = \frac{3}{4}\omega^2\rho_1^3 Q^2(-\sin\psi^{(0)} - \sin 3\psi^{(0)}), \\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial I^2} &= \frac{3}{4}Q^{-1}\left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{-1/2}(-3\cos\psi^{(0)} - \cos 3\psi^{(0)}) = \frac{3}{4}\rho_1^{-1}Q^{-2}(3\cos\psi^{(0)} + \cos 3\psi^{(0)}), \\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial I \partial \varphi} &= \frac{9}{4}\omega Q^{-1}\left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{1/2}(\sin\psi^{(0)} + \sin 3\psi^{(0)}) = \frac{9}{4}\omega\rho_1(-\sin\psi^{(0)} - \sin 3\psi^{(0)}), \\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} &= \frac{3}{4}\omega^2 Q^{-1}\left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{3/2}(\cos\psi^{(0)} + 3\cos 3\psi^{(0)}) = \frac{3}{4}\omega^2\rho_1^3 Q^2(-\cos\psi^{(0)} - 3\cos 3\psi^{(0)}).
\end{aligned}$$

2.6.4. - Il en résulte les expressions de $\Phi^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ déduites de celles du paragraphe (2.2.3). En utilisant (2.43) :

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)} &= \frac{3}{2}I_0\omega\rho_1(-\sin\psi^{(0)} - \sin 3\psi^{(0)}), \\
\Psi^{(1)} &= \frac{3}{4}\omega\rho_1(-3\cos\psi^{(0)} - \cos 3\psi^{(0)}), \\
\Phi^{(2)} &= \frac{9}{4}\omega\rho_1 I^{(1)}(-\sin\psi^{(0)} - \sin 3\psi^{(0)}) + \frac{3}{2}\omega\rho_1 I_0\psi^{(1)}(-\cos\psi^{(0)} - 3\cos 3\psi^{(0)}), \\
\Psi^{(2)} &= \frac{3}{4}\rho_1^{-1}Q^{-2}I^{(1)}(-3\cos\psi^{(0)} - \cos 3\psi^{(0)}) + \frac{9}{2}\rho_1^{-1}Q^{-2}I_0\psi^{(1)}(\sin\psi^{(0)} + \sin 3\psi^{(0)}).
\end{aligned}$$

2.6.5. - Au premier ordre en ε, on a donc :

$$\int \Phi^{(1)} dt = \frac{1}{2} I_0 \rho_1 (3\cos\psi^{(0)} + \cos 3\psi^{(0)}),$$

d'où, en tenant compte des conditions initiales ($\psi^{(0)}(t_0) = 0$, $I^{(1)}(t_0) = 0$) :

$$I^{(1)} = \frac{1}{2} I_0 \rho_1 (-4 + 3\cos\psi^{(0)} + \cos 3\psi^{(0)}). \tag{2.45}$$

De même :

$$\int \Psi^{(1)} dt = \frac{1}{4} \rho_1 (-9\sin\psi^{(0)} - \sin 3\psi^{(0)}),$$

d'où :

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{4} \rho_1 (-9\sin\psi^{(0)} - \sin 3\psi^{(0)}). \tag{2.46}$$

2.6.6. - Avant de déterminer $I^{(2)}$ et $\psi^{(2)}$, il convient de substituer les expressions (2.45) et (2.46) dans celles de $\Phi^{(2)}$ et de $\Psi^{(2)}$. On obtient :

$$\Phi^{(2)} = \frac{3}{2}\omega\rho_1^2 I_0 (3\sin\psi^{(0)} - 4\sin 2\psi^{(0)} + 3\sin 3\psi^{(0)} + 2\sin 4\psi^{(0)}),$$
$$\Psi^{(2)} = \frac{3}{16}\omega\rho_1^2 (-20 + 12\cos\psi^{(0)} - 9\cos 2\psi^{(0)} + 4\cos 3\psi^{(0)} + 12\cos 4\psi^{(0)} + \cos 6\psi^{(0)}).$$

On a donc

$$\int \Phi^{(2)} dt = \frac{3}{2}\rho_1^2 I_0 \left(-3\cos\psi^{(0)} + 2\cos 2\psi^{(0)} - \cos 3\psi^{(0)} - \frac{1}{2}\cos 4\psi^{(0)}\right),$$
$$\int \Psi^{(2)} dt = \frac{3}{16}\rho_1^2 \left(-20\psi^{(0)} + 12\sin\psi^{(0)} - \frac{9}{2}\sin 2\psi^{(0)} + \frac{4}{3}\sin 3\psi^{(0)} + 3\sin 4\psi^{(0)} + \frac{1}{6}\sin 6\psi^{(0)}\right),$$

et finalement :

$$I^{(2)} = \frac{3}{4}\rho_1^2 I_0 (5 - 6\cos\psi^{(0)} + 4\cos 2\psi^{(0)} - 2\cos 3\psi^{(0)} - \cos 4\psi^{(0)}), \tag{2.47}$$

$$\psi^{(2)} = \frac{1}{32}\rho_1^2 (-120\psi^{(0)} + 72\sin\psi^{(0)} - 27\sin 2\psi^{(0)} + 8\sin 3\psi^{(0)} + 18\sin 4\psi^{(0)} + \sin 6\psi^{(0)}). \tag{2.48}$$

2.6.7. - Afin de comparer ces résultats à ceux du paragraphe (2.5), on calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{q}{\rho_1 Q} &= \left(\frac{2I_0}{\omega}\right)^{-1/2} \left(\frac{2I}{\omega}\right)^{1/2} \cos\psi \\
&= \left(1 + \varepsilon\frac{I^{(1)}}{I_0} + \varepsilon^2 \frac{I^{(2)}}{I_0}\right)^{1/2} \cos(\psi^{(0)} + \varepsilon\psi^{(1)} + \varepsilon^2\psi^{(2)}) + 0(\varepsilon^3) \\
&= \cos\psi^{(0)} + \varepsilon\left[\frac{1}{2}\frac{I^{(1)}}{I_0}\cos\psi^{(0)} - \psi^{(1)}\sin\psi^{(0)}\right] \\
&\quad + \varepsilon^2\left[-\psi^{(2)}\sin\psi^{(0)} - \frac{1}{2}(\psi^{(1)})^2\cos\psi^{(0)} - \frac{1}{2}\frac{I^{(1)}}{I_0}\psi^{(1)}\sin\psi^{(0)} + \frac{1}{2}\frac{I^{(2)}}{I_0}\cos\psi^{(0)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8}\left(\frac{I^{(1)}}{I_0}\right)^2 \cos\psi^{(0)}\right] + 0(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

On s'assurera qu'en substituant (2.45), (2.46), (2.47) et (2.48) dans cette expression, on retrouve (2.42).

2.7. – EXERCICES.

2.7.1. - On reprend le système de l'exercice 1.6.1. On demande de construire sa solution approchée sous forme de série de Taylor tronquée, en négligeant $0(\varepsilon^3)$.

2.7.2. - On reprend le système canonique dont le hamiltonien est celui de l'exercice 1.6.2. On demande de construire sa solution approchée sous forme de série de Taylor tronquée, en négligeant $0(\varepsilon^3)$. On pourra se contenter de faire les calculs en variables (I, φ).

2.7.3. - On considère le système canonique de hamiltonien

$$\mathcal{F}(q, p, \varepsilon) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) - \frac{\varepsilon\omega^2}{Q^2} q^4$$

où ω et Q sont des constantes. Construire les séries de Taylor représentant ses solutions, en négligeant $0(\varepsilon^3)$.

2.7.4. - On reprend le système précédent. Construire les séries de Fourier représentant ses solutions, en négligeant $0(\varepsilon^3)$.

2.7.5. - Etudier la forme des trajectoires associées au hamiltonien :

$$\mathcal{F}(q, p, \varepsilon) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) - \frac{\varepsilon\omega^2}{Q} q^3$$

du paragraphe 2.5, dans le plan (q, p), sans supposer ε petit.

2.7.6. - Effectuer la vérification suggérée à la fin du paragraphe 2.6.

3. – LE SCHÉMA DE DELAUNAY

3.1. – SÉRIES DE FOURIER ET SÉRIES DE TAYLOR.

3.1.1. - Revenons aux exemples du pendule oscillatoire et de l'oscillateur harmonique perturbé. Nous avons déterminé deux types de représentations de leurs solutions.

(a) Séries de Fourier :

$$\varphi^* = I_0\left(1 - \varepsilon - \frac{5}{4}\varepsilon^2 + 0\left(\varepsilon^3\right)\right) \cdot (t - t_0),$$
$$\varphi = \varphi^* + \varepsilon\sin\varphi^* + 2\varepsilon^2\sin\varphi^* + \frac{1}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi^* + 0\left(\varepsilon^3\right),$$

et :

$$\sigma = \omega\left(1 - \frac{15}{4}\varepsilon^2\rho_1^2 + 0\left(\varepsilon^3\right)\right) \cdot (t - t_0),$$
$$q/\rho_1 Q = \cos\sigma + \varepsilon\rho_1\left(\frac{3}{2} - \cos\sigma - \frac{1}{2}\cos 2\sigma\right)$$
$$+ \varepsilon^2\rho_1^2\left(-3 + \frac{29}{16}\cos\sigma + \cos 2\sigma + \frac{3}{16}\cos 3\sigma\right) + 0\left(\varepsilon^3\right).$$

(b) Séries de Taylor :

$$\varphi^{(0)} = I_0(t - t_0)$$
$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varepsilon(-\varphi^{(0)} + \sin\varphi^{(0)}) + \varepsilon^2\left(-\frac{5}{4}\varphi^{(0)} - \underline{\varphi^{(0)}\cos\varphi^{(0)}} + 2\sin\varphi^{(0)} + \frac{1}{8}\sin 2\varphi^{(0)}\right) + 0(\varepsilon^3),$$

et :

$$\psi^{(0)} = \omega\,(t - t_0),$$
$$q/\rho_1 Q = \cos\psi^{(0)} + \varepsilon\rho_1\left(\frac{3}{2} - \cos\psi^{(0)} - \frac{1}{2}\cos 2\psi^{(0)}\right)$$
$$+ \varepsilon^2\rho_1^2\left(\underline{\frac{15}{4}\psi^{(0)}\sin\psi^{(0)}} - 3 + \frac{29}{16}\cos\psi^{(0)} + \cos 2\psi^{(0)} + \frac{3}{16}\cos 3\psi^{(0)}\right) + 0\left(\varepsilon^3\right).$$

3.1.2. - Comparons les deux formes sous lesquelles nous avons représenté les solutions.

(a) Les séries de Fourier sont des sommes (convergentes) de termes purement trigonométriques (sinus ou cosinus de fonctions affines du temps), donc périodiques et bornés par rapport au temps. Ceci convient bien pour représenter des solutions que nous savons elles mêmes périodiques et bornées.

En revanche, ces séries n'ont été obtenues que parce que nous connaissions les solutions exactes. Cette méthode ne s'applique donc qu'à des systèmes intégrables (en l'occurence, à un seul degré de liberté).

(b) A l'inverse, les séries de Taylor (elles aussi convergentes, au moins dans un voisinage des conditions initiales) sont obtenues par une technique (paragraphe 2-2) qui est valable quel que soit le degré de liberté du système et quelles que soient ses propriétés de (non) intégrabilité. Ces séries ressemblent à celles de Fourier, en ce sens qu'elles contiennent aussi des termes purement trigonométriques, mais elles présentent le grave inconvénient de contenir aussi *des termes de Poisson.*

On appelle terme de Poisson le produit d'un terme purement trigonométrique par une puissance d'une fonction affine du temps. Les termes soulignés dans les précédents développements de Taylor sont des termes de Poisson. De tels termes ne sont ni périodiques ni bornés et constituent le défaut essentiel des représentations de solutions qui les contiennent : sauf dans un intervalle de temps limité, elles ne traduisent pas les propriétés qualitatives des solutions exactes.

3.1.3. - Le phénomène de l'apparition des termes de Poisson dans les séries de Taylor peut s'interpréter de la façon suivante. Considérons la série de Fourier d'une fonction périodique du temps $x(t,\varepsilon)$ exprimée en fonction de l'argument :

$$\varphi^* = \omega(t - t_0)$$

où la fréquence ω dépend de ε :

$$\omega = \omega_0(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + 0(\varepsilon^3))$$

de sorte que l'argument voisin :

$$\varphi^{(0)} = \omega_0(t - t_0)$$

est la valeur non perturbée de φ^*. Cette série de Fourier peut s'écrire :

$$x(t,\varepsilon) = \sum_\lambda (X^{(0,\lambda)} + \varepsilon X^{(1,\lambda)} + \varepsilon^2 X^{(2,\lambda)} + 0(\varepsilon^3)) \,.\, exp\, i\lambda\varphi^* \qquad (\lambda \in Z).$$

Mais :

$$\varphi^* = \varphi^{(0)}(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + 0(\varepsilon^3)),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} exp\, i\lambda\varphi^* &= exp\, i\lambda\varphi^{(0)} + i\varepsilon\lambda\omega_1\, \underline{\varphi^{(0)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)}} \\ &+ \varepsilon^2\big[i\lambda\omega_2 \underline{\varphi^{(0)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)}} - \frac{1}{2}\lambda^2\omega_1^2\, \underline{(\varphi^{(0)})^2 exp\, i\lambda\varphi^{(0)}}\,\big] + 0(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Donc la série de Taylor de x est :

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) = \sum_\lambda \big[\, & X^{(0,\lambda)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)} + \varepsilon\,(X^{(1,\lambda)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)} + i\lambda\omega_1 X^{(0,\lambda)}\, \underline{\varphi^{(0)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)}})\big] \\ & + \varepsilon^2\,\big[X^{(2,\lambda)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)} + i\lambda\omega_1 X^{(1,\lambda)}\, \underline{\varphi^{(0)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)}} + i\lambda\omega_2 X^{(0,\lambda)}\, \underline{\varphi^{(0)} exp\, i\lambda\varphi^{(0)}} \\ & - \frac{1}{2}\lambda^2\omega_1^2 X^{(0,\lambda)} \underline{(\varphi^{(0)})^2 exp\, i\lambda\varphi^{(0)}}\,\big] + 0(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

où les termes soulignés sont les termes de Poisson qui apparaissent inévitablement dans ce type de calcul.

On a cherché en fait à représenter une fonction périodique de fréquence $\omega(\varepsilon)$, pour laquelle l'argument naturel est φ^*, en fonction de l'argument $\varphi^{(0)}$ de fréquence voisine mais différente $\omega_0 = \omega(0)$. En se reportant à la méthode exposée dans le paragraphe 2-2, on observera que l'argument non perturbé $\varphi^{(0)}$ apparaît à la première approximation et que la forme même de la technique employée implique que les approximations suivantes soient définies en fonction du même $\varphi^{(0)}$. C'est une méthode qui, dès le début, "bloque" la fréquence à sa valeur non perturbée, et qui n'en détermine pas ensuite de meilleures approximations.

On voit ainsi ce que l'on cherchera à éviter dans la suite.

3.2. – LE SCHÉMA DE DELAUNAY.

3.2.1. - Soit un système canonique à n degrés de liberté, autonome et quasi séparable :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I, -) + \sum_j \varepsilon^j F_j(I, \varphi) \qquad (j \in N^*).$$

Supposons que nous sachions construire une transformation canonique indépendante du temps :

$$\mathcal{T} : (I, \varphi) \to (I^*, \varphi^*)$$

telle que le nouveau hamiltonien (égal au précédent) soit de la forme :

$$F^*(I^*, -, \varepsilon) = F_0^*(I^*, -) + \sum_j \varepsilon^j F_j^*(I^*, -),$$

c'est à dire indépendant des composantes de φ^*. Alors, si on introduit les fréquences

$$\omega^*(I^*, \varepsilon) = -\frac{\partial F^*}{\partial I^*}(I^*, -, \varepsilon),$$

le nouveau système canonique :

$$\dot{I}^* = \frac{\partial F^*}{\partial \varphi^*} = 0, \quad \dot{\varphi}^* = -\frac{\partial F^*}{\partial I^*}(I^*, -, \varepsilon) = \omega^*(I^*, \varepsilon)$$

admet la solution triviale de valeurs initiales I_0^*, φ_0^* :

$$I^* = I_0^*, \quad \varphi^* = \varphi_0^* + \omega^*(I_0^*, \varepsilon) \cdot (t - t_0).$$

On en déduirait alors la solution générale du système donné par application de la transformation canonique réciproque $\mathcal{T}^{-1}$. En résumé :

$$\begin{array}{ccc} F(I, \varphi, \varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & F^*(I^*, -, \varepsilon) \\ & & \downarrow \\ I, \varphi & \xleftarrow[\mathcal{T}^{-1}]{} & I^*, \varphi^* \end{array}$$

3.2.2. - On n'aura malheureusement pas en général la possibilité d'appliquer cette méthode sous cette forme. En effet, si $\mathcal{T}$ existait, cela signifierait précisément que le système proposé est séparable. Or, ce qui nous intéresse ici est d'étudier des systèmes qui ne sont que quasi séparables.

On verra qu'il est possible de modifier ce schéma d'une manière qui le rende applicable. Nous fixant $k \in N^*$, on cherchera au lieu de $\mathcal{T}$ une transformation canonique :

$$\mathcal{T}_k : (I, \varphi) \to (I^*, \varphi^*)$$

telle que le nouveau hamiltonien ait la forme :

$$F^*(I^*, -, \varepsilon) + \mathcal{R}_k(I^*, \varphi^*, \varepsilon),$$

où :

$$F^*(I^*, -, \varepsilon) = \sum_j \varepsilon^j F_j^*(I^*, -) \qquad (j \in [0; k]),$$

et :

$$\mathcal{R}_k(I^*, \varphi^*, \varepsilon) = 0\,(\varepsilon^{k+1}).$$

Si on y parvient, on dira qu'on a éliminé les variables angulaires φ_j à ε^{k+1} près. Le nouveau hamiltonien dépend encore des φ_j^*, par l'intermédiaire de $\mathcal{R}_k$ et conformément à son caractère de non séparabilité, mais seulement dans des termes d'autant plus petits que k sera grand.

On choisira alors k assez grand pour que $\mathcal{R}_k$ soit pratiquement négligeable, et on substituera le système séparable de hamiltonien F^* au système exact de hamiltonien $F^* + \mathcal{R}_k$ (non séparable par hypothèse). Ce nouveau système s'intègre aisément. Posons comme plus haut :

$$\omega^*(I^*, \varepsilon) = -\frac{\partial F^*}{\partial I^*}(I^*, -, \varepsilon),$$

et :

$$I^* = I_0^*, \quad \varphi^* = \varphi_0^* + \omega^*(I_0^*, \varepsilon)\cdot(t - t_0).$$

On revient alors à (I, φ) au moyen de $\mathcal{T}_k^{-1}$. Remarquons au passage que la fréquence ω^* dépend de ε, ce qui est une des choses que nous souhaitions.

