

# Recherches sur le Problème des N Corps

**Alain Albouy**

Astronomie et Systèmes Dynamiques  
Bureau des Longitudes  
77, Avenue Denfert-Rochereau  
75014 Paris

## Sommaire

Présentation .....	3
[1] Variétés Intégrales du Problème des N Corps <sup>1</sup>	
Introduction.....	5
A. Variétés intégrales du problème plan.....	6
B. Le moment cinétique .....	9
C. L'énergie.....	17
D. Description dans le problème spatial.....	27
[2] Symétrie des Configurations Centrales de Quatre Corps <sup>2</sup>	
Quelques résultats de Dziobek.....	31
Compléments algébriques.....	32
Dédution du résultat .....	32
[3] Les Configurations Centrales Symétriques de Quatre Corps <sup>3</sup>	
1. Introduction.....	35
2. Remarque préliminaire sur les configurations convexes.....	35
3. Equations des configurations centrales .....	36
4. Cas d'une configuration de quatre masses égales.....	36
5. Le problème des quatre tourbillons égaux .....	38
[4] Le Problème des N Corps et les Distances Mutuelles <sup>4</sup>	
(avec Alain Chenciner)	
Introduction .....	40
1. Symétries du problème .....	41
2. Mouvements homographiques .....	49
3. L'inégalité de Sundman.....	60

---

<sup>1</sup> *Integral manifolds of the N-body problem*, Inventiones Math. 114 (1993) pp. 463–488

<sup>2</sup> C. R. Acad. Sci. Paris 320 (1995) pp. 217–220

<sup>3</sup> *The symmetric central configurations of four equal masses*, Contemporary Math. 198 (1996) pp. 131–135

<sup>4</sup> A paraître en Français dans Inventiones Math.

4. Equations des configurations équilibrées.....	62
[5] Recherches sur le Problème des Configurations Centrales	
1. Introduction.....	69
2. Configurations centrales et distances mutuelles.....	72
3. Symétries des configurations centrales.....	85
[6] Les Configurations Centrales Spatiales du Problème des 1+4 Corps	
(avec Jaume Llibre)	
1. Introduction.....	95
2. Généralités.....	97
3. Résultats de symétrie.....	100
4. Equations algébriques.....	105
5. Argument numérique.....	108
Références Bibliographiques.....	111

On peut ranger en trois classes tous les systèmes de corps qui agissent les uns sur les autres, et dont on peut déterminer le mouvement par les lois de la Mécanique ; car leur action mutuelle ne peut s'exercer que de trois manières différentes qui nous soient connues : ou par des forces d'attraction, lorsque les corps sont isolés, ou par des liens qui les unissent, ou enfin par la collision immédiate. Notre système planétaire appartient à la première classe, et par cette raison les problèmes qui s'y rapportent doivent tenir le premier rang parmi tous les problèmes de la Dynamique.

J.L. Lagrange, Mécanique Analytique

Ce mémoire rassemble six articles. Les quatre premiers sont publiés, les deux derniers subiront probablement quelques modifications avant de l'être. L'ensemble a été soumis au début de l'année à deux rapporteurs, R. Moeckel, professeur à l'Université du Minnesota, et J.C. Yoccoz, professeur au Collège de France, dans le but d'obtenir de l'Université Denis Diderot l'habilitation à diriger des recherches. La soutenance est prévue le 18 décembre, devant un jury présidé par M. Herman, directeur de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, et constitué des rapporteurs, d'A. Chenciner, professeur à l'Université Denis Diderot, de J. Laskar, directeur de recherches au C.N.R.S., et de C.M. Marle, professeur à l'Université Pierre et Marie Curie. Je tiens à remercier les membres du jury pour l'attention qu'ils prêtent depuis longtemps déjà à mes recherches, et Mme Wasse, responsable de l'administration du troisième cycle à l'Université Denis Diderot, grâce à qui beaucoup de choses se passent là mieux qu'ailleurs.

Le thème du mémoire est un vieux problème : l'étude du mouvement de plusieurs masses ponctuelles soumises à l'attraction newtonienne. Je ne crois pas nécessaire de reprendre ici ce qui est écrit dans les introductions des articles. Je voudrais simplement insister sur une idée simple, qui peut être vue comme un centre organisant l'ensemble.

Ma thèse (l'article [1] ; les articles cités avec un numéro sont ceux du mémoire ; ceux cités avec des lettres sont dans la bibliographie) commence par la définition des "dispositions". Il s'agit d'un nom nouveau pour les "éléments de l'espace vectoriel euclidien  $\mathcal{D}$  des configurations de  $n$  masses alignées et dont le centre de masse coïncide avec l'origine". Nommer, et noter par un seul symbole ces objets classiques allège les calculs et court-circuite la traditionnelle "réduction des translations".

L'article [4] définit une disposition comme "une configuration de  $n$  points alignés considérée à une translation près", puis munit l'espace des dispositions d'une structure euclidienne en munissant les points d'une masse. On remplace ainsi la construction précédente de  $\mathcal{D}$  par une construction en deux temps, et on gagne beaucoup. Pouvait-on distinguer avec la définition précédente que le carré tensoriel symétrique de  $\mathcal{D}$ , espace de dimension  $n(n-1)/2$ , possède des coordonnées naturelles, qui correspondent exactement aux  $n(n-1)/2$  distances mutuelles entre  $n$  points formant une configuration dans un espace de dimension arbitraire ? Cette remarque est

pourtant fondamentale et elle introduit une nouvelle manière de calculer dans le vieux problème des  $n$  corps. On écrit par exemple les équations du mouvement  $\ddot{x} \circ \mu = 2x \circ d\hat{U}$ , et on démontre l'invariance du moment cinétique en une demi-ligne.

La fonction  $\hat{U}$  de l'équation ci-dessus est le potentiel newtonien, vu comme une fonction des  $n(n-1)/2$  carrés des distances mutuelles. Elle est convexe, et le reste quand on lui ajoute un terme induisant une "accélération centrifuge". Sa transformation de Legendre peut être explicitée. La remarque étonnante est que l'équation des configurations centrales  $\beta \circ d\hat{U}_\lambda(\beta) = 0$  possède une symétrie naturelle vis-à-vis de cette transformation de Legendre. Les configurations centrales de  $n$  corps en dimension  $n-2$  sont ainsi rapprochées des configurations centrales de  $n$  corps en dimension un. Celles bien connues de  $n$  corps en dimension  $n-1$  ressemblent aux hypothétiques configurations centrales de  $n$  corps en dimension zéro... J'espère que cette jolie structure stimulera plus d'un chercheur.

Paris, le 14 novembre 1997

# [1] Variétés Intégrales du Problème des N Corps

## Introduction

Les *variétés intégrales* d'un système différentiel sont les variétés invariantes obtenues en fixant la valeur des intégrales premières connues. Dans le problème newtonien de  $n$  corps dans l'espace rapporté au centre de masse des particules, ces intégrales sont les trois composantes du moment cinétique et l'énergie.

La partie D de cette thèse (qu'on doit lire après les parties A et B) donne une description de la variété intégrale du problème des trois corps qui convainc qu'on rencontre exactement 8 valeurs de l'énergie pour lesquelles sa topologie change, lorsqu'on fixe le moment cinétique à une valeur arbitraire non nulle et qu'on fait décroître l'énergie en partant de  $+\infty$  (la première valeur rencontrée est zéro et les trois masses sont supposées distinctes). Mais cette description ne constitue pas une preuve rigoureuse.

La partie C (qui n'exige que la lecture préalable du début de B), démontre qu'on rencontre au plus 8 valeurs. Deux phénomènes distincts sont responsables de ces changements de topologie : les *points critiques* de la fonction énergie restreinte au niveau choisi du moment cinétique et les *points critiques à l'infini* de cette même fonction. Le premier est responsable des 4 dernières valeurs rencontrées. Les points critiques s'identifient aux *équilibres relatifs* exhibés par Lagrange. C'est à l'étude du second phénomène qu'est consacrée cette partie, dans le cadre général du problème des  $n$  corps dans l'espace. On montre qu'il est associé à une division du système de particules en amas, et que chaque amas est un équilibre relatif. Les points critiques à l'infini provoquent au plus 26 changements de topologie dans le problème des quatre corps (en comptant zéro), et ce n'est que la méconnaissance des équilibres relatifs de plus de trois corps qui empêche le dénombrement pour cinq corps.

La partie B étudie les niveaux du moment cinétique d'un système de  $n$  corps, et traite de manière globale la question de la *réduction* ou *élimination des nœuds*. On ébauche en B4 la description explicite des variétés pour un espace ambiant de dimension supérieure à trois.

Le problème de la topologie des variétés intégrales est posé dans Birkhoff[Bir], p. 287, où l'auteur oublie le phénomène des points critiques à l'infini. Winter[Win2] (§438 et p. 433) et Alexeyev[Ale] insistent sur l'importance du problème. Smale[Sma2], p. 50, relève l'insuffisance de l'analyse de Birkhoff. Il prouve que dans le problème plan des  $n$  corps tous les changements de topologie sont dus à des points critiques, et propose la question de l'espace à Cabral[Cab], que nous citons plusieurs fois dans cette thèse (voir son commentaire p. 61). Simó[Sim] est le premier à donner les trois valeurs supplémentaires pour le problème des trois corps, mais sa description, fondée sur une projection sur l'espace des configurations triangulaires, présente une singularité quand les corps s'alignent et introduit artificiellement une neuvième valeur, qui correspond à un triangle vertical dont le centre de gravité est confondu avec l'orthocentre (il est appelé "critical" ou "singular" dans Saari[Saa2], qui pose des questions à son sujet). Enfin, l'existence des points

critiques à l'infini est affirmée dans [AKN], p. 104, sans explication.

Je tiens à remercier Alain Chenciner, Hildeberto Cabral et Richard Moeckel, qui m'ont guidé vers les problèmes de topologie en mécanique céleste, Alain Chenciner et Santiago Lopez de Medrano pour leur participation à la partie B, Alain Chenciner, Michel Herman, Jacques Laskar et Jean-Christophe Yoccoz pour leurs remarques et leur idée de créer, il y a quelques années, un groupe de mécanique céleste, les rapporteurs et membres du Jury, et enfin Alain Chenciner pour sa présence amicale de tous les jours.

## A. Variétés intégrales du problème plan

### A1) Réduction du centre de masse et espace des dispositions

Disposons  $n$  points de masses  $m_1, \dots, m_n$  sur l'axe réel aux abscisses  $x_1, \dots, x_n$ . Le moment d'inertie  $I = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$  par rapport à l'origine définit une forme quadratique qui munit  $\mathbb{R}^n$  d'une structure d'espace vectoriel euclidien\*.

Appelons  $\mathcal{D}$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  d'équation  $\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$ . Un élément de  $\mathcal{D}$ , appelé "disposition", représentera la projection sur un axe d'une configuration de  $n$  corps dont le centre de gravité est fixé à l'origine, ou tout aussi bien des  $n$  vitesses ou accélérations. On désignera usuellement un élément de  $\mathcal{D}$  par une lettre majuscule ou par ses  $n$  coordonnées (en surnombre). On notera  $\langle X, Y \rangle$  le produit scalaire de la disposition  $X$  avec la disposition  $Y$ , et  $\|X\|$  la norme de  $X$ .

### A2) Les intégrales premières du problème plan

On choisit dans le plan un système d'axes orthonormé  $(O, x, y)$ . En plaçant l'origine au barycentre des  $n$  corps, on peut décrire l'état du système avec 4 dispositions :

$$\begin{aligned} X &= (x_1, \dots, x_n) & Y &= (y_1, \dots, y_n) \\ P &= (p_1, \dots, p_n) & Q &= (q_1, \dots, q_n) \end{aligned}$$

où le corps  $i$  a pour coordonnées de position  $x_i, y_i$  et pour coordonnées de vitesse  $p_i, q_i$ . L'énergie  $h$  et le moment cinétique  $C$  s'écrivent :

$$(e) \quad \frac{1}{2}(\|P\|^2 + \|Q\|^2) - U(X, Y) = h,$$

$$(m) \quad \langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle = C,$$

où  $U(X, Y)$  désigne le potentiel

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad \text{avec} \quad r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

### A3) Géométrie des variétés intégrales (C non nul)

Les sous-variétés de  $\mathcal{D}^4$  définies par le système d'équations  $(e), (m)$  s'appellent les variétés intégrales du problème.

---

\* Il faut oublier la structure canonique; en particulier  $I=1$  définit une sphère et non un "ellipsoïde".

Il est utile de remarquer que l'énergie est une fonction simple des vitesses, mais pas des positions. Depuis [Sma1], on décrit une variété intégrale en commençant par fixer les positions à *homothétie près* (puisque  $U$  est homogène), et en cherchant les vitesses et taille compatibles.

Pour y parvenir, nous remarquons que si  $C$  est strictement positif,  $(e)$  et  $(m)$  sont équivalentes à  $(en)$  et  $(m)$ , où

$$(en) \quad h = \frac{1}{2}(\|P\|^2 + \|Q\|^2) - \frac{U}{C}(\langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle),$$

soit

$$\|P + \frac{U}{C}Y\|^2 + \|Q - \frac{U}{C}X\|^2 = (\|X\|^2 + \|Y\|^2) \frac{U^2}{C^2} + 2h.$$

Lorsqu'on fixe  $X$  et  $Y$ , cette équation définit dans l'espace des vitesses  $(P, Q)$  une sphère de dimension  $2n - 3$ , de centre  $A = (-YU/C, XU/C)$  et de rayon  $\rho$  tel que

$$\rho^2 = \frac{IU^2}{C^2} + 2h, \quad \text{où} \quad I = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

Mais  $(en)$  est homogène de degré zéro en  $(X, Y)$ .

Nous interpréterons donc, une fois choisi un couple  $(X, Y)$  non nul, l'intersection de la "sphère  $(en)$ " et du demi-espace

$$\{(P, Q) / \langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle > 0\}$$

comme l'ensemble des vitesses  $(P, Q)$  compatibles avec l'existence d'un réel strictement positif  $\lambda$  tel que l'état  $(\lambda X, \lambda Y, P, Q)$  vérifie le système  $(e), (m)$ . La remarque qui suit précise la position de la sphère  $(en)$ . L'équation de Lagrange-Jacobi (démontrée dans une remarque en C2) s'écrit

$$\ddot{I} = \|P\|^2 + \|Q\|^2 + 2h.$$

La condition  $\ddot{I} = 0$  définit une deuxième sphère de codimension un dans l'espace des vitesses, centrée en l'origine  $O$  et de rayon  $\sqrt{-2h}$ . Cette sphère est *perpendiculaire* à la sphère  $(en)$ . Soit en effet  $M$  un point de leur intersection. Les deux tangentes  $MO$  et  $MA$  sont orthogonales, puisque  $\|OA\|^2 = \|OM\|^2 + \|MA\|^2$ . Le point  $M$  existe dès que les deux sphères existent, c'est-à-dire dès que  $h \leq 0$  et  $\rho \geq 0$ . Nous appellerons la sphère d'équation  $\ddot{I} = 0$  *sphère du viriel*, parce qu'en mécanique statistique le théorème du viriel affirme que  $\ddot{I} = 0$  est vérifiée en moyenne pour un amas stationnaire de  $n$  corps. La *figure 1* représente ces sphères dans le cas  $n = 2$ ,  $h < 0$ .

#### A4) Topologie des variétés intégrales (C non nul, h négatif)

Si  $h$  est strictement négatif, la sphère  $(en)$  n'est pas tronquée lorsqu'on effectue l'intersection avec le demi-espace considéré. Pour décrire une variété intégrale, il suffit d'étudier la condition  $\rho \geq 0$ , soit

$$\sqrt{IU} \geq \sqrt{-2hC^2}.$$

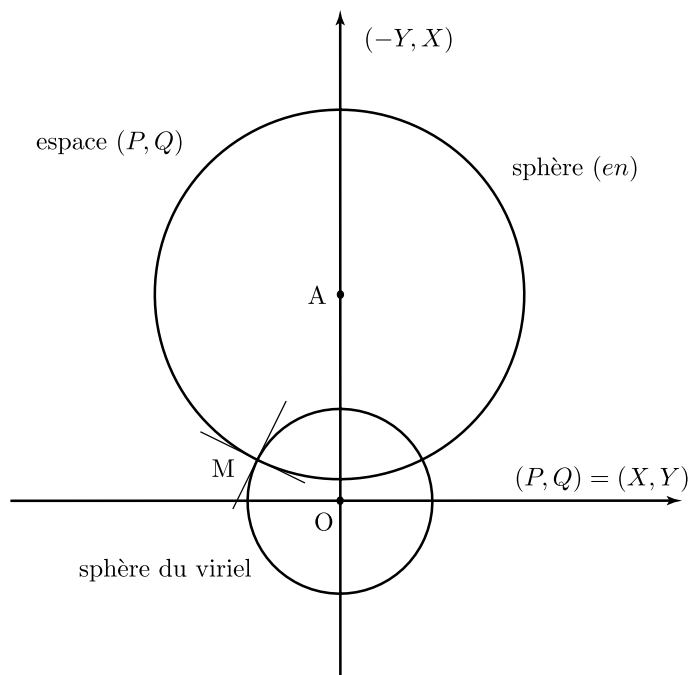


Figure 1

On utilise la terminologie suivante, copiant celle qu'on emploie dans le problème restreint. Etant donnés  $h$  et  $C$ ,

- une composante connexe de l'espace des  $(X, Y)$  privé de l'origine telle que  $0 \leq \rho < +\infty$  est une *région de Hill*,
- les variétés définies par la condition  $\rho = 0$  sont les *surfaces de vitesse nulle* (abusif).

Ces notions, comme la fonction  $\rho$ , sont invariantes par rapport à l'action du groupe des similitudes sur la configuration

$$(X, Y) \mapsto (aX + bY, -bX + aY), \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0).$$

L'étude des régions de Hill est désormais classique. C'est l'étude de la fonction  $\sqrt{IU}$  sur  $\mathcal{D}^2$  privé de l'origine (ou sur la sphère  $I = 1$  ou encore sur le quotient de  $\mathcal{D}^2$  par les similitudes, qui est  $P_{n-2}(\mathbb{C})$ , le projectif complexe), et privé des configurations de collision ( $x_i = x_j$  et  $y_i = y_j$  pour au moins un couple  $i, j$ ). Les points critiques sont les *configurations centrales* unidimensionnelles et bidimensionnelles. On dit aussi que ce sont les configurations des *équilibres relatifs* du problème plan.

Si  $\sqrt{-2hC^2} \leq \min_{X, Y} \sqrt{IU}$ , la région de Hill recouvre tout l'espace  $\mathcal{D}^2$  privé des configurations de collision.

La variété intégrale se "balaye" ainsi :

- i) sur la sphère d'équation  $\|X\|^2 + \|Y\|^2 = 1$ , de dimension  $2n - 3$ , on choisit un point de la région de Hill, qui représentera une position à homothétie près,
- ii) "au-dessus" de ce point, il y a une sphère de vitesses (*en*) de dimension  $2n - 3$ , sauf si le point appartient à une surface de vitesse nulle : dans ce cas la sphère devient un point.



De cette description on déduit intuitivement que la variété intégrale ne peut changer de topologie lorsqu'on fait varier  $h$  et  $C$  que si  $\sqrt{-2hC^2}$  passe par une valeur critique de la fonction  $\sqrt{IU}$ . Le théorème E de [Sma2]\* rend rigoureuse cette intuition. Une alternative est de montrer qu'il n'existe pas de point critique à l'infini, ce qu'on fera en C3, et d'utiliser le difféomorphisme de l'introduction de la partie C.

Dans le cas où  $\sqrt{-2hC^2} < \min_{X,Y} \sqrt{IU}$ , la variété intégrale se décrit le plus simplement possible. C'est un fibré en sphères au-dessus d'une sphère, qu'on restreint au complémentaire dans la base d'une famille de sphères de codimension 2 (les collisions). Le quotient par le groupe  $SO(2)$  des rotations autour de l'origine est un fibré en sphères au-dessus du projectif complexe déjà évoqué, qu'on restreint encore au complémentaire d'une famille d'hyperplans projectifs complexes (collisions). Si on veut être plus précis, il faut caractériser les fibrés en sphères considérés. Il est bon pour cela d'étudier à part les variétés de niveau du moment cinétique, beaucoup plus "géométriques", et de considérer l'énergie  $h$  comme une fonction sur ces variétés. Le moment cinétique définit au-dessus de la sphère ou du projectif complexe des fibrés vectoriels dont les fibrés en sphères unités sont les fibrés ci-dessus. On verra dans la partie B que le fibré au-dessus de la sphère (avant réduction) est trivial, mais que celui au-dessus du projectif complexe (après réduction), déjà décrit dans la proposition (9.4) de [Sma1], ne l'est pas, sauf dans le cas de trois corps. Le fibré restreint au complémentaire des collisions est trivial, même après réduction : en enlevant un hyperplan projectif correspondant à la collision de deux particules, on rend la base contractile et on obtient une trivialisation.

## B. Moment cinétique

On s'intéresse ici aux sous-variétés de l'espace des états d'un système de  $n$  corps évoluant dans  $\mathbb{R}^p$  obtenues en fixant le moment cinétique.

### B1) Etude abstraite

L'espace  $\mathbb{R}^p$  est muni du système d'axes orthonormé  $(O, x^1, \dots, x^p)$ . On place encore l'origine au barycentre des  $n$  corps, et on décrit l'état du système avec les  $2p$  dispositions  $X_1, \dots, X_p, P_1, \dots, P_p$ . Les premières sont les projections de la configuration sur les axes, les dernières les projections des vitesses. On choisit ensuite une base orthonormée de l'espace des dispositions  $\mathcal{D}$ . L'état du système est maintenant décrit par une matrice  $M$  de  $p$  lignes et  $2n - 2$  colonnes. La ligne  $i$  est constituée des  $n - 1$  coordonnées de  $X_i$  suivies des  $n - 1$  coordonnées de  $P_i$ . Symboliquement, on écrira

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & P_1 \\ \vdots & \vdots \\ X_p & P_p \end{pmatrix}.$$

Soit  $O$  une matrice du groupe  $O(p)$  des isométries de  $\mathbb{R}^p$  :  ${}^tOO = I$ , où  $I$  désigne la matrice unité. La transformation  $M \mapsto OM$  décrit l'action naturelle des isométries sur le système.

---

\* Cet article ne dégage pas la géométrie de la sphère (en).

A chaque couple  $(i, j)$  on associe d'une part le champ de vecteurs :

$$\dot{X}_i = X_j, \quad \dot{P}_i = P_j, \quad \dot{X}_j = -X_i, \quad \dot{P}_j = -P_i, \quad \dot{X}_k = \dot{P}_k = 0$$

pour  $k$  distinct de  $i$  et  $j$ , d'autre part l'intégrale première :

$$C_{ij} = \langle X_j, P_i \rangle - \langle X_i, P_j \rangle.$$

Ces champs engendrent l'action du groupe  $SO(p)$  des rotations de  $\mathbb{R}^p$  et les  $C_{ij}$  sont les éléments de la matrice antisymétrique

$$C = MJ^tM \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous appellerons *espace du mouvement* l'image de  $M$ , encore notée  $\text{Im } M$ . Cet espace (et donc sa dimension  $\text{rg}M$ , le *rang* de la matrice  $M$ ) est invariant au cours du temps. C'est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^p$  engendré par les colonnes de  $M$ , ou de manière équivalente, engendré par les  $n$  positions et les  $n$  vitesses des corps. Nous appellerons *espace fixe* l'image de  $C$ , généralisant ainsi la notion de plan fixe du problème spatial. On a immédiatement  $\text{Im } C \subset \text{Im } M$ .