3.2.3. - Le schéma devient :

$$\begin{array}{ccc}
F(I, \varphi, \varepsilon) & \xrightarrow{\mathcal{T}_k} & F^*(I^*, -, \varepsilon) + \mathcal{R}_k(I^*, \varphi^*, \varepsilon) \\
 & & \downarrow \\
 & & F^*(I^*, -, \varepsilon) \\
 & & \text{(approché)} \\
 & & \downarrow \\
I, \varphi & \xleftarrow[\mathcal{T}_k^{-1}]{} & I^*, \varphi^* \\
\text{(approchés)} & & \text{(approchés)}
\end{array}$$

3.2.4. - La transformation $\mathcal{T}_k$ sera déterminée au moyen d'une fonction génératrice $S(I^*, \varphi, \varepsilon)$ et s'écrira sous forme implicite :

$$\varphi_j^* = \frac{\partial S}{\partial I_j^*}, \quad I_j = \frac{\partial S}{\partial \varphi_j}, \qquad j \in [1;\, n].$$

On cherchera S sous la forme d'un polynôme de degré k en ε :

$$S(I^*, \varphi, \varepsilon) = S_0(I^*, \varphi) + \sum_u \varepsilon^u S_u(I^*, \varphi), \qquad u \in [1;\, k].$$

Observons que dans le cas trivial où ε est nul (cas non perturbé), le système initial a déjà la forme séparable voulue. $\mathcal{T}_k$ se réduit alors à $\mathcal{T}_0$ et il est raisonnable que ce soit la transformation identique. On posera donc :

$$S_0(I^*, \varphi) = \sum_j I_j^* \varphi_j$$

qui est précisément une fonction génératrice de la transformation identique. Avec ce choix, $\mathcal{T}_k$ est définie par :

$$\varphi_j^* = \varphi_j + \sum_u \varepsilon^u \frac{\partial S_u}{\partial I_j^*}(I^*, \varphi), \quad I_j = I_j^* + \sum_u \varepsilon^u \frac{\partial S_u}{\partial \varphi_j}(I^*, \varphi).$$

3.3. – UN EXEMPLE.

3.3.1. - Pour donner une idée du procédé, nous allons l'appliquer au cas, d'ailleurs séparable, du hamiltonien déjà rencontré :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = -\frac{1}{2}I^2 + \varepsilon I_0^2 \cos\varphi.$$

Nous nous limiterons à $k = 2$ et chercherons une fonction génératrice :

$$S(I^*, \varphi) = I^*\varphi + \varepsilon S_1(I^*, \varphi) + \varepsilon^2 S_2(I^*, \varphi)$$

qui engendre une transformation canonique :

$$\mathcal{T}_2 : (I, \varphi) \to (I^*, \varphi^*)$$

définie par :

$$\varphi^* = \varphi + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I^*} + \varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial I^*}, \quad I = I^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial \varphi},$$

et telle que le nouveau hamiltonien ait la forme :

$$F^*(I^*, -, \varepsilon) + \mathcal{R}_2(I^*, \varphi^*, \varepsilon) = F_0^*(I^*, -) + \varepsilon F_1^*(I^*, -) + \varepsilon^2 F_2^*(I^*, -) + 0(\varepsilon^3).$$

3.3.2. - On va développer F *au voisinage des arguments* (I^*, φ) *qui figurent dans* S.

Il vient :

$$\begin{aligned} F(I, \varphi, \varepsilon) &= -\frac{1}{2}\left(I^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \varepsilon I_0^2\cos\varphi \\ &= -\frac{1}{2}(I^*)^2 - \varepsilon I^*\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \varepsilon I_0^2\cos\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right)^2 - \varepsilon^2 I^*\frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + 0(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Nous voudrions que le nouveau hamiltonien, égal au précédent, soit de la forme indiquée plus haut. Donc, en identifiant les termes indépendants de ε :

$$F_0^*(I^*, -) = -\frac{1}{2}(I^*)^2.$$

3.3.3. - Identifions de la même manière les termes en ε dans les deux hamiltoniens :

$$-I^*\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + I_0^2\cos\varphi = F_1^*(I^*, -)$$

ou :

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \frac{I_0^2}{I^*}\cos\varphi - \frac{1}{I^*}F_1^*,$$

qui admet la solution immédiate

$$S_1(I^*, \varphi) = \frac{I_0^2}{I^*}\sin\varphi, \quad F_1^*(I^*, -) = 0.$$

Passons aux termes en ε^2.

$$-I^* \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right)^2 = F_2^*(I^*, -)$$

ou, en tenant compte de l'expression obtenue pour S_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2I^*}\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{I^*} F_2^* \\ &= -\frac{1}{4} I_0^4 (I^*)^{-3}(1 + \cos 2\varphi) - (I^*)^{-1} F_2^*. \end{aligned}$$

A l'ordre précédent, on avait pris F_1^* nul. On pourrait de même choisir ici F_2^* nul, et alors :

$$S_2(I^*, \varphi) = -\frac{1}{4} I_0^4 (I^*)^{-3}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right),$$

et c'est ce qu'il ne faut pas faire, le terme non purement périodique en φ devant engendrer des termes de Poisson dans la solution. Au contraire, on choisit

$$F_2^*(I^*, -) = -\frac{1}{4} I_0^4 (I^*)^{-2},$$

de sorte que

$$\frac{\partial S_2}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4} I_0^4 (I^*)^{-3} \cos 2\varphi$$

s'intègre en :

$$S_2(I^*, \varphi) = -\frac{1}{8} I_0^4 (I^*)^{-3} \sin 2\varphi$$

qui ne contient qu'un terme purement périodique.

3.3.4. - En résumé, la fonction :

$$S(I^*, \varphi) = I^* \varphi + \varepsilon S_1(I^*, \varphi) + \varepsilon^2 S_2(I^*, \varphi)$$

engendre la transformation canonique définie par :

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \frac{\partial S}{\partial I^*} = \varphi - \varepsilon I_0^2 (I^*)^{-2} \sin \varphi + \frac{3}{8} \varepsilon^2 I_0^4 (I^*)^{-4} \sin 2\varphi, \\ I &= \frac{\partial S}{\partial \varphi} = I^* + \varepsilon I_0^2 (I^*)^{-1} \cos \varphi - \frac{1}{4} \varepsilon^2 I_0^4 (I^*)^{-3} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Le nouveau hamiltonien est :

$$F^*(I^*, -, \varepsilon) + \mathcal{R}_2 = -\frac{1}{2}(I^*)^2 + 0 \cdot \varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2 I_0^4 (I^*)^{-2} + 0(\varepsilon^3).$$

La fréquence perturbée est :

$$\omega^*(I^*, \varepsilon) = -\frac{\partial F^*}{\partial I^*} = I^* \left(1 + 0 \cdot \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{I_0}{I^*}\right)^4 + 0(\varepsilon^3)\right).$$

Conformément à notre convention, nous négligeons $\mathcal{R}_2$ et la solution de valeurs (I_0^*, φ_0^*) pour $t = t_0$ est :

$$\begin{aligned} I^* &= I_0^*, \\ \varphi^* &= \varphi_0^* + \omega^*(I_0^*, \varepsilon) \cdot (t - t_0) \\ &= \varphi_0^* + I_0^* \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{I_0}{I_0^*}\right)^4\right) \cdot (t - t_0). \end{aligned}$$

3.3.5. - Comme on l'a déjà observé, la transformation T_2 est définie implicitement. On va l'expliciter, et il vient :

$$I = I^*\left[1+\varepsilon\left(\frac{I_0}{I^*}\right)^2\cos\varphi^* - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{I_0}{I^*}\right)^4 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\frac{I_0}{I^*}\right)^4\cos 2\varphi^* + 0\left(\varepsilon^3\right)\right],$$
$$\varphi = \varphi^* + \varepsilon\left(\frac{I_0}{I^*}\right)^2\sin\varphi^* + \frac{1}{8}\varepsilon^2\left(\frac{I_0}{I^*}\right)^4\sin 2\varphi^* + 0\left(\varepsilon^3\right).$$

Comme on le souhaitait, ces relations ne comportent pas de termes de Poisson.

Il en est de même des relations réciproques :

$$I^* = I\left[1-\varepsilon\left(\frac{I_0}{I}\right)^2\cos\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{I_0}{I}\right)^4 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\frac{I_0}{I}\right)^4\cos 2\varphi + 0\left(\varepsilon^3\right)\right],$$
$$\varphi^* = \varphi - \varepsilon\left(\frac{I_0}{I}\right)^2\sin\varphi - \frac{5}{8}\varepsilon^2\left(\frac{I_0}{I}\right)^4\sin 2\varphi + 0\left(\varepsilon^3\right).$$

3.3.6. - Ces expressions permettent de déterminer les valeurs initiales des variables $(I^*,\ \varphi^*)$ qui correspondent à celles des variables $(I,\ \varphi)$ adoptées au paragraphe (2.3.2.) : $(I_0,\ 0)$ pour $t = t_0$. Au même instant, on a donc :

$$\varphi^* = 0,$$
$$I^* = I_0\left(1-\varepsilon-\frac{5}{4}\varepsilon^2+0\left(\varepsilon^3\right)\right).$$

Substituant ces conditions initiales dans les solutions obtenues, il vient :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega^*(I^*,\ \varepsilon) = I_0\left(1-\varepsilon-\frac{5}{4}\varepsilon^2+0\left(\varepsilon^3\right)\right),$$
$$\varphi^* = \frac{2\pi}{T}\left(t-t_0\right),$$
$$I = I_0\left(1-\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi^* - \frac{5}{4}\varepsilon^2+\varepsilon^2\cos\varphi^* + \frac{1}{4}\varepsilon^2\cos 2\varphi^* + 0\left(\varepsilon^3\right)\right),$$
$$\varphi = \varphi^* + \varepsilon\sin\varphi^* + 2\varepsilon^2\sin\varphi^* + \frac{1}{8}\varepsilon^2\sin 2\varphi^* + 0\left(\varepsilon^3\right),$$

expressions qui confirment les résultats obtenus par une autre voie dans le paragraphe (2.3.).

On observe que l'expression de la fréquence $2\pi/T$ dépend de ε, et, comme on l'avait prévu, ceci explique l'absence (souhaitée) de termes de Poisson dans la solution, contrairement à ce qui avait été obtenu dans le paragraphe (2.4).

Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de formaliser et de généraliser ce procédé à des systèmes non séparables (mais quasi séparables) à plusieurs degrés de liberté.

3.4. - EXERCICES.

3.4.1. - On reprend le système canonique étudié dans les exercices 2.7.3 et 2.7.4. On demande de lui appliquer le schéma de Delaunay, puis de faire les comparaisons qui s'imposent entre les résultats obtenus et ceux des précédents exercices.

3.4.2. - On considère le hamiltonien :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = \frac{\mu^2}{2I^2} + \varepsilon I^2(1 - \cos 2\varphi)$$

et on se propose d'étudier les solutions du système canonique associé en négligeant $0(\varepsilon^2)$. Explorer les voies suivantes en en comparant les résultats.

(a) Déterminer l'équation, dans l'espace (I, φ), de la trajectoire pour laquelle $(I, \varphi) = (I_0, 0)$ lorsque $t = t_0$. Ceci d'abord sous forme implicite, puis en explicitant $I(\varphi, I_0)$. Construire une équation différentielle en $d\varphi/dt$ dont le second membre ne dépendra que de I_0 et de φ (pas de I). Toujours en se limitant à l'approximation demandée, résoudre cette équation en obtenant la solution sous la forme d'une série de Fourier tronquée.

(b) Déduire du résultat précédent une série de Taylor tronquée à la même approximation.

(c) Construire directement cette série de Taylor par la méthode du chapitre précédent.

(d) Appliquer au système envisagé le schéma de Delaunay.

4. – LA MÉTHODE DE LINDSTEDT-POINCARÉ

4.1. – PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

4.1.1. - On se propose d'appliquer le schéma de Delaunay à un système canonique à n degrés de liberté, en principe non séparable, mais quasi séparable. Le but est l'obtention de représentations des solutions sous forme de *séries de Lindstedt* qui, comme les séries de Fourier dans le cas séparable, ne contiendront pas de termes de Poisson.

On s'inspirera, en généralisant, de ce qui a été fait dans l'exemple du paragraphe 3.3.

On considère donc un hamiltonien quasi séparable :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I, -) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varepsilon^\lambda F_\lambda(I, \varphi)$$

où I et φ ont n composantes I_j et φ_j.

4.1.2. - On se fixe un entier k positif et on va chercher une fonction génératrice :

$$S(I^*, \varphi, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} I_j^* \varphi_j + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda S_\lambda(I^*, \varphi), \qquad \lambda \in [1; k]$$

(qui, pour ε nul, se réduit à une fonction génératrice d'une transformation identique) engendrant une transformation canonique indépendante du temps :

$$I_j = I_j^* + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial S_\lambda}{\partial \varphi_j}, \quad \varphi_j^* = \varphi_j + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial S_\lambda}{\partial I_j^*},$$

telle que le nouveau hamiltonien soit de la forme :

$$F^*(I^*, \varphi^*, \varepsilon) = F_0^*(I^*, -) + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda F_\lambda^*(I^*, -) + 0(\varepsilon^{k+1}).$$

4.2. – DÉVELOPPEMENT DU HAMILTONIEN.

4.2.1. - On va développer $F(I, \varphi, \varepsilon)$ au voisinage de (I^*, φ) qui sont ***les arguments de*** S. Ce calcul fera intervenir les dérivées partielles des F_λ par rapport aux composantes de I, et on notera en particulier :

$$\frac{\partial F_0}{\partial I_u}(I, -) = -\omega_u(I)$$

où les ω_u peuvent être interprétés comme des fréquences.

4.2.2. - Considérons d'abord le terme $F_0(I,-)$ d'ordre zéro par rapport à ε. On a:

$$F_0(I,-) = F_0(I_u^* + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u}, -) \qquad \alpha \in [\![1;\, k]\!],\ u \in [\![1;\, n]\!]$$

$$= F_0(I^*,-) - \sum_u \omega_u(I^*) \cdot \sum_\rho \varepsilon^\rho \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} \qquad \rho \in [\![1;\, k]\!]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_u \sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_u \partial I_v}(I^*,-) \cdot \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u} \cdot \sum_\beta \varepsilon^\beta \frac{\partial S_\beta}{\partial \varphi_v} \qquad v \in [\![1;\, n]\!],\ \alpha+\beta \in [2;\, k]$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_u \sum_v \sum_w \frac{\partial^3 F_0}{\partial I_u \partial I_v \partial I_w}(I^*,-) \cdot \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u} \cdot \sum_\beta \varepsilon^\beta \frac{\partial S_\beta}{\partial \varphi_v} \cdot \sum_\gamma \varepsilon^\gamma \frac{\partial S_\gamma}{\partial \varphi_w} \qquad w \in [\![1;\, n]\!],\ \alpha+\beta+\gamma \in [3;\, k]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_u \sum_v \sum_w \cdots \sum_z \frac{\partial^k F_0}{\partial I_u \partial I_v \partial I_w \ldots \partial I_z}(I^*,-) \cdot \varepsilon^k \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_w} \cdots \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_z}$$

$$+ 0\,(\varepsilon^{k+1})$$

$$= F_0(I^*,-) - \sum_\rho \varepsilon^\rho \sum_u \omega_u(I^*) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \sum_\rho \varepsilon^\rho \Phi_\rho^{(0)} + 0\,(\varepsilon^{k+1}).$$

Dans cette dernière expression, $\Phi_1^{(0)}$ est nul et $\Phi_\rho^{(0)}$, pour $2 \leq \rho \leq k$, dépend des dérivées partielles par rapport aux φ de $S_1, S_2, \cdots, S_{\rho-1}$ mais pas de celles de $S_\rho, S_{\rho+1}, \cdots, S_k$.

4.2.3. - Pour les coefficients F_λ des termes d'ordre supérieur ($1 \leq \lambda \leq k$), on fait un calcul analogue, mais seulement jusqu'à l'ordre $k-\lambda$, puisque F_λ est factorisé par ε^λ dans le développement de F.

$$F_\lambda(I,\varphi) = F_\lambda(I_u^* + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u}, \varphi) + 0\,(\varepsilon^{k-\lambda+1}) \qquad \alpha \in [1;\, k-\lambda]$$

$$= F_\lambda(I^*,\varphi) + \sum_u \frac{\partial F_\lambda}{\partial I_u}(I^*,\varphi) \cdot \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u} \qquad \alpha \in [1;\, k-\lambda].$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_u \sum_v \frac{\partial^2 F_\lambda}{\partial I_u \partial I_v}(I^*,\varphi) \cdot \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u} \cdot \sum_\beta \varepsilon^\beta \frac{\partial S_\beta}{\partial \varphi_v} \qquad \alpha+\beta \in [2;\, k-\lambda]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{(k-\lambda)!} \sum_u \sum_v \cdots \sum_y \frac{\partial^{k-\lambda} F_\lambda}{\partial I_u \partial I_v \ldots \partial I_y}(I^*,\varphi) \cdot \varepsilon^{k-\lambda} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} \cdots \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_y}$$

$$+ 0\,(\varepsilon^{k-\lambda+1}).$$

On peut donc aussi écrire:

$$F_\lambda(I,\varphi) = F_\lambda(I^*,\varphi) + \sum_\sigma \varepsilon^\sigma \Phi_\sigma^{(\lambda)} + 0\,(\varepsilon^{k-\lambda+1}), \qquad \sigma \in [1;\, k-\lambda].$$

Ici, $\Phi_\rho^{(\lambda)}$ dépend des dérivées partielles de $S_1, S_2, \cdots, S_\rho$ par rapport aux φ, mais pas de celles de $S_{\rho+1}, S_{\rho+2}, \cdots, S_k$.

4.2.4. - Regroupons les résultats précédents.

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I^*, -) - \sum_\rho \varepsilon^\rho \sum_u \omega_u(I^*) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \sum_\rho \varepsilon^\rho \Phi_\rho^{(0)} + 0\,(\varepsilon^{k+1})$$
$$+ \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \left[F_\lambda(I^*, \varphi) + \sum_\sigma \varepsilon^\sigma \Phi_\sigma^{(\lambda)} + 0\,(\varepsilon^{k-\lambda+1}) \right].$$

Si on pose $\rho = \lambda + \sigma$, la double sommation définie par :

$$\lambda \in [1; k], \quad \sigma \in [1; k - \lambda]$$

équivaut à celle définie par :

$$\rho \in [2; k], \quad \lambda \in [1; \rho - 1],$$

de sorte que :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I^*, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho \left[- \sum_u \omega_u(I^*) \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \Phi_\rho^{(0)} + F_\rho(I^*, \varphi) + \sum_\lambda \Phi_{\rho-\lambda}^{(\lambda)} \right]$$
$$+ 0\,(\varepsilon^{k+1})$$
$$= F_0(I^*, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho \left[- \sum_u \omega_u(I^*) \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \Phi_\rho \right] + 0\,(\varepsilon^{k+1})$$

où $\rho \in [1; k]$ et :

$$\Phi_1 = F_1,$$
$$\Phi_2 = F_2 + \Phi_2^{(0)} + \Phi_1^{(1)},$$
$$\Phi_3 = F_3 + \Phi_3^{(0)} + \Phi_2^{(1)} + \Phi_1^{(2)},$$
$$\cdots$$
$$\Phi_k = F_k + \sum_s \Phi_{k-s}^{(s)}, \qquad s \in [0; k-1].$$

Il en résulte que Φ_1 ne dépend pas des dérivées partielles des S_λ, tandis que pour $2 \leq u \leq k$, Φ_u dépend de celles de $S_1, S_2, \cdots, S_{u-1}$, mais pas de celles de $S_u, S_{u+1}, \cdots, S_k$.

4.3. – ÉQUATIONS DE LINDSTEDT.

4.3.1. - Identifions le développement obtenu pour l'ancien hamiltonien :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I^*, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho \left[- \sum_u \omega_u(I^*) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \Phi_\rho \right] + 0\,(\varepsilon^{k+1})$$

à celui qu'on attend pour le nouveau :

$$F^*(I^*, \varphi^*, \varepsilon) = F_0^*(I^*, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho F_\rho^*(I^*, -) + 0\,(\varepsilon^{k+1}).$$

4.3.2. - Il vient d'abord (termes indépendants de ε) :

$$F_0^*(I^*, -) = F_0(I^*, -)$$

qui définit F_0^*.

On distinguera soigneusement la signification de cette invariance du hamiltonien non perturbé de celle de l'invariance du hamiltonien perturbé. La relation précédente exprime le fait que F_0^* et F_0 sont *la même fonction* (et non que :

$$F_0^*(I^*, -) = F_0(I, -)$$

qui est inexact). En revanche, la relation correcte :

$$F^*(I^*, \varphi^*, \varepsilon) = F(I, \varphi, \varepsilon)$$

signifie que les fonctions F^* et F, *différentes l'une de l'autre*, prennent la même valeur quand on les calcule respectivement en (I^*, φ^*) et (I, φ).

4.3.3. - Aux ordres supérieurs ($1 \leq \rho \leq k$), on a :

$$\sum_u \omega_u(I^*) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} = \Phi_\rho - F_\rho^*,$$

qui sont les équations fondamentales de la méthode. Elles serviront ultérieurement à déterminer successivement :

$$\begin{aligned} &- \text{pour } \rho = 1 : \quad S_1 \text{ et } F_1^*, \\ &- \text{pour } \rho = 2 : \quad S_2 \text{ et } F_2^*, \\ &\dots \\ &- \text{pour } \rho = k : \quad S_k \text{ et } F_k^*. \end{aligned}$$

On observera que si l'on procède dans cet ordre, l'équation qui correspond à une valeur donnée de ρ ne contient pour inconnues que S_ρ et F_ρ^*. En effet, on a vu que Φ_ρ ne dépend que des dérivées partielles de $S_1, S_2, \cdots, S_{\rho-1}$, supposées déjà déterminées à ce stade du calcul.

4.4. - OPÉRATEURS $\mathcal{M}$ ET $\mathcal{S}$.

Nous présentons dans ce paragraphe deux opérateurs qui permettront de résoudre les équations de Lindstedt (détermination de S_ρ, sans termes de Poisson, et de F_ρ^*, indépendant des angles φ^*).

4.4.1. - Revenons au système non perturbé :

$$\dot{I} = \frac{\partial F_0}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\partial F_0}{\partial I} = \omega(I),$$

dont la solution de conditions initiales $(I_0, 0)$ est :

$$I^{(0)} = I_0, \quad \varphi^{(0)} = \omega(I_0) \cdot (t - t_0).$$

Considérons maintenant une expression de la forme :

$$G(I, \varphi) = \sum_\alpha G_\alpha(I) \cdot exp\, i(\alpha \bullet \varphi), \qquad \alpha \in \Omega \subset Z^n,$$

où $\alpha \bullet \varphi$ désigne le produit intérieur :

$$\alpha \bullet \varphi = \sum_u \alpha_u \varphi_u, \qquad u \in [1;\, n].$$

Dans les applications pratiques, Ω sera une partie finie de Z^n, et donc G une somme finie. Cependant, nous ne nous interdisons pas que Ω soit infini, sans même imposer des conditions de convergence de G. Les calculs qui suivent doivent alors être considérés comme purement formels.

4.4.2. - On se propose d'évaluer l'intégrale indéfinie :

$$K = \int G(I^{(0)}, \varphi^{(0)})\, dt = \sum_\alpha G_\alpha(I_0) \int exp\, i\, (\alpha \bullet \varphi^{(0)})\, dt.$$

Pour $\alpha = 0_n$, l'intégrande se réduit à une constante, et l'intégrale à t. Nous ferons ici l'hypothèse que ceci ne se produit pas pour d'autres valeurs de α, c'est à dire que l'on a la condition sur I_0 :

$$\alpha \bullet \omega\, (I_0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0_n.$$

Définissons alors la partition $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ de Ω, où $\mathcal{A}$ est $\{0_n\}$ si 0_n appartient à Ω et est vide dans le cas contraire. $\mathcal{B}$ est l'ensemble des éléments de Ω différents de 0_n.

4.4.3. - On a :

$$K = t \cdot \sum_\alpha G_\alpha(I_0) - i \sum_\beta \frac{G_\beta(I_0)}{\beta \bullet \omega\, (I_0)} exp\, i\, (\beta \bullet \varphi^{(0)}), \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad \beta \in \mathcal{B}$$

où aucun des dénominateurs $\beta \bullet \omega\, (I_0)$ n'est nul pour $\beta \in \mathcal{B}$. Introduisons alors les opérateurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ définis par :

$$\mathcal{M}G\,(I, -) = \sum_\alpha G_\alpha(I),$$

$$\mathcal{S}G\,(I, \varphi) = -i \sum_\beta \frac{G_\beta(I)}{\beta \bullet \omega(I)} exp\, i\, (\beta \bullet \varphi),$$

de sorte que :

$$K = t \cdot \mathcal{M}G\,(I_0, -) + \mathcal{S}G\,(I_0, \varphi^{(0)}).$$

4.4.4. - Le calcul de l'intégrale K avait simplement pour but de donner une signification intuitive aux opérateurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$. Leur intérêt pour nous est qu'ils vérifient la propriété que nous allons établir maintenant. On a :

$$\begin{aligned} &\omega\, (I) \bullet \frac{\partial}{\partial \varphi}[\mathcal{S}G\,(I, \varphi)] \\ &= -i\omega\, (I) \bullet \sum_\beta \frac{G_\beta(I)}{\beta \bullet \omega(I)} \frac{\partial}{\partial \varphi}[exp\, i\, (\beta \bullet \varphi)] \\ &= \sum_\beta G_\beta(I) \cdot exp\, i\, (\beta \bullet \varphi) \\ &= G\,(I, \varphi) - \mathcal{M}G\,(I, -). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'équation :

$$\omega(I) \bullet \frac{\partial S}{\partial \varphi}(I, \varphi) = G(I, \varphi) - F(I)$$

où S et F sont des fonctions inconnues, admet pour solution :

$$S(I, \varphi) = \mathcal{S}G(I, \varphi), \quad F(I) = \mathcal{M}G(I, -).$$

4.4.5. - Revenons maintenant aux équations de Lindstedt :

$$\omega(I^*) \bullet \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi} = \Phi_\rho - F^*_\rho.$$

On voit qu'elles admettent la solution :

$$S_\rho = \mathcal{S}\Phi_\rho(I^*, \varphi), \quad F^*_\rho = \mathcal{M}\Phi_\rho(I^*, -),$$

où S_ρ est purement périodique (sans termes de Poisson) si Φ_ρ l'est, et où F^*_ρ est indépendant des angles φ^*.

On observera que les F^*_ρ dépendent en général explicitement des I^*, c'est à dire que les fréquences perturbées $-\partial F^*/\partial I^*$ contiennent effectivement des corrections dépendant de ε, comme on le souhaitait. En revanche, et c'est la faiblesse de la méthode, nous ne pouvons pas garantir la convergence des séries construites au moyen de l'opérateur $\mathcal{S}$.

4.5. – LA SOLUTION.

4.5.1. - Nous construirons explicitement la solution pour $k = 2$. Le développement de F s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F =& F_0(I^*, -) + \varepsilon\left[-\omega(I^*) \bullet \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + F_1(I^*, \varphi)\right] \\ &+ \varepsilon^2\left[-\omega(I^*) \bullet \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\sum_u\sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I^*_u \partial I^*_v}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} + \sum_u \frac{\partial F_1}{\partial I^*_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} + F_2\right] \\ &+ 0(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} F^*_0(I^*, -) &= F_0(I^*, -), \\ F^*_1(I^*, -) &= \mathcal{M}F_1(I^*, -), \\ S_1(I^*, \varphi) &= \mathcal{S}F_1(I^*, \varphi), \\ F^*_2(I^*, -) &= \mathcal{M}\left\{\frac{1}{2}\sum_u\sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I^*_u \partial I^*_v}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} + \sum_u \frac{\partial F_1}{\partial I^*_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} + F_2\right\}, \\ S_2(I^*, \varphi) &= \mathcal{S}\left\{\frac{1}{2}\sum_u\sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I^*_u \partial I^*_v}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} + \sum_u \frac{\partial F_1}{\partial I^*_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} + F_2\right\}. \end{aligned}$$

4.5.2. - Rappelons la forme implicite de la transformation canonique :

$$\begin{aligned} I_j &= I^*_j + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_j}(I^*, \varphi) + \varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial \varphi_j}(I^*, \varphi), \\ \varphi^*_j &= \varphi_j + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I^*_j}(I^*, \varphi) + \varepsilon^2\frac{\partial S_2}{\partial I^*_j}(I^*, \varphi). \end{aligned}$$

Ceci peut s'expliciter en :

$$\begin{aligned}
I_j =& I_j^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_j}(I^*, \varphi^*) \\
&+ \varepsilon^2 \left[- \sum_u \frac{\partial S_1}{\partial I_u^*}(I^*, \varphi^*) \frac{\partial^2 S_1}{\partial \varphi_j \partial \varphi_u}(I^*, \varphi^*) + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_j}(I^*, \varphi^*) \right] + 0(\varepsilon^3), \\
\varphi_j =& \varphi_j^* - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial I_j^*}(I^*, \varphi^*) \\
&+ \varepsilon^2 \left[+ \sum_u \frac{\partial S_1}{\partial I_u^*}(I^*, \varphi^*) \frac{\partial^2 S_1}{\partial I_j^* \partial \varphi_u}(I^*, \varphi^*) - \frac{\partial S_2}{\partial I_j^*}(I^*, \varphi^*) \right] + 0(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

ou, inversement :

$$\begin{aligned}
I_j^* =& I_j - \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_j}(I, \varphi) \\
&+ \varepsilon^2 \left[+ \sum_u \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u}(I, \varphi) \frac{\partial^2 S_1}{\partial \varphi_j \partial I_u^*}(I, \varphi) - \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_j}(I, \varphi) \right] + 0(\varepsilon^3), \\
\varphi_j^* =& \varphi_j + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial I_j^*}(I, \varphi) \\
&+ \varepsilon^2 \left[- \sum_u \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u}(I, \varphi) \frac{\partial^2 S_1}{\partial I_j^* \partial I_u^*}(I, \varphi) + \frac{\partial S_2}{\partial I_j^*}(I, \varphi) \right] + 0(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

4.5.3. - Si nous connaissons les valeurs initiales ($t = t_0$) des variables osculatrices (I, φ), soit :

$$I_j = I_{j0}, \quad \varphi_j = \varphi_{j0},$$

les dernières relations nous fournissent pour le même instant les valeurs des variables moyennées $(I_{j0}^*, \varphi_{j0}^*)$. On pose alors l'expression des fréquences perturbées :

$$\omega^*(I^*) = -\frac{\partial F_0^*}{\partial I^*} - \varepsilon \frac{\partial F_1^*}{\partial I^*} - \varepsilon^2 \frac{\partial F_2^*}{\partial I^*},$$

et la solution s'écrit :

$$I_j^* = I_{j0}^*, \quad \varphi_j^* = \varphi_{j0}^* + \omega_j^*(I_0^*) \cdot (t - t_0).$$

On obtient enfin l'expression des variables osculatrices (I, φ) en fonction du temps et de leurs valeurs initiales en substituant I^*, φ^* dans les premières équations du paragraphe 4.5.2.

4.5.4. - Supposons Φ_ρ développé en série de Fourier (formelle) :

$$\Phi_\rho(I^*, \varphi) = \sum_\alpha \Phi_\rho^{(\alpha)}(I^*) \cdot exp\, i(\alpha \bullet \varphi), \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

de sorte que :

$$S_\rho(I^*, \varphi) = \mathcal{S}\Phi_\rho(I^*, \varphi) = -i \sum_\beta [D_\beta(I^*)]^{-1} \cdot \Phi_\rho^{(\beta)}(I^*) \cdot exp\, i(\beta \bullet \varphi), \quad \beta \in \mathcal{B},$$

contient les diviseurs :

$$D_\beta(I^*) = \beta \bullet \omega(I^*).$$

Les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial I_j^*}[D_\beta(I^*)]^{-1} = -[D_\beta(I^*)]^{-2} \cdot \beta \bullet \frac{\partial \omega}{\partial I_j^*}$$

en contiennent les carrés.

Il en résulte que les $\partial S_\rho/\partial\varphi$, donc les I, contiennent ces dénominateurs, tandis que les $\partial S_\rho/\partial I^*$, donc les φ, en contiennent les carrés. Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que D_β n'est pas nul. Il peut cependant être petit et on notera qu'il apparaît alors des termes importants dans les I, et plus importants encore dans les φ.

4.6. – UN EXEMPLE.

4.6.1. - Considérons le hamiltonien quasi séparable :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = -\frac{1}{2}(k_1 I_1^2 + k_2 I_2^2) + \varepsilon[I_1 I_2 + I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1^2 \cos\varphi_1],$$

où k_1 et k_2 sont deux paramètres constants. Les fréquences non perturbées sont :

$$\omega_1(I) = -\partial F_0/\partial I_1 = k_1 I_1, \quad \omega_2(I) = -\partial F_0/\partial I_2 = k_2 I_2.$$

Nous chercherons une transformation canonique $(I, \varphi) \to (I^*, \varphi^*)$ définie par une fonction génératrice de la forme :

$$S(I^*, \varphi, \varepsilon) = I_1^*\varphi_1 + I_2^*\varphi_2 + \varepsilon S_1(I^*, \varphi),$$

soit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = I_1^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1}, \quad & I_2 &= \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} = I_2^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_2}, \\ \varphi_1^* &= \frac{\partial S}{\partial I_1^*} = \varphi_1 + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I_1^*}, \quad & \varphi_2^* &= \frac{\partial S}{\partial I_2^*} = \varphi_2 + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I_2^*}. \end{aligned}$$

4.6.2. - En explicitant, il vient :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1}(I^*, \varphi^*) + 0(\varepsilon^2), \quad & I_2 &= I_2^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_2}(I^*, \varphi^*) + 0(\varepsilon^2), \\ \varphi_1 &= \varphi_1^* - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I_1^*}(I^*, \varphi^*) + 0(\varepsilon^2), \quad & \varphi_2 &= \varphi_2^* - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I_2^*}(I^*, \varphi^*) + 0(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

et inversement :

$$\begin{aligned} I_1^* &= I_1 - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1}(I, \varphi) + 0(\varepsilon^2), \quad & I_2^* &= I_2 - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_2}(I, \varphi) + 0(\varepsilon^2), \\ \varphi_1^* &= \varphi_1 + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I_1^*}(I, \varphi) + 0(\varepsilon^2), \quad & \varphi_2^* &= \varphi_2 + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial I_2^*}(I, \varphi) + 0(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

4.6.3. - Conformément au principe de la méthode, on développera le hamiltonien F au voisinage des arguments (I^*, φ) de la fonction génératrice inconnue S.

Il vient :
$$F = -\frac{1}{2}k_1\left(I_1^{*2} + 2\varepsilon I_1^*\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1}\right) - \frac{1}{2}k_2\left(I_2^{*2} + 2\varepsilon I_2^*\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_2}\right)$$
$$+\varepsilon[I_1^* I_2^* + I_1^* I_2^* \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1^{*2}\cos\varphi_1] + 0\,(\varepsilon^2).$$

Nous prendrons donc pour nouveau hamiltonien :
$$F^* = -\frac{1}{2}\,(k_1 I_1^{*2} + k_2 I_2^{*2}) + \varepsilon I_1^* I_2^* + 0\,(\varepsilon^2),$$

S_1 vérifiant :
$$k_1 I_1^*\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + k_2 I_2^*\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_2} = \omega_1(I^*)\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_1} + \omega_2(I^*)\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_2}$$
$$= I_1^* I_2^*\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1^{*2}\cos\varphi_1,$$

soit :
$$S_1 = I_1^* I_2^*(D_{1,-2})^{-1}\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) - I_1^{*2}(D_{1,0})^{-1}\sin\varphi_1$$

où l'on voit apparaître les diviseurs :
$$D_{1,-2} = k_1 I_1^* - 2k_2 I_2^* = \omega_1(I^*) - 2\omega_2(I^*),$$
$$D_{1,0} = k_1 I_1^* = \omega_1(I^*),$$

supposés non nuls.

4.6.4. - On calcule alors :
$$\partial F^*/\partial I_1^* = -k_1 I_1^* + \varepsilon I_2^*,$$
$$\partial F^*/\partial I_2^* = -k_2 I_2^* + \varepsilon I_1^*,$$
$$\partial S_1/\partial \varphi_1 = I_1^* I_2^*(D_{1,-2})^{-1}\cdot\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1^{*2}(D_{1,0})^{-1}\cdot\cos\varphi_1,$$
$$\partial S_1/\partial \varphi_2 = -2I_1^* I_2^*(D_{1,-2})^{-1}\cdot\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$
$$\partial S_1/\partial I_1^* = [I_2^*(D_{1,-2})^{-1} - k_1 I_1^* I_2^*(D_{1,-2})^{-2}]\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1^*(D_{1,0})^{-1}\sin\varphi_1,$$
$$\partial S_1/\partial I_2^* = [I_1^*(D_{1,-2})^{-1} + 2k_2 I_1^* I_2^*(D_{1,-2})^{-2}]\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

d'où les fréquences perturbées :
$$-\partial F^*/\partial I_1^* = \omega_1(I^*) - \varepsilon I_2^* = k_1 I_1^* - \varepsilon I_2^*,$$
$$-\partial F^*/\partial I_2^* = \omega_2(I^*) - \varepsilon I_1^* = k_2 I_2^* - \varepsilon I_1^*,$$

et la solution de conditions initiales (I_0^*, φ_0^*) du système perturbé :
$$I_1^* = I_{10}^*,$$
$$I_2^* = I_{20}^*,$$
$$\varphi_1^* = \varphi_{10}^* + (k_1 I_{10}^* - \varepsilon I_{20}^*)(t - t_0),$$
$$\varphi_2^* = \varphi_{20}^* + (k_2 I_{20}^* - \varepsilon I_{10}^*)(t - t_0).$$

On a aussi explicitement (I, φ) en fonction de (I^*, φ^*) :
$$I_1 = I_1^* + \varepsilon[I_1^* I_2^*(D_{1,-2}^*)^{-1}\cos(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*) + I_1^{*2}(D_{1,0}^*)^{-1}\cos\varphi_1^*] + 0\,(\varepsilon^2),$$
$$I_2 = I_2^* - 2\varepsilon I_1^* I_2^*(D_{1,-2}^*)^{-1}\cos(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*) + 0\,(\varepsilon^2),$$
$$\varphi_1 = \varphi_1^* - \varepsilon\{[I_2^*(D_{1,-2}^*)^{-1} - k_1 I_1^* I_2^*(D_{1,-2}^*)^{-2}]\sin(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*) + I_1^*(D_{1,0}^*)^{-1}\sin\varphi_1^*\} + 0\,(\varepsilon^2),$$
$$\varphi_2 = \varphi_2^* - \varepsilon[I_1^*(D_{1,-2}^*)^{-1} + 2k_1 I_1^* I_2^*(D_{1,-2}^*)^{-2}]\sin(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*) + 0\,(\varepsilon^2),$$

et, réciproquement, (I^*, φ^*) en fonction de (I, φ) :

$$\begin{aligned}
I_1^* &= I_1 - \varepsilon[I_1 I_2 (D_{1,-2})^{-1}\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1^2 (D_{1,0})^{-1}\cos\varphi_1] + 0(\varepsilon^2),\\
I_2^* &= I_2 + 2\varepsilon I_1 I_2 (D_{1,-2})^{-1}\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2) + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_1^* &= \varphi_1 + \varepsilon\{[I_2(D_{1,-2})^{-1} - k_1 I_1 I_2 (D_{1,-2})^{-2}]\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) + I_1(D_{1,0})^{-1}\sin\varphi_1\} + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_2^* &= \varphi_2 + \varepsilon[I_1(D_{1,-2})^{-1} + 2k_1 I_1 I_2 (D_{1,-2})^{-2}]\sin(\varphi_1 - 2\varphi_2) + 0(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

où les diviseurs D et D^* sont calculés respectivement en I et I^*.