Cherchons les points critiques de l'application  $M \mapsto C$ . Ce sont les points où une combinaison linéaire des différentielles des  $(p-1)p/2$  fonctions  $C_{ij}$ ,  $j < i$ , s'annule. Nous *supposons* pour simplifier que  $2(n-1)p \geq \frac{1}{2}(p-1)p$ . La même dépendance linéaire existe entre les champs de vecteurs associés plus haut aux divers couples  $(i, j)$ , qui sont les champs hamiltoniens associés aux fonctions  $C_{ij}$ . Cette combinaison linéaire engendre l'action d'un sous-groupe à un paramètre de  $SO(p)$ , et cette action doit laisser fixe l'état repéré par la matrice  $M$ .

**Proposition 1.\*** Le point de l'espace des états repéré par la matrice  $M$  est un point critique pour l'application moment cinétique si et seulement si  $\text{rg}M \leq p-2$ , c'est-à-dire si l'espace du mouvement est contenu dans un espace de codimension 2 de  $\mathbb{R}^p$ .

*Démonstration.* L'action du sous-groupe à un paramètre doit laisser fixe chacune des colonnes de la matrice  $M$  : elles sont toutes dans le sous-espace de  $\mathbb{R}^p$  invariant par l'action, de codimension au moins 2. Réciproquement, si les colonnes sont dans un espace de codimension 2, le groupe  $SO(2)$  des rotations autour de cet "axe" fixe  $M$ .

On achève la "réduction" du moment cinétique en définissant la variété "réduite", obtenue à partir de la variété de niveau de  $C$  en passant au quotient par l'action du sous-groupe de  $SO(p)$  ou de  $O(p)$  qui conserve le moment cinétique ( $OC^tO = C$ ). Le quotient par  $SO(p)$  est non singulier (i.e. sans point fixe) si on se restreint à l'intersection de l'image réciproque d'une matrice  $C$  et de l'ouvert défini par  $\text{rg}M \geq p-1$ . Pour le quotient par  $O(p)$ , il faut imposer  $\text{rg}M = p$ .

---

\* [Cab] p. 63, et p. 69 pour un exemple de situation où le niveau critique n'est pas une variété différentiable.

Mais le seul fait de fixer la valeur du moment cinétique impose déjà des restrictions au rang de  $M$ . Par exemple, pour un mouvement colinéaire de  $n$  corps, le moment cinétique est nul. Il y a aussi le théorème de Dziobek ([Win2], p. 427) : si le moment cinétique est nul, le problème des 3 corps est plan ( $\text{rg}M$  est au plus 2). Plus généralement, on a la

**Proposition 2.** Dans un niveau de l'application moment cinétique correspondant à une valeur de la matrice  $C$  de rang  $2k$ , le rang de  $M$  vérifie la double inégalité  $2k \leq \text{rg}M \leq k + n - 1$ .

*Démonstration.* La formule  $C = MJ^tM$  montre que  $C$  définit sur  $\mathbb{R}^p$  la forme bilinéaire antisymétrique *image réciproque* par l'application  ${}^tM$  de la forme symplectique canonique de l'espace  $\mathcal{D}^2$  des couples  $(X, P)$  de dispositions, associée à la matrice  $J$ . Le quotient  $\mathbb{R}^p / \ker {}^tM$  est en bijection avec  $\text{Im } {}^tM$  : le rang de  $C$  est aussi le rang de la restriction à ce dernier espace, engendré par les lignes de  $M$ , de la 2-forme  $J$ . Dans  $\mathbb{R}^{2n-2}$ , si on se donne le rang  $2k$  de la forme symplectique restreinte à un sous-espace, la dimension de ce sous-espace peut prendre toutes les valeurs entre  $2k$  et  $k + n - 1$  : c'est un raisonnement classique d'orthogonalité symplectique.

**Exemple d'application.** Un niveau du moment cinétique dans l'espace vectoriel des matrices à  $p$  lignes et  $2n - 2$  colonnes est régulier (i.e. ne contient pas de point critique) si  $p = 2k$  ou  $p = 2k + 1$ . La variété réduite par l'action de  $SO(p)$ , c'est-à-dire le quotient du niveau par l'action du sous-groupe de  $SO(p)$  qui conserve le moment cinétique, est également régulière.

## B2) Forme normale

On a vu qu'une isométrie  $O$  transforme  $M$  en  $OM$ , et donc change  $C = MJ^tM$  en  $OC^tO$ . Il est bien connu que la matrice antisymétrique  $C$  peut être de cette façon ramenée à la forme normale

$$(\star) \quad \begin{pmatrix} 0 & -D & 0 \\ D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $D$  désigne une matrice diagonale dont les  $k$  éléments diagonaux sont strictement positifs. Pour le voir, on diagonalise la matrice symétrique  $C^2$  en base orthonormée, et on remarque que si  $v$  est un vecteur propre de cette matrice,  $Cv$  est aussi vecteur propre de même valeur propre. Dans le cas dégénéré, on commence par décomposer  $\mathbb{R}^p$  en somme directe orthogonale du noyau de  $C$  et de son image, l'espace fixe.

**Proposition 3.** Il existe une décomposition de l'espace fixe en somme directe de  $m$  sous-espaces orthogonaux  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  de dimensions respectives  $2k_1, \dots, 2k_m$  et  $m$  réels strictement positifs  $c_1 < \dots < c_m$  tels que l'application  $v \mapsto c_j^{-1}Cv$  soit une rotation de  $\pi/2$  dans l'espace  $\sigma_j$  (la multiplication par  $i$  d'une *structure complexe*). Le sous-groupe  $G$  de  $O(p)$  des isométries qui laissent le moment cinétique invariant est isomorphe à  $U(k_1) \times \dots \times U(k_m) \times O(p - 2k)$ .

*Démonstration.* Les  $\sigma_j$  sont les sous-espaces propres de  $C^2$ , et les  $-c_j^2$  les valeurs propres associées. Un élément  $O$  de  $G$  doit laisser invariante la décomposition de

$\mathbb{R}^p$  en  $m + 1$  sous-espaces orthogonaux :  $OC^{2t}O = C^2$ . Il appartient à

$$O(2k_1) \times \dots \times O(2k_m) \times O(p - 2k).$$

Mais maintenant  $OC^tO = C$  signifie que  $O$  commute avec la rotation de  $\pi/2$  dans chacun des espaces  $\sigma_j$ . La structure complexe est donc préservée par  $O$  : c'est un élément du groupe unitaire.

Remarquons que l'espace fixe est muni d'une structure hermitienne, induite par la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^p$  et la rotation de  $\frac{\pi}{2}$  de la proposition. Notons aussi que de simples homothéties montrent que la topologie des niveaux ne dépend pas de la valeur de la matrice  $D$ , tandis que la dimension de la variété réduite change lorsque deux coefficients  $D_{ii}$  deviennent égaux.

Choisissons un repère  $(O, x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k, z^1, \dots, z^{p-2k})$  de  $\mathbb{R}^p$ , qui mette  $C$  sous la forme  $(\star)$ , et notons en conséquence :

$$M = \begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \\ Z & R \end{pmatrix},$$

où  $X, Y, P$  et  $Q$  désignent cette fois des *blocs matriciels* à  $k$  lignes et  $n - 1$  colonnes, et  $Z$  et  $R$  des blocs  $(p - 2k, n - 1)$ . L'équation  $MJ^tM = C$  s'écrit maintenant

$$(m) \quad \begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tX & {}^tY \\ {}^tP & {}^tQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix},$$

$$(dm) \quad \begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -{}^tR \\ {}^tZ \end{pmatrix} = 0,$$

$$(mz) \quad R^tZ - Z^tR = 0.$$

L'équation  $(m)$  définit une variété algébrique réelle régulière (voir B1). Pour montrer qu'elle est non vide, considérons son intersection avec le sous-espace défini par les équations  $X = Q$  et  $Y = -P$ . Il est aisé de voir que c'est une sous-variété compacte isomorphe à une variété de Stiefel complexe. Les blocs  $X$  et  $P$ , qui suffisent à déterminer la solution, vérifient en effet  $P^tX - X^tP = 0$  et  $X^tX + P^tP = D$ , c'est-à-dire décrivent une famille de  $k$  vecteurs de  $\mathcal{D}^2$  orthogonaux pour la structure hermitienne (les  $k$  vecteurs en question sont les  $k$  premières lignes de  $M$ ). Cette sous-variété compacte est invariante par l'action du groupe réducteur. On précisera en B4 son rôle dans la topologie de la variété  $(m)$ .

Les  $2k$  premières lignes de  $M$  engendrent d'après  $(m)$  un sous-espace *symplectique* de dimension  $2k$  de  $\mathcal{D}^2$  (la forme symplectique restreinte est non dégénérée). L'équation  $(dm)$  traduit l'appartenance de chacune des  $p - 2k$  dernières lignes de  $M$  à l'orthogonal (pour la forme symplectique) de cet espace, qui est un sous-espace

symplectique de dimension  $2(n - 1 - k)$ . Ces lignes engendrent un sous-espace isotrope d'après  $(mz)$ , mais elles ne sont pas toujours indépendantes. Ces considérations nous permettent de préciser la proposition 2 : la double inégalité qu'elle établit est optimale. Un niveau du moment cinétique contient des points correspondant à toutes les dimensions citées de l'espace du mouvement, la plus grande possible étant obtenue lorsque le sous-espace isotrope considéré devient lagrangien (i.e. de dimension  $n - 1 - k$ ).

### B3) Le plan et l'espace

Nous supposons le moment cinétique non nul ( $k = 1, p = 2$  ou  $3$ ), et nous repérons l'état avec 6 dispositions, ou plutôt la matrice  $M$  :

$$\begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \\ Z & R \end{pmatrix}.$$

Les trois coordonnées du moment cinétique s'écrivent

$$\begin{aligned} (dm) \quad & \langle Y, R \rangle - \langle Z, Q \rangle = 0, & \langle Z, P \rangle - \langle X, R \rangle = 0, \\ (m) \quad & \langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle = C. \end{aligned}$$

Notons  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}$  les coordonnées de  $X$  dans une base orthonormée de  $\mathcal{D}$ , et  $\hat{y}_j, \hat{z}_j$ , etc. les coordonnées de  $Y, Z$ , etc. : ces réels sont les éléments de la matrice  $M$ .

Posons ensuite  $2\xi_j = (\hat{x}_j + \hat{q}_j) + i(\hat{y}_j - \hat{p}_j)$ ,  $2\eta_j = (\hat{x}_j - \hat{q}_j) + i(\hat{y}_j + \hat{p}_j)$  et  $\zeta_j = \hat{z}_j + i\hat{r}_j$ , pour diagonaliser la forme quadratique  $(m)$  et représenter  $(dm)$  sous la forme d'une seule équation complexe :

$$\begin{aligned} (m) \quad & \sum |\xi_j|^2 - \sum |\eta_j|^2 = C, \\ (dm) \quad & \sum \xi_j \zeta_j - \sum \eta_j \bar{\zeta}_j = 0. \end{aligned}$$

**Proposition 4.\*** Si l'équation  $(m)$  est vérifiée, l'équation  $(dm)$  définit un sous-espace de codimension réelle 2 dans le  $\mathbb{C}^{n-1} \sim \mathcal{D}^2$  des  $\zeta$ , ce qui signifie qu'une variété de niveau du moment cinétique dans le problème spatial est un fibré vectoriel sur l'hyperboloïde  $(m)$ , variété de niveau du moment cinétique dans le problème plan. De plus, l'équation  $(dm)$  est invariante par l'action du "groupe réducteur"  $SO(2) : (\xi_j, \eta_j) \mapsto (e^{i\theta}\xi_j, e^{i\theta}\eta_j)$ . La variété réduite (i.e. le quotient de la variété de niveau par l'action du groupe réducteur) dans le problème spatial est encore un fibré vectoriel sur la variété réduite du problème plan.

*Démonstration.* Les deux équations réelles  $(dm)$  sont indépendantes : on l'a déjà montré en B2, où l'écriture matricielle fait apparaître plus généralement que  $(m)$  interdit la dégénérescence de la matrice qui sert à écrire  $(dm)$ . Le reste est clair.

---

\* [Cab], p. 70.

**Proposition 5.** Considérons le nouveau système défini sur l'espace des  $\xi, \eta, \zeta$

$$\begin{aligned} (m') & \quad \sum |\xi_j|^2 = C, \\ (dm') & \quad \sum \xi_j \zeta_j = 0, \end{aligned}$$

et le groupe réducteur de la proposition 4 (qui fait intervenir les  $\eta$ ). Il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels entre  $(m), (dm)$  et  $(m'), (dm')$ , avant et après réduction (i.e. ce morphisme commute avec l'action du groupe réducteur).

*Démonstration.* D'abord l'application  $(\xi, \eta) \mapsto (\lambda\xi, \eta)$  transforme l'hyperboloïde en cylindre si  $\lambda$  vérifie  $\lambda^2(C + \sum |\eta_j|^2) = C$ . Il reste à établir un isomorphisme entre les fibres au-dessus des deux points des bases qu'on vient de mettre en correspondance, ce qui revient à établir une bijection entre les sous-espaces de l'espace des  $\zeta$  définis par  $(dm)$  et  $(dm')$ . Voyons qu'on y parvient à l'aide de la projection orthogonale de l'un sur l'autre (au choix). Paramétrons avec le nombre complexe  $\alpha$  le plan normal à  $(dm)$  :

$$\alpha \mapsto (\alpha\bar{\xi}_1 - \bar{\alpha}\eta_1, \dots, \alpha\bar{\xi}_{n-1} - \bar{\alpha}\eta_{n-1})$$

ou le plan normal à  $(dm')$  :  $\alpha \mapsto (\alpha\bar{\xi}_1, \dots, \alpha\bar{\xi}_{n-1})$ . En substituant respectivement dans  $(dm')$  et  $(dm)$ , on obtient dans les deux versions le même endomorphisme de  $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$  :

$$\alpha \mapsto \left( \sum |\xi_j|^2 \right) \alpha - \left( \sum \xi_j \eta_j \right) \bar{\alpha}.$$

Il reste à vérifier que son déterminant n'est pas nul. Un endomorphisme de  $\mathbb{C}$  de la forme  $\zeta \mapsto \alpha\zeta + \beta\bar{\zeta}$  a pour déterminant  $|\alpha|^2 - |\beta|^2$  comme on peut le voir en calculant l'image de  $d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$ , soit  $(\alpha d\zeta + \beta d\bar{\zeta}) \wedge (\bar{\alpha} d\bar{\zeta} + \bar{\beta} d\zeta)$  ou encore  $(|\alpha|^2 - |\beta|^2) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$ . Dans notre cas cela donne  $(\sum |\xi_j|^2)^2 - |\sum \xi_j \eta_j|^2$ . Ce déterminant est positif si  $(m)$  est vérifiée : l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit  $|\sum \xi_j \eta_j|^2 \leq (\sum |\xi_j|^2)(\sum |\eta_j|^2)$ .

**Proposition 6.** La variété définie par les équations  $(m')$  et  $(dm')$  est isomorphe au produit direct de  $\mathbb{C}^{n-1}$  par le cylindre d'équation  $\sum_{j=1}^{n-1} |\xi_j|^2 = C$  de l'espace  $\mathbb{C}^{2n-3}$  repéré par  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ , et l'isomorphisme commute avec l'action du groupe réducteur, dont on définit l'action sur le cylindre qu'on vient d'introduire par les formules  $\xi_j \mapsto e^{i\theta} \xi_j, \eta_j \mapsto e^{i\theta} \eta_j$ .

*Démonstration.* L'isomorphisme qu'on veut construire, restreint aux  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$  est l'identité. Ensuite, si on connaît  $\eta_1$  et un point du sous-espace de codimension complexe 1  $(dm')$ , on leur associe le point du plan normal à  $(dm')$  :  $(\eta_1 \bar{\xi}_1, \dots, \eta_1 \bar{\xi}_{n-1})$ , puis le point de  $\mathbb{C}^{n-1}$  se projetant orthogonalement sur  $(dm')$  et son plan normal en ces deux points.

**Résultats.** Nous pouvons maintenant décrire la topologie des variétés étudiées. Pour le problème plan des  $n$  corps une variété de niveau du moment cinétique est isomorphe au produit d'une sphère  $S^{2n-3}$  par  $\mathbb{R}^{2n-2}$  : c'est le cylindre  $(m')$  de la proposition 5. Pour le problème dans l'espace, cette variété s'identifie à  $S^{2n-3} \times \mathbb{R}^{4n-6}$ , d'après la proposition 6, qui effectue la "stabilisation" d'un fibré stablement trivial au-dessus de  $S^{2n-3}$ .

Passons aux variétés obtenues en passant au quotient par l'action du groupe réducteur  $S^1$ . Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{C}^l$ . "L'objet" de base est le quotient  $W_l^k$  du cylindre d'équation  $\sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2 = 1$  par l'action canonique du cercle sur  $\mathbb{C}^l : \alpha_j \mapsto e^{i\theta} \alpha_j$ . On voit que  $W_l^k$  est l'espace projectif  $P_{l-1}(\mathbb{C})$  privé d'un sous-espace projectif  $P_{l-k-1}(\mathbb{C})$ . De plus,  $W_{l+1}^l$ , espace projectif  $P_l(\mathbb{C})$  privé d'un point, s'identifie au fibré *tautologique* en droites au-dessus de  $P_{l-1}(\mathbb{C})$ . De même,  $W_l^k$  est la *somme de Whitney* de  $l - k$  fibrés tautologiques  $W_{k+1}^k$ .

Dans le problème plan, la variété réduite est  $W_{2n-2}^{n-1}$  d'après la proposition 5. C'est ainsi qu'elle apparaît dans la proposition (9.4) de [Sma1]. On sait (par exemple [DNF], p. 114) que ce fibré vectoriel est la somme de Whitney du fibré tangent au projectif  $P_{n-2}(\mathbb{C})$  et du fibré trivial en droites complexes. Cette identification est intéressante : elle apparaît directement (et avec plus de géométrie) si l'on remarque que la variété réduite des *configurations* de  $n$  corps dans le plan est le produit par  $\mathbb{R}_+^*$  de  $P_{n-2}(\mathbb{C})$ , et que l'espace des phases est son fibré tangent (ou cotangent ; voir [Arn], appendice 10, et [DNF], p. 288).

Pour le problème spatial, la proposition 6 montre que la variété réduite est  $W_{2n-3}^{n-1} \times \mathbb{R}^{2n-2}$ . Le calcul élémentaire (voir [MiS], p. 46) des classes de Stiefel-Whitney montre que pour tout  $n \geq 3$  le fibré  $W_{2n-3}^{n-1}$  ne possède aucune section réelle partout non nulle. Pour le problème plan, les classes de Pontrjagin sont nécessaires pour établir le résultat plus faible suivant ([MiS], p. 178) : Le fibré  $W_{2n-2}^{n-1}$  est (stablement) non trivial pour  $n \geq 4$ . S'il n'y a que trois corps, la variété réduite est le produit du fibré tangent à la sphère de Riemann par  $\mathbb{R}^2$ , soit aussi  $S^2 \times \mathbb{R}^4$  (le fibré tangent à une sphère est stablement trivial). Ce même résultat s'obtient en remarquant que le fibré tautologique au-dessus de  $P_1(\mathbb{C})$  s'identifie à son fibré normal à l'aide de la multiplication par  $j$  des quaternions.

La variété de niveau des mouvements spatiaux mais non planaires, avant la réduction, apparaît dans la proposition 5 comme le produit par  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^{n-1}$  de la variété de Stiefel des paires de vecteurs  $\xi, \bar{\zeta}$  de  $\mathbb{C}^{n-1}$  orthogonaux pour la structure hermitienne : on a exclu  $\zeta = 0$ . C'est  $S^3 \times (S^1 \times \mathbb{R}_+^*) \times \mathbb{R}^4$  dans le cas de trois corps, parce qu'on peut trivialisier le fibré  $(dm')$  avec les quaternions. Le groupe réducteur agit de manière standard sur la composante  $S^1$  : la fibration est triviale et la base est donnée par l'hypersurface de section obtenue en fixant un point sur cette composante. C'est  $S^3 \times \mathbb{R}^5$ , ou  $\mathbb{R}^8$  privé d'un sous-espace  $\mathbb{R}^4$ . Mais on retrouve ce résultat avec la proposition 5, qui décrit cette variété comme le fibré normal au fibré tautologique (de classe d'Euler 1), privé de la section nulle qui correspond aux mouvements plans, multiplié par  $\mathbb{R}^4$  (trivialité comme dans le problème plan). Or, le fibré en cercle sur  $S^2$  de classe d'Euler 1 est  $S^3$ . Une approche complètement différente permettrait encore d'obtenir le même résultat (seulement dans ce cas) : pour réduire, on aurait pu, au lieu de fixer les trois composantes du moment cinétique et de passer au quotient par  $SO(2)$ , commencer par fixer la norme de  $C$  et passer ensuite au quotient par  $SO(3)$  : c'est l'ordre qu'employait Lagrange.

#### B4) Remarques et extensions

i) La matrice  $M$  introduite en B1 représente en fait une application linéaire intrinsèque. Soit  $E$  l'espace vectoriel de dimension  $p$  où on a placé les  $n$  corps  $r_i$  et leurs vitesses  $v_i$ . A une forme linéaire sur  $E$ , on associe les deux listes de ses valeurs sur les  $n$  corps d'une part, sur les  $n$  vitesses d'autre part, qui sont deux éléments de  $\mathcal{D}$ . A cette application de  $E^*$  dans  $\mathcal{D}^2$  est associée  ${}^tM$ . La forme symplectique canonique de  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}^*$  se transporte par cette application, parce que le moment d'inertie identifie  $\mathcal{D}$  à son dual. Le résultat est un *bivecteur* élément de  $\bigwedge^2 E$ , le moment cinétique, ayant pour expression  $\sum_{i=1}^n m_i r_i \wedge v_i$ . Comment son invariance peut-elle exprimer une symétrie de rotation, alors qu'on n'a même pas introduit de forme quadratique sur  $E$  ?