4.6.5. - Supposons pour fixer les idées que l'on cherche la solution qui, pour $t = t_0$, a la valeur :

$$I_1 = I_{10}, \quad I_2 = I_{20}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi.$$

Alors, à l'instant initial :

$$\begin{aligned}
I_{10}^* &= I_{10} - \varepsilon I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} - \varepsilon I_{10}^2 (D_{1,0}^{(0)})^{-1} + 0(\varepsilon^2),\\
I_{20}^* &= I_{20} + 2\varepsilon I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_{10}^* &= 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_{20}^* &= \pi + 0(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

(les $D^{(0)}$ sont les D calculés en I_0).

Donc :

$$\begin{aligned}
I_1^* &= I_{10} - \varepsilon I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} - \varepsilon I_{10}^2 (D_{1,0}^{(0)})^{-1} + 0(\varepsilon^2),\\
I_2^* &= I_{20} + 2\varepsilon I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_1^* &= (k_1 I_{10}^* - \varepsilon I_{20}^*)(t - t_0) + 0(\varepsilon^2)\\
&= [k_1 I_{10} - \varepsilon k_1 I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} - \varepsilon I_{10}^2 (D_{1,0}^{(0)})^{-1} - \varepsilon I_{20}](t - t_0) + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_2^* &= \pi + (k_2 I_{20}^* - \varepsilon I_{10}^*)(t - t_0) + 0(\varepsilon^2)\\
&= \pi + [k_2 I_{20} + 2\varepsilon k_2 I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} - \varepsilon I_{10}](t - t_0) + 0(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

On revient enfin aux variables osculatrices (I, φ) :

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_{10} - \varepsilon I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} \cdot [1 - \cos(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*)]\\
&\qquad - \varepsilon I_{10}^2 (D_{1,0}^{(0)})^{-1} \cdot [1 - \cos\varphi_1^*] + 0(\varepsilon^2),\\
I_2 &= I_{20} + 2\varepsilon I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-1} \cdot [1 - \cos(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*)] + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_1 &= \varphi_1^* - \varepsilon\{[I_{20}(D_{1,-2}^{(0)})^{-1} - k_1 I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-2}]\sin(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*)\\
&\qquad + I_{10}(D_{1,0}^{(0)})^{-1}\sin\varphi_1^*\} + 0(\varepsilon^2),\\
\varphi_2 &= \varphi_2^* - \varepsilon[I_{10}(D_{1,-2}^{(0)})^{-1} + 2k_2 I_{10} I_{20} (D_{1,-2}^{(0)})^{-2}]\sin(\varphi_1^* - 2\varphi_2^*) + 0(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la solution à $0(\varepsilon^2)$ près, en fonction des fonctions affines du temps φ_1^* et φ_2^* définies plus haut.

On notera: (*a*) l'absence de termes de Poisson, (*b*) les corrections d'ordre ε aux fréquences non perturbées $k_1 I_{10}$ et $k_2 I_{20}$ et (*c*) la présence des diviseurs D_β (ainsi que de leurs carrés dans les expressions des angles φ).

4.7. – EXERCICES.

4.7.1. - Appliquer la méthode de Lindstedt-Poincaré au hamiltonien :

$$\mathcal{F}(q, p, \varepsilon) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) - \frac{\varepsilon\omega^2}{Q} q^3,$$

en négligeant $0(\varepsilon^3)$ et en faisant usage de la transformation $(q, p) \to (I, \varphi)$ faite au paragraphe 2.6.1.

Comparer les solutions obtenues à celles du paragraphe 2.5.

4.7.2. - Etudier le système canonique à deux degrés de liberté de hamiltonien :

$$\frac{\mu_1^2}{2I_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2I_2^2} + \varepsilon I_1 I_2 \cos(2\varphi_1 - 3\varphi_2) + \varepsilon I_1^2 \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

en négligeant $0(\varepsilon^2)$. Caractériser les régions de l'espace des phases dans lesquelles la méthode de Lindstedt-Poincaré ne peut s'appliquer.

5. – LA MÉTHODE DE VON ZEIPEL-POINCARÉ

5.1. – LE PHÉNOMÈNE DE DÉGÉNÉRESCENCE.

5.1.1. - Une étape importante de la méthode de Lindstedt-Poincaré est celle où l'on emploie l'opérateur $\mathcal{S}$. On a vu qu'elle fait apparaître des dénominateurs de la forme :

$$D_\beta(I^*) = \beta \bullet \omega\,(I^*) = -\beta \bullet \frac{\partial F_0}{\partial I}(I^*) \qquad (\beta \in Z^n \backslash \{0_n\}).$$

Ces dénominateurs apparaissent dans l'expression de la fonction génératrice donc aussi dans celle du changement de variables et finalement dans les solutions en (I, φ). On a noté en particulier qu'ils apparaissent au premier degré dans l'expression des composantes de I, mais aussi par leur carré dans celle des composantes de φ (*question : pourquoi?*). Il est clair que l'annulation de l'un quelconque des D_β empêche l'emploi de la méthode de Lindstedt-Poincaré. On verra par ailleurs que la méthode est également fautive si l'un de ces dénominateurs, sans être nécessairement nul, est suffisamment petit.

5.1.2. - La situation évoquée peut se produire dans deux cas tout à fait différents.

(a) Il peut se produire que pour un élément donné β de Z_n (différent de 0_n), la relation de commensurabilité

$$\beta \bullet \omega\,(I^*) = 0$$

soit une identité, vérifiée dans tout l'espace des I^*. Aucun choix des conditions initiales ne permet alors l'emploi de la méthode de Lindstedt-Poincaré. Comme ω est l'opposé du gradient de F_0, c'est là une éventuelle propriété du hamiltonien non perturbé, indépendante non seulement des conditions initiales, mais aussi de la perturbation $\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + 0\,(\varepsilon^3)$.

(b) S'il n'en est pas ainsi, la même relation de commensurabilité est une équation qui définit une variété de dimension $(n-1)$ dans l'espace de dimension n des I^*. C'est alors sur cette variété qu'un $D_\beta(I^*)$ s'annule et que l'on ne peut appliquer la méthode. Comme on l'a suggéré plus haut, le voisinage de cette variété pose aussi problème. La cause des difficultés n'est alors plus une propriété particulière du hamiltonien non perturbé, mais un choix spécial de conditions initiales dans l'espace des phases.

On distinguera ces deux situations en disant que dans la première hypothèse, le hamiltonien considéré est ***dégénéré***, tandis que dans la seconde, la région exceptionnelle mise en évidence dans l'espace des I^* est une ***région de résonance***. Le présent chapitre est consacré au premier cas, le second étant envisagé dans le chapitre suivant.

5.1.3. - On va poser le problème en termes plus généraux. Observons d'abord qu'une relation telle que $\beta \bullet \omega = 0$ en entraîne une infinité d'autres, telles que $(\lambda\beta) \bullet \omega = 0$ où λ est un entier relatif. Mais elles ne sont pas indépendantes entre elles. Supposons alors qu'il existe au maximum $n-p$ relations

$$\beta_j \bullet \omega = 0, \qquad j \in [1; n-p]$$

indépendantes entre elles et écrivons ceci :

$$\mathbf{B}_{(n-p)\times n} \bullet \omega_{n\times 1} = 0_{(n-p)\times 1}$$

où $\mathbf{B}$ est la matrice dont les lignes sont les β_j. Comme il n'y a pas plus de n vecteurs indépendants dans un espace de dimension n, on a clairement :

$$0 \leq p \leq n.$$

Si $p = n$, il n'y a aucune relation de commensurabilité entre les composantes de ω. Le hamiltonien n'est pas dégénéré et, sauf dans les régions de résonance, on peut appliquer la méthode de Lindstedt-Poincaré. A l'opposé, si $p = 0$, il y a n relations de commensurabilité entre les composantes de ω et on dit que le hamiltonien est complètement dégénéré. Pour des valeurs intermédiaires de p, on rencontre divers degrés de dégénérescence, que l'on peut caractériser par le nombre $n - p$ des lignes de $\mathbf{B}$.

5.1.4. - L'indépendance supposée des lignes de β implique que celle-ci soit de rang $n-p$. Il existe donc dans cette matrice au moins un mineur non nul d'ordre $n - p$. Moyennant une éventuelle permutation des n composantes de I et φ, on pourra supposer que ce mineur est constitué par les $n - p$ dernières colonnes de $\mathbf{B}$.

On écrira alors :

$$\mathbf{B}_{(n-p)\times n} = (\mathbf{B}^{(1)}_{(n-p)\times p} \ ; \quad \mathbf{B}^{(2)}_{(n-p)\times(n-p)}).$$

L'hypothèse d'indépendance des relations de commensurabilité se traduit par le fait que la matrice carrée $\mathbf{B}^{(2)}$ est régulière.

On posera de même :

$$I_{n\times 1} = \begin{pmatrix} I^{(1)}_{p\times 1} \\ I^{(2)}_{(n-p)\times 1} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{n\times 1} = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}_{p\times 1} \\ \varphi^{(2)}_{(n-p)\times 1} \end{pmatrix}.$$

5.2. – FORME STANDARD D'UN HAMILTONIEN DÉGÉNÉRÉ.

5.2.1 - Nous allons montrer l'existence d'une transformation canonique linéaire à coefficients constants qui permet de mettre un hamiltonien dégénéré quelconque sous une forme standard qui sera commode dans la suite. On rappelle qu'une telle transformation $(I, \omega) \rightarrow (I^*, \omega^*)$ peut être définie par :

$$I^* = \mathbf{M}^t I, \quad \varphi = \mathbf{M}\varphi^*,$$

où $\mathbf{M}$ est une matrice régulière constante de dimension $n \times n$.

Le nouveau hamiltonien $F_0^*(I^*, -)$ est égal à l'ancien $F_0(I, -)$, puisque la transformation est indépendante du temps, et il ne dépend pas de φ^* car I ne dépend que de I^*.

5.2.2. - On a :

$$\frac{\partial F_0}{\partial I} = \left(\frac{\partial I^*}{\partial I}\right)^t \frac{\partial F_0^*}{\partial I^*} = \mathbf{M}\frac{\partial F_0^*}{\partial I^*},$$

ou :

$$\omega = \mathbf{M}\omega^*,$$

en notant $\omega^* = \partial F_0^*/\partial I^*$. Alors en posant :

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} \bullet \mathbf{M},$$

la relation

$$\mathbf{B} \bullet \omega = 0$$

implique

$$\mathbf{B}^* \bullet \omega^* = 0.$$

qui est tout à fait analogue. On notera que $\mathbf{B}^*$ est de rang $n-p$ comme $\mathbf{B}$ puisque $\mathbf{M}$ est régulière, de sorte que les caractéristiques de dégénérescence du hamiltonien sont invariantes par la transformation canonique linéaire effectuée.

Nous nous proposons maintenant de déterminer $\mathbf{M}$ de sorte que $\mathbf{B}^*$ ait une forme aussi simple que possible.

5.2.3. - On cherchera $\mathbf{M}$ sous la forme :

$$\mathbf{M}_{n\times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{11}_{p\times p} & \mathbf{M}^{12}_{p\times(n-p)} \\ \mathbf{M}^{21}_{(n-p)\times p} & \mathbf{M}^{22}_{(n-p)\times(n-p)} \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{BM} = (\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{M}^{11} + \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{M}^{21};\ \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{M}^{12} + \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{M}^{22}).$$

Comme $\mathbf{B}^{(2)}$ est régulière par hypothèse, on peut choisir :

$$\mathbf{M}^{22} = [\mathbf{B}^{(2)}]^{-1}, \quad \mathbf{M}^{12} = 0_{p\times(n-p)},$$

de sorte que :

$$\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{M}^{12} + \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{M}^{22} = \mathbf{1}_{(n-p)\times(n-p)}.$$

$\mathbf{M}^{12}$ et $\mathbf{M}^{22}$ étant ainsi fixées, $\mathbf{M}^{11}$ et $\mathbf{M}^{21}$ peuvent être définies assez arbitrairement, sous réserve que $\mathbf{M}$ soit régulière. Comme $\mathbf{M}^{12}$ est nulle et $\mathbf{M}^{22}$, inverse d'une matrice régulière, est régulière, il suffit que $\mathbf{M}^{11}$ soit régulière. Nous ferons le choix suivant :

$$\mathbf{M}^{11} = \mathbf{1}_{p\times p}, \quad \mathbf{M}^{21} = -(\mathbf{B}^{(2)})^{-1} \cdot \mathbf{B}^{(1)},$$

de sorte que :

$$\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{M}^{11} + \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{M}^{21} = 0_{(n-p)\times p}$$

et que :

$$\mathbf{B}^* = (0_{(n-p)\times p};\ \mathbf{1}_{(n-p)\times(n-p)}).$$

5.2.4. - Il en résulte que la relation de commensurabilité :

$$\mathbf{B} \bullet \omega = 0$$

se transforme en :

$$\mathbf{B}^* \bullet \omega^* = (0_{(n-p)\times p},\ \mathbf{1}_{(n-p)\times(n-p)}) \bullet \omega^* = 0$$

ou, plus simplement :

$$\omega^{*(2)} = -\frac{\partial F_0^*}{\partial I^{*(2)}} = 0$$

Il en résulte que, relativement aux nouvelles variables, F_0^* est non seulement indépendant des composantes de φ^*, mais aussi des $n-p$ dernières composantes $I^{*(2)}$ de I^*. En revanche, il dépend explicitement des p premières composantes $I^{*(1)}$, car, autrement, le nombre de relations de commensurabilité serait supérieur à $n-p$, contrairement à notre hypothèse.

Dans la suite, on supposera toujours déjà effectuée la transformation que l'on vient d'étudier. Un hamiltonien dégénéré sera donc écrit sous la forme $F_0(I^{(1)}, -; -)$ qui met en évidence son indépendance vis à vis des composantes de $I^{(2)}$ et de φ.

5.2.5. - Il peut sembler que la situation de dégénérescence soit très exceptionnelle. Son étude présente cependant un grand intérêt car elle se produit dans l'application la plus courante des méthodes que nous étudions ici, le problème quasi képlérien. En effet, en variables de Delaunay :

$$I = (L, G, H)^t, \quad \varphi = (l, g, h)^t,$$

on a vu que le hamiltonien non perturbé s'écrit :

$$F_0(L, -; -) = \mu^2/2L^2$$

de sorte qu'il existe deux relations de commensurabilité :

$$\partial F_0/\partial G = 0, \quad \partial F_0/\partial H = 0.$$

La principale application des méthodes de perturbation à la mécanique céleste constitue ainsi un cas d'exception à l'emploi de la méthode de Lindstedt-Poincaré.

5.3. – CLASSIFICATION DES VARIABLES ANGULAIRES.

5.3.1. - Considérons un hamiltonien perturbé et dégénéré :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I^{(1)}, -; -) + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda F_\lambda(I, \varphi), \quad \lambda \in N^*.$$

Les équations canoniques associées sont :

$$\begin{aligned}
\dot{I}^{(1)} &= \frac{\partial F}{\partial \varphi^{(1)}} = \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial F_\lambda}{\partial \varphi^{(1)}} = 0\,(\varepsilon),\\
\dot{I}^{(2)} &= \frac{\partial F}{\partial \varphi^{(2)}} = \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial F_\lambda}{\partial \varphi^{(2)}} = 0\,(\varepsilon),\\
\dot{\varphi}^{(1)} &= -\frac{\partial F}{\partial I^{(1)}} = -\frac{\partial F_0}{\partial I^{(1)}} - \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial F_\lambda}{\partial I^{(1)}} = -\frac{\partial F_0}{\partial I^{(1)}} + 0\,(\varepsilon),\\
\dot{\varphi}^{(2)} &= -\frac{\partial F}{\partial I^{(2)}} = -\sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial F_\lambda}{\partial I^{(2)}} = 0\,(\varepsilon).
\end{aligned}$$

5.3.2. - Il en résulte bien entendu que les variations des composantes de $I^{(1)}$ et de $I^{(2)}$ sont lentes. En revanche, parmi les composantes de φ, il convient de distinguer celles de $\varphi^{(1)}$ de celles de $\varphi^{(2)}$. Les premières ont des dérivées de l'ordre de $-\partial F_0/\partial I^{(1)}$, qui n'est petit que dans certaines régions particulières de l'espace des I : on les appelle *variables angulaires rapides*. Au contraire, les composantes de $\varphi^{(2)}$ ont des variations de l'ordre de ε et on les appelle *variables angulaires lentes*.

On observe évidemment comment les deux types de variables angulaires se distinguent l'un de l'autre. Les variables conjuguées des variables angulaires rapides figurent explicitement dans le hamiltonien non perturbé F_0. Au contraire, ce dernier ne dépend pas des variables conjuguées des variables angulaires lentes.

5.3.3. - Un hamiltonien non dégénéré ne comporte que des variables angulaires rapides. Mais un hamiltonien qui ne comporte que des variables angulaires rapides peut être dégénéré. Une transformation canonique du type de celle définie plus haut au moyen de la matrice $\mathbf{M}$ transforme les variables angulaires φ en combinaisons linéaires de celle-ci. Or, si une combinaison de variables lentes est nécessairement lente, une combinaison de variables rapides peut être lente.

A titre d'exemple, considérons le hamiltonien du problème quasi képlérien, lorsqu'on l'exprime en variables de Delaunay rapides, définies par :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l+g+h \\ l+g \\ l \end{pmatrix},$$

qui se complète canoniquement par :

$$\begin{pmatrix} L \\ G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1+I_2+I_3 \\ I_1+I_2 \\ I_1 \end{pmatrix},$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{\mu a}\,\sqrt{1-e^2}\cos\mathcal{I}, \\ I_2 &= \sqrt{\mu a}\,\sqrt{1-e^2}\,(1-\cos\mathcal{I}), \\ I_3 &= \sqrt{\mu a}\,(1-\sqrt{1-e^2}). \end{aligned}$$

Le hamiltonien non perturbé dépend alors explicitement de I_1, I_2 et I_3, et il s'écrit :

$$F_0(I_1, I_2, I_3; -) = \frac{\mu^2}{2L^2} = \frac{1}{2}\mu^2(I_1+I_2+I_3)^{-2}.$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial F_0}{\partial I_1} = \frac{\partial F_0}{\partial I_2} = \frac{\partial F_0}{\partial I_3} = -\mu^2(I_1+I_2+I_3)^{-3},$$

et que :

$$\mathbf{B}\bullet\omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

où la matrice $\mathbf{B}$ est de rang 2, ce qui confirme la dégénérescence de F_0.