Eh bien, ce n'est que quand il existe sur  $E$  une forme quadratique, et sur l'espace des applications de  $E^*$  dans  $\mathcal{D}$  une fonction potentiel  $U$  telle que les accélérations  $\gamma_i$  soient données par le gradient  $\nabla U$  pour la métrique induite, que la nullité de la dérivée du moment cinétique équivaut à l'invariance de  $U$  par les isométries pour la forme introduite. Des problèmes de  $n$  corps "non conservatifs" plus généraux possèdent l'intégrale première du moment cinétique.

ii) On fabrique toutes les généralisations des *problèmes isocèles* de trois corps à partir d'un sous-groupe fini du groupe  $G$  de la proposition 3. Il suffit de disposer un nombre arbitraire de classes d'équivalence de corps, les corps d'une même classe ayant tous la même masse et formant un "objet" invariant (positions et vitesses) par le groupe fini choisi.

iii) Examinons le cas particulier  $C = 0$ . En B2, nous avons appris que les lignes de la matrice  $M$  engendrent un sous-espace isotrope. Faisons l'hypothèse simple  $\text{rg}M = p$ , de sorte que le niveau est régulier, et que nous avons le choix entre les groupes réducteurs  $SO(p)$  et  $O(p)$ . On montrerait que dans ce cas la variété réduite s'identifie à la Grassmannienne des sous-espaces isotropes (orientés ou non) munis d'une forme quadratique définie positive.

iv) Pour étudier la topologie dans un cas où  $C$  est dégénéré, et où on impose  $\text{rg}M = p$ , on commence par projeter dans  $\mathcal{D}^2$  les lignes en  $x$  et  $y$  de la matrice  $M$  orthogonalement (pour la structure euclidienne) suivant la direction du sous-espace isotrope engendré par les lignes en  $z$ . On ne change pas ainsi la valeur de  $C$ , et les lignes en  $x$  et  $y$  se retrouvent dans l'orthogonal pour la structure *hermitienne* des lignes en  $z$ . Si  $p$  vaut  $2k + 1$ , il n'y a qu'une ligne en  $z$  dans la matrice  $M$  et on utilisera plutôt un analogue de la proposition 5, qui a l'avantage d'autoriser  $\text{rg}M = p - 1$ . On ne peut espérer obtenir pour  $k > 1$  l'analogue de la proposition 6.

v) Il faut étendre l'étude faite en B3 du problème plan aux autres dimensions paires  $p = 2k$ . La variété de niveau se rétracte dans ce cas sur la variété de Stiefel du B2. La méthode pour effectuer cette rétraction de manière équivariante par rapport à l'action du groupe de rotations généralise ce qui suit. Considérons le cas particulier où  $M$  est une matrice carrée et  $C = J$ . Le niveau correspondant s'identifie au groupe symplectique (notons que la configuration engendre un sous-espace lagrangien). Posons  $M = A + B$ , en appelant  $A = (M - JMJ)/2$  la



partie complexe et  $B = (M + JMJ)/2$  la partie anticomplexe. On a  $AJ = JA$  et  $BJ = -JB$ ,  $I = A^tA - B^tB$  d'après (m) qui entraîne aussi que  $S = A^tB$  est symétrique. Si  $H$  est la matrice  $(A^tA)^{-1}$ ,  $K = H^{\frac{1}{2}}A$  est unitaire, et  $M \mapsto K$  commute avec l'action du groupe des rotations (unitaires)  $M \mapsto OM$ . On paramètre le niveau en se donnant une matrice  $S$  anticomplexe et une matrice  $K$  unitaire :  $H$  vérifie alors  $I = H^{-1} - SHS$ , ce qui entraîne que  $H$  et  $S$  commutent (multiplier par  $SH$  à gauche et par  $HS$  à droite), et détermine  $H$  comme l'unique racine définie positive de cette équation. L'identification topologique connue du groupe symplectique à  $U(k) \times \mathbb{R}^{k(k+1)}$  se retrouve ainsi. De plus, grâce à l'équivariance vis-à-vis de l'action du groupe des rotations, nous obtenons aussi la variété réduite, soit  $\mathbb{R}^{k(k+1)}$ . C'est ainsi que trois corps dans l'espace quadridimensionnel se décrivent avec un point dans  $\mathbb{R}^6$  quand le moment cinétique est choisi comme on l'a dit. Dans le cas de matrices rectangulaires, avec le même moment cinétique particulier, on obtiendra des variétés réduites analogues aux fibrés tangents des Grassmanniennes complexes. Avant réduction, quelle que soit la valeur du moment cinétique, et dès qu'on impose  $\text{rg}M = p$ , la variété de niveau s'identifie au produit d'une variété de Stiefel complexe par un espace contractile.

### C. L'énergie

Dans les problèmes plan et spatial des  $n$  corps, l'étude des variétés intégrales se ramène à l'étude de la fonction énergie  $h$  restreinte à un niveau du moment cinétique. Donnons-nous en général une fonction réelle  $f$  définie sur une variété riemannienne, et notons  $\nabla f$  son champ de vecteurs gradient pour la métrique. Le flot du champ  $\|\nabla f\|^{-2}\nabla f$  fournit un difféomorphisme entre deux variétés de niveau de  $f$ , disons  $f = y_1$  et  $f = y_2$ , dès que  $\|\nabla f\|^{-1}$  est *majoré* sur le fermé  $f^{-1}[y_1, y_2]$ , supposé complet. Cette condition, dite de Palais-Smale[PaS], interdit l'"explosion" en temps fini d'une orbite. Quand elle n'est pas vérifiée, il existe des suites de points de  $f^{-1}[y_1, y_2]$  telles que  $\|\nabla f\|$  tende vers zéro et  $f$  tende vers une limite appartenant au segment  $[y_1, y_2]$ . Leurs valeurs d'adhérence sont des points critiques, et on dit qu'il y a un *point critique à l'infini* quand une de ces suites n'est pas contenue dans un compact. Mais  $f^{-1}(y_1)$  peut être difféomorphe à  $f^{-1}(y_2)$  et il peut même exister un difféomorphisme de  $f^{-1}[y_1, y_2]$  sur  $f^{-1}(y_1) \times [y_1, y_2]$  qui envoie  $f^{-1}(y)$  sur  $f^{-1}(y_1) \times \{y\}$  sans que la condition de Palais-Smale ne soit vérifiée. Dans ce cas, on pourra parfois faire disparaître les points critiques à l'infini en choisissant une autre métrique riemannienne, telle que  $f^{-1}[y_1, y_2]$  reste complète, mais que la nouvelle norme de  $\nabla f$  soit minorée. La fonction  $x_2/(1+x_1^2)$ , définie sur  $\mathbb{R}^2$ , donne un exemple où la norme naturelle n'est pas la bonne.

Nous commencerons par travailler avec la métrique naturelle de l'espace des états, puis nous montrerons qu'il est nécessaire d'en définir une autre, qui "rapproche" les variétés de niveau de  $h$  à l'infini.

#### C1) Compléments sur l'espace des dispositions. Amas.

Rappelons que nous avons défini dans  $\mathbb{R}^n$  l'hyperplan  $\mathcal{D}_n$  des  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que  $\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$ . Les masses  $m_i$  définissent aussi le moment d'inertie  $\sum_{i=1}^n m_i x_i^2$ ,

qui munit  $\mathcal{D}_n$  d'une structure euclidienne.

Soit  $k$  un entier compris entre 1 et  $n$ . A la partition de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en deux sous-ensembles  $\{1, \dots, k\}$  et  $\{k+1, \dots, n\}$  on associe la décomposition orthogonale de l'espace  $\mathcal{D}_n$  en somme directe de trois sous-espaces, celui des éléments de la forme  $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ , celui des éléments de la forme  $(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ , et celui des éléments  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que  $x_1 = \dots = x_k$  et  $x_{k+1} = \dots = x_n$ . Ces sous-espaces, dont on vérifie facilement l'orthogonalité, s'identifient respectivement à  $\mathcal{D}_k$  (masses  $m_1, \dots, m_k$ ),  $\mathcal{D}_{n-k}$  (masses  $m_{k+1}, \dots, m_n$ ) et  $\mathcal{D}_2$  (masses  $m_1 + \dots + m_k$  et  $m_{k+1} + \dots + m_n$ ). Cette construction se généralise immédiatement : à toute partition de  $\{1, \dots, n\}$  en  $l$  amas de cardinaux respectifs  $k_1, \dots, k_l$ , on associe une décomposition de l'espace  $\mathcal{D}_n$  en somme directe de  $l+1$  sous-espaces orthogonaux qui s'identifient naturellement à  $\mathcal{D}_{k_1}, \dots, \mathcal{D}_{k_l}$  et  $\mathcal{D}_l$ . La dernière composante est appelée disposition des *centres de gravité*.

Cette décomposition peut être itérée chaque fois qu'il reste des sous-espaces identifiés à  $\mathcal{D}_k$  avec  $k \geq 3$ . Si on va jusqu'au bout, on obtient une décomposition de  $\mathcal{D}_n$  en  $n-1$  sous-espaces identifiés à  $\mathcal{D}_2$ , donc de dimension 1. En choisissant dans chaque  $\mathcal{D}_2$  un vecteur  $(x_1, x_2)$  tel que  $x_2 - x_1 = 1$ , on obtient une *base de Jacobi* de  $\mathcal{D}_n$ , qui définit les classiques variables de Jacobi (on choisit habituellement la décomposition associée à une partition en deux sous-ensembles dont un est de cardinal 1, et on itère). La base de Jacobi est orthogonale, mais pas orthonormée, ce qui introduit dans les formules des coefficients désagréables. Considérons maintenant un problème de  $n$  corps sur la droite : un état est repéré par un couple  $(X, P)$  de dispositions. La *forme symplectique canonique* associée à  $(X', P')$  et  $(X'', P'')$  le réel  $\langle X'', P' \rangle - \langle X', P'' \rangle$ . Si on veut des variables telles que l'écriture de cette forme soit canonique, et si l'on prend des variables de Jacobi pour repérer  $X$ , il faut choisir des variables différentes pour repérer  $P$ , ce qu'on fait habituellement. Nous prenons toujours une base orthonormée de  $\mathcal{D}$ ; ainsi le moment d'inertie, le moment cinétique et la forme symplectique s'écrivent le plus simplement possible.

Soit maintenant un problème de  $n$  corps dans un espace de dimension  $p$ . Une partition de l'ensemble des corps en  $l$  amas définit une décomposition de l'espace des états en somme directe de  $l+1$  sous-espaces orthogonaux, chacun décrivant soit l'état d'un amas relativement à son centre de gravité, soit l'état de l'ensemble des centres de gravité (on fait la décomposition pour la configuration projetée sur les axes et pour les vitesses projetées sur les mêmes axes). Les fonctions moment d'inertie, énergie cinétique, moment cinétique de l'espace des états s'écrivent comme somme de ces mêmes fonctions définies sur une composante de la décomposition. Le potentiel  $U$  n'a pas cette propriété.

On peut toutefois obtenir quelque chose d'approchant.

**Lemme 1.** Etant donnée une suite de configurations de  $n$  corps dans un espace de dimension  $p$ , on peut en extraire une sous-suite telle qu'il existe une partition du système en  $l$  amas, et donc une décomposition de l'espace des configurations en  $l+1$  composantes, ayant les propriétés suivantes :

- i) la configuration projetée sur une composante décrivant un amas par rapport à

son centre de gravité tend vers une limite,

ii) la configuration projetée sur la composante décrivant la configuration des centres de gravité est telle que la distance entre deux points quelconques tend vers l'infini.

*Démonstration.* On procède par récurrence. Supposons extraite une sous-suite telle qu'il existe une partition des  $n-1$  premiers corps vérifiant la propriété. Considérons la limite inférieure de la distance du  $n$ -ième corps au centre de gravité du premier amas. Si elle est infinie, on passe à l'amas suivant. Sinon, on extrait une sous-suite telle que cette limite inférieure soit la limite. La suite des positions du corps relativement au centre de gravité reste dans un compact. On en extrait une sous-suite convergente. Si la limite inférieure est infinie pour tous les amas, on crée un amas pour le  $n$ -ième corps seul. On a le résultat. On peut d'ailleurs remplacer limite inférieure par limite supérieure.

**Lemme 2.** Soit une suite ayant les propriétés de la suite extraite dans le lemme 1. Soit la fonction  $\bar{U}$  définie comme la somme des potentiels  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq l$  de chaque amas. Alors  $U - \bar{U}$  tend vers zéro et  $\|\nabla U - \nabla \bar{U}\|$  tend vers zéro.

*Démonstration.* La fonction  $U - \bar{U}$  s'écrit  $\sum m_i m_j r_{ij}^{-1}$ , où la somme porte seulement sur des couples  $(i, j)$  tels que la distance  $r_{ij}$  tend vers l'infini. On vérifie facilement que le gradient de cette fonction tend aussi vers zéro en norme (le gradient a pour composantes les "forces", qui tendent vers zéro en  $1/r^2$ ).

Nous avons implicitement supposé que la fonction  $U$  était définie, c'est-à-dire que les configurations de la suite sont sans collision. Nous aurons cependant à traiter le cas où il y a des collisions à la limite.

**Lemme 3.** Soit une suite ayant les propriétés de la suite extraite dans le lemme 1. Considérons l'amas  $j$  de potentiel  $U_j$  et itérons le processus de décomposition en amas, en regroupant en sous-amas les corps ayant la même position limite. La fonction  $\bar{U}_j$  définie comme somme des potentiels de chaque sous-amas et du potentiel de la configuration des centres de gravité est telle que  $U_j - \bar{U}_j$  et  $\|\nabla U_j - \nabla \bar{U}_j\|$  tendent vers zéro. La fonction  $\bar{U}$  définie comme somme des  $\bar{U}_j$  a la même propriété que  $\bar{U}$  dans le lemme 2.

*Démonstration.* La fonction  $U_j - \bar{U}_j$  et ses dérivées sont continues dans un voisinage de la collision limite. Il suffit de les évaluer sur la configuration de collision. On trouve zéro, pour la fonction et ses dérivées premières (le potentiel de la configuration des centres de gravité est le potentiel de la projection sur la composante correspondante : il est implicite qu'on attribue aux centres de gravité les masses totales des amas).

**Matrice de Conley.** On écrit très simplement le gradient du potentiel en introduisant la forme bilinéaire symétrique définie positive de l'espace des dispositions suivante ([Pac]) :

$$\langle PA, P' \rangle = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} p_{ij} p'_{ij} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} p_{ij} &= p_i - p_j, \\ p'_{ij} &= p'_i - p'_j. \end{aligned}$$

On a écrit dans le membre de droite la valeur d'une forme bilinéaire prise sur les deux dispositions  $P = (p_1, \dots, p_n)$  et  $P' = (p'_1, \dots, p'_n)$ , et qui dépend par l'intermédiaire des distances mutuelles d'une *configuration* de  $n$  corps dans un espace de dimension quelconque. Dans le membre de gauche, on a noté cette forme bilinéaire à l'aide d'un opérateur auto-adjoint  $A$ , la "matrice de Conley", de l'espace des dispositions.

Donnons-nous dans un espace de dimension quelconque où un axe  $(O, x)$  est privilégié une famille à un paramètre de configurations de  $n$  corps dont la projection orthogonale de direction  $(O, x)$  est fixée. Le calcul direct donne  $\dot{U} = -\langle XA, \dot{X} \rangle$ , ce qui signifie que

$$\nabla_x U = -XA,$$

où  $\nabla_x$  désigne la projection du gradient sur l'espace des  $x$ . Les équations de Newton du problème dans  $\mathbb{R}^3$  muni du repère  $(O, x, y, z)$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= -XA, \\ \ddot{Y} &= -YA, \\ \ddot{Z} &= -ZA.\end{aligned}$$

## C2) Suites critiques avec multiplicateurs de Lagrange

Décrivons l'état d'un système de  $n$  corps dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  avec la matrice  $M$

$$\begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \\ Z & R \end{pmatrix}$$

comme au paragraphe B1. Les trois composantes du moment cinétique s'écrivent :

$$\begin{aligned}\langle Y, R \rangle - \langle Z, Q \rangle &= C_x, \\ \langle Z, P \rangle - \langle X, R \rangle &= C_y, \\ \langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle &= C_z.\end{aligned}$$

Nous noterons

$$I = \|X\|^2 + \|Y\|^2 + \|Z\|^2 \quad \text{et} \quad K = \|P\|^2 + \|Q\|^2 + \|R\|^2$$

si bien que l'énergie s'écrit

$$h = \frac{1}{2}K - U.$$

Nous savons (B1) qu'un niveau du moment cinétique correspondant à une valeur non nulle de cette application est une variété régulière et complète pour la métrique naturelle, aussi bien dans le problème plan que dans le problème spatial. L'annulation du moment cinétique ne donne pas un niveau régulier : les mouvements colinéaires (ou confinés à l'origine dans le cas du problème plan) sont des points critiques. Ce niveau devient régulier quand on exclut les mouvements contenus dans

un espace de codimension deux, mais il n'est plus complet, de sorte que l'étude de la restriction de la fonction  $h$  demande d'autres notions que celles de point critique et de point critique à l'infini discutées dans l'introduction de cette partie. On verrait facilement qu'il n'y a rien de "critique" au "bord" dans le cas d'un moment cinétique nul, mais de simples considérations d'homogénéité ([Cab]) établissent que  $h = 0$  est ici la seule valeur correspondant à un changement de topologie.

Définissons les notions générales qui nous seront utiles dans l'étude de la fonction  $h$  restreinte à un niveau de  $C$ .

Soit un état du système tel que  $\text{rg}M \geq 2$  (le mouvement n'est pas colinéaire). Les trois composantes du moment cinétique sont indépendantes (B1). Appelons *multiplicateur optimal* le triplet  $(\lambda_x^0, \lambda_y^0, \lambda_z^0)$  tel que  $\nabla h - \lambda_x^0 \nabla C_x - \lambda_y^0 \nabla C_y - \lambda_z^0 \nabla C_z$  soit orthogonal aux trois gradients du moment cinétique. Si ce dernier vecteur, noté  $\epsilon_0$ , est nul, l'état est un *point critique* pour la fonction  $h$  restreinte à la variété de niveau de  $C$  (localement régulière) passant par le point.

Soit une suite d'états du système. Appelons *suite (de multiplicateurs) compatible* une suite de triplets  $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$  telle que  $\nabla h - \lambda_x \nabla C_x - \lambda_y \nabla C_y - \lambda_z \nabla C_z$ , noté  $\epsilon$ , tende vers zéro en norme. Appelons *suite critique* une suite d'états possédant une suite de multiplicateurs compatibles. Si les états d'une telle suite vérifient  $\text{rg}M \geq 2$ , la suite des multiplicateurs optimaux fournit une autre suite compatible. En effet,  $\epsilon_1 = \epsilon - \epsilon_0$  est combinaison linéaire des gradients de  $C$ . Donc  $\|\epsilon\|^2 = \|\epsilon_0\|^2 + \|\epsilon_1\|^2$ , et  $\|\epsilon_0\|$  tend vers zéro. Nous appellerons *suite critique horizontale* une suite critique telle que  $h$  tende vers une limite finie et  $C$  reste constant. Si elle n'a pas de valeur d'adhérence, une suite critique horizontale sur une variété de niveau non critique de  $C$  dénote l'existence d'un point critique à l'infini pour la fonction  $h$  restreinte à cette variété :  $\epsilon_0$  est le gradient de cette fonction. Les valeurs d'adhérence d'une telle suite critique sont évidemment des points critiques (remarquons que comme l'énergie est minorée, la configuration limite est sans collision).

Abordons l'étude des points et des suites critiques.

**Premier outil : la dérivée de Lagrange-Jacobi.** Une suite critique est telle que

$$(LJ) \quad \frac{(K - U)^2}{I + K} \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Le produit scalaire de  $\epsilon$  avec le champ de vecteurs suivant, tangent aux niveaux de  $C$ ,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X, & \dot{P} &= -P, \\ \dot{Y} &= Y, & \dot{Q} &= -Q, \\ \dot{Z} &= Z, & \dot{R} &= -R, \end{aligned}$$

est la dérivée de  $h$  suivant ce champ de vecteur, soit  $U - K$ , d'après les homogénéités. Cette quantité, divisée par la norme  $\sqrt{K + I}$  du champ de vecteurs, tend donc vers zéro.

**Remarque.** L'Hamiltonien  $\langle X, P \rangle + \langle Y, Q \rangle + \langle Z, R \rangle$ , qui est aussi la valeur de  $\dot{I}/2$ , est associé au champ de vecteur ci-dessus. L'expression  $U - K$  est donc la valeur du crochet de Poisson  $\{\dot{I}, h\}/2$ , qui vaut aussi  $-\dot{I}/2$ . C'est la formule de Lagrange-Jacobi, citée en A3.

**Exercice.** En utilisant l'identité  $K - U = K/2 + h$ , montrer qu'une suite critique horizontale telle que la suite des configurations reste bornée est bornée, et possède donc une valeur d'adhérence. Ainsi, les points critiques à l'infini ont des configurations de taille "infinie".

**Deuxième outil : le repère du multiplicateur.** Pour un problème multidimensionnel, un multiplicateur s'identifie à une matrice antisymétrique  $\Lambda$  de même taille que  $C$  : on lui associe le champ de vecteur  $-(1/2)\nabla(\text{tr}\Lambda C)$ . Un changement de repère orthonormé  $M \mapsto OM$  transforme  $\Lambda$  en  $O\Lambda^tO$ . On appellera repère du multiplicateur un repère qui met la matrice  $\Lambda$  sous forme normale, comme on avait mis  $C$  sous forme normale en B2.

Dans le cas tridimensionnel, un repère du multiplicateur est simplement un repère orthonormé de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\lambda_x = \lambda_y = 0$ . Seuls importent alors les deux gradients suivants ( $A$  est définie en C1) :

$$\begin{array}{c} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{array} \begin{pmatrix} \nabla C_z & \nabla h \\ Q & XA \\ -P & YA \\ 0 & ZA \\ -Y & P \\ X & Q \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

**Proposition 1.** Le rang de  $M$  vaut 2 pour un point critique de  $h$  dans le problème spatial des  $n$  corps : les positions et les vitesses sont situées dans un même plan. Réciproquement tout point critique pour le problème plan, placé dans un plan arbitraire de  $\mathbb{R}^3$ , est un point critique pour le problème dans l'espace. Ces points critiques sont appelés équilibres relatifs.

*Démonstration.* Une fois choisi un repère du multiplicateur optimal (nous n'avons défini la notion de point critique de  $h$  que dans le cas où ce multiplicateur existe), il est clair que  $R = 0$  et que  $ZA = 0$ , ce qui impose  $Z = 0$  (la projection des "forces" sur la verticale est nulle). Les équations restantes sont celles qui définissent un point critique dans le plan\*.

**Estimations de géométrie.** Soit une suite critique munie d'une suite compatible. On définit les quantités suivantes, associées à chaque point de la suite,

---

\* Un autre argument permet de conclure si on se place dans un repère du moment cinétique, supposé ici non nul (moment cinétique vertical). Le gradient symplectique de l'énergie doit être combinaison linéaire des gradients symplectiques des composantes du moment cinétique. Or seul le gradient de la composante verticale est tangent au niveau du moment cinétique. On termine de la même façon.

indépendantes du choix du repère du multiplicateur, mais qui, contrairement aux quantités intervenant dans  $(LJ)$ , dépendent du choix du multiplicateur :

$$I_z = \|X\|^2 + \|Y\|^2, \quad K_z = \|P\|^2 + \|Q\|^2.$$

On a les estimations suivantes, dites “de géométrie”, parce qu’elle ne font pas intervenir le potentiel :

$$\begin{aligned} (E1) \quad & \|R\| = o(1), \\ (E2) \quad & \sqrt{K_z} = |\lambda_z| \sqrt{I_z} + o(1), \\ (E3) \quad & K_z = \frac{C_z^2}{I_z} + o(1). \end{aligned}$$

La première est évidente. Les deux dernières viennent de la projection des deux gradients  $\nabla C_z$  et  $\nabla h$  sur l’espace des  $(P, Q)$ . La norme  $\gamma$  du projeté de  $\nabla h - \lambda_z \nabla C_z$  tend vers zéro, d’où  $(E2)$ , par l’inégalité triangulaire. Pour obtenir  $(E3)$ , on projette le vecteur  $(P, Q)$ , dont le carré de la norme vaut  $K_z$ , d’une part sur le vecteur  $(-Y, X)$  et d’autre part sur son orthogonal dans l’espace  $\mathcal{D}^2$ . La norme de la deuxième projection est majorée par  $\gamma$ , ce qui donne le  $o(1)$ .