5.4. – UN EXEMPLE.

5.4.1. - On considère, en variables $(L, G; l, g)$, le hamiltonien à deux degrés de liberté :

$$F(L, G; l, g) = \frac{\mu^2}{2L^2} + \varepsilon \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta}(L, G) \cdot \cos(\alpha l + \beta g), \quad (\alpha, \beta) \in Z^2.$$

C'est le hamiltonien d'un problème quasi képlérien plan, dans lequel la fonction perturbatrice est paire et 2π - périodique des variables angulaires l et g. l est clairement une variable rapide et g une variable lente. On pose :

$$F(L, G; l, g) = F_0(L, -; -, -) + \varepsilon R_s(L, G; -, -) + \varepsilon R_l(L, G; -, g) + \varepsilon R_c(L, G; l, g),$$

où l'on sépare :

(a) le hamiltonien non perturbé :

$$F_0(L, -; -, -) = \mu^2/2L^2,$$

(b) le terme séculaire :

$$R_s(L, G; -, -) = C_{00}(L, G),$$

(c) les termes à longue période :

$$R_l(L, G; -, g) = \sum_\gamma C_{0\gamma}(L, G) \cdot \cos \gamma g, \quad \gamma \in Z^*,$$

(d) les termes à courte période :

$$R_c(L, G; l, g) = \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta}(L, G) \cdot \cos(\alpha l + \beta g), \quad \alpha \in Z^*, \quad \beta \in Z.$$

5.4.2. - Nous savons déjà que, F_0 étant dégénéré (il est indépendant de G), il n'est pas possible d'appliquer la méthode de Lindstedt-Poincaré. Nous allons cependant reprendre cette technique, afin d'observer ce qui reste valable dans l'hypothèse de dégénérescence.

Il s'agit de construire une transformation canonique indépendante du temps :

$$(L, G; l, g) \rightarrow (L^*, G^*; l^*, g^*),$$

voisine de l'identité, et définie par la fonction génératrice :

$$S(L^*, G^*; l, g) = L^* l + G^* g + \varepsilon S_1(L^*, G^*; l, g).$$

On cherchera S_1 de sorte que le nouveau hamiltonien F^* ait à $0(\varepsilon^2)$ près des vertus particulières. Dans l'application de la méthode de Lindstedt-Poincaré, on voudrait que F^* soit indépendant de l^* et de g^* : on sait qu'ici, cela est impossible, donc nous ne fixons par pour l'instant les propriétés exigées pour F^*.

La transformation est définie par les relations :

$$L = \frac{\partial S}{\partial l} = L^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial l}, \quad l^* = \frac{\partial S}{\partial L^*} = l + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial L^*},$$
$$G = \frac{\partial S}{\partial g} = G^* + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial g}, \quad g^* = \frac{\partial S}{\partial G^*} = g + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial G^*}.$$

5.4.3. - Il reste toujours possible de développer le hamiltonien F au voisinage de $(L, G; l, g) = (L^*, G^*; l, g)$. Il vient d'abord :

$$F_0(L, -; -, -) = \frac{1}{2}\mu^2 \left(L^* + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^{-2} = \frac{\mu^2}{2L^{*2}} - \frac{\varepsilon\mu^2}{L^{*3}}\frac{\partial S_1}{\partial l} + 0\,(\varepsilon^2),$$

d'où :

$$\begin{aligned} F\,(L, G; l, g) = & \frac{\mu^2}{2L^{*2}} - \frac{\varepsilon\mu^2}{L^{*3}}\frac{\partial S_1}{\partial l} + \varepsilon C_{00}(L^*, G^*) \\ & + \varepsilon \sum_\gamma C_{0\gamma}(L^*, G^*) \cdot \cos\gamma g + \varepsilon \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta}(L^*, G^*) \cdot \cos(\alpha l + \beta g) + 0\,(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

La transformation étant indépendante du temps, ce hamiltonien est égal au nouveau, que l'on écrira :

$$F^*(L^*, G^*; l^*, g^*) = F_0^* + \varepsilon F_1^* + 0\,(\varepsilon^2),$$

sans préciser pour l'instant les arguments de F_0^* et de F_1^*.

5.4.4. - En comparant les expressions de F et de F^*, on voit que, comme dans le cas non dégénéré :

$$F_0^*(L^*, -; -, -) = F_0(L^*, -; -, -) = \frac{\mu^2}{2L^{*2}}.$$

En identifiant les coefficients de ε dans F et F^*, il vient par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{L^{*3}}{\mu^2}\,[C_{00}(L^*, G^*) + & \sum_\gamma C_{0\gamma}(L^*, G^*) \cdot \cos\gamma g \\ & + \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta}(L^*, G^*) \cdot \cos(\alpha l + \beta g) - F_1^*], \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{L^{*3}}{\mu^2}\,[& \int^l (C_{00} + \sum_\gamma C_{0\gamma} \cdot \cos\gamma g - F_1^*)\,dl \\ & + \sum_\alpha \sum_\beta \frac{1}{\alpha} C_{\alpha\beta} \cdot \sin(\alpha l + \beta g)], \end{aligned}$$

où apparaît le diviseur α dont on sait qu'il n'est jamais nul.

5.4.5. - On sait que notre objectif est d'éviter la présence de termes de Poisson dans la solution, donc en premier lieu dans la fonction génératrice. Ceci impose :

$$F_1^*(L^*, G^*; -, g) = C_{00}(L^*, G^*) + \sum_\gamma C_{0\gamma}(L^*, G^*) \cdot \cos\gamma g.$$

Il n'est pas nécessaire de poursuivre ici le calcul de la transformation : on voit dès maintenant que nous parvenons à éliminer du hamiltonien la variable angulaire rapide l, *mais non la variable lente g*.

C'est dans cet esprit que nous allons construire la méthode de von Zeipel-Poincaré, en cherchant à éliminer du hamiltonien, non pas toutes les variables angulaires comme dans la méthode de Lindstedt-Poincaré, mais au moins les variables angulaires rapides. Au lieu de ramener le système initial à un système *à zéro degré de liberté* (donc trivialement intégrable), on se contentera de *réduire* son degré de liberté.

Cet objectif moins ambitieux reste intéressant.

(a) Même non intégrable, un système dont le degré de liberté est petit est plus facile à analyser qu'un autre dont le degré de liberté est supérieur.

(b) Dans certains cas, comme celui évoqué dans ce paragraphe, on parvient à un système à un seul degré de liberté (il suffit pour cela qu'il n'y ait qu'une seule variable angulaire lente). L'intégration complète est alors possible sans faire appel à des méthodes de perturbation.

(c) Il existe des cas, exceptionnels mais notables, où la structure particulière du hamiltonien permet même l'élimination des variables lentes. Nous en verrons l'exemple classique de la méthode de Brouwer.

5.5. – LA MÉTHODE.

5.5.1. - Plaçons nous dans le cas d'un hamiltonien dégénéré :

$$F(I^{(1)}, I^{(2)}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}; \varepsilon) = F_0(I^{(1)}, -; -, -) + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda F_\lambda(I^{(1)}, I^{(2)}; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}), \qquad \lambda \in N^*,$$

où les composantes de $\varphi^{(2)}$ sont les variables lentes, puisque F_0 est indépendant des composantes de $I^{(2)}$. On rappelle que $I^{(1)}$ et $\varphi^{(1)}$ ont p composantes et $I^{(2)}$, $\varphi^{(2)}$ en ont $n-p$. Généralisant la stratégie employée dans l'exemple précédent, nous chercherons une transformation canonique $(I, \varphi) \rightarrow (I^*, \varphi^*)$ voisine de l'indentité et définie par une fonction génératrice :

$$S(I^*, \varphi) = I^* \bullet \varphi + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda S_\lambda(I^*, \varphi), \qquad \lambda \in [1; k],$$

où l'on cherchera les S_λ de sorte que le nouveau hamiltonien :

$$F^*(I^*, \varphi^*) = F_0^*(I^{*(1)}, -; -, -) + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda F_\lambda^*(I^{*(1)}, I^{*(2)}; -, \varphi^{*(2)}) + 0(\varepsilon^{k+1})$$

soit indépendant des variables rapides à $0(\varepsilon^{k+1})$ près.

L'expression de cette transformation est :

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = I^* + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial S_\lambda}{\partial \varphi}, \quad \varphi^* = \frac{\partial S}{\partial I^*} = \varphi + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial S_\lambda}{\partial I^*}.$$

5.5.2. - Comme dans la méthode de Lindstedt-Poincaré, *on développe F au voisinage des arguments I^*, φ de S.* On utilise encore la notation :

$$\omega_u(I^{(1)}) = -\frac{\partial F_0}{\partial I_u}(I^{(1)}, -; -, -), \qquad u \in [1; p]$$

pour les fréquences non perturbées, mais cette fois elles ne dépendent que des p premières composantes $I^{(1)}$ de I. On conduit le calcul comme dans les paragraphes 4.2.2., 4.2.3. et 4.2.4..

5.5.3. - Développons d'abord le hamiltonien non perturbé F_0.

$$F_0(I^{(1)}, -; -, -) = F_0(I_u^{*(1)} + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u^{(1)}}, -; -, -) \qquad \alpha \in [\![1;\, k]\!]$$

$$= F_0(I^{*(1)}, -; -, -) - \sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \sum_\rho \varepsilon^\rho \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} \qquad \rho \in [\![1;\, k]\!]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_u \sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_u \partial I_v}(I^{*(1)}, -; -, -) \sum_\alpha \sum_\beta \varepsilon^{\alpha+\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u} \frac{\partial S_\beta}{\partial \varphi_v} \qquad \alpha + \beta \in [\![2;\, k]\!]$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_u \sum_v \sum_w \frac{\partial^3 F_0}{\partial I_u \partial I_v \partial I_w}(I^{*(1)}, -; -, -) \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \varepsilon^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{\partial S_\alpha}{\partial \varphi_u} \frac{\partial S_\beta}{\partial \varphi_v} \frac{\partial S_\gamma}{\partial \varphi_w} \qquad \alpha + \beta + \gamma \in [\![3;\, k]\!]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_u \sum_v \cdots \sum_z \varepsilon^k \frac{\partial^k F_0}{\partial I_u \partial I_v \partial \ldots \partial I_z}(I^{*(1)}, -; -, -) \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} \cdots \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_z}$$

$$+ 0\,(\varepsilon^{k+1})$$

$$= F_0(I^{*(1)}, -; -, -) - \sum_\rho \varepsilon^\rho \sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \sum_\rho \varepsilon^\rho \Phi_\rho^{(0)} + 0\,(\varepsilon^{k+1}).$$

Les indices u, v, $w, \cdots, z$ décrivent chacun $[\![1;\, p]\!]$, $\Phi_1^{(0)}$ est nul, et, pour $2 \leq \rho \leq k$, $\Phi_\rho^{(0)}$ dépend des dérivées partielles par rapport aux φ de $S_1, S_2, \cdots, S_{\rho-1}$, mais pas de celles de $S_\rho, S_{\rho+1}, \cdots, S_k$.

On développe de même les $F_\lambda(I; \varphi)$ pour $1 \leq \lambda \leq k$. Le calcul est identique à celui du paragraphe 4.2.3. et on obtient aussi

$$F_\lambda(I, \varphi) = F_\lambda(I^*, \varphi) + \sum_\sigma \varepsilon^\sigma \Phi_\sigma^{(\lambda)} + 0\,(\varepsilon^{k-\lambda+1}), \qquad \sigma \in [\![1,\, k-\lambda]\!].$$

Ici encore, $\Phi_\rho^{(\lambda)}$ dépend des dérivées partielles de $S_1, S_2, \cdots, S_\rho$ par rapport aux composantes de φ, mais pas de celles de $S_{\rho+1}, S_{\rho+2}, \cdots, S_k$.

Il vient donc :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I^{*(1)}, -; -, -) - \sum_\rho \varepsilon^\rho \sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \sum_\rho \varepsilon^\rho \Phi_\rho^{(0)} + 0\,(\varepsilon^{k+1})$$
$$+ \sum_\lambda \varepsilon^\lambda [F_\lambda(I^*, \varphi) + \sum_\sigma \varepsilon^\sigma \Phi_\sigma^{(\lambda)} + 0\,(\varepsilon^{k-\lambda+1})],$$

ou, comme dans le paragraphe 4.2.4. :

$$F(I, \varphi, \varepsilon) = F_0(I^{*(1)}, -; -, -)$$
$$+ \sum_\rho \varepsilon^\rho [- \sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \Phi_\rho^{(0)} + F_\rho(I^*, \varphi) + \sum_\lambda \Phi_{\rho-\lambda}^{(\lambda)}] + 0\,(\varepsilon^{k+1})$$
$$= F_0(I^{*(1)}, -; -, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho [- \sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \Phi_\rho] + 0\,(\varepsilon^{k+1}),$$

où :

$$\rho \in [\![1;\, k]\!], \qquad \lambda \in [\![1,\, p-1]\!],$$

et :

$$\Phi_\rho = F_\rho + \sum_s \Phi_{\rho-s}^{(s)}, \qquad s \in [\![0,\, k-1]\!].$$

Comme dans le cas de la méthode de Lindstedt, Φ_ρ dépend des dérivées partielles de S_1, $S_2, \cdots, S_{\rho-1}$ par rapport aux composantes de $\varphi^{(1)}$, mais non de celles de S_ρ, $S_{\rho+1}, \cdots, S_k$. La différence est que les dérivées partielles des S_ρ par rapport aux composantes de $\varphi^{(2)}$ n'apparaissent pas et que $u \in [1; p]$ (et non $[1; n]$).

5.5.4.- Écrivons maintenant le nouveau hamiltonien :

$$F^*(I^*; -, \varphi^{*(2)}) = F_0^*(I^{*(1)}, -; -, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho F_\rho^*(I^*; -, \varphi^{*(2)}) + 0(\varepsilon^{k+1}),$$

où, comme convenu dans le paragraphe 5.5.1., on admet que les F_ρ^* dépendent des variables lentes $\varphi^{*(2)}$.

Contrairement à ce qui se passait dans le cas non dégénéré, il faut ici développer F^* au voisinage de I^*, $\varphi^{(2)}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_\rho^*(I^*; -, \varphi^{*(2)}) &= F_\rho^*\left(I^*; -, \varphi_u^{(2)} + \sum_\lambda \varepsilon^\lambda \frac{\partial S_\lambda}{\partial I_u^{*(2)}}\right) \qquad \lambda \in [1; k] \\
&= F_\rho^*(I^*; -, \varphi^{(2)}) \\
&+ \sum_u \frac{\partial F_\rho^*}{\partial \varphi_u^{*(2)}}(I^*; -, \varphi^{(2)}) \cdot \sum_\alpha \varepsilon^\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial I_u^{*(2)}} \qquad \alpha \in [1; k-\rho] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_u \sum_v \frac{\partial^2 F_\rho^*}{\partial \varphi_u^{*(2)} \cdot \partial \varphi_v^{*(2)}}(I^*; -, \varphi^{(2)}) \sum_\alpha \sum_\beta \varepsilon^{\alpha+\beta} \frac{\partial S_\alpha}{\partial I_u^{*(2)}} \cdot \frac{\partial S_\beta}{\partial I_v^{*(2)}} \qquad \alpha + \beta \in [2; k-\rho] \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{(k-\rho)!} \sum_u \sum_v \cdots \sum_z \frac{\partial^{k-\rho} F_\rho^*}{\partial \varphi_u^{*(2)} \cdot \partial \varphi_v^{*(2)} \cdots \partial \varphi_z^{*(2)}}(I^*; -, \varphi^{(2)}) \cdot \varepsilon^{k-\rho} \frac{\partial S_1}{\partial I_u^{*(2)}} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial I_v^{*(2)}} \cdots \frac{\partial S_1}{\partial I_z^{*(2)}} \\
&+ 0(\varepsilon^{k-\rho+1}),
\end{aligned}$$

où u, $v, \cdots, z$ décrivent chacun $[p+1; n]$. On a donc :

$$F_\rho^*(I^*; -, \varphi^{*(2)}) = \Phi_\rho^*$$

où Φ_ρ^* est une fonction connue des dérivées partielles de S_1, $S_2, \cdots, S_{\rho-1}$ (et non de S_ρ, $S_{\rho+1}, \cdots, S_k$). Par conséquent :

$$F^*(I^*; -, \varphi^{*(2)}) = F_0^*(I^{*(1)}, -; -, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho \Phi_\rho^*$$

5.5.5. - On identifie maintenant les hamiltoniens F et F^*.

$$\begin{aligned}
F_0(I^{*(1)}, -; -, -) &+ \sum_\rho \varepsilon^\rho \left[-\sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} + \Phi_\rho\right] \\
&= F_0^*(I^{*(1)}, -; -, -) + \sum_\rho \varepsilon^\rho \Phi_\rho^* + 0(\varepsilon^{k+1}).
\end{aligned}$$

L'identification des termes d'ordre zéro donne :

$$F_0^*(I^{*(1)}, -; -, -) = F_0(I^{*(1)}, -; -, -),$$

c'est à dire qu'une fois de plus, le nouveau hamiltonien d'ordre zéro est la même fonction que l'ancien.

Aux ordres supérieurs :

$$\sum_u \omega_u(I^{*(1)}) \cdot \frac{\partial S_\rho}{\partial \varphi_u} = \Phi_\rho - \Phi_\rho^*,$$

où le second membre ne dépend que des dérivées partielles de $S_1, S_2, \cdots, S_{\rho-1}$. Ces équations ont la même forme que les équations fondamentales de la méthode de Poincaré-Lindstedt, la différence essentielle étant que la sommation sur u est définie sur $[\![1;\, p]\!]$ et non $[\![1;\, n]\!]$.

5.6. – OPÉRATEURS $\mathcal{M}_p$ ET $\mathcal{S}_p$

5.6.1. - Nous allons généraliser les opérateurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ rencontrés dans le chapitre précédent, en vue de les adapter à la situation présente. Comme dans le paragraphe 4.4., on considère des expressions formelles de la forme :

$$G(I, \varphi) = \sum_\alpha G_\alpha(I) \cdot exp\, i\, (\alpha \bullet \varphi), \qquad \alpha \in \Omega \subset Z^n.$$

Au lieu de considérer la partition $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de Ω (où $\mathcal{B}$ est l'ensemble des éléments de Ω différents de 0_n), on introduit une autre partition $(\mathcal{A}_p, \mathcal{B}_p)$ dont l'objectif est de séparer dans G les termes à longue période des termes à courte période.

On pose :

$$G_L(I; -, \varphi^{(2)}) = \sum_\alpha G_\alpha(I) \cdot exp\, i\, (\alpha \bullet \varphi), \qquad \alpha \in \mathcal{A}_p,$$
$$G_C(I; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = \sum_\beta G_\beta(I) \cdot exp\, i\, (\beta \bullet \varphi), \qquad \beta \in \mathcal{B}_p,$$

où les éléments de $\mathcal{A}_p$ sont ceux qui ont toutes leurs p premières composantes nulles, tandis que ceux de $\mathcal{B}_p$ ont au moins une composante non nulle parmi les p premières. Les ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ du chapitre précédent s'identifient ainsi à $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$. On a bien entendu :

$$G(I, \varphi) = G_L(I; -, \varphi^{(2)}) + G_C(I; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}).$$

5.6.2. - On définit alors les opérateurs $\mathcal{M}_p$, $\mathcal{S}_p$ par :

$$\mathcal{M}_p G(I; -, \varphi^{(2)}) = G_L(I; -, \varphi^{(2)}),$$
$$\mathcal{S}_p G(I; \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = -i \sum_\beta \frac{G_\beta(I)}{\beta \bullet \omega(I)}\, exp\, i\, (\beta \bullet \varphi).$$

On observe que les diviseurs qui apparaissent quand on applique $\mathcal{S}_p$:

$$\mathcal{D}_\beta(I) = \beta \bullet \omega(I)$$

ne sont pas identiquement nuls, puisqu'au moins l'une des p premières composantes de $\mathcal{B}$ est non nulle, tandis que seules les $n - p$ dernières composantes de ω sont nulles.