**Proposition 2.** D’une suite critique telle que la suite des configurations tende vers une configuration limite sans collision, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un équilibre relatif. Les suites de multiplicateurs compatibles avec la sous-suite sont caractérisées par leur limite, qui est la valeur du multiplicateur optimal (non nul) de l’équilibre limite.

*Démonstration.* On déduit de  $(LJ)$  que la suite des  $K$  tend vers la même limite que celle des  $U$ . La compacité de la suite critique entraîne l’existence d’une valeur d’adhérence. Il faut vérifier que  $\text{rg}M \geq 2$  pour cette valeur limite, par exemple en utilisant les estimations. D’abord,  $(E1)$  montre que  $K_z$  a même limite que  $U$ . Donc si  $I_z$  tend vers zéro,  $\text{rg}M$  n’est pas 1. Sinon,  $(E3)$  montre que  $C_z$  est minoré, et on sait que le problème n’est pas non plus colinéaire. La valeur d’adhérence est bien un équilibre relatif (il n’y a que deux choix possibles pour les vitesses une fois donnée une configuration centrale plane, et un cercle de choix si on se donne une configuration alignée de Moulton). L’affirmation sur le multiplicateur se déduit simplement de l’indépendance des gradients des trois composantes du moment cinétique.

**Application aux petites suites critiques.** Une petite suite critique est une suite critique telle que  $I$  tende vers zéro.

**Proposition 3.** Soient une petite suite critique et une suite compatible. Alors  $h$  tend vers  $-\infty$  (la suite n’est pas horizontale) et la norme du multiplicateur tend vers l’infini.

*Démonstration.* D’après  $(LJ)$ ,  $K$  est équivalent à  $U$ , qui tend vers l’infini. Donc  $h$  est équivalent à  $-U/2$ . Ensuite  $(E1)$  et  $(E2)$  montrent que  $|\lambda_z|$  tend vers l’infini.

**Application à l'énergie cinétique.** Etudions les suites critiques de la fonction  $\bar{h} = K/2$ . Nous montrons d'abord que les suites critiques horizontales sont les suites telles que la valeur de cette fonction tende vers zéro.

**Proposition 4.** Une suite critique de l'énergie cinétique telle que  $K$  est minoré par un réel strictement positif est telle que la norme du moment cinétique tende vers l'infini.

*Démonstration.* On peut utiliser les estimations (E1),(E2) et (E3), construites en regardant la moitié inférieure du tableau des gradients, qui est inchangée. Comme  $\bar{h}$  ne dépend pas des positions, la moitié supérieure donne :

$$(E4) \quad |\lambda_z| \sqrt{K_z} = o(1).$$

En éliminant  $|\lambda_z|$  entre cette équation et (E2), on obtient

$$K_z = o(\sqrt{K_z}) + o(\sqrt{I_z}).$$

Avec (E1) et l'hypothèse de la proposition, on déduit que  $I_z$  tend vers l'infini. L'équation (E3) permet de conclure.

**Proposition 5.** Soient une suite critique de l'énergie cinétique et un multiplicateur compatible. Si la norme de ce multiplicateur est minorée par un réel strictement positif,  $K$  et  $I_z$  tendent vers zéro.

*Démonstration.* Pour les vitesses, il suffit de lire (E1) et (E4). Pour les positions, on élimine  $K_z$  entre (E2) et (E4) :

$$\lambda_z^2 \sqrt{I_z} = o(1) + o(\lambda_z)$$

et  $I_z$  tend vers zéro.

### C3) Résultats

Nous étudions ici les suites critiques de  $h$  les plus générales.

**Principe des démonstrations.** Chaque fois qu'on pourra remplacer le potentiel  $U$  par un potentiel modifié  $\bar{U}$  introduit en C1, on s'intéressera à une application  $M \mapsto (C_x, C_y, C_z, \bar{h})$  ayant une forme particulière : elle est définie sur une variété produit dont chaque facteur décrit un certain problème de  $k$  corps et elle est la somme de ses analogues sur chaque facteur de la décomposition. Une suite de multiplicateurs compatible avec une suite critique de  $\bar{h}$  est compatible avec les suites projetées sur chacun des facteurs, parce que le  $\epsilon$  défini en C2 est transformé par la projection sur un des facteurs en un vecteur de norme plus petite. Les suites projetées sont donc critiques. Réciproquement, si une suite est telle que sa projection sur chacun des facteurs soit critique, elle est critique pourvu qu'il existe un multiplicateur compatible avec toutes les suites projetées à la fois.

**Proposition 6.** Considérons une suite critique de  $h$  telle que la configuration tende vers une limite. De deux choses l'une : soit c'est une petite suite critique ( $I \rightarrow 0$ ), soit on peut extraire une sous-suite convergeant vers un équilibre relatif\*.

---

\* Le lemme de Shub[Shu] se rapproche beaucoup de cette proposition. On le déduit très simplement en appliquant le "principe" à la fonction  $U$  restreinte à la sphère  $I=1$ .



*Démonstration.* Une telle suite vérifie l'hypothèse du lemme 3 (un seul amas dans la première "décomposition"). On fait la décomposition en sous-amas, et on remplace  $h$  par  $\bar{h} = \frac{1}{2}K - \bar{U}$ . Dire que la suite est critique pour  $h$  équivaut à dire qu'elle est critique pour  $\bar{h}$  : la norme de la différence des gradients des deux fonctions tend vers zéro. Les multiplicateurs compatibles sont les mêmes. On peut appliquer le *principe*. La projection sur une composante décrivant un sous-amas est une petite suite critique. Tout multiplicateur compatible tend vers l'infini en norme d'après la proposition 3. La projection sur la composante décrivant les centres de gravité n'a pas de collision à la limite : on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un équilibre relatif d'après la proposition 2. Un multiplicateur compatible tend vers une limite finie. Il n'y a donc pas de multiplicateur compatible avec les deux projections, sauf dans les cas décrits dans la proposition.

**Théorème.** De toute suite critique horizontale de  $h$  (notion définie en C2) on peut extraire une sous-suite telle qu'il existe une partition du système en  $l$  amas ayant les propriétés suivantes :

- i) chaque amas, rapporté à son centre de gravité, tend vers un équilibre relatif,
- ii) la distance entre deux amas quelconques tend vers l'infini.

*Démonstration.* On commence par faire l'extraction et la double décomposition en amas du lemme 3. De l'argument d'incompatibilité des multiplicateurs de la démonstration précédente on déduit l'alternative suivante : soit tous les amas (obtenus après la première décomposition) se comportent en petite suite critique, soit on peut extraire une sous-suite telle que tous les amas rapportés à leur centre de gravité tendent vers un équilibre relatif. Le premier cas n'est pas compatible avec le fait que l'énergie totale possède une limite finie. En effet, la proposition 3 montre que la contribution des amas à l'énergie tend vers l'infini négativement et la proposition 5 montre que s'il y a compatibilité des multiplicateurs, la contribution de la composante des centres de gravité doit tendre vers zéro. Le résultat suit.

**Modèle de suite critique horizontale non bornée.** Rappelons qu'il existe une famille à un paramètre d'équilibres relatifs dont la configuration est à homothétie près une configuration centrale donnée. Nous pouvons paramétrer une telle famille avec le *multiplicateur*  $\lambda_z$ , et si son *poids*  $g$ , par définition égal à l'invariant d'homothétie  $IU^2$ , est donné, nous obtenons, par exemple en utilisant les estimations écrites en C2,

$$I = \sqrt[3]{\frac{g}{\lambda_z^4}}, \quad -2h = K = U = \sqrt[3]{\lambda_z^2 g}, \quad C = \sqrt[3]{\frac{g}{\lambda_z}},$$

d'où il suit que  $g = -2hC^2$ .

Pour une valeur donnée de  $\lambda_z$ , choisissons  $l$  équilibres relatifs de multiplicateur  $\lambda_z$  (ils "tournent" tous à la même vitesse et dans le même sens) et plaçons-les dans  $l$  plans horizontaux distincts de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , de telle sorte que leurs centres de gravité soient tous situés sur l'axe vertical  $(O, z)$  avec une vitesse nulle. Nous obtiendrons un modèle de suite critique horizontale dès que nous aurons choisi une

suite arbitraire de nombres réels positifs  $\alpha$  tendant vers l'infini, en partant de la configuration construite et en effectuant une suite d'"homothéties" de l'axe des  $z$  de rapport  $\alpha$ , c'est-à-dire en multipliant les coordonnées verticales des corps par  $\alpha$  en laissant les coordonnées horizontales inchangées.

Cette suite modèle est en fait une suite de *points critiques* de la fonction  $\bar{h}$  (on voit aisément que le  $\nabla\bar{h} - \lambda_z\nabla C_z$  correspondant aux centres de gravité est nul), de même valeur critique, et donc *a fortiori* une suite critique horizontale de  $h$ . Le calcul de la valeur critique en fonction de  $\lambda_z$  se fait ainsi : à une suite du théorème où, par exemple, le système se divise en deux amas de poids respectifs  $g_1$  et  $g_2$ , on attribuera le poids  $(\sqrt[3]{g_1} + \sqrt[3]{g_2})^3$ . Ensuite, on déduira les limites des quantités (additives)  $I_z$ ,  $-2h$ ,  $K$ ,  $U$  et  $C$  à l'aide des formules que nous avons données pour les équilibres relatifs.

**Autres suites.** Les suites critiques horizontales les plus générales peuvent s'écarter considérablement des suites du modèle. Toutefois, il faut un multiplicateur compatible avec tous les amas, ainsi qu'avec la composante des centres de gravité. S'il n'y a pas d'amas, la proposition 4 montre que  $\bar{h}$  et donc  $h$  tendent vers zéro. S'il y a au moins un amas, plaçons-nous une fois pour toutes dans un repère du multiplicateur limite : d'après la proposition 2, l'amas limite est situé dans le plan horizontal de ce repère. Tous les autres amas limites sont d'ailleurs des équilibres relatifs horizontaux, de même multiplicateur. La proposition 5 nous dit en particulier que la projection orthogonale de la configuration des centres de gravité suivant l'axe vertical du repère du multiplicateur compatible tend vers l'origine. Pourtant, la même projection suivant l'axe vertical du multiplicateur limite (limite des axes précédents) ne tend pas nécessairement vers l'origine, les amas pouvant "fuir" très vite sur l'axe vertical. Beaucoup plus grave, les vitesses des centres de gravité des amas, astreintes d'après la même proposition à tendre vers zéro, peuvent toutefois contribuer à la composante *horizontale* du moment cinétique limite, pour la même raison. Le cas du plan est moins problématique :

**Corollaire 1.** Les points critiques à l'infini du problème *plan* des  $n$  corps sont tels que l'énergie tende vers zéro.

*Démonstration.* S'il y avait un amas, la configuration des centres de gravité devrait tendre vers la collision multiple à l'origine (proposition 5), ce qui contredirait la propriété ii) du théorème.

**Suites très critiques.** Munissons le fibré tangent à l'espace des états de la métrique multiple de la précédente qui définit la norme

$$\|\cdot\|_s = (1 + I)^{-\frac{1}{2}} \|\cdot\|$$

et appelons *suite très critique* une suite critique pour cette nouvelle métrique. Cela signifie que  $(1 + I)^{\frac{1}{2}} \|\epsilon\|$  tend vers zéro, avec les notations de C2, puisqu'il faut aussi changer de gradient. Une suite très critique est donc critique, mais on a aussi les trois propriétés qui suivent.

i) L'espace des états est complet pour la nouvelle métrique. En effet, la norme usuelle de la vitesse sur une nouvelle géodésique est de l'ordre de  $(1 + I)^{\frac{1}{2}}$ . On

peut donc majorer la distance du point à l'origine en fonction du temps  $t$  par une fonction du type  $e^t$ , ce qui montre que le flot géodésique est complet, ou encore que l'espace est complet par le théorème de Hopf-Rinow.

ii) On peut remplacer la conclusion de la proposition 5 par :  $(1+I)K$  et  $(1+I)I_z$  tendent vers zéro, en remarquant que les  $o(1)$  de (E1), (E2) et (E4) deviennent des  $o(1/\sqrt{1+I})$ . Il faut préciser que  $I$  désigne ici la taille totale du système, tandis que  $I_z$  et  $K$  ne décrivent que la composante des centres de gravité. Mais les amas ne contribuent à  $I$  que par une quantité finie. Comme  $IK$  majore les composantes du moment cinétique, le défaut signalé est corrigé : dans une suite très critique, la contribution des centres de gravité au moment cinétique tend vers zéro. Notons que la déviation mineure qu'on avait signalée juste avant est aussi corrigée, parce que  $II_z$  tend vers zéro.

iii) Les suites modèles sont très critiques. Comme elles sont formées de points critiques de  $\bar{h}$ , il suffit pour le voir d'estimer  $\|\nabla_s U - \nabla_s \bar{U}\|_s$ . Cette quantité tend bien vers zéro, comme le montre par exemple l'estimation esquissée dans la preuve du lemme 2 ou, plus simplement, l'homogénéité de  $U$  et de ses dérivées qui permet de faire le calcul sur une suite bornée de configurations, ressemblant à celle du lemme 3. Des suites plus générales que celles du modèle, où l'on imposerait simplement à la distance entre deux amas de tendre vers l'infini, pourraient ne pas être très critiques.

**Caractérisation des valeurs singulières.** Nous appelons valeurs singulières de l'énergie les valeurs limites possibles de  $h$  sur une suite très critique horizontale. Si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux valeurs de l'énergie telles qu'il n'y ait pas de valeur singulière entre les deux, et si la valeur choisie pour  $C$  est non nulle, il existe un difféomorphisme entre les deux niveaux correspondants : celui construit dans l'introduction de cette partie.

**Corollaire 2.** Donnons au moment cinétique total  $C$  du système une valeur non nulle. Les valeurs singulières  $h_s$  de l'énergie se déduisent des *poids singuliers*  $-2h_s C^2$ . Les racines cubiques des poids singuliers s'obtiennent en calculant les racines cubiques des poids de chaque configuration centrale obtenue à partir d'un sous-ensemble quelconque de corps, et en les ajoutant de toutes les façons possibles qui correspondent à une partition du système en de tels sous-ensembles.

*Démonstration.* C'est le calcul qu'on a fait sur les suites modèles.

Il y a trois valeurs singulières dans le problème des trois corps qui correspondent à des points critiques à l'infini d'énergie non nulle. On les obtient en divisant le système en un amas d'un corps (de poids nul) et un amas de deux corps. Des détails seront donnés dans la partie D.

## D. Description dans le problème spatial

Nous nous proposons ici de "balayer" une variété de niveau de la fonction énergie définie sur un niveau non critique de l'application moment cinétique ( $C \neq 0$ ), en suivant la méthode proposée par Easton[Eas] (une erreur s'est malheureusement glissée dans cet article). Nous utiliserons la description donnée en A pour le

problème plan, et nous nous restreindrons rapidement au problème des 3 corps à énergie négative et moment cinétique non nul.

Décrivons comme d'habitude l'état du système avec 6 dispositions :

$$\begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \\ Z & R \end{pmatrix}.$$

Les équations

$$\begin{aligned} (dm) \quad & \langle Y, R \rangle - \langle Z, Q \rangle = 0, & \langle Z, P \rangle - \langle X, R \rangle = 0, \\ (m) \quad & \langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle = C. \end{aligned}$$

définissent un niveau du moment cinétique comme fibré vectoriel au-dessus de l'hyperboloïde de niveau  $(m)$  du moment cinétique dans le problème plan :  $(dm)$  est l'équation d'un sous-espace de codimension 2 de l'espace des  $(Z, R)$  (voir B3, proposition 4). Le "balayage" se fait ainsi : étant données  $X, Y, P, Q$  quatre dispositions vérifiant  $(m)$ ,  $Z_0$  et  $R_0$  deux dispositions telles que  $\|Z_0\|^2 + \|R_0\|^2 = 1$  appartenant au sous-espace  $(dm)$  de l'espace des  $(Z, R)$ , nous décrivons la droite contenue dans le niveau du moment cinétique

$$(Dr) \quad \begin{pmatrix} X & P \\ Y & Q \\ \lambda Z_0 & \lambda R_0 \end{pmatrix},$$

en faisant varier  $\lambda$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Il est facile de voir que l'énergie

$$(e) \quad h = \frac{1}{2}(\|P\|^2 + \|Q\|^2 + \|R\|^2) - U$$

croît lorsque  $|\lambda|$  croît. En effet,  $\|R\|$  croît et  $U$  décroît, car toutes les distances croissent. Fixons une valeur  $h_0$  strictement négative de l'énergie. Nous appellerons *droite exceptionnelle* une droite  $(Dr)$  telle que  $h$  reste inférieur à  $h_0$  pour tout  $\lambda$ .

**Proposition.** Si la droite  $(Dr)$  est exceptionnelle, soit la configuration  $(X, Y, Z_0)$  présente une collision, soit  $Z_0$  est une disposition présentant une collision et  $R_0$  est nul.

*Démonstration.* Dans le premier cas,  $U$  est infini et la droite est exceptionnelle. On suppose donc que  $U$  est fini au moins quand  $\lambda$  n'est pas nul :  $R_0$  doit alors être nul pour que la limite de  $h$  sur le rayon soit négative et  $Z_0$  doit être de collision pour que cette limite soit strictement négative (sinon toutes les distances mutuelles tendraient vers l'infini).

**Les droites exceptionnelles dans le problème des 3 corps.** Nous remarquons d'abord que chaque fois qu'une configuration de  $n$  corps s'aligne,  $Z$  vaut zéro. En

effet, il existe dans ce cas un repère tel que  $Y = 0$  :  $(m)$  devient  $\langle X, Q \rangle = C$ , et  $(dm)$  donne  $\langle Z, Q \rangle = 0$ , ce qui est absurde si  $Z$  est un multiple non nul de  $X$ .

**Remarque.** Cette propriété intéressante possède des analogues quand on regarde des dimensions de l'espace supérieures à 3. On les obtient en écrivant la matrice  $M$  de B1  $(X P)$ , où  $X$  et  $P$  sont des blocs matriciels :  $C$  vaut alors  $-X^t P + P^t X$ , et on raisonne sur l'image de cette matrice.

Les seules droites telles que  $U$  reste égal à  $-\infty$  sont donc les droites au-dessus des états de collision du problème plan, telles que  $Z_0 = 0$  et par suite  $\langle X, R \rangle = \langle Y, R \rangle = 0$ . Cette dernière condition signifie que la vitesse verticale du corps isolé est nulle.

Il reste le cas où  $Z_0$  est de collision et où  $R$  est nul. Fixons une configuration  $(X, Y)$  à homothétie près, et reprenons la représentation de la partie A. Le demi-espace

$$\{(P, Q) / \langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle > 0\}$$

contient la sphère  $(en)$ . La boule délimitée contient en général trois disques fermés "exceptionnels", c'est-à-dire tels qu'il existe une droite exceptionnelle au-dessus de leurs points. Chacun est associé à un choix de  $Z_0$  "de collision" ; il est situé sur le plan  $\langle P, Z_0 \rangle = \langle Q, Z_0 \rangle = 0$ , d'après les équations  $(dm)$  ; son rayon, si  $Z_0$  correspond à la collision de la paire  $\{i, j\}$ , est donné par la formule

$$\rho_{ij}^2 = \frac{1}{C^2} \frac{(m_i m_j)^3}{m_i + m_j} + 2h_0.$$

En effet, le disque exceptionnel  $\{i, j\}$  est l'ensemble des points tels que la valeur limite de  $h$  sur la droite de paramètre  $(Z_0, 0)$  est inférieure à  $h_0$ . La propriété de croissance de  $h$  sur la droite implique que  $(P, Q)$  est dans la boule  $(en)$ . Le calcul du rayon  $\rho_{ij}$  peut se faire de la manière suivante. Pour déduire l'équation  $(en)$  de l'équation  $(e)$  dans la partie A, nous avons multiplié  $U$  par  $C^{-1}(\langle X, Q \rangle - \langle Y, P \rangle)$ . Mais si l'on veut bien se restreindre aux vitesses telles que  $\langle P, Z_0 \rangle = \langle Q, Z_0 \rangle = 0$ , on peut remplacer cette expression par le quotient par  $C$  de l'expression du moment cinétique de la paire  $\{i, j\}$  : ce quotient vaut 1 pour les vitesses en question, et possède les mêmes propriétés d'homogénéité que le précédent. On obtient ainsi une variante de l'équation  $(en)$  qui donne

$$\rho_{ij}^2 = \frac{\bar{I}U^2}{C^2} + 2h_0,$$

où  $\bar{I}$  désigne le moment d'inertie de la paire, soit  $m_i m_j (m_i + m_j)^{-1} r_{ij}^2$ . Il faut encore remplacer  $U$  par sa valeur limite  $\bar{U} = m_i m_j r_{ij}^{-1}$  pour obtenir l'expression annoncée. On comparera à l'étude suivant la méthode de la partie A du problème de deux corps de masses  $m_i$  et  $m_j$ .

Mais les  $\rho_{ij}$  ne sont pas toujours de carré positif, et c'est justement cette condition qui déterminera l'apparition des disques exceptionnels, qui changent très vraisemblablement la topologie du niveau.

Parcourons les valeurs négatives de l'énergie, en partant de zéro. Il existe au début, pour toute configuration plane non de collision, trois disques exceptionnels disjoints, au-dessus desquels il y a une droite exceptionnelle. Pour une configuration plane de collision, on a la direction exceptionnelle  $Z_0 = 0$  au-dessus de toutes les vitesses du demi-espace, et seulement deux disques exceptionnels (le troisième est envoyé sur le bord). Ensuite, un disque exceptionnel disparaît chaque fois qu'on passe par une valeur *singulière*

$$h = -\frac{(m_i m_j)^3}{2(m_i + m_j)C^2}.$$

Après les trois passages, il y a une sphère  $S^5$  au-dessus de toutes les configurations planes sans collision à homothétie près, et deux disques  $D^5$  au-dessus des configurations de collision. Ensuite vient la valeur critique

$$h = -\frac{(m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2)^3}{2(m_1 + m_2 + m_3)C^2}$$

due à la configuration de Lagrange, qui change les régions de Hill, et les trois valeurs dues aux équilibres alignés d'Euler.

**Remarque sur un problème isocèle.** Considérons le problème isocèle spatial des trois corps symétrique pour la rotation de  $\pi$  autour de l'axe vertical. Il est clair qu'il possède un des trois points critiques à l'infini ci-dessus, et un des points critiques d'Euler. C'est donc le cas le plus simple où un changement de topologie se produit pour une de nos valeurs singulières. On voit aisément, en appliquant par exemple la méthode du A, que la variété réduite est  $S^2 \times \mathbb{R}$  pour  $h$  supérieur ou égal à la valeur singulière, et  $S^3$  pour  $h$  compris entre la valeur singulière et la valeur critique.

## [2] Symétrie des configurations centrales de quatre corps

**Résumé.** Nous montrons que toute configuration centrale du problème newtonien plan de quatre corps ayant tous la même masse possède au moins une symétrie.

**Quelques résultats de Dziobek.** Nous rappelons ici les résultats de l'article [Dzi] dont nous avons besoin. Nous renvoyons le lecteur à [MeS1] pour une introduction générale à cet article et au problème de la symétrie des configurations centrales.

Soient  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  et  $\vec{r}_4$  des vecteurs repérant quatre points dans un espace vectoriel euclidien. Nous posons  $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$  et

$$a = r_{12}^2, \quad b = r_{13}^2, \quad c = r_{14}^2, \quad d = r_{23}^2, \quad e = r_{24}^2, \quad f = r_{34}^2.$$

Nous supposons les quatre points dans un même plan, ce qui revient à la nullité du déterminant de Cayley

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b & c \\ 1 & a & 0 & d & e \\ 1 & b & d & 0 & f \\ 1 & c & e & f & 0 \end{vmatrix}.$$

Soient  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  et  $\Delta_4$  les aires orientées respectives des triangles  $(2, 3, 4)$ ,  $(4, 3, 1)$ ,  $(1, 2, 4)$  et  $(3, 2, 1)$ , qui vérifient

$$(1) \quad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0.$$

Dziobek obtient, “aus analytisch-geometrischen Untersuchungen”,

$$(2) \quad \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} = 32\Delta_i\Delta_j.$$

Introduisons les quatre masses  $m_1, m_2, m_3$  et  $m_4$ , réels strictement positifs dont la somme est notée  $M$ , une fonction réelle  $\Phi$ , et les deux fonctions

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j \Phi(r_{ij}^2) \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j r_{ij}^2,$$

respectivement appelées *fonction de forces* et *moment d'inertie par rapport au centre de masse*. Dziobek utilise une caractérisation simple des *configurations centrales* : ce sont les points critiques de la fonction  $U$  restreinte aux configurations planes de moment d'inertie fixé. Pour chacune de ces configurations il existe donc deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  vérifiant, pour tout choix des indices  $i$  et  $j$ ,

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial r_{ij}^2} = \lambda \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} + \mu \frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2}.$$

**Compléments algébriques.** Les trois nombres  $-\Delta_2/\Delta_1$ ,  $-\Delta_3/\Delta_1$  et  $-\Delta_4/\Delta_1$  sont les coordonnées barycentriques du premier point par rapport aux trois autres (Moebius). Nous pouvons exprimer ceci avec le système

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta_2 a + \Delta_3 b + \Delta_4 c &= \Delta_1 a + \Delta_2 d + \Delta_4 e \\ &= \Delta_1 b + \Delta_2 d + \Delta_4 f = \Delta_1 c + \Delta_2 e + \Delta_3 f. \end{aligned}$$

De l'homogénéité de  $S$  et des équations (2) on déduit d'autre part

$$(5) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \Delta_i \Delta_j r_{ij}^2 = 0.$$

Nous supposons désormais les quatre masses égales, de sorte que (3) équivaut à l'existence de deux nombres réels  $\nu$  et  $\xi$  tels que, pour tout choix des indices  $i$  et  $j$ ,

$$(6) \quad \Phi'(r_{ij}^2) = \nu \Delta_i \Delta_j + \xi.$$

Soient  $A = \Phi'(a), \dots, F = \Phi'(f)$ . Les équations (1), (4) et (6) entraînent

$$(7_1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix}$$

$$(7_2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & d \\ A & E & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & c \\ A & E & D \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & c \\ F & B & C \end{vmatrix}$$

$$(7_3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & d \\ F & B & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & c \\ F & B & D \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & c \\ A & E & C \end{vmatrix}$$

$$(7_4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & c \\ F & E & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ F & E & C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ A & B & D \end{vmatrix}$$

**Remarque.** Nous n'avons indiqué le système (4) que pour permettre la vérification directe des équations (7), qui semble requérir un calcul assez long. La coplanarité des quatre masses, qui n'est pas conséquence de (6) et de (7), sera exprimée dans la suite avec la seule équation (5). On peut montrer que quand les  $r_{ij}^2$  correspondent à une configuration plane non alignée, le système (4) ou l'équation (5) caractérisent les aires  $\Delta_i$  à un facteur près. Signalons enfin que les principes développés dans [4] permettent d'établir facilement les relations (2), (4) et (7), et d'interpréter ce dernier système comme donnant les "configurations équilibrées".

**Déduction du résultat.** Nous supposons simplement que la fonction  $\Phi'$  est croissante ( $\Phi'' > 0$ ) et concave ( $\Phi''' < 0$ ). Ces hypothèses sont notamment vérifiées



pour le potentiel newtonien, où l'on pose  $\Phi(x) = x^{-1/2}$ . Le premier membre de (5) serait négatif si les  $r_{ij}^2$  étaient tous égaux, d'après (1), et *a fortiori* s'ils décroissaient quand les  $\Delta_i \Delta_j$  croissent. On doit donc avoir  $\nu > 0$  dans l'équation (6).

On appelle "configuration convexe" toute configuration plane telle que

$$(8) \quad \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq 0 \leq \Delta_3 \leq \Delta_4.$$

Si l'on a par contre

$$(9) \quad \Delta_1 \leq 0 < \Delta_2 \leq \Delta_3 \leq \Delta_4$$

la configuration est dite "non convexe". On peut toujours se ramener à l'un de ces deux ordres en renumérotant les sommets et en choisissant l'orientation du plan.

Un tétraèdre symétrique possède soit un plan de symétrie contenant deux des sommets, soit un axe de symétrie. Le premier cas est caractérisé par une double égalité de côtés du type  $a = b, f = e$ , le second par une double égalité du type  $a = f, b = e$ . D'après les équations (6), et des identités découlant aisément de (1), du type

$$(10) \quad \Delta_3 \Delta_4 - \Delta_1 \Delta_2 = (\Delta_2 + \Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_4),$$

toute configuration centrale plane non symétrique vérifie, quitte à renuméroter les sommets et à changer l'orientation du plan,

$$(11) \quad \Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 \quad \text{et} \quad \Delta_1 + \Delta_4 < 0 < \Delta_2 + \Delta_3.$$

**Proposition 1.** Toute configuration centrale plane et convexe de quatre masses égales est symétrique.

*Démonstration.* En utilisant les identités (10), les équations (6), les inégalités (8) et (11) et la croissance de la fonction  $\Phi'$ , on ordonne les six côtés de la configuration supposée non symétrique :

$$c < b < e < d < a < f.$$

On en déduit, par exemple en interprétant ce déterminant comme l'aire orientée du triangle de  $\mathbb{R}^2$  formé par les points  $(f, A)$ ,  $(e, B)$  et  $(d, C)$ , que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0.$$

De même, en utilisant cette fois la concavité de la fonction  $\Phi'$ , on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} < 0.$$

Ceci est absurde : l'équation (7<sub>1</sub>) ne peut être vérifiée. On peut d'ailleurs contredire de la même façon n'importe laquelle des équations (7).

**Proposition 2.** Toute configuration centrale plane non convexe de quatre masses égales est symétrique.

*Démonstration.* On suppose encore la configuration non symétrique et on utilise cette fois l'inégalité (9) pour obtenir

$$c < b < a < d < e < f.$$

Fixons les variables  $D$ ,  $E$  et  $F$  de sorte que  $D < E < F$  et considérons la région de l'espace des  $(d, e, f)$  définie par les deux inégalités

$$d < e \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} > 0.$$

Le triplet  $(d, e, f)$  appartient à cette région quand il passe un graphe concave et croissant par les trois points  $(d, D)$ ,  $(e, E)$  et  $(f, F)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Il nous reste à contredire l'égalité (7<sub>1</sub>) en montrant que la forme linéaire en  $(d, e, f)$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

est négative sur la région ainsi définie. Le troisième déterminant intervenant dans cette égalité est en effet positif. Cette forme est nulle sur la droite  $d = e = f$ . Il suffit donc de montrer qu'elle est négative sur les deux demi-plans "frontière" de la région, qui se coupent suivant cette droite. Elle vaut  $(f - d)(2E - 2D - B + C)$  sur le plan  $d = e$ , et prend donc le signe de

$$2\Delta_2\Delta_4 - 2\Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_3 + \Delta_1\Delta_4 = (2\Delta_2 + \Delta_1)(\Delta_4 - \Delta_3)$$

sur la frontière correspondante. L'identité (1) et les inégalités (9) montrent que cette quantité est négative. La forme se réduit d'autre part à son second terme sur le deuxième demi-plan frontière, pour lequel le triplet  $(f, e, d)$  est combinaison linéaire de  $(F, E, D)$  et  $(1, 1, 1)$ . Ce terme a le signe de la quantité

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_3\Delta_4 & \Delta_2\Delta_4 & \Delta_2\Delta_3 \\ \Delta_1\Delta_2 & \Delta_1\Delta_3 & \Delta_1\Delta_4 \end{vmatrix} = -\Delta_1 \begin{vmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \Delta_2^2 & \Delta_3^2 & \Delta_4^2 \end{vmatrix},$$

qui est négative, ce qui achève la démonstration.

### [3] Les configurations centrales symétriques de quatre corps

**Résumé.** Dans un mouvement d'équilibre relatif du problème plan des  $n$  corps, la configuration est dite centrale alignée ou centrale plane, suivant sa dimension. Nous prouvons, à l'aide d'un programme de calcul formel, qu'il y a exactement trois types de configurations centrales planes de quatre masses égales.

**1. Introduction.** Nous avons montré dans [2] que toute configuration centrale plane de quatre masses égales possède au moins un axe de symétrie. Cette conclusion avait été conjecturée par R. Moeckel ; à vrai dire, Moeckel avait même parié sur ce résultat sur la base de ses expériences numériques. Il contredisait ce faisant un résultat publié précédemment par J. Palmore. Peu après, ce dernier résultat fut encore contesté par [MeS1].

Il restait à décrire l'ensemble des configurations symétriques. On en trouve de trois sortes : les quatre masses aux sommets d'un carré, trois des masses aux sommets d'un triangle équilatéral et la quatrième au centre de ce triangle, ou enfin trois des masses au sommet d'un certain triangle isocèle et la quatrième quelque part sur l'axe, dans le triangle. Il est clair que les configurations des deux premières sortes sont centrales. La seule difficulté est de prouver qu'il existe une et une seule configuration centrale ne possédant qu'un axe de symétrie. La méthode que nous présentons est rigoureuse, mais malheureusement beaucoup moins satisfaisante que celle utilisée dans [2], parce qu'elle requiert un programme de calcul formel.

**2. Remarque préliminaire sur les configurations convexes.** Nous pouvons améliorer un résultat de [2] et prouver que *la seule configuration centrale plane et convexe de quatre masses égales est le carré*. Rappelons qu'une configuration est appelée convexe si aucun des corps n'est situé à l'intérieur de l'enveloppe convexe des autres. Pour démontrer notre assertion, il suffit d'examiner avec attention les arguments de [2].

La clé de ce travail est sans aucun doute l'utilisation d'un certain système qu'on a noté (7). On peut *a posteriori* remarquer que ce système se déduit très naturellement à partir des équations des configurations centrales en forçant une certaine invariance. En fait, nous l'avons obtenu dans [4], comme la définition des *configurations équilibrées* de quatre masses. Ce sont les configurations des mouvements d'équilibre relatif en dimension six. Il existe aussi des mouvements d'équilibre relatif en dimension quatre et bien sûr deux. Dans tous les cas la configuration est équilibrée.

La proposition 1 de [2] affirme que *toute configuration centrale plane et convexe de quatre masses égales est symétrique*. On parvient à ce résultat en montrant que les signes des trois termes de l'équation (7<sub>1</sub>) ne sont pas compatibles avec l'équation, quand la configuration n'est pas symétrique. On peut préciser cet argument : (7<sub>1</sub>) n'est possible que si ses deux membres sont nuls, c'est-à-dire si  $d = e$  et  $b = c$ , autrement dit  $\Delta_3 = \Delta_4$ . Maintenant l'équation (7<sub>4</sub>) n'est pas non plus réalisable, comme on peut le vérifier, quand la configuration n'est pas symétrique, et ne l'est toujours pas quand on fait  $\Delta_3 = \Delta_4$  : il faut cette fois  $b = d$  et  $e = c$ , autrement dit

$\Delta_1 = \Delta_2$ . L'équation (1) montre alors que  $\Delta_1 = -\Delta_4$ , et (6) permet de conclure : la configuration est un carré.

**3. Equations des configurations centrales.** Considérons  $n$  corps dans un espace euclidien de dimension  $n-2$ , repérés par des vecteurs  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ . La contrainte sur la dimension de l'espace *affine* engendré par les corps équivaut à l'existence de nombres réels non tous nuls  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  vérifiant

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i = 0,$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i \vec{r}_i = 0.$$

Ces équations définissent les  $\Delta_i$  à un facteur près dès que les  $\vec{r}_i$  engendrent un espace de dimension  $n-2$ . Il existe une définition compatible des  $\Delta_i$  comme le volume orienté, multiplié par  $(-1)^i$ , du simplexe engendré par les points  $1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ . Mais cette définition donne au facteur libre une valeur inadéquate.

Nous utilisons les carrés des distances mutuelles  $s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$  et les  $\Delta_i$  pour écrire les équations des configurations centrales. Les relations géométriques entre ces variables s'écrivent :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{ik} = \sum_{i=1}^n \Delta_i s_{il}, \quad \text{pour tout } k \text{ et } l.$$

Une configuration de  $n$  masses égales et de dimension  $n-2$  est centrale si et seulement les  $s_{ij}$  et les  $\Delta_i$ , qui vérifient (1) et (3), sont aussi tels qu'il existe deux nombres réels  $\gamma$  et  $\nu$  avec, pour tout  $i < j$ ,

$$(4) \quad s_{ij}^{-3/2} = \gamma + \nu \Delta_i \Delta_j.$$

**4. Cas d'une configuration de quatre masses égales.** Nous savons que toute configuration plane possède un axe de symétrie qui contient deux des corps, par exemple les corps 1 et 2. Cette symétrie équivaut à la simple égalité  $\Delta_3 = \Delta_4$ , comme le montre l'équation (4). Nous noterons

$$a = s_{12}, \quad f = s_{34}, \quad b = s_{13} = s_{14}, \quad d = s_{23} = s_{24}.$$

L'équation (1) devient  $\Delta_1 + \Delta_2 + 2\Delta_3 = 0$ . Nous introduisons à la place des  $\Delta_i$  un seul paramètre  $t$  en posant

$$\Delta_1 = -t - 1, \quad \Delta_2 = t - 1, \quad \Delta_3 = 1.$$

Le système (3) prend alors la forme

$$4b = f + (1-t)^2 a, \quad 4d = f + (1+t)^2 a,$$

et (4) devient

$$\begin{aligned} a^{-3/2} &= \gamma + \nu(1 - t^2), & b^{-3/2} &= \gamma - \nu(1 + t), \\ f^{-3/2} &= \gamma + \nu, & d^{-3/2} &= \gamma - \nu(1 - t). \end{aligned}$$

Nous posons  $a = 1$ , ce qui revient à un choix de normalisation de la configuration, jusqu'ici définie à homothétie près. Nous posons aussi  $f = z^2$ , et exprimons  $\gamma$  et  $\nu$  en utilisant les deux équations de gauche du système ci-dessus. Nous obtenons

$$\nu = \frac{z^{-3} - 1}{t^2} \quad \text{et} \quad \gamma = z^{-3} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{t^2}.$$

Posons

$$\begin{aligned} P(z, t) &= z^3 t^2 b^{-3/2} = (t - 2)(t + 1) + (2 + t)z^3, \\ Q(z, t) &= 4b = z^2 + (1 - t)^2. \end{aligned}$$

On doit avoir

$$R(z, t) = P^2 Q^3 - 64z^6 t^4 = 0.$$

La manipulation analogue avec  $d$  donne  $R(z, -t) = 0$ , de sorte que le système complet s'écrit maintenant

$$R(z, t) = R(z, -t) = 0,$$

ou encore, en oubliant la solution triviale telle que  $t = 0$  (le carré),

$$R_i(z, t) = R_p(z, t) = 0,$$

les deux polynômes  $R_i$  et  $R_p$  étant définis par

$$R_i(z, t) = \frac{1}{2t}(R(z, t) - R(z, -t)), \quad R_p(z, t) = \frac{1}{2}(R(z, t) + R(z, -t)).$$

Ces deux derniers polynômes s'écrivent, en posant  $u = t^2$ ,

$$\begin{aligned} R_i &= 2(z^3 - 4)u^4 - 2(z^6 - 3z^5 - 5z^3 + 9z^2 + 14)u^3 \\ &\quad + 2(3z^7 + 8z^6 - 6z^5 - 6z^4 - 41z^3 + 30)u^2 \\ &\quad + 2(z^3 - 1)(3z^7 + z^6 + 6z^5 - 12z^4 - 13z^3 - 27z^2 + 2)u \\ &\quad + 4(z^2 - 5)(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^2, \\ R_p &= u^5 + (z^6 - 10z^3 + 3z^2 + 24)u^4 \\ &\quad + (3z^8 - 5z^6 - 18z^5 + 3z^4 + 30z^3 + 33z^2 - 10)u^3 \\ &\quad + (3z^{10} - 18z^8 - 6z^7 - 68z^6 + 84z^5 + 6z^4 + 58z^3 - 63z^2 - 52)u^2 \\ &\quad + (z^3 - 1)(z^2 + 1)(z^7 - 10z^5 + 3z^4 + 37z^3 + 18z^2 - 33)u \\ &\quad + 4(z^3 - 1)^2(z^2 + 1)^3. \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant la décomposition en produit de facteurs irréductibles du résultant  $S(z)$  en  $u$  des deux polynômes. Nous n'avons pas décomposé  $z^3 - 1$ , pour abrégé.

$$\begin{aligned}
S = & -262144z^{12}(z^3 - 1)^4(z^2 - 3)(z^2 + 1)^3(z^{37} - 61z^{34} + 336z^{33} - 240z^{32} \\
& + 2052z^{31} - 12120z^{30} + 8400z^{29} - 30456z^{28} + 175113z^{27} - 88548z^{26} \\
& + 241040z^{25} - 1364385z^{24} + 338994z^{23} - 1081984z^{22} + 6241506z^{21} \\
& + 642162z^{20} + 2319507z^{19} - 15790278z^{18} - 12287376z^{17} \\
& + 1386909z^{16} + 11212992z^{15} + 55894536z^{14} - 19889496z^{13} \\
& + 53738964z^{12} - 128353329z^{11} + 44215308z^{10} - 172452240z^9 \\
& + 160917273z^8 - 42764598z^7 + 217615248z^6 - 115440795z^5 \\
& + 17124210z^4 - 139060395z^3 + 39858075z^2 + 39858075).
\end{aligned}$$

Le facteur  $z^2 - 3$  correspond à la solution en triangle équilatéral. Ilias Kotsireas a remarqué que seul le facteur  $(z^2 + 1)^3$  disparaît quand on considère le problème analogue de 5 corps dans l'espace. Le dernier facteur, de degré 37, donne la solution cherchée, celle qui ne possède qu'un axe de symétrie. L'algorithme de Sturm démontre que ce facteur possède exactement trois racines réelles, dont les valeurs approchées sont :

$$z_1 = -1,41423178... \quad z_2 = 1,04689938... \quad z_3 = 1,71400032...$$

Nous excluons  $z_1$ , qui est négative, et  $z_2$ , qui donne pour racine commune  $u_2$  de  $R_i$  et  $R_p$  la valeur approximative  $-4,18466433$  qui ne correspond pas à une valeur réelle de la variable  $t$ . Il ne reste que  $z_3$ , qui donne pour valeur de  $t$  environ  $2,11474891$  et pour valeur des côtés

$$\begin{aligned}
\sqrt{a} &= 1 & \sqrt{b} &= 1,02230893... \\
\sqrt{f} &= 1,71400032... & \sqrt{d} &= 1,77760076...
\end{aligned}$$

*Remarque.* Justifions l'ordre de l'élimination des variables. Le facteur de degré 37 obtenu est intrinsèquement associé à la racine carré du rapport  $f/a$  pour la seule solution n'ayant qu'un axe de symétrie. Le choix de cette variable particulière n'est pas indifférent : toutes les autres variables que nous avons essayées ( $u$ ,  $f/a$ ,  $\gamma$ ...) sont associées à des polynômes de degré 37 ou 74 ayant des coefficients beaucoup plus gros. De même, le choix d'éliminer  $u$  et non une autre variable à la dernière étape du calcul semble optimiser le degré total du résultant.

**5. Le problème des quatre tourbillons égaux.** Les premières études des équilibres relatifs du problème idéalisé des tourbillons semblent dues à W. Thompson. La référence [Tho] discute une méthode étonnante pour les obtenir, que nous voyons à l'œuvre dans [May]. Ces équilibres relatifs sont aussi (voir [MeS2]) les configurations centrales planes pour le potentiel logarithmique : il suffit de remplacer

l'exposant  $-3/2$  dans les équations (4) par l'exposant  $-1$ . Le résultat de symétrie de [2] s'applique, et la recherche des configurations de quatre masses égales n'ayant qu'une symétrie se simplifie considérablement, devenant accessible au calcul manuel. On montre qu'il n'existe pas de telle configuration. En fait, quand l'exposant parcourt l'intervalle  $(-3/2, -1)$ , la continuation de la configuration centrale plane non triviale va rencontrer le triangle équilatéral, qui devient une "racine double". Le même phénomène se produit d'ailleurs pour l'exposant  $-1/2$ . Pour l'exposant  $-1$ , on obtient

$$\begin{aligned} R_i &= (f - 3)(f - 1 + u), \\ R_p &= (2f - u - 2)(f - u + 1), \\ S &= 6(f - 3)^2(f - 1)f. \end{aligned}$$

Nous conjecturons, avec Carles Simó, qu'il n'existe qu'une configuration avec un seul axe de symétrie, quelle que soit la valeur négative de l'exposant, et sauf pour les deux cas de dégénérescence que nous venons d'évoquer.

Je tiens à remercier Robert Conte, pour les informations précieuses qu'il m'a données sur le problème des tourbillons, et Alain Chenciner pour sa participation à ce travail ainsi qu'à [2].

## [4] Le Problème des N Corps et les Distances Mutuelles

### Introduction

La détermination des mouvements *homographiques* du problème newtonien des  $n$  corps, c'est-à-dire des mouvements tels que la configuration reste au cours du temps semblable à elle-même, se fait classiquement en deux étapes. La première, qui n'est facile que dans le cas du problème plan, vise à éliminer les vitesses pour se ramener à des équations sur la seule configuration. La seconde, qui est extrêmement ardue dès que l'on considère au moins quatre corps, est la résolution de ces dernières équations.

On peut considérer que les résultats rassemblés dans Wintner[Win2] constituent une résolution satisfaisante de la première étape, tant qu'on se limite à un espace de dimension trois. Nous présentons dans notre seconde partie une résolution complète qui fait apparaître, dès la dimension quatre, des phénomènes nouveaux : avec  $n = 3$  par exemple, un triangle isocèle et non équilatéral dont les deux masses à la base sont égales peut "tourner" sans se déformer. Dans cette rotation deux axes liés au triangle et ayant le centre de gravité pour origine sont chacun en rotation uniforme dans un plan : l'axe de symétrie et l'axe qui lui est orthogonal. Les deux plans sont orthogonaux, et les deux périodes de rotation sont différentes. Nous avons regroupé toutes les configurations susceptibles de subir des mouvements rigides, quelle que soit la dimension de l'espace impliqué, sous la dénomination "configuration équilibrée".