Rappelons que $\mathcal{D}_\beta(I)$ peut être nul dans des régions particulières de l'espace des I (*régions de résonance*), mais que nous écartons ici ce cas.

5.6.3. - L'opérateur $\mathcal{M}_p$ admet une interprétation simple. On a formellement :

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} G\left(I;\,\varphi^{(1)},\,\varphi^{(2)}\right)\cdot d\varphi^{(1)} =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} G_L(I;-,\,\varphi^{(2)})\cdot d\varphi^{(1)} + \frac{1}{(2\pi)^p}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} G_C(I;\,\varphi^{(1)},\,\varphi^{(2)})\cdot d\varphi^{(1)}.$$

Le second terme est identiquement nul, tandis que le premier se réduit à $G_L(I;-,\varphi^{(2)})$, c'est à dire $\mathcal{M}_p G$.

$\mathcal{M}_p$ est donc un opérateur de moyenne par rapport aux variables angulaires rapides, composantes de $\varphi^{(1)}$. Dans le cas du chapitre précédent, $p = n$, et $\mathcal{M}$ s'interprète comme l'opérateur de moyenne par rapport à l'ensemble des composantes de φ.

5.6.4. - Nous établirons pour $\mathcal{M}_p$ et $\mathcal{S}_p$ une propriété comparable à celle qui a été formulée pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$ dans le paragraphe 4.4.4.

Pour $u \in [1;\, p]$:

$$\omega_u(I)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_u}[\mathcal{S}_p G\,(I,\,\varphi)] = \omega_u(I)\sum_\beta \frac{\beta_u G_\beta(I)}{\beta\bullet\omega\,(I)}\cdot exp\,i\,(\beta\bullet\varphi),$$

d'où :

$$\begin{aligned}\omega\,(I)\bullet\frac{\partial}{\partial\varphi}[\mathcal{S}_p G\,(I,\,\varphi)] &= \sum_\beta G_\beta(I)\cdot exp\,i\,(\beta\bullet\varphi)\\ &= G_C(I;\,\varphi^{(1)},\,\varphi^{(2)}) = G - G_L = G - \mathcal{M}_p G.\end{aligned}$$

Cette relation est tout à fait analogue à celle que l'on avait obtenu pour les opérateurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{S}$, mais ici, $\mathcal{M}_p G$, indépendant des variables angulaires rapides $\varphi^{(1)}$, dépend des variables angulaires lentes $\varphi^{(2)}$. De plus u ne prend que les valeurs correspondant aux indices des variables rapides.

5.7. – LA SOLUTION

5.7.1 - Revenons aux équations fondamentales :

$$\omega\,(I^{*(1)})\bullet\frac{\partial S_\rho}{\partial\varphi} = \Phi_\rho - \Phi^*_\rho,$$

en nous intéressant, à titre d'illustration, aux cas $\rho = 1$ et $\rho = 2$.

Les expressions des Φ_ρ et des Φ^*_ρ se déduisent des développements de F et de F^* obtenus précédemment (voir 4.2. pour F et 5.5. pour F^*).

On obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= F_1 + \Phi_1^{(0)} = F_1,\\ \Phi_2 &= F_2 + \Phi_2^{(0)} + \Phi_1^{(1)}\\ &= F_2 + \frac{1}{2}\sum_u\sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_u \partial I_v}(I^{*(1)},-;-,-)\,\frac{\partial S_1}{\partial\varphi_u}\,\frac{\partial S_1}{\partial\varphi_v} + \sum_u \frac{\partial F_1}{\partial I_1}(I^*,\,\varphi)\cdot\frac{\partial S_1}{\partial\varphi_u},\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\Phi_1^* = F_1^*(I^*; -, \varphi^{(2)}),$$
$$\Phi_2^* = F_2^*(I^*; -, \varphi^{(2)}) + \sum_u \frac{\partial F_1^*}{\partial \varphi_u^{*(2)}}(I^*; -, \varphi^{(2)}) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial I_u^{*(1)}}.$$

5.7.2. - Pour $\rho = 1$, l'équation :

$$\omega\,(I^{*(1)}) \bullet \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \Phi_1 - \Phi_1^* = F_1 - F_1^*,$$

admet pour solution :

$$S_1 = \mathcal{S}_p F_1(I^*; \varphi),$$
$$F_1^* = \mathcal{M}_p F_1(I^*; -, \varphi^{(2)}).$$

Cette forme est convenable, car :

(a) $\mathcal{S}_p$ ne génère que des termes périodiques, donc S_1 est bornée;

(b) $\mathcal{M}_p$ est une moyenne par rapport à $\varphi^{(1)}$, donc F_1^* en est indépendant.

5.7.3. - Examinons l'équation suivante ($\rho = 2$) :

$$\begin{aligned}
\omega\,(I^{*(1)}) \bullet \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} &= \Phi_2 - \Phi_2^* \\
&= F_2 + \frac{1}{2}\sum_u \sum_v \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_u \partial I_v}(I^{*(1)}, -; -, -) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u}\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v} + \sum_u \frac{\partial F_1}{\partial I_u}(I^*, \varphi) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} \\
&\quad - F_2^*(I^*; -, \varphi^{(2)}) - \sum_u \frac{\partial F_1^*}{\partial \varphi_u^{*(2)}}(I^*; -, \varphi^{(2)}) \cdot \frac{\partial S_1}{\partial I_u^{*(1)}}.
\end{aligned}$$

Comme F_1^* et S_1 ont été déterminés, on peut écrire :

$$\omega\,(I^{*(1)}) \bullet \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} = \Psi_2(I^*, \varphi) - F_2^*,$$

où Ψ_2 est connue. Alors, comme précédemment,

$$S_2 = \mathcal{S}_p \Psi_2(I^*, \varphi),$$
$$F_2^* = \mathcal{M}_p \Psi_2(I^*; -, \varphi^{(2)}),$$

avec les mêmes commentaires.

5.7.4. - Le processus continue de la même manière pour les valeurs supérieures de ρ, permettant de calculer les unes après les autres les fonctions inconnues S_ρ et F_ρ^*.

On notera que F_1^* est la moyenne de F_1 (cela était d'ailleurs déjà vrai dans les conditions du chapitre précédent, la moyenne n'étant pas calculée par rapport aux mêmes variables). En première approximation, il apparaît donc que l'on peut, dans un système canonique quasi-séparable, remplacer son hamiltonien par la moyenne de celui-ci par rapport aux variables angulaires rapides. C'est un artifice dont on use fréquemment quand la précision fournie semble suffisante.

En revanche, il est important d'observer que cette propriété n'est plus vraie aux ordres supérieurs. Ainsi F_2^*, moyenne de Ψ_2, n'est pas en général celle de F_2, car des produits comme

$$\frac{\partial S_1}{\partial \varphi_u} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi_v}$$

peuvent engendrer des termes de longue période, bien que, par construction, S_1 ne comporte que des termes de courte période.

5.8. – LE PROBLÈME DE BROUWER.

5.8.1. - Une application remarquable de la méthode de von Zeipel-Poincaré est la théorie développée en 1959 par D. Brouwer pour l'étude du mouvement d'un satellite artificiel perturbé par l'effet de la non sphéricité du géopotentiel. Ce travail présente une particularité intéressante : en raison de la forme de la fonction perturbatrice, même les variables lentes peuvent être éliminées.

Cette méthode sera présentée sous une forme simplifiée.

5.8.2. - Le potentiel considéré est une première approximation du géopotentiel :

$$U = \frac{\mu m}{r}\left[1 + J_2 \frac{a_0^2}{r^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\psi\right)\right],$$

avec les notations suivantes :

$\mu = Gm_0$, constante d'attraction (m_0 : masse de la Terre),
m, masse du satellite,
r, rayon vecteur du satellite,
a_0, rayon équatorial terrestre,
ψ, latitude du satellite.

Le petit paramètre ε s'appelle ici $J_2 (\approx 10^{-3})$ et, pour J_2 nul, on retrouve le potentiel du problème de Képler, tandis que la fonction perturbatrice s'écrit :

$$R = \mu J_2 a_0^2 \cdot r^{-3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\psi\right),$$

et le hamiltonien, dépendant des variables de Delaunay, est :

$$F(L, G, H; l, g, h) = \frac{\mu^2}{2L^2} + R.$$

5.8.3. - Il nous faut exprimer R en fonction des variables de Delaunay. Si v est l'anomalie vraie, la latitude est définie par :

$$\sin^2\psi = \sin^2\mathcal{I} \cdot \sin^2(g+v) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right)[1 - \cos(2g + 2v)],$$

puis, a étant le demi grand axe :

$$R = \mu J_2 a_0^2 \cdot a^{-3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \left\{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right)[1 - \cos(2g + 2v)]\right\}$$
$$= \mu^4 J_2 a_0^2 \cdot L^{-6} \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2}\right) \cdot \cos(2g + 2v)\right]$$

5.8.4. - L'étude du mouvement keplérien met en évidence l'existence des développements de Fourier :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \sum_p P_p(L, G) \cdot \cos pl, \qquad p \in N,$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \cos(2g + 2v) = \sum_q Q_q(L, G) \cdot \cos(2g + ql), \qquad q \in Z.$$

On va montrer qu'en particulier :

$$P_0 = \frac{L^3}{G^3}, \qquad Q_0 = 0.$$

Pour ceci, on observe que :

$$P_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 dl, \qquad Q_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos(2g + 2v)\, dl$$

et on calcule ces intégrales en faisant le changement de variable d'intégration : $l \to v$ (v, anomalie vraie). L'intégrale des aires nous donne :

$$r^2 \dot{v} = G,$$

et l'équation en $\dot{l}$ du mouvement keplérien s'écrit :

$$\dot{l} = -\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\mu^2}{2L^2}\right) = \frac{\mu^2}{L^3} = \frac{L}{a^2},$$

de sorte que :

$$dl = \frac{L}{G}\left(\frac{r}{a}\right)^2 dv$$

Par ailleurs, l'équation de la trajectoire peut s'écrire :

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e\cos v}{1 - e^2} = \frac{L^2}{G^2}(1 + e\cos v).$$

Alors :

$$P_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{L}{G}\int_0^{2\pi} \frac{a}{r}\, dv = \frac{1}{2\pi}\frac{L^3}{G^3}\int_0^{2\pi}(1 + e\cos v)\, dv = \frac{L^3}{G^3},$$

et :

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{L}{G}\int_0^{2\pi} \frac{a}{r}\cos(2g + 2v)\, dv = \frac{1}{2\pi}\frac{L^3}{G^3}\int_0^{2\pi}(1 + e\cos v)\cos(2g + 2v)\, dv$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{L^3}{G^3}\int_0^{2\pi}\left[\cos(2g + 2v) + \frac{e}{2}\cos(2g + v) + \frac{e}{2}\cos(2g + 3v)\right] dv$$
$$= 0$$

Le hamiltonien s'écrit donc :

$$
\begin{aligned}
F(L,\,G,\,H;\,l,\,g,\,-) = & \frac{\mu^2}{2L^2} \\
& + \mu^4 J_2 a_0^2 L^{-6} \Bigg\{ \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2} \right] \left[\frac{L^3}{G^3} + \sum_p P_p(L,\,G) \cdot \cos pl \right] \\
& \qquad - \left[-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\frac{H^2}{G^2} \right] \left[0 + \sum_q Q_q(L,\,G) \cdot \cos(2g + ql) \right]
\end{aligned}
$$

avec :

$$p \in N^*, \quad q \in Z^*.$$

En séparant le terme non perturbé, le terme de longue période et le terme de courte période, on a aussi :

$$
\begin{aligned}
F(L,\,G,\,H;\,l,\,g,\,-) = & F_0(L) \\
& \neq J_2 F_{1L}(L,\,G,\,H;-,-,-) \\
& + J_2 F_{1C}(L,\,G,\,H;\,l,\,g,\,-),
\end{aligned}
$$

/ +

avec :

$$
\begin{aligned}
F_0(L) &= \frac{\mu^2}{2L^2}, \\
F_{1L} &= \mu^4 a_0^2 \left(-\frac{1}{4} L^{-3} G^{-3} + \frac{3}{4} L^{-3} G^{-5} H^2\right), \\
F_{1C} &= \mu^4 a_0^2 \Bigg[\left(-\frac{1}{4} L^{-6} + \frac{3}{4} L^{-6} G^{-2} H^2 \right) \sum_p P_p(L,\,G) \cdot \cos pl \\
& + \left(\frac{3}{4} L^{-6} - \frac{3}{4} L^{-6} G^2 H^2 \right) \sum_q Q_q(L,\,G) \cdot \cos(2g + ql) \Bigg].
\end{aligned}
$$

Rappelons que J_2 joue ici le rôle du petit paramètre ε.

5.8.5. - Nous appliquons maintenant la méthode de von Zeipel en négligeant J_2^2. La transformation de von Zeipel :

$$(L,\,G,\,H;\,l,\,g,\,h) \longrightarrow (L^*,\,G^*,\,H^*;\,l^*,\,g^*,\,h^*)$$

sera alors définie par une fonction génératrice :

$$S(L^*,\,G^*,\,H^*;\,l^*,\,g^*,\,h^*) = L^* l + G^* g + H^* h + J_2 S_1(L^*,\,G^*,\,H^*;\,l^*,\,g^*,\,h^*).$$

Le hamiltonien F se développe alors au voisinage de $(L^*,\,G^*,\,H^*;\,l,\,g,\,h)$:

$$
\begin{aligned}
F(L,\,G,\,H;\,l,\,g,\,-) &= F_0(L^*) + F_0'(L^*) \cdot (L - L^*) \\
& \quad + J_2 F_{1L}(L^*,\,G^*,\,H^*;-,-,-) + J_2 F_{1C}(L^*,\,G^*,\,H^*;\,l,\,g,-) \\
& \quad + 0\,(J_2^2) \\
&= \frac{\mu^2}{2L^{*2}} - \frac{\mu^2}{L^{*3}} \cdot J_2 \frac{\partial S_1}{\partial l} + J_2 F_{1L} + J_2 F_{1C} + 0\,(J_2^2),
\end{aligned}
$$

où les fonctions $\partial S_1/\partial l$, F_{1L} et F_{1C} sont calculées en $(L^*,\,G^*,\,H^*;\,l,\,g,-)$.

On souhaite que le nouveau hamiltonien :

$$F^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) = F_0^*(L^*) + J_2 F_1^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) + 0\,(J_2^2)$$

soit indépendant de la variable rapide l^*. Il faut donc que :

$$F_0^*(L^*) = F_0(L^*) = \frac{\mu^2}{2L^{*2}}$$

et que :

$$-\frac{\mu^2}{L^{*3}}\frac{\partial S_1}{\partial l} + F_{1L} + F_{1C} = F_1^*.$$

Conformément au principe de la méthode, on choisira donc :

$$\begin{aligned} F_1^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) &= F_{1L}(L^*, G^*, H^*; -, -, -) \\ &= \mu^4 a_0^2 \left(-\frac{1}{4}L^{*-3}G^{*-3} + \frac{3}{4}L^{*-3}G^{*-5}H^{*2}\right), \end{aligned}$$

qui, d'ailleurs, ne dépend pas de g^*. La fonction génératrice sera alors définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{L^{*3}}{\mu^2} F_{1C} =& \mu^2 a_0^2 \Bigg[\left(-\frac{1}{4}L^{*-3} + \frac{3}{4}L^{*-3}G^{*-2}H^{*2}\right) \sum_p P_p(L^*, G^*) \cdot \cos pl \\ &+ \left(\frac{3}{4}L^{*-3} - \frac{3}{4}L^{*-3}G^{*-2}H^{*2}\right) \sum_q Q_q(L^*, G^*) \cdot \cos(2g + ql)\Bigg] \end{aligned}$$

soit explicitement :

$$\begin{aligned} S_1 = \mu^2 a_0^2 \Bigg[&\left(-\frac{1}{4}L^{*-3} + \frac{3}{4}L^{*-3}G^{*-2}H^{*2}\right) \sum_p \frac{1}{p} P_p(L^*, G^*) \cdot \sin pl \\ &+ \left(\frac{3}{4}L^{*-3} - \frac{3}{4}L^{*-3}G^{*-2}H^{*2}\right) \sum_q \frac{1}{q} Q_q(L^*, G^*) \cdot sin\,(2g + ql)\Bigg], \end{aligned}$$

en rappelant que p et q ne prennent pas la valeur 0 dans les sommations.

5.8.6. - Il est intéressant de mettre en évidence les valeurs des fréquences de l^*, g^* et h^*, compte tenu de l'expression obtenue pour F^*.

(a)

$$\begin{aligned} \dot{l}^* &= -\frac{\partial F^*}{\partial L^*} = -\frac{\partial F_0^*}{\partial L^*} - J_2 \frac{\partial F_1^*}{\partial L^*} \\ &= \frac{\mu^2}{L^{*3}} - J_2 \mu^4 a_0^2 \left(\frac{3}{4}L^{*-4}G^{*-3} - \frac{9}{4}L^{*-4}G^{*-5}H^{*2}\right) \end{aligned}$$

et le terme en J_2 constitue une correction de fréquence à la troisième loi de Képler (selon laquelle, hors perturbation, le moyen mouvement est égal à μ^2/L^{*3}).

(b)

$$
\begin{aligned}
\dot{g}^* &= -\frac{\partial F^*}{\partial G^*} = -J_2 \frac{\partial F_1^*}{\partial G^*} \\
&= -\frac{3}{4} J_2 \mu^4 a_0^2 L^{*-3} G^{*-4} \left[1 - 5 \frac{H^{*2}}{G^{*2}} \right] \\
&= -\frac{3}{4} J_2 \mu^4 a_0^2 L^{*-3} G^{*-4} \left[1 - 5 \cos^2 \mathcal{I}^* \right],
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{I}^*$ est défini à partir de G^*, H^*, comme $\mathcal{I}$ à partir de G, H.

Comme J_2 est positif, il en résulte que l'argument g^* de la latitude du périgée (moyen) a une variation directe pour de faibles inclinaisons. Au contraire, lorsque

$$
\mathcal{I} > \mathcal{I}_C = Arc \cos \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 63^\circ.43,
$$

g^* a une variation rétrograde.

(c)

$$
\begin{aligned}
\dot{h}^* &= -\frac{\partial F^*}{\partial H^*} = -J_2 \frac{\partial F_1^*}{\partial H^*} \\
&= -\frac{3}{2} J_2 \mu^4 a_0^2 L^{*-3} G^{*-5} H^*.
\end{aligned}
$$

La variation de la longitude h^* du nœud ascendant (moyen) est donc rétrograde.

5.8.7. - On a donc éliminé tous les angles à J_2^2 près. Cependant, si l'on faisait le même calcul en ne négligeant que J_2^3, il apparaîtrait des termes en g^* (pas en h^*) dans F_2^*.