Nos calculs s'appuient sur une construction d'algèbre linéaire, détaillée dans la première partie, qui montre que la donnée des carrés des distances mutuelles d'un polytope se condense naturellement en une seule forme quadratique positive. Curieusement cette identification élémentaire semble fort méconnue. Nous montrons combien elle est utile, en écrivant les équations des configurations remarquables sous leur forme la plus concise. Notre seconde partie, malgré sa plus grande généralité, est plus simple que les travaux classiques antérieurs.

Ainsi, le lecteur exclusivement intéressé par la dimension trois aura lui aussi intérêt à adopter notre point de vue. Se restreindre à cette dimension simplifie bien peu la première étape, pour les deux raisons suivantes. D'abord, les configurations équilibrées compliquent le tableau dès la dimension trois, si l'on remplace le potentiel de Newton par le potentiel en  $1/r^2$  de Jacobi. On ne peut donc de toute façon les exclure qu'en fin d'analyse. Ensuite, par sa nature même, la technique des distances mutuelles rejette aussi à la fin la discussion de la dimension de l'espace.

Notre démarche suit celle de J.L. Lagrange dans son "Essai sur le Problème des Trois Corps". C'est bien sa réduction en terme des distances mutuelles que nous généralisons. Les mouvements rigides quadridimensionnels sont exclus de ce travail fameux par la longue identité algébrique (N). L'équation de leur configuration apparaît pourtant, sous sa forme la plus simple, dans l'égalité (H). Bien plus tard Banachiewicz l'a réécrite d'une manière compliquée alors qu'il examinait le potentiel de Jacobi : il utilisait des coordonnées cartésiennes.



Dans une troisième partie nous avons pu déduire, en profitant des structures mises en place, l'inégalité de Sundman pour un espace de dimension arbitraire. Seuls les mouvements homographiques dont la configuration est centrale sont tels que cette inégalité soit à chaque instant une égalité.

La méthode des distances mutuelles a aussi et surtout fait avancer la résolution de la “deuxième étape”. La quatrième partie propose quelques énoncés concernant les configurations équilibrées de trois corps. Si les masses sont égales, ce sont tous les triangles isocèles. La démonstration remarquablement simple de ce fait a fourni une clé indispensable dans la résolution (réf. [2]) d'une conjecture sur laquelle R. Moeckel avait parié : toute configuration centrale plane de quatre masses égales possède au moins un axe de symétrie.

Nous tenons à remercier, entre autres, H. Cabral, R. Moeckel, D. Saari et J.C. Yoccoz pour les passionnantes discussions qui ont motivé ce travail.

## 1. Symétries du problème

On peut définir les positions de  $n$  points dans  $\mathbb{R}^p$  par une matrice  $(n, p)$ . Une matrice  $(n - 1, p)$  suffit à les repérer à une translation près. Pour les repérer à une isométrie près, on peut former sa “matrice de Gram”, une matrice carrée symétrique et positive d'ordre  $n - 1$ . Nous montrons dans le paragraphe qui suit comment la même construction, effectuée, quand  $\mathbb{R}^p$  est remplacé par un espace euclidien  $E$ , sans se permettre de choisir une base ni de privilégier un point, conduit à une forme quadratique  $\beta$  sur un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  noté  $\mathcal{D}^*$ . Les carrés des distances mutuelles entre les points forment  $n(n - 1)/2$  coordonnées naturelles de  $\beta$ . Le reste de la première partie (*mécanique d'un système de points, la réduction, les invariants*) expose les structures du problème des  $n$  corps en tenant compte de cette construction.

### Géométrie des distances mutuelles

**1.1 Définition.** L'espace des “dispositions”  $\mathcal{D}$  est l'espace vectoriel de dimension  $n - 1$  quotient de l'espace  $\mathbb{R}^n$  par la droite engendrée par le  $n$ -uplet  $(1, \dots, 1)$ .

Ainsi, les  $n$ -uplets  $(q_1, \dots, q_n)$  et  $(q_1 + \lambda, \dots, q_n + \lambda)$  sont deux représentants d'un même élément de  $\mathcal{D}$ . Le dual  $\mathcal{D}^*$  de l'espace des dispositions s'identifie canoniquement à l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D}^* = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \right\}.$$

**1.2 Proposition et définition.** Soit  $E$  un espace vectoriel. L'espace  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$  des applications linéaires de  $\mathcal{D}^*$  dans  $E$  s'identifie à l'espace des configurations “à translation près” de  $n$  points de  $E$ . Nous appellerons “configuration absolue” une telle application linéaire.

*Démonstration.* Etant donnés  $n$  vecteurs  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  de  $E$ , l'application linéaire

correspondante  $x$  est définie par

$$x(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{r}_i.$$

Comme  $\sum \xi_i = 0$ , le second membre est invariant par la translation de vecteur  $\vec{s}$  :  $\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{s}$ . Donnons-nous maintenant une configuration absolue  $x$ , et un vecteur  $\vec{r}_1$  de référence. On retrouve  $\vec{r}_2$  en utilisant l'expression  $x(-1, 1, 0, \dots, 0) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . On retrouve les autres vecteurs de la même façon.

*Remarques et notations*

**1.3.** L'espace  $E^n$  s'identifie canoniquement à  $\mathbb{R}^n \otimes E$ . Passer au quotient par l'action des translations de  $E$  revient à considérer  $\mathcal{D} \otimes E$ , isomorphe à  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ .

**1.4.** L'application  ${}^t x$ , de  $E^*$  dans  $\mathcal{D}$ , associe à une forme linéaire sur  $E$  la liste de ses  $n$  valeurs sur les  $n$  points de la configuration absolue  $x$ .

**1.5.** Nous notons  $e_{ij}^*$  l'élément de  $\mathcal{D}^*$  représenté par  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  avec  $\xi_i = 1$ ,  $\xi_j = -1$  et  $\xi_k = 0$  si  $k$  est distinct de  $i$  et  $j$ . On a  $x(e_{ij}^*) = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

**1.6.** Si  $a$  est un élément d'un espace vectoriel réel de dimension finie  $F$  et  $b$  un élément du dual  $F^*$ , nous notons  $\langle a, b \rangle$  ou tout aussi bien  $\langle b, a \rangle$  le réel obtenu en évaluant  $b$  sur  $a$ . Nous ne distinguons donc pas  $F$  de  $F^{**}$ . Nous munirons bientôt les espaces  $\mathcal{D}$  et  $E$  de structures euclidiennes, mais nous préférons les distinguer de leur dual, pour bien dégager le rôle des masses (le choix contraire serait tenable jusqu'à la fin de la troisième partie, mais augmenterait inutilement le degré des masses dans de nombreuses équations de la quatrième).

**1.7.** Soient

$$\begin{aligned} \text{Hom}_a(F, F^*) &= \{x \in \text{Hom}(F, F^*) \mid x = -{}^t x\}, \\ \text{Hom}_s(F, F^*) &= \{x \in \text{Hom}(F, F^*) \mid x = {}^t x\}, \\ \text{Hom}_+(F, F^*) &= \{x \in \text{Hom}_s(F, F^*) \mid \forall u \in F, \langle x(u), u \rangle \geq 0\}, \\ \text{Isom}_+(F, F^*) &= \{x \in \text{Hom}_+(F, F^*) \mid \forall u \neq 0, \langle x(u), u \rangle \neq 0\}. \end{aligned}$$

Ce dernier espace, par exemple, s'identifie à l'espace des formes quadratiques définies positives sur  $F$ . Nous parlerons d'homomorphismes plutôt que de tenseurs, parce que la composition est plus généralement pratiquée que sa traduction tensorielle, le produit contracté.

Munissons l'espace  $E$  d'une structure euclidienne, c'est-à-dire d'un élément  $\epsilon$  de  $\text{Isom}_+(E, E^*)$  : une isométrie  $R$  de  $E$  vérifie  ${}^t R \circ \epsilon \circ R = \epsilon$  et transforme  $x$  en  $R \circ x$ .

**1.8 Proposition et définition.** A la configuration absolue  $x$  l'application

$$\begin{aligned} \text{rel} : \text{Hom}(\mathcal{D}^*, E) &\longrightarrow \text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D}) \\ x &\longmapsto \beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x, \end{aligned}$$

associe une "configuration relative"  $\beta$ , qui caractérise  $x$  à une isométrie de  $E$  près. De plus, tout élément de  $\text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$  est la configuration relative d'une configuration de  $n$  points dans un espace euclidien de dimension au plus  $n - 1$ .

*Démonstration.* Cet énoncé correspond à des résultats classiques sous leur forme matricielle. On peut supposer  $E$  de dimension  $n - 1$  et munir  $\mathcal{D}$  et  $E$  de bases telles que  $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$  s'écrive matriciellement  $B = {}^t X X$ . On sait que la donnée de  $B$  détermine  $X$  à une rotation près. De plus,  $X = B^{1/2}$  est solution de  $B = {}^t X X$ .

*Remarques*

**1.9.** Le noyau de  $\beta$  est aussi le noyau de  $x$ ; l'image de  $\beta$  est aussi celle de  ${}^t x$ : sa dimension — le rang de  $x$  ou de  $\beta$  — est la dimension de la configuration, c'est-à-dire la dimension du sous-espace affine engendré par les  $n$  points. Ces affirmations se prouvent facilement en prenant justement pour espace  $E$  ce dernier sous-espace.

**1.10.** En tant que forme quadratique sur  $\mathcal{D}^*$ , la configuration relative  $\beta$  est l'image inverse de la forme euclidienne de  $E$  par l'application  $x$ .

**1.11.** La donnée de  $\beta$  est équivalente à la donnée des  $n(n-1)/2$  carrés des distances mutuelles des points de la configuration. Cela suit des remarques 1.5 et 1.10, qui donnent  $\langle \beta(e_{ij}^*), e_{ij}^* \rangle = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$ . Nous savons maintenant décider si un ensemble de nombres réels positifs  $r_{ij}$  est ou non l'ensemble des longueurs des arêtes d'un polytope euclidien. Cette caractérisation par la positivité de  $\beta$  apparaît en haut de la page 107 de Blumenthal[Blu] qui ne la considère qu'*occasionally useful*. Il lui préfère des considérations de signes de déterminants de Cayley. Rappelons que si Cayley[Cay] est le premier à donner une expression générale, des écritures de l'aire du triangle et du volume du tétraèdre en fonction des distances mutuelles apparaissent déjà dans les travaux d'Héron d'Alexandrie et de Tartaglia respectivement...

**1.12 Proposition.** Soit  $E$  un espace vectoriel tel que  $0 \leq \dim E \leq n - 1$ . L'application  $rel$  induit un difféomorphisme entre le quotient par l'action du groupe des isométries de  $E$  de l'ouvert de  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$  constitué des configurations absolues de dimension maximale d'une part, et la sous-variété de  $\text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$  constituée des configurations relatives de rang  $\dim E$  d'autre part.

*Démonstration.* L'équation  ${}^t x' \circ \epsilon \circ x + {}^t x \circ \epsilon \circ x' = 0$  caractérise les éléments  $x'$  de  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$  qui appartiennent au noyau de la différentielle de  $rel$  au point  $x$ . Le bivecteur de  $\mathcal{D}$  qui, en tant qu'élément de  $\text{Hom}_a(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ , s'écrit  ${}^t x \circ \epsilon \circ x'$ , a pour support l'image de  ${}^t x$ , et peut donc être transporté par  ${}^t x^{-1}$ , défini sur cette image. Le résultat est un bivecteur  $\Omega$  de  $E^*$  qui vérifie  $x' = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$ , c'est-à-dire qui définit la "rotation instantanée" de  $x$  donnée par  $x'$ . Ceci montre que  $rel$  induit un difféomorphisme local. La proposition 1.8 montre qu'il est global.

**1.13 Extension du crochet de dualité.** Soient  $F$  et  $G$  deux espaces vectoriels réels de dimension finie. La trace des endomorphismes, notée  $\text{tr}$ , définit une forme bilinéaire canonique non dégénérée

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(F, G) \times \text{Hom}(F^*, G^*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\phi, \psi) & \longmapsto & \text{tr}({}^t \phi \circ \psi) \end{array}$$

qui permet d'identifier  $(\text{Hom}(F, G))^*$  à  $\text{Hom}(F^*, G^*)$ , ce qu'on fera désormais. On notera  $\langle \phi, \psi \rangle$  le réel  $\text{tr}({}^t \phi \circ \psi)$ . Des propriétés élémentaires de la trace découlent les identités

$$(a) \quad \langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle,$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & \langle \phi, \psi \rangle = \langle {}^t\phi, {}^t\psi \rangle, \\
(c) \quad & \langle \nu \circ \theta, \psi \rangle = \langle \theta, {}^t\nu \circ \psi \rangle, \\
(d) \quad & \langle \nu \circ \theta, \psi \rangle = \langle \nu, \psi \circ {}^t\theta \rangle,
\end{aligned}$$

où  $\theta$  désigne un élément de  $\text{Hom}(F, H)$ ,  $\nu$  un élément de  $\text{Hom}(H, G)$ , et  $H$  un troisième espace vectoriel. Nous identifierons enfin le dual de  $\text{Hom}_s(F, F^*)$  à  $\text{Hom}_s(F^*, F)$  en utilisant la même formule.

**1.14 Dualité et distances mutuelles.** Nous notons  $\sigma_{ij}^* = e_{ij}^* \otimes e_{ij}^*$  l'élément de  $\text{Hom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$  qui à une disposition  $u$  associe  $\langle e_{ij}^*, u \rangle e_{ij}^*$ . La remarque 1.11 montre que les  $\sigma_{ij}^*$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , constituent une base de  $\text{Hom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$  pour laquelle  $\langle \sigma_{ij}^*, \beta \rangle = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$ . Autrement dit, les carrés des distances mutuelles sont les coordonnées de  $\beta$  dans la base duale, constituée de  $n(n-1)/2$  éléments que nous notons  $\sigma_{ij}$ .

### Mécanique d'un système de points

Lagrange[Lag2] a mis les équations différentielles du mouvement de  $n$  corps sous la forme

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i},$$

où  $U$  désigne la *fonction de forces*, opposée de l'énergie potentielle, qui s'écrit, dans le cas du potentiel newtonien,  $U = \sum_{i < j} m_i m_j \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^{-1}$ . Dans le langage du paragraphe précédent, cette équation devient

$$(N) \quad \epsilon \circ \ddot{x} \circ \mu = dU(x),$$

où les compositions apparaissent dans le diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
& \ddot{x} & \\
E & \longleftarrow & \mathcal{D}^* \\
\epsilon \downarrow & & \uparrow \mu \\
E^* & \longleftarrow & \mathcal{D} \\
& dU(x) &
\end{array}$$

La dérivée seconde  $\ddot{x}$  de  $x$  par rapport au temps est, comme  $x$ , un élément de  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ ; l'isomorphisme  $\epsilon$  est encore la structure euclidienne d'un espace vectoriel  $E$ ; enfin,  $U$  est considérée comme fonction réelle de l'espace  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ , de sorte que  $dU(x)$  appartient au dual de cet espace, que nous identifions, d'après la remarque 1.13, à  $\text{Hom}(\mathcal{D}, E^*)$ .

Quant à  $\mu$ , explicitée dans la proposition suivante, elle est définie à partir de la "forme quadratique des masses" sur  $\mathbb{R}^n$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|X\|^2 = m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2,$$

et elle sert à changer  $\vec{r}_i$  en  $m_i \vec{r}_i$ . On notera  $M = m_1 + \dots + m_n$  la somme des masses et  $x_G = (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)/M$  le *centre de masse* des  $x_i$ .

**1.15 Proposition.** Soient  $n$  réels strictement positifs  $m_1, \dots, m_n$ . Les trois expressions qui suivent définissent un même élément  $\mu$  appartenant à  $\text{Isom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$ , qui munit  $\mathcal{D}$  d'une structure euclidienne.

$$(1) \quad \mu^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left( \frac{\xi_1}{m_1}, \dots, \frac{\xi_n}{m_n} \right)$$

$$(2) \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = (m_1(x_1 - x_G), \dots, m_n(x_n - x_G))$$

$$(3) \quad \langle \mu(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j (x_i - x_j)^2$$

*Démonstration.* On vérifie facilement en revenant à la définition 1.1 que les applications définies par (1) et (2) sont inverses l'une de l'autre. Quant à (3), c'est une identité connue au moins depuis Leibniz qu'on peut par exemple obtenir en étendant la forme des masses aux puissances extérieures de  $\mathbb{R}^n$  : notant  $L = (1, \dots, 1)$ , on calcule aisément

$$\|L \wedge X\|^2 = \sum_{i < j} m_i m_j (x_i - x_j)^2.$$

Ensuite,  $\|L \wedge X\|^2 = \|L\|^2 \|X\|^2$  quand  $L$  et  $X$  sont orthogonaux, c'est-à-dire quand  $\sum m_i x_i = 0$ , ce qui permet de conclure en calculant  $\|X\|^2$  avec (2).

*Remarques*

**1.16.** Une fois donnée la forme quadratique des masses sur  $\mathbb{R}^n$ , il est naturel de représenter le quotient  $\mathcal{D}$  de la définition 1.1 par la "section orthogonale"  $x_G = 0$ . C'est ainsi que réduire la symétrie de translation revient à fixer le centre de masse.

**1.17.** L'équation (N) est un peu moins précise que celle de Lagrange, puisqu'elle ne caractérise  $\ddot{x}$  qu'à translation près. De l'équation de Lagrange on déduit en plus que l'accélération du centre de masse est nulle.

**1.18.** On définit la *forme d'inertie*  $b$ , élément de  $\text{Hom}_+(E^*, E)$ , par la formule  $b = x \circ \mu \circ {}^t x$ , qu'on rapprochera de celle qui donne  $\beta$ . On appelle *moment d'inertie* par rapport au centre de masse la trace commune  $I$  des endomorphismes  $\mu \circ \beta$  et  $b \circ \epsilon$  :

$$I = \langle x \circ \mu, \epsilon \circ x \rangle = \langle \mu, \beta \rangle = \langle \epsilon, b \rangle$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i < j} m_i m_j \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i \|\vec{r}_i - \vec{r}_G\|^2.$$

**1.19.** Les polynômes caractéristiques des endomorphismes  $\mu \circ \beta$  et  $b \circ \epsilon$  sont essentiellement les mêmes ; plus précisément, en calculant par exemple les traces des itérés, on vérifie que

$$\det(\mathcal{I}d_{\mathcal{D}^*} - \lambda \mu \circ \beta) = \det(\mathcal{I}d_E - \lambda b \circ \epsilon).$$

Ecrivons  $1 - \eta_1 \lambda + \dots + (-1)^{n-1} \eta_{n-1} \lambda^{n-1}$  ces déterminants. On montre que

$$\eta_{k-1} = \frac{1}{M} \sum_{i_1 < \dots < i_k} m_{i_1} \cdots m_{i_k} \text{vol}_{i_1 \dots i_k}^2,$$

où le terme  $\text{vol}_{i_1 \dots i_k}$  désigne le volume du paralléloétope de dimension  $k - 1$  de  $E$  engendré par les vecteurs  $i_1 i_2, \dots, i_1 i_k$ , c'est-à-dire  $(k - 1)!$  fois le volume du simplexe défini par les corps  $i_1, \dots, i_k$ .

*Une factorisation remarquable.* Supposons que  $U$  ne soit fonction que des distances mutuelles, c'est-à-dire qu'il puisse se déduire d'une fonction  $\hat{U}$  définie sur les *configurations relatives* avec l'expression

$$U(x) = \hat{U}(\beta) \quad \text{où} \quad \beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x.$$

Soit  $x'$  une configuration absolue quelconque. On a

$$\langle dU(x), x' \rangle = \langle d\hat{U}(\beta), {}^t x' \circ \epsilon \circ x \rangle + \langle d\hat{U}(\beta), {}^t x \circ \epsilon \circ x' \rangle.$$

Mais  $d\hat{U}$  appartient au dual de  $\text{Hom}_s(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ , soit  $\text{Hom}_s(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$  d'après la remarque 1.13. Il suit que  ${}^t d\hat{U} = d\hat{U}$ , et, d'après la règle 1.13b, que les deux termes du second membre sont égaux. Ainsi

$$\langle dU, x' \rangle = 2\langle d\hat{U}, {}^t x \circ \epsilon \circ x' \rangle = 2\langle \epsilon \circ x \circ d\hat{U}, x' \rangle,$$

où la dernière égalité découle de la règle 1.13c. On a donc obtenu la factorisation  $dU = 2\epsilon \circ x \circ d\hat{U}$ , qui permet d'écrire

$$(N) \quad \ddot{x} \circ \mu = 2x \circ d\hat{U}, \quad \text{ou encore} \quad \ddot{x} = 2x \circ A,$$

en utilisant la définition qui suit.

**1.20 Définition.** Nous notons  $A$  et nous appelons endomorphisme de Wintner-Conley l'endomorphisme de  $\mathcal{D}^*$  d'expression  $d\hat{U} \circ \mu^{-1}$ .

Bien sûr  $A$  dépend linéairement des masses dans le cas du potentiel newtonien. Son histoire est discutée à la page 430 de [Win2].

## La réduction

Nous voulons maintenant décrire l'état d'un système, c'est-à-dire les positions et les vitesses des corps. Nous noterons  $2F$  le carré cartésien d'un espace vectoriel  $F$  (la "somme" directe de deux copies de  $F$ ).

**1.21 Définition.** On appelle "état absolu" d'un système de  $n$  corps un élément  $z$  de  $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$ . On appelle "état relatif" un élément  $\mathcal{E}$  de  $\text{Hom}_+(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$ . On appelle "espace du mouvement" l'image de  $z$ .

Ces définitions sont justifiées par les analogues des propositions 1.2 et 1.8, obtenus à partir du diagramme ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} E^{2n} & \longrightarrow & \text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E) & \xrightarrow{\text{Rel}} & \text{Hom}_+(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D}) \\ (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) & \longmapsto & z & \longmapsto & \mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z \end{array}$$

La première flèche est la "réduction" des translations, la seconde la réduction des isométries. Les compositions dans  ${}^t z \circ \epsilon \circ z$  forcent le choix de  $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$ ,

plutôt que  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, 2E)$  ou  $2\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ , comme représentant du carré cartésien de  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$ . Nous noterons néanmoins  $z = (x, y)$ ,  $x$  pour les positions  $\vec{r}$ ,  $y$  pour les vitesses  $\vec{v}$ , de sorte que les équations du mouvement sont

$$(N) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = 2x \circ A.$$

Nous noterons aussi

$${}^t z \circ \epsilon \circ z = \begin{pmatrix} {}^t x \circ \epsilon \circ x & {}^t x \circ \epsilon \circ y \\ {}^t y \circ \epsilon \circ x & {}^t y \circ \epsilon \circ y \end{pmatrix} = \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma - \rho \\ \gamma + \rho & \delta \end{pmatrix}.$$

L'état relatif du système est ainsi décrit par la donnée de deux éléments  $\beta$  et  $\delta$  de  $\text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ , d'un élément  $\gamma$  de  $\text{Hom}_s(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ , et d'un élément  $\rho$  de  $\text{Hom}_a(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$ . On peut exprimer, en utilisant (N), la dérivée de  $\mathcal{E}$  en fonction de ces éléments

$$(NRel) \quad \dot{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2\gamma & 2\beta \circ A + \delta \\ 2{}^t A \circ \beta + \delta & 2{}^t A \circ (\gamma - \rho) + 2(\gamma + \rho) \circ A \end{pmatrix}.$$

**1.22.** Etant donné un endomorphisme  $A$  de  $\mathcal{D}^*$  et une forme bilinéaire  $\theta$  sur  $\mathcal{D}^*$ , nous noterons

$$[A, \theta] = {}^t A \circ \theta - \theta \circ A.$$

**1.23.** Remarquons que si  $A$  est donné par la définition 1.20, ou plus généralement si  $A \circ \mu$  est symétrique, on obtient, en notant  $B$  l'endomorphisme  $\mu \circ \beta$  de  $\mathcal{D}^*$  :

$$\mu \circ [A, \beta] = A \circ B - B \circ A.$$

*Les équations réduites.* Utilisons la notation du 1.22 pour réécrire le système (NRel), qui généralise les systèmes obtenus par Lagrange[Lag1] et par Betti[Bet] :

$$(NRel) \quad \begin{aligned} \dot{\beta} &= 2\gamma, \\ \dot{\gamma} &= {}^t A \circ \beta + \beta \circ A + \delta, \\ \dot{\delta} &= 2({}^t A \circ \gamma + \gamma \circ A) - 2[A, \rho], \\ \dot{\rho} &= [A, \beta]. \end{aligned}$$

## Les invariants

*Cas d'un potentiel général.* Les traces  $I$ ,  $J$  et  $K$  des endomorphismes  $\mu \circ \beta$ ,  $\mu \circ \gamma$  et  $\mu \circ \delta$  de  $\mathcal{D}^*$  s'écrivent encore

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y,$$

où le produit scalaire  $\cdot$  sur  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$  est défini par

$$x_1 \cdot x_2 = \langle x_1 \circ \mu, \epsilon \circ x_2 \rangle.$$

Rappelons que  $I = x \cdot x$ , noté encore  $\|x\|^2$ , a été introduit en 1.18. Les équations du mouvement donnent

$$\dot{I} = 2J, \quad \dot{J} = K + \langle dU(x), x \rangle, \quad \dot{K} = 2\langle dU(x), \dot{x} \rangle.$$

La dernière implique la conservation de l'énergie

$$H = \frac{1}{2}K - U,$$

somme de l'énergie cinétique  $K/2$  dans un repère galiléen lié au centre de masse (comparer à la remarque 1.17) et de l'énergie potentielle  $-U$ . Lagrange note  $T$  et  $V$  ces deux énergies.

Les homomorphismes antisymétriques  $\omega_\mu$  et  $\omega$ , respectivement de  $2\mathcal{D}$  dans  $2\mathcal{D}^*$  et de  $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$  dans  $\text{Hom}(2\mathcal{D}, E^*)$ , définis par

$$\omega_\mu(u, v) = (-\mu(v), \mu(u)), \quad \omega(z) = -\epsilon \circ z \circ \omega_\mu,$$

munissent  $2\mathcal{D}$  et  $\text{Hom}(2\mathcal{D}^*, E)$  de structures symplectiques. Le champ de vecteurs

$$X_H = \omega^{-1}(-dH),$$

gradient symplectique du Hamiltonien  $H$ , définit les équations  $(N)$ , ce qui redonne la conservation de l'énergie

$$\partial_{X_H} H = \langle dH, X_H \rangle = 0.$$

*Cas d'un potentiel homogène.* Supposons que  $U$  soit homogène de degré  $2\kappa$ . L'expression de  $\dot{J}$  se simplifie et donne l'équation de Lagrange-Jacobi

$$\frac{\ddot{I}}{2} = K + 2\kappa U = 2H + 2(\kappa + 1)U = -2\kappa H + (\kappa + 1)K.$$

Nous en déduisons, avec [Jac], [Car] ou [Win1], que les deux fonctions  $J - 2Ht$  et  $I - 2Jt + 2Ht^2$  sont des constantes du mouvement quand  $\kappa = -1$ ; l'élimination du temps  $t$  entre elles donne l'intégrale première

$$G = 2IH - J^2.$$

Nous notons d'autre part  $Y$  le champ de vecteurs qui définit l'équation différentielle

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = \kappa y.$$

On résume les propriétés de ce champ en écrivant les dérivées de Lie suivant  $Y$  des trois "invariants" introduits au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \omega &= (\kappa + 1)\omega, \\ \mathcal{L}_Y H &= \partial_Y H = 2\kappa H, \\ \mathcal{L}_Y X_H &= [Y, X_H] = (\kappa - 1)X_H. \end{aligned}$$



Le calcul de  $\mathcal{L}_Y(\omega(X_H))$  en utilisant une règle de Leibniz donne une dépendance entre ces relations. Cette dépendance est bien classique dans le cas où  $Y$  est hamiltonien, ce qui n'a lieu que lorsque  $\kappa = -1$ . Le champ  $Y$  n'est alors rien de plus que le gradient symplectique de  $J$ . Signalons enfin l'expression "relative" de  $Y$  :

$$\dot{\beta} = 2\beta, \quad \dot{\gamma} = (\kappa + 1)\gamma, \quad \dot{\delta} = 2\kappa\delta, \quad \dot{\rho} = (\kappa + 1)\rho.$$

Nous rassemblerons dans un autre travail quelques conséquences de l'existence du champ  $Y$ .

*Cas d'un potentiel fonction des distances mutuelles.* On peut définir l'endomorphisme  $A$  du 1.20 et obtenir l'invariance du moment cinétique

$$\mathcal{C} = z \circ \omega_\mu \circ {}^t z = -x \circ \mu \circ {}^t y + y \circ \mu \circ {}^t x$$

en calculant sa dérivée  $\dot{\mathcal{C}} = 2x \circ (-\mu \circ {}^t A + A \circ \mu) \circ {}^t x = 0$ . Dans le cas homogène, remarquons encore que

$$\partial_Y \mathcal{C} = (\kappa + 1)\mathcal{C}.$$

Par ailleurs, l'espace des états relatifs  $\text{Hom}_+(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$  est muni d'une structure de Poisson (champ de bivecteurs "intégrable", voir [Lic]). Le bivecteur en un point  $\mathcal{E}$  est représenté par l'homomorphisme antisymétrique  $\pi$  de  $\text{Hom}_s(2\mathcal{D}, 2\mathcal{D}^*)$  dans  $\text{Hom}_s(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$  défini par

$$\pi(\Xi) = -\text{Rel}_* \circ \omega^{-1} \circ \text{Rel}^*(\Xi) = 2(\mathcal{E} \circ \Xi \circ \omega_\mu^{-1} - \omega_\mu^{-1} \circ \Xi \circ \mathcal{E}).$$

L'homomorphisme  $\text{Rel}$  est défini à la suite de la définition 1.21, et les notations  $\text{Rel}_*$  et  $\text{Rel}^*$  désignent respectivement la dérivée de  $\text{Rel}$  au point  $\mathcal{E}$  et sa transposée. Si, conformément à la remarque 1.3, on identifie  $\text{Hom}_s(2\mathcal{D}^*, 2\mathcal{D})$  au produit tensoriel symétrique de deux copies de  $2\mathcal{D}$ , l'homomorphisme  $\pi$  devient le produit tensoriel symétrique des *homomorphismes*  $\mathcal{E}$  et  $\omega_\mu^{-1}$ . Le crochet de Poisson de deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$  de l'espace des états relatifs s'écrit

$$\{F_1, F_2\} = \langle \pi(dF_1), dF_2 \rangle.$$

Cette structure de Poisson a pour feuilles symplectiques les intersections des sous-variétés obtenues en fixant le rang de  $\mathcal{E}$  et de celles obtenues en fixant les invariants de rotation du moment cinétique. Rappelons que d'après [1] on a l'encadrement  $\text{rg}\mathcal{C} \leq \text{rg}\mathcal{E} \leq (\text{rg}\mathcal{C})/2 + n - 1$ .

On fixe ces invariants en fixant les traces des itérés (d'ordre pair, celles d'ordre impair sont nulles) de  $\omega_\mu \circ \mathcal{E}$ , égales à celles des itérés de  $\mathcal{C} \circ \epsilon$  (comparer à 1.19).

## 2. Mouvements homographiques

Nous définissons dans les deux paragraphes suivants les configurations centrales et les configurations équilibrées, qui les englobent, à partir des deux cas extrêmes de mouvements homographiques, les mouvements homothétiques et les mouvements

rigides. A partir de la dimension quatre, ces derniers ne sont pas en général périodiques, mais seulement quasi-périodiques. Nous montrons ensuite que les mouvements homographiques intermédiaires se rapprochent des premiers. Leur configuration est centrale ; ils sont en quelque sorte “homothétiques complexes”. Nous examinons le cas d’exception découvert par Banachiewicz, et nous donnons enfin une caractérisation variationnelle des configurations équilibrées, que nous rapprochons de celle, classique, des configurations centrales.

## Mouvements homothétiques et configurations centrales

Le potentiel  $U$  est ici supposé homogène de degré  $2\kappa$  en  $x$ . Il suffit en fait que  $dU$  soit homogène de degré  $2\kappa - 1$ .

**2.1 Définition.** On appelle mouvement “homothétique” tout  $z(t) = (x(t), y(t))$  solution des équations  $(N)$  tel qu’il existe une fonction réelle  $\nu$  du temps et une configuration absolue  $x_0$  vérifiant  $x(t) = \nu(t)x_0$ .

**2.2 Définition.** Une configuration absolue  $x$  est dite “centrale” s’il existe un nombre réel  $\lambda$  tel que  $dU(x) = 2\lambda\epsilon_0 x \circ \mu$ .

Si  $U$  n’est fonction que des distances mutuelles, on pourra encore écrire cette condition  $x \circ A = \lambda x$ . Dans un mouvement homothétique, la configuration est à chaque instant centrale puisque, d’après la première forme de l’équation  $(N)$ , on a  $\epsilon^{-1} \circ dU \circ \mu^{-1} = \ddot{x} = (\dot{\nu}/\nu)x$ .

Réciproquement, étant donné une configuration centrale  $x$  et un nombre réel  $\zeta$ , on déduit de l’homogénéité du potentiel que l’état  $z = (x, \zeta x)$  donne naissance à un mouvement homothétique.

## Mouvements rigides et configurations équilibrées

Dans ce paragraphe, le potentiel  $U$  est supposé fonction des seules distances mutuelles, c’est-à-dire de la forme  $U(x) = \hat{U}(\beta)$ , où  $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$ .

**2.3 Définition.** Un “équilibre relatif” de  $(N)$  est un état absolu  $z = (x, y)$  tel que l’état relatif  $\mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z$  soit un équilibre des équations  $(NRel)$ .

On appellera encore “mouvement d’équilibre relatif” une solution  $z(t)$  des équations  $(N)$  telle que  $\mathcal{E}(t)$  soit constant. Un équilibre relatif est caractérisé par l’équation  $\dot{\mathcal{E}} = 0$ , soit

$$(1) \quad \gamma = 0, \quad \delta + {}^t A \circ \beta + \beta \circ A = 0, \quad [A, \rho] = [A, \beta] = 0.$$

**2.4 Définition.** Un mouvement “rigide” est une solution  $z(t)$  des équations  $(N)$  telle que la configuration relative  $\beta(t)$  soit indépendante du temps.

**2.5 Proposition.** Un mouvement est rigide si et seulement s’il est d’équilibre relatif.

*Démonstration.* Si  $\beta$  est constante, donc également  $A$ , on a

$$(2) \quad \begin{aligned} 0 &= \dot{\beta} = 2\gamma, \\ 0 &= \ddot{\beta} = 2\dot{\gamma} = 2\delta + 2{}^t A \circ \beta + 2\beta \circ A, \\ 0 &= \beta^{(3)} = 2\dot{\delta} = -4[A, \rho], \\ 0 &= \beta^{(4)} = -4[A, \dot{\rho}] = -4[A, [A, \beta)]. \end{aligned}$$

En particulier,  $\dot{\beta} = \dot{\gamma} = \dot{\delta} = 0$ . La nullité de  $\dot{\rho} = [A, \beta)$  résulte de la proposition qui suit.

**2.6 Proposition et définition.** Soit  $\beta$  une configuration relative et  $A$  la fonction de  $\beta$  donnée par la définition 1.20. On a

$$[A, \beta) = 0 \iff [A, [A, \beta)) = 0.$$

On appellera “configuration équilibrée” une configuration qui vérifie ces équations.

*Démonstration.* Calculons les coefficients des matrices de  $[A, \beta)$  et de  $[A, [A, \beta))$  dans une base de  $\mathcal{D}^*$  qui diagonalise  $A$ . Si  $a_1, \dots, a_{n-1}$  sont les coefficients diagonaux de  $A$ , on trouve  $[A, \beta)_{ij} = \beta_{ij}(a_i - a_j)$  et  $[A, [A, \beta))_{ij} = \beta_{ij}(a_i - a_j)^2$ .

**2.7 Définition.** Une configuration “attractive” (respectivement “strictement attractive”) est une configuration relative  $\beta$  telle que la forme quadratique  $d\hat{U}$  soit négative (respectivement définie négative) sur l’image de  $\beta$ .

**2.8 Proposition.** La configuration relative d’un équilibre relatif est équilibrée et attractive. Réciproquement, étant donné une configuration  $\beta$  équilibrée et attractive et un espace euclidien  $E$  de dimension  $2\text{rg}\beta$ , il existe un état d’équilibre relatif  $z = (x, y)$  tel que  $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$ .

*Démonstration.* Considérons l’état relatif

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma - \rho \\ \gamma + \rho & \delta \end{pmatrix}$$

d’un équilibre relatif. La dernière équation du système (1) montre que  $\beta$  est équilibrée, la deuxième que  $\delta = -2\beta \circ A$ . Comme  $\mathcal{E}$  est positive,  $\delta$  l’est aussi. On en déduit, en utilisant une base commune de diagonalisation de  $\mu \circ \beta$  et  $A$ , que  $\beta$  est attractive. D’autre part, si  $\beta$  équilibrée et attractive est donnée, on obtient une solution  $\mathcal{E}$  positive du système (1), dont le rang vérifie la condition annoncée, en faisant  $\gamma = \rho = 0$  et  $\delta = -2\beta \circ A$ .

**2.9 Proposition.** Un mouvement d’équilibre relatif est une rotation uniforme (en général non périodique si la dimension de  $E$  est au moins égale à 4) de l’état absolu. L’espace du mouvement d’un équilibre relatif dont la configuration est strictement attractive est de dimension paire.

*Démonstration.* La nullité de  $\dot{\mathcal{E}}$  entraîne l’existence d’une “rotation instantanée de l’état”  $\Omega$ , forme antisymétrique sur l’espace du mouvement telle que  $\dot{z} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ z$ .

Elle peut s'exprimer (voir la preuve de la proposition 1.12) comme l'image par  ${}^t z^{-1}$  du bivecteur  ${}^t z \circ \epsilon \circ \dot{z}$  de  $2\mathcal{D}$ . La constance de  $\Omega$  découle de la propriété d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Le mouvement de rotation avec  $\Omega$  constant est en effet solution des équations (N). La parité de la dimension se déduit de la non-dégénérescence de  $\Omega$  sur l'espace du mouvement, qui se prouve de la façon suivante. Si  $\vec{r} \in \ker \Omega$ ,  $\epsilon(\vec{r}) \in \ker {}^t \dot{z}$  puisque  $\dot{z} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ z$ . Mais  $\dot{z} = (y, 2x \circ A)$ , de sorte que  $\epsilon(\vec{r})$  appartient à la fois au noyau de  ${}^t y$  et de  ${}^t A \circ {}^t x$ . Comme  ${}^t A$  est supposée non dégénérée sur l'image de  ${}^t x$  (définition 2.7),  $\epsilon(\vec{r})$  appartient aussi au noyau de  ${}^t x$  et donc au noyau de  ${}^t z$ .

### Remarques

**2.10.** L'hypothèse de stricte attraction dans la proposition 2.9 est nécessaire. On s'en assure en considérant le potentiel identiquement nul. Par ailleurs, on vérifie que  $-d\hat{U} \in \text{Isom}_+(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$  si  $U$  est le potentiel newtonien. Toutes les configurations sont donc strictement attractives.

**2.11.** Nous avons, dans la preuve de la proposition 2.8, imposé la condition  $\rho = 0$  pour obtenir un état d'équilibre relatif à partir d'une configuration  $\beta$  donnée. En fait, (1) exige seulement  $[A, \rho] = 0$ , qui force la nullité de  $\rho$  sauf si  ${}^t A$  possède au moins une valeur propre multiple dont l'espace propre est contenu dans l'image de  $\beta$ . Baptisons cette éventualité le cas exceptionnel. Nous parlerons de cas doublement exceptionnel s'il y a deux valeurs propres doubles dans l'image de  $\beta$ . Dans le cas exceptionnel, on peut choisir n'importe quel bivecteur  $\rho$  de  $\mathcal{D}$  qui vérifie  $[A, \rho] = 0$ ,  $\text{Im } \rho \subset \text{Im } \beta$  (comparer à la proposition 1.12), et  $\mathcal{E} \geq 0$ . On se rend compte facilement de l'étendue du choix en travaillant dans une base de diagonalisation de  $A$  et de  $\mu \circ \beta$ . On peut en particulier faire en sorte que la dimension de l'espace du mouvement descende à  $2\text{rg} \beta - 2$ , et même plus bas dans le cas doublement exceptionnel. En fait, nous étudierons la restriction aux sous-espaces multiples du mouvement rigide le plus général lorsque nous étudierons, au paragraphe suivant, le mouvement des configurations centrales, qui sont les configurations équilibrées les plus exceptionnelles.

**2.12.** Les formes  $\rho$  et  $\delta$  sont les images réciproques par  $x$  des formes  $-\Omega$  et  $-\Omega \circ \epsilon^{-1} \circ \Omega$ . Un équilibre relatif vérifie  $(\epsilon^{-1} \circ \Omega)^2 \circ x = 2x \circ A$ , équation qui suggère une caractérisation "absolue" des configurations équilibrées : ce sont les configurations  $x$  telles qu'il existe une forme symétrique  $S$  sur  $\text{Im } x$  qui vérifie  $\epsilon^{-1} \circ S \circ x = 2x \circ A$ .

### Mouvements homographiques

Dans ce paragraphe, le potentiel est supposé à la fois homogène de degré  $2\kappa$  et fonction des seules distances mutuelles, c'est-à-dire de la forme  $U(x) = \hat{U}(\beta)$  où  $\hat{U}$  est homogène de degré  $\kappa$  par rapport à la variable  $\beta$ . On obtiendrait les mêmes résultats en supposant seulement  $A = d\hat{U} \circ \mu^{-1}$  homogène de degré  $\kappa - 1$  en  $\beta$ .

**2.13 Définition.** Un mouvement "homographique" est une solution  $z(t)$  des équations (N) telle qu'il existe une fonction réelle  $\nu$  du temps et une configuration relative  $\beta_0$  avec  $\beta(t) = \nu(t)^2 \beta_0$ .

Les mouvements homothétiques et les mouvements rigides sont donc des cas

particuliers de mouvements homographiques.

**2.14 Proposition.** La configuration d'un mouvement homographique est toujours équilibrée. Elle est même centrale, sauf éventuellement si le degré d'homogénéité de  $U$  est  $-2$  (i.e. si  $\kappa = -1$ ), ou si le mouvement est rigide.

*Démonstration.* Pour généraliser ce que nous avons fait pour un mouvement rigide, nous introduisons les quantités constantes  $\beta_0$ ,  $U_0$  et  $A_0$  telles que :

$$\beta = I\beta_0, \quad U = I^\kappa U_0, \quad A = I^{\kappa-1} A_0,$$

et utilisons le système (*NRel*) pour obtenir

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{I}\beta_0 &= 2\gamma, \\ \ddot{I}\beta_0 &= 2\delta + 2I^\kappa({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0), \\ I^{(3)}\beta_0 &= -4[A, \rho] + 2(1 + \kappa)\dot{I}I^{\kappa-1}({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0). \end{aligned}$$

L'équation de Lagrange-Jacobi

$$(4) \quad \ddot{I} = 4H + 4(1 + \kappa)I^\kappa U_0$$

donne  $I^{(3)} = 4\kappa(1 + \kappa)\dot{I}I^{\kappa-1}U_0$ , de sorte que

$$2[A_0, \rho] = (1 + \kappa)\dot{I}({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0 - 2\kappa U_0 \beta_0),$$

que nous dérivons pour obtenir

$$(5) \quad 2I^\kappa [A_0, [A_0, \beta_0)] = (1 + \kappa)\ddot{I}({}^t A_0 \circ \beta_0 + \beta_0 \circ A_0 - 2\kappa U_0 \beta_0).$$

La première assertion de la proposition suit de la proposition 2.6 quand  $(1 + \kappa)\ddot{I}$  est identiquement nul, ce qui n'est possible d'après (4) que dans les cas exclus dans la seconde assertion. Dans les autres cas, on a mieux : (5) prend la forme *iv* de la proposition suivante, ce qui montre que la configuration est non seulement équilibrée, mais centrale. On remarquera que remplacer  $\ddot{I}$  par le second membre de (4) ne simplifie cette preuve que dans le cas où  $H$  est non nul.

**2.15 Proposition.** Les conditions suivantes sont équivalentes et caractérisent les configurations centrales relatives (i.e. les configurations relatives des configurations centrales) :

- i)* il existe un réel  $\lambda$  tel que  $({}^t A - \lambda \mathcal{I}d)|_{\text{Im } \beta} = 0$ ,
- ii)* il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\beta \circ A - \lambda \beta = 0$ ,
- iii)* il existe un réel  $\lambda$  tel que  ${}^t A \circ \beta + \beta \circ A - 2\lambda \beta = 0$ ,
- iv)* il existe deux réels  $\lambda$  et  $\nu$  tels que

$${}^t A \circ \beta + \beta \circ A - 2\lambda \beta + \nu [A, [A, \beta)] = 0.$$

Ces propriétés impliquent que  $[A, \beta] = 0$  (la configuration est équilibrée) et que  $\lambda I = \text{tr}(\mu \circ \beta \circ A) = \kappa U$ .

*Démonstration.* Une configuration centrale vérifie  $x \circ A = \lambda x$  d'après la définition 2.2, ce qui équivaut à l'inclusion de l'image de l'endomorphisme  $A_\lambda = A - \lambda \mathcal{I}d$  dans le noyau de  $x$ . Ce noyau est aussi celui de  $\beta$  d'après la remarque 1.9, ce qui établit l'équivalence avec *ii* et avec *i* après transposition. Il est clair que *ii* implique *iii*, et que *iii* implique *iv*. Le calcul des termes diagonaux dans le premier membre de *iv* après diagonalisation de  $A$ , qui utilise celui de la démonstration de la proposition 2.6, permet d'achever la preuve des équivalences. Enfin, *ii* entraîne que  $[A, \beta] = 0$  et, en notant  $B = \mu \circ \beta$ , que  $\text{tr}(B \circ A - \lambda B) = 0$ . On déduit la valeur de  $\lambda$  de la définition du moment d'inertie  $I = \text{tr} B$  et de l'homogénéité de  $\hat{U}$ , qui donne  $\text{tr}(B \circ A) = \langle \beta, d\hat{U} \rangle = \kappa U$ . Montrons autrement que *iii* implique *ii* (voir aussi la remarque 2.29). Écrivons l'expression *iii* sous la forme  $A_\lambda \circ B + B \circ A_\lambda = 0$ , en imitant la remarque 1.23, multiplions par  $B$  à gauche, puis à droite et soustrayons. Nous obtenons la commutation de  $A_\lambda$  et de  $B^2$ , qui implique celle de  $A_\lambda$  et de  $B$  puisque  $\beta$  est positive, ce qui permet de conclure. Montrons autrement que *iv* implique *i*. L'expression *iv* montre que  $\text{tr}(B \circ A_\lambda) = 0$  et que  $\text{tr}(B \circ A_\lambda^2) = 0$ , d'où il découle que  $\text{tr}(A_\lambda \circ B \circ A_\lambda) = 0$ . La positivité de  $\beta$  montre que l'endomorphisme dont on a pris la trace est nul, ce qui équivaut à *i*.