Mais les conditions particulières de ce problème permettent l'élimination de g^*. En effet, le nouveau hamiltonien :

$$
F^* = F_0^*(L^*) + J_2 F_1^*(L^*, G^*, H^*; -, -, -) + J_2^2 F_2^*(L^*, G^*, H^*; -, g^*, -) + 0(J_2^3)
$$

contient un terme constant $F_0^*(L^*)$, car, l^* étant absent de F^*, L^* est constant. Le terme principal est donc $J_2 F_1^*$, *qui n'est pas dégénéré.*

On peut donc faire une deuxième application de la méthode, qui, cette fois, permet l'élimination de g^*. Nous ne ferons pas ici ce calcul.

Observons cependant que la partie principale du nouveau hamiltonien est de l'ordre de J_2. Il apparaîtra donc des diviseurs de cet ordre dans les termes de longue période en J_2^2, d'où, dans la solution, des termes en J_2. Le phénomème par lequel ce n'est qu'à l'approximation d'ordre 2 que l'on obtient des termes à longue période d'ordre 1 est classique en mécanique céleste.

5.8.8. - Observons que :

$$
\frac{\partial F^*}{\partial G^*} = -\dot{g}^* = \frac{3}{4} J_2 \mu^4 a_0^2 L^{*-3} G^{*-4} (1 - 5 \cos^2 \mathcal{I}^*)
$$

s'annule pour

$$
\mathcal{I}^* = \mathcal{I}_C \approx 63^\circ.43.
$$

Cette inclinaison, appelée *inclinaison critique*, vérifie donc une condition de résonance, et la méthode proposée ne convient donc pas au voisinage de cette valeur. Quand on rencontre ce type de situations, il faut faire appel à des techniques telles que celle qui sera présentée au chapitre suivant.

5.9. – EXERCICES

5.9.1. - Étudier l'article :

D. Brouwer, Astron. J. **64**, 378-397 (1959),

qui fournit la solution du problème de Brouwer en tenant compte effectivement des termes de l'ordre de J_2^2.

5.9.2. - Appliquer la méthode de von Zeipel au hamiltonien :

$$F(L, G; l, g) = F_0(L) + \varepsilon F_1(L, G; l, g)$$

avec :

$$F_0(L) = \frac{\mu^2}{2L^2},$$

$$F_1(L, G; l, g) = \mu^4 a_0^2 \left[L^{-3} G^{-3} - 2L^{-6} \cos(l - 2g) \right]$$

(μ, a_0 constantes données), en négligeant les termes d'ordre au moins égal à celui de ε^2.

6. – PROBLÈMES DE RÉSONANCE.

6.1. – LE PENDULE SIMPLE OSCILLATOIRE.

6.1.1. - Reprenons le hamiltonien déjà envisagé :

$$F(I, \varphi) = F_0 + \varepsilon F_1 = -\frac{1}{2} I^2 + \varepsilon I_0^2 \cos\varphi;$$

On sait que la méthode de Lindstedt ne convient pas lorsque :

$$\partial F_0 / \partial I = 0$$

soit ici

$$\partial F_0 / \partial I = -I = 0.$$

En effet, un dénominateur nul s'introduit alors dans le calcul de la fonction génératrice S. Lorsque ce dénominateur, sans être nul, est petit (par exemple, de l'ordre de ε), la méthode ne peut pas non plus être appliquée, car alors, les identifications entre termes du même ordre de F et de F^* sont fautives.

6.1.2. - Tentons cependant d'appliquer une transformation canonique :

$$(I, \varphi) \rightarrow (\zeta, \tau)$$

définie par une fonction génératrice $S(\zeta, \varphi)$, soit :

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \qquad \tau = \frac{\partial S}{\partial \zeta},$$

de sorte que le nouveau hamiltonien ne dépende pas de la variable τ.

Le hamiltonien initial :

$$F(I, \varphi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \varepsilon I_0^2 \cos\varphi$$

est alors lui-même petit, d'où l'idée d'imposer au hamiltonien transformé la forme :

$$F^*(\zeta, -) = -\varepsilon\zeta.$$

6.1.3. - Un tel choix conduit à des équations canoniques :

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial F^*}{\partial \tau} = 0, \qquad \dot{\tau} = -\frac{\partial F^*}{\partial \zeta} = \varepsilon,$$

dont la solution triviale est :

$$\zeta = \zeta_0, \qquad \tau = \tau_0 + \varepsilon t,$$

où (ζ_0, τ_0) sont les valeurs initiales de (ζ, τ).

La constante $\zeta = \zeta_0$ s'interprète comme un niveau d'énergie, tandis que τ est le temps, exprimé au moyen d'une "grande" unité.

6.1.4. - La transformation canonique envisagée est indépendante du temps, et il y a donc conservation du hamiltonien. Donc :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \varepsilon I_0^2 \cos\varphi = -\varepsilon\zeta,$$

soit :

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \pm\sqrt{2\varepsilon}\cdot[\zeta + I_0^2\cos\varphi]^{1/2},$$

$$S(\zeta,\varphi) = \sqrt{2\varepsilon}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \pm[\zeta + I_0^2\cos u]^{1/2}du,$$

où φ_0 est une constante arbitraire.

La transformation est donc définie par :

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \pm\sqrt{2\varepsilon}\cdot[\zeta + I_0^2\cos\varphi]^{1/2},$$

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial \zeta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \pm[\zeta + I_0^2\cos u]^{-1/2}du.$$

On pourrait expliciter ce formulaire (fonctions elliptiques de Jacobi), mais nous ne nous en préoccuperons pas ici.

6.1.5. - Les solutions obtenues ne sont réelles que si :

$$\zeta + I_0^2\cos\varphi \geq 0,$$

condition qui implique la discussion suivante.

(a) Si $\zeta < -I_0^2$, la condition n'est remplie pour aucune valeur réelle de φ. Les solutions sont complexes et n'ont pas de signification physique.

(b) Si $-I_0^2 \leq \zeta \leq I_0^2$, la condition n'est vérifiée que lorsque φ appartient à l'intervalle $[-\varphi_0; +\varphi_0]$, où :

$$\varphi_0 = Arc\cos\left(-\frac{\zeta}{I_0^2}\right)$$

φ varie alors dans un intervalle donné, et on dit que la solution a un caractère de *libration*.

(c) Enfin, si $I_0^2 < \zeta$, il n'y a plus de restriction sur φ, qui varie donc librement, et la solution a un caractère de *circulation*.

6.1.6. - Les phénomènes nouveaux que nous observons dans cet exemple, et dont nous tiendrons compte dans la suite, sont les suivants :

(a) On est amené à considérer deux types de comportement de l'angle φ (libration et circulation). Pour les valeurs de I très différentes de 0, on n'avait observé que le comportement circulatoire.

(b) Le petit paramètre qui apparaît dans la construction de la fonction génératrice S n'est plus ε mais $\sqrt{\varepsilon}$.

6.2. - LA MÉTHODE DE DELAUNAY ÉTENDUE.

6.2.1. - Nous considérons un hamiltonien

$$F\,(I^{(2)},\, I^{(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}) = F_0(I^{(2)}) + \varepsilon F_1(I^{(2)}\, I^{(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)})$$

et l'on suppose que la méthode de von Zeipel a déjà été appliquée, éliminant certains angles rapides $\varphi^{(1)}$, mais pas certains autres que nous appelons $\varphi^{(2)}$. Quant aux angles $\varphi^{(3)}$, ce sont des angles lents que la méthode de von Zeipel ne permet pas d'éliminer, en principe, car F_0 ne dépend pas de $I^{(3)}$.

Nous nous plaçons dans une situation de résonance, c'est à dire dans une région de l'espace des phases telle que des combinaisons linéaires

$$\mathcal{D}_\beta = -\beta \bullet \frac{\partial F_0}{\partial I^{(2)}}, \qquad \beta \in Z^2 \setminus \{0\}$$

sont voisines de zéro. C'est pour cette raison que les composantes de $\varphi^{(2)}$ n'ont pas déjà été éliminées par la transformation de von Zeipel, bien qu'en principe, elles soient des variables rapides. En effet,

(a) si $\mathcal{D}_\beta$ s'annule strictement, les termes qui les contiennent dans la fonction génératrice ne sont pas définis;

(b) si $\mathcal{D}_\beta$ est petit (par exemple de l'ordre de ε), l'identification des termes de F et de F^* qui fournit les équations de von Zeipel est fautive.

On se propose donc de construire une méthode différente, capable d'éliminer les $\varphi^{(2)}$.

6.2.2. - Une transformation canonique linéaire, analogue à celle présentée dans le paragraphe 5.2. permet de donner aux β la forme :

$$(1,0,0,\cdots,0),\,(0,1,0,\cdots,0),\,(0,0,1,\cdots,0),\,\cdots,\,(0,0,0,\cdots,1),$$

c'est à dire que ce sont les composantes de $\partial F_0/\partial I_j^{(2)}$ qui sont voisines de zéro (au contraire de celles de $\partial F_0/\partial I_j^{(1)}$, qui sont identiquement nulles).

Dans ces conditions, le vecteur $I^{(2)}_{\text{rés}}$ solution du système :

$$\frac{\partial F_0}{\partial I^{(2)}}(I^{(2)}_{\text{rés}}) = 0$$

définit la valeur de $I^{(2)}$ qui correspond à la résonance "exacte". Les angles $\varphi^{(2)}$ ne sont alors plus considérés comme rapides, puisque $\dot{\varphi}^{(2)}$ est voisin de zéro, mais on les appelle ***angles critiques.***

Dans l'exemple du pendule simple, $I^{(2)}_{\text{rés}} = 0$.

Notre problème est donc l'étude des solutions du système proposé, lorsque les conditions initiales sont telles que $I^{(2)}$ soit voisin de $I^{(2)}_{\text{rés}}$, empêchant ainsi l'utilisation de la méthode de von Zeipel pour éliminer les angles critiques $\varphi^{(2)}$.

6.2.3. - La méthode que nous présenterons est celle de la *transformation de Delaunay étendue* (proposée par S. Ferraz Mello), dans le cas simplifié où il n'existe qu'une seule combinaison linéaire $\mathcal{D}_\beta$ voisine de zéro : alors, $I^{(2)}$ et $\varphi^{(2)}$ sont de dimension 1. De plus, on négligera les puissances du petit paramètre ε supérieures à l'unité.

Il s'agit de construire une transformation :

$$(I^{(2)},\, I^{(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}) \to (\zeta,\, I^{*(3)};\, \tau,\, \varphi^{*(3)})$$

qui soit canonique et qui permette d'éliminer l'angle critique $\varphi^{(2)}$.

On définira cette transformation par une fonction génératrice :

$$S\,(\zeta,\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}) = I^{(2)}_{\text{rés}}\varphi^{(2)} + I^{*(3)}\varphi^{(3)} + \sqrt{\varepsilon}\, S_{1/2}(\zeta,\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)})$$

où nous avons utilisé le petit paramètre $\sqrt{\varepsilon}$ (et non ε) en tenant compte de l'expérience acquise dans l'étude du pendule simple.

L'expression implicite de la transformation est :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\partial S}{\partial \zeta} = \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial S_{1/2}}{\partial \zeta}\, (\zeta,\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}),\\
\varphi_j^{*(3)} &= \frac{\partial S}{\partial I_j^{*(3)}} = \varphi_j^{(3)} + \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial S_{1/2}}{\partial I_j^{*(3)}}\, (\zeta,\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}),\\
I^{(2)} &= \frac{\partial S}{\partial \varphi^{(2)}} = I^{(2)}_{\text{rés}} + \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial S_{1/2}}{\partial \varphi^{(2)}}\, (\zeta,\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}),\\
I_j^{(3)} &= \frac{\partial S}{\partial \varphi_j^{(3)}} = I_j^{*(3)} + \sqrt{\varepsilon}\, \frac{\partial S_{1/2}}{\partial \varphi_j^{(3)}}\, (\zeta,\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}).
\end{aligned}$$

On assure ainsi que $\varphi_j^{*(3)}$ et $I_j^{*(3)}$ soient voisins de $\varphi_j^{(3)}$ et $I_j^{(3)}$, et que, conformément à notre hypothèse, $I^{(2)}$ soit voisin de $I^{(2)}_{\text{rés}}$.

Il importe de bien noter que $I^{(2)}_{\text{rés}}$ n'est pas une nouvelle variable, mais la constante définie par

$$\frac{\partial F_0}{\partial I^{(2)}}\, (I^{(2)}_{\text{rés}}) = 0.$$

6.2.4. - Nous allons montrer que $S_{1/2}$ peut être choisie de sorte que le nouveau hamiltonien ait la forme :

$$F^*(\zeta,\, I^{*(3)};\, (\tau),\, \varphi^{*(3)}) = \varepsilon[-\zeta + F_1^*(I^{*(3)};\, \varphi^{*(3)})] + 0\,(\varepsilon^{3/2}).$$

Séparons dans le hamiltonien initial la partie critique F_K (qui contient explicitement l'angle critique $\varphi^{(2)}$) de la partie à longue période F_L (qui ne dépend que des angles lents $\varphi^{(3)}$) :

$$\begin{aligned}
F\,(I^{(2)},\, I^{(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}) = F_0(I^{(2)}) &+ \varepsilon F_K(I^{(2)},\, I^{(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)})\\
&+ \varepsilon F_L(I^{(2)},\, I^{(3)};\, -,\, \varphi^{(3)}).
\end{aligned}$$

En développant cette expression au voisinage de

$$(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}),$$

il vient :

$$\begin{aligned}
F\,(I^{(2)},\, I^{(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}) = F_0(I^{(2)}_{\text{rés}}) &+ F_0'(I^{(2)}_{\text{rés}}) \cdot (I^{(2)} - I^{(2)}_{\text{rés}})\\
&+ \frac{1}{2} F_0''(I^{(2)}_{\text{rés}}) \cdot (I^{(2)} - I^{(2)}_{\text{rés}})^2 + 0\,(\varepsilon^{3/2})\\
&+ \varepsilon F_K(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}) + 0\,(\varepsilon^{3/2})\\
&+ \varepsilon F_L(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, -,\, \varphi^{(3)}) + 0\,(\varepsilon^{3/2}).
\end{aligned}$$

On observe que le premier terme est une constante (car $I^{(2)}_{\text{rés}}$ est une constante) et qu'il n'intervient donc pas dans le hamiltonien. De plus, le deuxième terme est nul par définition de $I^{(2)}_{\text{rés}}$. On obtient donc, en identifiant F et F^* :

$$\frac{1}{2}F_0''(I^{(2)}_{\text{rés}})\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial\varphi^{(2)}}\right)^2 + F_K + F_L = -\zeta + F_1^*.$$

6.2.5. - Cette équation peut être vérifiée en posant :

$$F_1^*(I^{*(3)};\varphi^{*(3)}) = F_L(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, -,\, \varphi^{*(3)}),$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial\varphi^{(2)}}\right)^2 = \frac{2}{F_0''(I^{(2)}_{\text{rés}})}[-\zeta - F_K(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)})].$$

Dans ces conditions, le nouveau hamiltonien ne dépend plus que des angles lents $\varphi^{*(3)}$ et tous les angles rapides, y compris l'angle critique $\varphi^{(2)}$, ont été éliminés. En particulier, dans le cas où $I^{(3)}$ et $\varphi^{(3)}$ sont de dimension 1, on est ramené à un système intégrable. On notera qu'en tous cas, le nouveau hamiltonien se réduit aux termes à longue période de l'ancien.

Par ailleurs :

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial F^*}{\partial\tau} = 0, \quad \dot{\tau} = -\frac{\partial F^*}{\partial\zeta} = \varepsilon$$

de sorte que :

$$\zeta = \zeta_0$$

qu'on peut interpréter comme un niveau d'énergie, et :

$$\tau = \tau_0 + \varepsilon t$$

qui est le temps, exprimé avec une "grande" unité (de l'ordre de ε^{-1}).

6.2.6. - Revenons à la fonction génératrice. On a, en supposant $F_0''(I^{(2)}_{\text{rés}})$ positif :

$$S_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{F_0''(I^{(2)}_{\text{rés}})}}\int_{\varphi_0^{(2)}}^{\varphi^{(2)}} \pm\sqrt{-\zeta - F_K(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, u,\, \varphi^{(3)})}\, du$$

où $\varphi_0^{(2)}$ est une constante arbitraire. Cette dernière n'est pas indépendante de τ_0 et on peut fixer $\tau_0 = 0$, $\varphi_0^{(2)}$ s'interprétant alors comme la valeur initiale de l'angle critique $\varphi^{(2)}$. En effet :

$$\tau = (\tau_0) + \varepsilon t = \frac{\partial S}{\partial\zeta} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{2F_0''(I^{(2)}_{\text{rés}})}}\int_{\varphi_0^{(2)}}^{\varphi^{(2)}} \frac{du}{\pm\sqrt{-\zeta - F_K}}.$$

On peut faire une discussion analogue à celle faite dans le cas du pendule, car :

$$-\zeta - F_K(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)})$$

doit être positif pour que la transformation de Delaunay étendue fournisse des coordonnées réelles. Posons donc :

$$G_1(I^{*(3)};\varphi^{(3)}) = \max_{\varphi^{(2)}} F_K(I^{(2)}_{\text{rés}},\, I^{*(3)};\, \varphi^{(2)},\, \varphi^{(3)}),$$

$$G_2(I^{*(3)}, \varphi^{(3)}) = \min_{\varphi^{(2)}} F_K(I^{(2)}_{\text{rés}}, I^{*(3)}; \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}),$$

Alors :

(a) Si $\zeta > -G_2(I^{*(3)}, \varphi^{(3)})$, les solutions sont complexes et n'ont pas de signification physique.

(b) Si $-G_2(I^{*(3)}; \varphi^{(3)}) \geq \zeta \geq -G_1(I^{*(3)}; \varphi^{(3)})$, la variation de $\varphi^{(2)}$ est confinée à un intervalle $[\varphi_1^{(2)}; \varphi_2^{(2)}]$, où $\varphi_1^{(2)}$ et $\varphi_2^{(2)}$ sont racines de $-\zeta - F_K$. On a une *libration*.

(c) Enfin, si $-G_1(I^{*(3)}; \varphi^{(3)}) > \zeta$, $\varphi^{(2)}$ peut prendre toutes les valeurs possibles, et on a une *circulation*.

6.2.7. - La ressemblance entre la discussion du problème du pendule simple et celle du problème plus général examiné ici est frappante. Il importe cependant de mettre en évidence une différence essentielle, liée au fait que l'un des systèmes est intégrable et l'autre non.

(a) Dans les deux cas, suivant la valeur du niveau d'énergie, la solution peut être complexe, de libration ou de circulation.

(b) En revanche, dans la question présente, les valeurs limites de ζ sur lesquelles porte la discussion sont des fonctions de $I^{*(3)}$ et $\varphi^{(3)}$. La distinction libration/circulation ne concerne donc pas des trajectoires comme dans le cas du pendule, mais des points de l'espace des phases, c'est à dire des *états* du système.

Il peut exister des trajectoires de circulation (resp. de libration) dont tous les points sont des points de circulation (resp. de libration) au sens de la discussion précédente. Mais on ne peut écarter l'existence de *trajectoires de transition* dont certains points sont circulatoires et d'autres libratoires.

6.3. – LA RÉSONANCE ASTÉROÏDALE 3 : 1

6.3.1. - A titre d'application, nous étudierons le problème du mouvement d'un astéroïde, dans des conditions un peu simplifiées. On se place en effet dans le cadre des hypothèses du problème restreint plan des trois corps :

(a) le Soleil et Jupiter ont un mouvement relatif qui est solution du problème de Képler et qui n'est pas perturbé par l'attraction négligeable de l'astéroïde;

(b) ce dernier subit l'action des deux autres corps (action principale : celle du Soleil, perturbation due à Jupiter), en se déplaçant dans le plan de leur orbite relative.

On définira plus loin les conditions de résonance que nous nous proposons d'étudier.

6.3.2. - Un jeu de variables adapté à ce problème est le suivant :

$\alpha = a/a'$, rapport des demi-grands axes des orbites respectives de l'astéroïde et de Jupiter,

e, excentricité de l'orbite de l'astéroïde,

l, anomalie moyenne de l'astéroïde,

g, longitude du périhélie de l'astéroïde.

La fonction perturbatrice dépendra aussi de la position de Jupiter, donc de sa longitude moyenne :

$$\lambda'(t) = \lambda'_0 + n't.$$

Pour écrire un système hamiltonien, il est nécessaire de remplacer les variables non canoniques α et e par les variables de Delaunay conjuguées de l et g :

$$L = \sqrt{\mu a'}\sqrt{\alpha}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}.$$

Nous écrirons le hamiltonien sous la forme :

$$F^{(1)}(L, G; l, g; \lambda'(t)) = F_0(L) + \varepsilon F_1^{(1)}(L, G; l, g; \lambda'(t)),$$

où :

$$F_0(L) = \mu^2/2L^2$$

et où l'expression de $F_1^{(1)}$ sera précisée plus loin. ε est ici le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil (environ 10^{-3}).

6.3.3. - On observe que ce hamiltonien dépend explicitement du temps, par l'intermédiaire de $\lambda'(t)$. Ceci le rend impropre à subir les transformations indépendantes du temps que nous souhaitons lui appliquer, et nous allons transformer le problème, au moyen d'une *extension de l'espace des phases*, en un problème dans lequel λ' sera fictivement considéré comme une variable supplémentaire et dont le hamiltonien sera donc autonome. Posons :

$$\Lambda' = \frac{F^{(1)}}{n'},$$

de sorte qu'en appliquant le théorème général de l'énergie :

$$\dot{\Lambda}' = \frac{1}{n'}\frac{dF^{(1)}}{dt} = \frac{1}{n'}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \lambda'},$$

tandis que :

$$\dot{\lambda}' = n' = -\frac{\partial}{\partial \Lambda'}(-n'\Lambda').$$

On voit donc que les variables $(L, G, \Lambda'; l, g; \lambda')$ vérifient le système canonique de hamiltonien :

$$\begin{aligned} F^{(2)}(L, G, \Lambda'; l, g; \lambda') &= F^{(1)}(L, G; l, g; \lambda') - n'\Lambda' \\ &= F_0^{(2)}(L, \Lambda') + \varepsilon F_1^{(1)}(L, G; l, g; \lambda'). \end{aligned}$$

Pour plus de clarté, on utilise abusivement la même notation pour la nouvelle variable λ' et pour la fonction connue du temps $\lambda'(t)$, qui sont d'ailleurs égales. La partie principale du hamiltonien est :

$$F_0^{(2)}(L, \Lambda') = \frac{\mu^2}{2L^2} - n'\,\Lambda'.$$

6.3.4. - *Remarque.* Le système de hamiltonien $F^{(2)}$ est à trois degrés de liberté (solutions dépendant de 6 constantes arbitraires), tandis que le système original n'en admettait que deux (solutions dépendant de 4 constantes arbitraires) : on ne peut donc dire en toute rigueur qu'ils sont équivalents. On peut préciser ceci de la façon suivante.

(a) L'équation :

$$\dot{\lambda}' = -\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \Lambda'} = n'$$

admet pour solution générale :

$$\lambda' = \lambda'_1 + n't \qquad (\lambda'_1, \text{ constante}).$$

(b) L'intégrale de l'énergie, valable pour un système autonome, s'écrit :

$$F^{(2)} = F^{(1)} - n'\Lambda' = E \qquad (E, \text{ constante}).$$

Si on compare ces expressions aux définitions de λ' et Λ' :

$$\lambda' = \lambda'_0 + n't, \qquad \Lambda' = F^{(1)}/n',$$

on voit que les solutions du système transformé qui engendrent effectivement des solutions du système initial sont celles pour lesquelles les deux constantes d'intégration λ'_1 et E sont fixées par

$$\lambda'_1 = \lambda'_0, \qquad E = 0.$$

Ceci rétablit correctement le degré de généralité de la solution.

On voit qu'on a préféré ici augmenter le degré de liberté du système, pour bénéficier d'une forme autonome.

6.3.5. - Nous montrerons plus loin que lorsque la combinaison de variables :

$$\theta = 3\lambda' - (l + g),$$

en principe rapide, se trouve en fait avoir une variation lente, on se trouve dans une situation de résonance qui empêche l'élimination de θ par la méthode de von Zeipel. Dans ce cas, il est commode de faire un changement de variables angulaires

$$(l, g, \lambda') \to (\theta, g, \lambda')$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ g \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ g \\ \lambda' \end{pmatrix}$$

qui se complète canoniquement par la transformation

$$(L, G, \Lambda') \to (I_1, I_2 I_3)$$

définie par

$$\begin{pmatrix} L \\ G \\ \Lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

θ est dite variable angulaire *critique*, g, variable angulaire *lente* et λ', variable angulaire *rapide*. Les variables nouvelles $(I_1, I_2, I_3; \theta, g, \lambda')$ vérifient le système canonique de hamiltonien :

$$F^{(3)}(I_1, I_2, I_3; \theta, g, \lambda') = F_0^{(3)}(I_1, I_3) + \varepsilon F_1^{(3)}(I_1, I_2, -; \theta, g, \lambda'),$$

avec :

$$F_0^{(3)}(I_1, I_3) = \frac{\mu^2}{2I_1^2} - n'(3I_1 + I_3),$$

$$F_1^{(3)}(I_1, I_2, -; \theta, g, \lambda') = F_1^{(1)}(-I_1, -I_1 + I_2; -\theta - g + 3\lambda', g, \lambda').$$

6.3.6. - Écrivons les équations différentielles relatives aux variables angulaires :

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial I_1} = \frac{\mu^2}{I_1^3} + 3n' + 0\,(\varepsilon),$$
$$\dot{g} = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial I_2} = 0\,(\varepsilon),$$
$$\dot{\lambda}' = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial I_3} = n'.$$

Les comportements respectivement lent et rapide de g et λ' apparaissent clairement. De son côté, θ est en général rapide, sauf quand

$$I_1 \approx I_{\text{rés}} = -\sqrt[3]{\frac{\mu^2}{3n'}},$$

condition qui rend petite la partie principale de $\dot{\theta}$. C'est ce cas de résonance qui nous intéresse ici.

6.3.7. - La variable rapide λ' peut être éliminée par une transformation de von Zeipel :

$$(I_1,\, I_2,\, I_3;\, \theta,\, g,\, \lambda') \longrightarrow (I_1^*,\, I_2^*,\, I_3^*;\, \theta^*,\, g^*,\, \lambda'^*).$$

Le nouveau hamiltonien :

$$F^{(4)}(I_1^*,\, I_2^*;\, \theta^*,\, g^*) = F_0^{(4)}(I_1^*) + \varepsilon F_1^{(4)}(I_1^*,\, I_2^*;\, \theta^*,\, g^*) + 0\,(\varepsilon^2)$$

ne dépend alors plus de λ'^* et I_3^* est donc une constante ignorable.

On a donc :

$$F_0^{(4)}(I_1^*) = \frac{\mu^2}{2I_1^{*2}} - 3n'I_1^*,$$

et $F_1^{(4)}$ est la moyenne sur λ' :

$$F_1^{(4)}(I_1^*,\, I_2^*;\, \theta^*,\, g^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1^{(3)}(I_1^*,\, I_2^*, -;\, \theta^*,\, g^*,\, u)\, du.$$

6.3.8. - Au cours des transformations antérieures à celles de von Zeipel, la fonction perturbatrice est restée invariante :

$$F_1^{(1)} = F_1^{(3)} = F_{1C}^{(3)} + F_{1L}^{(3)} + F_{1K}^{(3)},$$

où l'on a séparé dans $F_1^{(3)}$:

(a) les termes de courte période, qui dépendent effectivement de λ';

(b) les termes de longue période, qui ne dépendent que de g;

(c) les termes critiques, qui dépendent effectivement de θ, éventuellement de g, mais pas de λ'.

L'élimination précédente conduit à un hamiltonien sans termes de courte période :

$$F_1^{(4)} = F_{1L}^{(4)} + F_{1K}^{(4)}$$

où $F_{1L}^{(4)}$ et $F_{1K}^{(4)}$ sont les mêmes fonctions que $F_{1L}^{(3)}$ et $F_{1K}^{(3)}$, mais exprimées en fonction des nouvelles variables $(I_1^*, I_2^*; \theta^*, g^*)$. On montre que :

$$F_{1L}^{(4)} = \frac{\mu}{a'}[A_0(\alpha^*) + A_1(\alpha^*) \cdot e^{*2} + A_2(\alpha^*) \cdot e'^2 + A_3(\alpha^*) \cdot e^* e' \cdot \cos g^* + \cdots],$$

$$F_{1K}^{(4)} = \frac{\mu}{a'}[B_0(\alpha^*) \cdot e'^2 \cos\theta^* + B_1(\alpha^*) \cdot e^* e' \cdot \cos(\theta^* - g^*) + B_2(\alpha^*) \cdot e^{*2} \cdot \cos(\theta^* - 2g^*) + \cdots],$$

où les termes négligés sont de degré 4 par rapport aux excentricités. e' est celle de Jupiter et α^*, e^* sont les variables, voisines de α, e, définies par :

$$L^* = -I_1^* = \sqrt{\mu a'}\sqrt{\alpha^*},\ G^* = -I_1^* + I_2^* = L^*\sqrt{1 - e^{*2}}.$$

6.3.9. - On se propose maintenant d'appliquer une transformation de Delaunay étendue :

$$(I_1^*, I_2^*; \theta^*, g^*) \to (\zeta, I_2^{**}; \tau, g^{**}),$$

telle que le nouveau hamiltonien :

$$F^{(5)}(\zeta, I_2^{**}; -, g^{**}) = \varepsilon[-\zeta + F_{1L}^{(4)}(I_{\text{rés}}, I_2^{**}; -, g^{**})] + 0(\varepsilon^{3/2})$$

soit indépendant de τ. La fonction génératrice de cette transformation canonique sera cherchée sous la forme :

$$S(\zeta, I_2^{**}; \theta^*, g^*) = I_{\text{rés}}\theta^* + I_2^{**} g^* + \sqrt{\varepsilon}\, S_{1/2}(\zeta, I_2^{**}; \theta^*, g^*),$$

d'où en particulier :

$$I_1^* = \frac{\partial S}{\partial \theta^*} = I_{\text{rés}} + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \theta^*}.$$

6.3.10. - On développe $F^{(4)}$ au voisinage de $(I_{\text{rés}}, I_2^{**}; \theta^*, g^*)$.

D'abord :

$$F_0^{(4)}(I_1^*) = F_0^{(4)}(I_{\text{rés}}) + \sqrt{\varepsilon}\, F_0'^{(4)}(I_{\text{rés}}) \cdot \frac{\partial S_{1/2}}{\partial \theta^*} + \frac{\varepsilon}{2} F_0''^{(4)}(I_{\text{rés}}) \cdot \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \theta^*}\right)^2 + 0(\varepsilon^{3/2}).$$

Tenons compte du fait que $F_0^{(4)}(I_{\text{rés}})$ est une constante et que $F_0'^{(4)}(I_{\text{rés}})$ est nul par définition de $I_{\text{rés}}$. Si on ajoute la perturbation, on obtient à une constante près :

$$F^{(4)}(I_1^*, I_2^*; \theta^*, g^*) = \frac{\varepsilon}{2} F_0''^{(4)}(I_{\text{rés}}) \cdot \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \theta^*}\right)^2 + \varepsilon F_{1L}^{(4)}(I_{\text{rés}}, I_2^{**}; -, g^*) + \varepsilon F_{1K}^{(4)}(I_{\text{rés}}, I_2^{**}; \theta^*, g^*) + 0(\varepsilon^{3/2}).$$

L'expression de ce hamiltonien doit coïncider avec celle qu'on a donnée plus haut pour $F^{(5)}$. Donc :

$$\frac{1}{2} F_0''^{(4)}(I_{\text{rés}}) \cdot \left(\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \theta^*}\right)^2 + F_{1K}^{(4)}(I_{\text{rés}}, I_2^{**}; \theta^*, g^*) = -\zeta.$$

Posons :

$$k = \frac{-2}{F_0''^{(4)}(I_{\text{rés}})} = -\frac{2I_{\text{rés}}}{3\mu^2}$$

(constante positive connue), d'où :

$$\frac{\partial S_{1/2}}{\partial \theta^*} = \pm\sqrt{k}\cdot\sqrt{\zeta + F_{1K}^{(4)}(I_{\text{rés}},\, I_2^{**};\, \theta^*,\, g^*)}.$$

La fonction génératrice est donc :

$$S = I_{\text{rés}}\theta^* + I_2^{**}g^* + \sqrt{\varepsilon k}\int_{\theta_0^*}^{\theta^*} \pm\sqrt{\zeta + F_{1K}^{(4)}(I_{\text{rés}},\, I_2^{**};\, u,\, g^*)}du,$$

où θ_0^* est une constante arbitraire.

6.3.11. - Posons pour abréger :

$$\varphi(\zeta,\, I_2^{**};\, \theta^*,\, g^*) = \pm\sqrt{\zeta + F_{1K}^{(4)}(I_{\text{rés}},\, I_2^{**};\, \theta^*,\, g^*)}.$$

Alors, la transformation de Delaunay étendue s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\partial S}{\partial \zeta} = \frac{\sqrt{\varepsilon k}}{2}\int_{\theta_0^*}^{\theta^*}[\varphi(\zeta,\, I_2^{**};\, u,\, g^*)]^{-1}du,\\
g^{**} &= \frac{\partial S}{\partial I_2^{**}} = g^* + \frac{\sqrt{\varepsilon k}}{2}\int_{\theta_0^*}^{\theta^*}\frac{\partial F_{1K}^{(4)}}{\partial I_2^{**}}(I_{\text{rés}},\, I_2^{**};\, u,\, g^*)\cdot[\varphi(\zeta,\, I_2^{**};\, u,\, g^*)]^{-1}du,\\
I_1^* &= \frac{\partial S}{\partial \theta^*} = I_{\text{rés}} + \sqrt{\varepsilon k}\cdot\varphi(\zeta,\, I_2^{**};\, \theta^*,\, g^*),\\
I_2^* &= \frac{\partial S}{\partial g^*} = I_2^{**} + \frac{\sqrt{\varepsilon k}}{2}\int_{\theta_0^*}^{\theta^*}\frac{\partial F_{1K}^{(4)}}{\partial g^*}(I_{\text{rés}},\, I_2^{**};\, u,\, g^*)\cdot[\varphi(\zeta,\, I_2^{**};\, u,\, g^*)]^{-1}du.
\end{aligned}$$

6.3.12. - La discussion porte sur le signe du radicande :

$$\begin{aligned}
\zeta + F_{1K}^{(4)} = \zeta + \frac{\mu}{a'}[&B_0(\alpha_{\text{rés}})\,e'^2\cdot\cos\theta^* + B_1(\alpha_{\text{rés}})\,e^{**}e'\cdot\cos(\theta^* - g^*)\\
&+ B_2(\alpha_{\text{rés}})\,e^{**2}\cdot\cos(\theta^* - 2g^*)],
\end{aligned}$$

où la constante $\alpha_{\text{rés}}$ et la variable e^{**}, voisines de α et de e, sont définies par :

$$\begin{aligned}
L_{\text{rés}} &= -I_{\text{rés}} = \sqrt{\mu a'}\,\sqrt{\alpha_{\text{rés}}},\\
G^{**} &= -I_{\text{rés}} + I_2^{**} = L_{\text{rés}}\sqrt{1 - e^{**2}}.
\end{aligned}$$

Les B_i sont donc des constantes. Posons :

$$\begin{aligned}
F_{1K}^{(4)} &= \frac{\mu}{a'}[B_0\,e'^2\cdot\cos\theta^* + B_1\,e^{**}e'\cdot\cos(\theta^* - g^*) + B_2\,e^{**2}\cdot\cos(\theta^* - 2g^*)],\\
&= P(e^{**},\, g^*)\cdot\cos[\theta^* - Q(e^{**},\, g^*)],
\end{aligned}$$

où P et Q sont définis par :

$$\begin{aligned}
P\cos Q &= \frac{\mu}{a'}[B_0\,e'^2 + B_1\,e^{**}e'\cdot\cos g^* + B_2\,e^{**2}\cdot\cos 2g^*],\\
P\sin Q &= \frac{\mu}{a'}[\qquad\quad B_1\,e^{**}e'\cdot\sin g^* + B_2\,e^{**2}\cdot\sin 2g^*],
\end{aligned}$$

et désignons la constante par $e_L^2 - e_F^2$ (e_L constante arbitraire). Il vient :

$$(k - e_F)^2 + h^2 = e_L^2.$$

Dans le plan (k, h), où e^{**}, g^{**} sont des coordonnées polaires, cette équation est celle d'une famille de cercles de même centre $(e_F, 0)$ et de rayons e_L.

e_F, qui a la même valeur pour toutes les trajectoires, est l'*excentricité forcée*. e_L dépend de ζ_0 et peut être considéré comme une constante arbitraire (à la place de ζ_0) : c'est l'*excentricité libre*.

6.4. - EXERCICES

6.4.1. - Dans le paragraphe 6.3.13, on a mis en évidence les trajectoires du système étudié. On demande de donner une expression approchée de la loi de temps sur ces trajectoires (montrer qu'elle est périodique).

Donner une expression approchée de la période, en mettant en évidence la limite de cette dernière lorsqu'on approche du point d'équilibre.

On supposera e' petit, mais aussi e_L.

6.4.2. - On considère les variables conjuguées :

$$(I, \varphi) = (I_1, I_2; \varphi_1, \varphi_2).$$

ε étant un petit paramètre et μ une constante positive et on envisage le hamiltonien à deux degrés de liberté :

$$F(I, \varphi) = \frac{1}{2}\mu^2 I_1^{-2} + \varepsilon\,[A(I) + B(I)\cdot\cos\varphi_2 + C(I)\cdot\cos(\varphi_1 - 3\varphi_2)],$$

où A, B et C sont des fonctions données.

A quelle condition de non résonance peut-on utiliser la méthode de von Zeipel pour éliminer l'angle $\varphi_1 - 3\varphi_2$? Même question pour l'angle φ_2.

On suppose maintenant que l'on est dans le cas résonant où l'angle $\varphi_1 - 3\varphi_2$ ne peut être éliminé par la méthode de von Zeipel.

Construire une transformation canonique indépendante du temps :

$$(I, \varphi) \rightarrow (J, \psi)$$

telle que :

$$\psi_1 = \varphi_1, \qquad \psi_2 = \varphi_1 - 3\varphi_2.$$

Construire la transformation de Delaunay étendue qui permet d'éliminer l'angle résonant ψ_2 à $0\,(\varepsilon^{3/2})$ près.