Nous devons maintenant décrire les mouvements homographiques les plus généraux dont la configuration est centrale. Les deux résultats qui suivent justifieraient qu'on les appelât "mouvements homothétiques complexes". Ils montrent en particulier que la dimension de l'espace du mouvement est paire et on montrerait sans peine qu'elle peut prendre toutes les valeurs paires entre  $\text{rg} x$  et  $2\text{rg} x$ .

**2.16.** Rappelons qu'un espace *hermitien*  $F$  est canoniquement muni de trois structures (euclidienne, symplectique, complexe)

$$\kappa \in \text{Isom}_+(F, F^*), \quad \omega \in \text{Isom}_a(F, F^*), \quad \mathcal{J} \in \text{Isom}(F, F),$$

qui sont soumises aux deux relations  $\omega = \kappa \circ \mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{I}d$ . La première relation permet de déduire l'une des structures en fonction des deux autres, et la deuxième peut encore s'écrire  ${}^t \mathcal{J} \circ \kappa \circ \mathcal{J} = \kappa$ , c'est-à-dire  $\|\mathcal{J}(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x$  dans  $F$  (les notations de la norme et du produit scalaire se rapportent comme d'habitude à la structure euclidienne).

**2.17.** Si  $E$  est muni d'une structure hermitienne, donnée par  $\epsilon, \Omega$  et  $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$ , une structure du même type est induite sur l'espace euclidien  $F = \mathcal{D} \otimes E$  des configurations absolues. Il suffit de poser  $\kappa(x) = \epsilon \circ x \circ \mu$  et  $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}_E \circ x$ .

**2.18 Proposition.** Considérons l'état  $z = (x, y)$  d'un mouvement homographique à un instant arbitrairement choisi. Supposons de plus que ce mouvement n'est pas homothétique, c'est-à-dire que  $y$  n'est pas un multiple réel de  $x$ . Pour que la configuration  $x$  soit centrale, il faut et il suffit qu'il existe sur l'espace du mouvement  $\text{Im } z$  une structure hermitienne, associée à la structure euclidienne, telle que pour la structure induite  $y$  soit un multiple complexe de  $x$ .

*Démonstration.* Supposons que  $E = \text{Im } z$  et que cet espace possède une structure hermitienne  $(\epsilon, \epsilon \circ \mathcal{J}_E, \mathcal{J}_E)$ . Supposons qu'il existe un nombre complexe  $\zeta$ , qu'on identifie à une combinaison linéaire réelle de  $\mathcal{I}d_E$  et de  $\mathcal{J}_E$ , tel que  $y = \zeta \circ x$ . On obtient

$$\delta = {}^t y \circ \epsilon \circ y = {}^t x \circ {}^t \zeta \circ \epsilon \circ \zeta \circ x = |\zeta|^2 \beta.$$

Mais la deuxième équation du système (3) montre que  $\delta$  ne peut être multiple de  $\beta$  que si la condition *iii* de la proposition 2.15 est réalisée : la configuration est centrale. Supposons maintenant la configuration  $x$  centrale. L'état relatif s'écrit, d'après les équations (3) et la proposition 2.15,

$$\mathcal{E} = {}^t z \circ \epsilon \circ z = \begin{pmatrix} I\beta_0 & J\beta_0 - \rho \\ J\beta_0 + \rho & K\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Il convient de poser, suivant une notation justifiée dans la troisième partie,

$$|\mathcal{C}| = \sqrt{IK - J^2}.$$

L'expression sous le radical s'écrit encore  $\|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2$ . Elle est donc positive, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et ne s'annule que si  $x$  et  $y$  sont proportionnels, c'est-à-dire si le mouvement est homothétique. Dans le cas contraire, nous "normaliserons"  $z$  en posant  $z_0 = (x_0, y_0)$  avec

$$x_0 = \sqrt{\frac{|\mathcal{C}|}{I}} x, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{C}|I}} (Iy - Jx).$$

En utilisant l'expression de  $\mathcal{E}$ , on vérifie que

$$\mathcal{E}_0 = {}^t z_0 \circ \epsilon \circ z_0 = \begin{pmatrix} |\mathcal{C}|\beta_0 & -\rho \\ \rho & |\mathcal{C}|\beta_0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\mathcal{J}_0$  l'endomorphisme de  $2\mathcal{D}^*$  défini par  $\mathcal{J}_0(u, v) = (-v, u)$ . On voit tout de suite que  $\mathcal{E}_0 \circ \mathcal{J}_0$  est antisymétrique. Cette quantité s'écrit aussi  ${}^t z_0 \circ \epsilon \circ z'_0$ , avec  $z'_0 = z_0 \circ \mathcal{J}_0$ . On déduit de cette antisymétrie, exactement comme on l'avait fait dans la preuve de la proposition 1.12, l'existence d'une "rotation instantanée"  $\Omega_0$  définie sur  $\text{Im } z$ , telle que

$$z'_0 = z_0 \circ \mathcal{J}_0 = \epsilon^{-1} \circ \Omega_0 \circ z_0.$$

On a clairement

$$-z_0 = z_0 \circ \mathcal{J}_0^2 = (\epsilon^{-1} \circ \Omega_0)^2 \circ z_0.$$

L'endomorphisme  $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega_0$  est donc la multiplication par  $i$  d'une structure hermitienne de  $\text{Im } z$  et vérifie notamment  $y_0 = \mathcal{J}_E \circ x_0$ . Cette dernière égalité, combinée avec les définitions de  $x_0$  et  $y_0$ , montre que  $y$  est multiple complexe de  $x$ .

**2.19.** Remarquons que dans un mouvement homographique plan,  $y$  est automatiquement multiple de  $x$  pour la structure complexe naturelle. La configuration est donc centrale, même dans les cas exclus de la proposition 2.14.

**2.20 Proposition.** Soit un mouvement homographique et non homothétique dont la configuration est centrale. Soit  $x_0 = \|x(0)\|^{-1}x(0)$  la configuration initiale normalisée et  $U_0$  le potentiel de cette configuration. Il existe une fonction complexe  $\zeta$  du temps vérifiant

$$\ddot{\zeta} = 2\kappa U_0 |\zeta|^{2\kappa-2} \zeta$$

et telle que  $x(t) = \zeta(t)x_0$  pour la structure hermitienne de  $\text{Im } z(0)$  obtenue dans la proposition 2.18. Réciproquement, étant donné un espace hermitien  $E$ , une configuration centrale normalisée  $x_0$  et une fonction complexe  $\zeta$  du temps vérifiant l'équation différentielle ci-dessus, on obtient un mouvement homographique en posant  $z(t) = (\zeta(t)x_0, \dot{\zeta}(t)x_0)$ .

*Démonstration.* Commençons par la réciproque. La proposition 2.15 nous donne  $x \circ A = \kappa U I^{-1} x$  pour toute configuration  $x$  semblable à  $x_0$ . C'est tout ce qu'il nous faut pour vérifier que  $z(t)$  satisfait à l'équation (N). Passons à la première assertion. La proposition 2.18 montre que  $y(0)$  est un multiple complexe de  $x(0)$ , c'est-à-dire qu'il existe deux nombres complexes  $\zeta_0$  et  $\dot{\zeta}_0$  tels que  $z(0) = (\zeta_0 x_0, \dot{\zeta}_0 x_0)$ . Or il existe une unique solution de l'équation différentielle (N) ayant cette donnée initiale : c'est  $z(t) = (\zeta(t)x_0, \dot{\zeta}(t)x_0)$ , où  $\zeta(t)$  résout l'équation différentielle de l'énoncé, avec les conditions initiales  $\zeta(0) = \zeta_0$  et  $\dot{\zeta}(0) = \dot{\zeta}_0$ .

### Le cas particulier de Jacobi et Banachiewicz

La proposition 2.14 distingue le cas d'un potentiel  $U$  homogène de degré  $-2$ , pour lequel (N) possède, nous le savons, l'intégrale supplémentaire  $G = 2IH - J^2$ . On peut en fait dans ce cas réduire (N) en passant au quotient par une action du groupe des similitudes de  $E$ , et non plus seulement, comme on l'avait fait pour obtenir (NRel), par l'action des isométries de  $E$ . La première idée est d'utiliser pour ce faire le gradient symplectique de  $G$ ,

$$X_G = 2IX_H + 2HX_I - 2JX_J,$$

qui commute à  $X_H$ . Mais le flot de ce champ est très loin de définir un groupe de symétries utilisable. Nous nous servirons plutôt du champ de vecteurs non hamiltonien  $X_G - 2IX_H$ , qui s'intègre facilement en un flot qui transforme la configuration comme le fait une homothétie. Effectuer la réduction correspondante revient à remplacer le Hamiltonien  $H$  par  $G$ . En effet, les courbes intégrales des deux Hamiltoniens se déduisent les unes des autres à l'aide du flot précédent, et  $G$  vérifie de plus

$$\{G, I\} = \{G, J\} = 0,$$

si bien que la configuration garde sa taille initiale sur les nouvelles courbes intégrales. L'énoncé qui suit est à rapprocher de la proposition 2.5.

**2.21 Proposition.** Si  $U$  est homogène de degré  $-2$  (i.e.  $\kappa = -1$ ), les mouvements homographiques sont les équilibres du système (N) réduit par l'action du groupe des similitudes de  $E$ .



*Démonstration.* Au champ  $X_G - 2IX_H = 2HX_I - 2JX_J$  discuté plus haut correspond l'équation différentielle sur les états absolus

$$\dot{x} = -2Jx, \quad \dot{y} = 2Jy - 4Hx,$$

et celle sur les états relatifs

$$\dot{\beta} = -4J\beta, \quad \dot{\gamma} = -4H\beta, \quad \dot{\delta} = 4J\delta - 8H\gamma, \quad \dot{\rho} = 0.$$

Les équilibres du système  $(N)$  réduit par l'action du groupe des similitudes de l'espace  $E$  sont les *équilibres relatifs* du flot de  $X_G$ , autrement dit les états tels que  $Rel_*X_G = 0$ . On les caractérise en égalant les quatre seconds membres de l'équation différentielle ci-dessus aux quatre seconds membres correspondants de  $(NRel)$ , multipliés par  $-2I$ . La première égalité donne  $J\beta = I\gamma$ , et montre que la dérivée de  $\beta$  reste proportionnelle à  $\beta$  dans les mouvements correspondant à ces équilibres relatifs : ce sont des mouvements homographiques. Réciproquement, les mouvements homographiques vérifient, d'après (3) et la proposition 2.14,

$$J\beta = I\gamma, \quad I\delta - 2H\beta = -2I\beta \circ A, \quad [A, \rho] = [A, \beta] = 0,$$

ce qui équivaut aux quatre égalités précédentes : ce sont des équilibres relatifs de  $X_G$ .

La proposition suivante donne des exemples de mouvements homographiques, dont notamment ceux étudiés dans [Ban]. On la rapprochera de la proposition 2.8.

**2.22 Proposition.** Soit  $U$  un potentiel homogène de degré  $-2$ . Etant donné une configuration équilibrée  $\beta_0$  et un espace euclidien  $E$  de dimension  $2\text{rg}\beta_0 - 1$ , il existe un mouvement homographique dans  $E$  dont la configuration relative est proportionnelle à  $\beta_0$ .

*Démonstration.* Nous pouvons, en supposant  $\langle \mu, \beta_0 \rangle = 1$ , résoudre (3) en faisant

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} I\beta_0 & J\beta_0 \\ J\beta_0 & 2H\beta_0 - 2I^{-1}\beta_0 \circ A_0 \end{pmatrix}.$$

Cela revient à imposer  $\rho = 0$  : on n'a d'autre choix que dans les cas exceptionnels indiqués dans la remarque 2.11. Soient  $a_1, \dots, a_{n-1}$  les coefficients diagonaux de  $A_0$  et  $b_1, \dots, b_{n-1}$  ceux de  $\mu \circ \beta_0$  dans une base de diagonalisation simultanée. La forme  $\mathcal{E}$  est positive si et seulement si toutes les matrices

$$b_i \begin{pmatrix} I & J \\ J & 2H - 2I^{-1}a_i \end{pmatrix}$$

le sont, ce qui revient à la positivité du déterminant  $G - 2a_i$  pour tous les  $i$  tels que  $b_i$  est non nul (la trace est alors strictement positive). Il suffira d'égaliser  $G$  au maximum des  $2a_i$  pour obtenir un  $\mathcal{E}$  de rang  $2\text{rg}\beta_0 - 1$ , ou de rang inférieur si la valeur propre minimale est multiple. On disposera encore du paramètre  $H$ .

*Remarques*

**2.23.** On a pris pour valeur de  $G$ , dans l'exemple ci-dessus, la valeur minimale autorisée. Une valeur plus grande aurait donné un mouvement en dimension paire. On ne doit pas s'étonner de l'apparition de cette intégrale première comme unique paramètre qualitatif. Quand  $G$  est fixé, le flot de  $Y = X_J$  conjugue les dynamiques sur tous les niveaux de  $H$  où cette fonction prend un signe donné. Notons par ailleurs que  $G$  est positive pour tous les mouvements que l'on peut continuer indéfiniment dans le passé et dans le futur.

**2.24.** Lagrange concluait la partie théorique de son Essai par le paragraphe suivant, que Wintner[Win2] illustre à la page 431 de ses notes historiques en rappelant les résultats de Pizzetti[Piz] et de Banachiewicz[Ban] :

“J'avoue, au reste, qu'on pourrait résoudre les Problèmes précédents d'une manière plus simple par les formules ordinaires du Problème des trois Corps entre les rayons vecteurs et les angles décrits par ces rayons, si l'on voulait se borner d'abord à l'hypothèse que les Corps se meuvent dans un même plan fixe; mais il ne serait pas aisé, ce me semble, d'en venir à bout par les mêmes formules, si l'on supposait, comme nous l'avons fait, que les Corps pussent se mouvoir dans des plans différents.”

On se convaincra de l'efficacité du choix de Lagrange, le travail en distances mutuelles, en essayant démontrer autrement la proposition 2.5. Nous voulons maintenant proposer une autre approche de la preuve de la proposition 2.14, peut-être plus lumineuse, mais qui, si elle semble plus “absolue”, ne diffère de la précédente que par la forme. Reprenons les notations de cette preuve, et diagonalisons tout de suite la matrice  $A_0$ , dans une base de  $\mathcal{D}^*$  que nous notons  $(u_1, \dots, u_{n-1})$ . Soient  $a_1, \dots, a_{n-1}$  les coefficients diagonaux de  $A_0$  et  $b_1, \dots, b_{n-1}$  ceux de  $\mu \circ \beta_0$ , qui n'est pas diagonale *a priori*. On a  $A(u_i) = I^{\kappa-1} a_i u_i$  et

$$\|x(u_i)\|^2 = \langle \epsilon \circ x(u_i), x(u_i) \rangle = \langle \beta(u_i), u_i \rangle = I b_i,$$

si bien que, pour tous les  $b_i$  non nuls,  $\vec{s}_i = b_i^{-1/2} x(u_i)$  vérifie

$$(C) \quad \ddot{\vec{s}}_i = 2a_i \|\vec{s}_i\|^{2\kappa-2} \vec{s}_i.$$

Les  $\vec{s}_i(t)$  considérés sont donc solutions de problèmes de force centrale, et satisfont tous à la contrainte  $\|\vec{s}_i(t)\|^2 = I(t)$ .

**Lemme.** Si deux solutions  $\vec{s}_1(t)$  et  $\vec{s}_2(t)$  de deux problèmes de force centrale (C) vérifient  $\|\vec{s}_1(t)\| = \|\vec{s}_2(t)\|$  pour tout temps  $t$ , alors ou bien  $\kappa = -1$ , ou bien les deux orbites sont circulaires et uniformes de périodes différentes, ou bien  $a_1 = a_2$  et les deux mouvements sont isométriques.

*Démonstration.* Les trois fonctions du temps  $\|\vec{s}\|^2$ ,  $\vec{s} \cdot \dot{\vec{s}}$  et  $\|\dot{\vec{s}}\|^2$  caractérisent le mouvement à une isométrie près. On les notera respectivement  $I$ ,  $J$  et  $K$ . L'énergie s'écrit  $H = K/2 - aI^\kappa/\kappa$  et permet d'exprimer  $K$  en fonction de  $I$ . Il reste les équations  $\dot{I} = 2J$  et  $\dot{J} = 2H + 2aI^\kappa(1 + \kappa)/\kappa$ . L'hypothèse implique  $I_1 = I_2$ ,

$J_1 = J_2$  et, si  $\dot{I}_1$  est non nul,  $H_1 = H_2$ . Enfin, si  $\kappa + 1$  est non nul,  $a_1 = a_2$  et  $K_1 = K_2$ , d'où la conclusion.

L'égalité de tous les  $a_i$  correspondant à des  $b_i$  non nuls, c'est-à-dire à des  $x(u_i)$  non nuls, montre que la configuration est centrale : c'est le point  $i$  de la proposition 2.15. Le lemme redémontre donc la seconde assertion de la proposition 2.14, en "expliquant" les cas d'exception.

### Points critiques du potentiel

Définissons la *sous-variété isospectrale* d'une configuration relative  $\beta$  donnée :

$$\mathcal{S}_\beta = \{\theta \in \text{Hom}_+(\mathcal{D}^*, \mathcal{D}) \mid \text{tr}(\mu \circ \theta)^k = \text{tr}(\mu \circ \beta)^k, 1 \leq k < n\}.$$

La remarque 1.19 permet de caractériser les images réciproques de ces sous-variétés par l'application *rel*. Ce sont les sous-variétés constituées de configurations absolues ayant, à une rotation près, la même forme d'inertie  $b$ .

**2.25 Proposition.** Une configuration relative  $\beta$  est équilibrée si et seulement si c'est un point critique de la restriction de  $\hat{U}$  à sa sous-variété isospectrale  $\mathcal{S}_\beta$ .

*Démonstration.* Soit  $R$  une rotation de  $\mathcal{D}^*$ . On a  $R \circ \mu \circ {}^t R = \mu$ . Tout point de  $\mathcal{S}_\beta$  peut s'écrire  ${}^t R \circ \beta \circ R$ , si bien que les éléments  $\beta'$  tangents à  $\mathcal{S}_\beta$  au point  $\beta$  sont tous tels qu'il existe un élément  $\Omega$  de  $\text{Hom}_a(\mathcal{D}, \mathcal{D}^*)$  avec

$$\beta' = \mu^{-1} \circ \Omega \circ \beta - \beta \circ \Omega \circ \mu^{-1}.$$

Donc

$$\langle d\hat{U}(\beta), \beta' \rangle = \langle \mu^{-1} \circ d\hat{U} \circ \beta - \beta \circ d\hat{U} \circ \mu^{-1}, \Omega \rangle.$$

Le résultat suit, puisque la nullité de cette expression pour tout  $\Omega$  équivaut à celle de  $\mu^{-1} \circ d\hat{U} \circ \beta - \beta \circ d\hat{U} \circ \mu^{-1} = [A, \beta]$ .

**2.26 Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension finie. Une configuration absolue  $x$  de  $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, E)$  est centrale si et seulement si  $\|x\|^{-1}x$  est un point critique de la restriction du potentiel homogène  $U$  à la sphère d'équation  $I = 1$ .

*Démonstration.* Comme  $I(x) = \|x\|^2$ , on a  $dI(x) = 2\epsilon \circ x \circ \mu$ . La définition 2.2 traduit l'existence du multiplicateur de Lagrange dont nous avons besoin.

Notons que la caractérisation de la proposition 2.26 ne se limite pas aux configurations de rang maximal. Cependant, lorsque  $U$  ne dépend que des distances mutuelles, son invariance par réflexion montre qu'un point critique quelconque  $x_0$  de rang non maximal est aussi point critique de la restriction de  $U$  aux configurations  $x$  telles que  $\text{Im } x = \text{Im } x_0$ . On en déduit, avec la proposition 1.12, la

**2.27 Proposition.** Une configuration relative  $\beta$  de rang  $p$  est centrale si et seulement si  $\beta$  est un point critique de la restriction de  $\hat{U}$  aux configurations relatives de rang  $p$  et de taille  $\langle \mu, \beta \rangle$ .

*Remarques*

**2.28.** Fixer la taille de  $\beta$ , c'est fixer l'invariant spectral  $\eta_1$ , défini en 1.19, de l'endomorphisme  $\mu \circ \beta$ . Fixer son rang à  $p$ , c'est faire  $0 = \eta_{p+1} = \eta_{p+2} = \dots$ . On

voit ainsi directement qu'un point critique de la proposition 2.27 est en particulier un point critique de la proposition 2.25.

**2.29.** La quantité  ${}^tA \circ \beta + \beta \circ A - 2\kappa UI^{-1}\beta$  de la proposition 2.15 s'interprète comme le vecteur gradient en  $\beta$  de la fonction  $\hat{U}$  restreinte aux configurations de même rang et même taille que  $\beta$ , ou encore, comme l'image directe par *rel* du vecteur gradient en  $x$  de la fonction  $U$  restreinte à la sphère des configurations absolues de même taille que  $x$ . Ceci redémontre l'équivalence des formulations *ii* et *iii* de cette proposition.

### 3. L'inégalité de Sundman

Dans les articles [Sun1] et [Sun2], Sundman a dégagé d'intéressantes propriétés de l'évolution de la taille d'un système de trois corps, toutes reliées directement à l'homogénéité du potentiel. Nous nous contentons ici de donner une preuve indépendante de la dimension de l'espace de la fameuse inégalité de géométrie qui est au cœur de ces analyses. Notons que [Sie] prouve une version affaiblie de cette inégalité, ce qui complique singulièrement sa présentation des résultats de [Sun2].

Considérons le problème plan des  $n$  corps, et repérons ces corps, une fois choisie une base orthonormée de  $\mathcal{D}$ , par les  $n - 1$  nombres complexes  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ . Aux vitesses seront associés les nombres complexes  $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ . Si  $|\mathcal{C}|$  désigne la valeur absolue du moment cinétique, on aura

$$\left| \sum_i \xi_i \eta_i \right|^2 = |\mathcal{C}|^2 + J^2, \quad \sum_i |\xi_i|^2 = I, \quad \sum_i |\eta_i|^2 = K.$$

Ce qu'on appelle l'inégalité de Sundman n'est rien d'autre dans ce cas que l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $|\mathcal{C}|^2 + J^2 \leq IK$ . Dans le lemme suivant, nous remarquons que cette inégalité persiste avec une structure plus faible que celle du 2.16.

**3.1 Lemme.** Soit  $F$  un espace vectoriel muni d'une forme euclidienne  $\kappa$  et d'un endomorphisme (éventuellement non inversible)  $\mathcal{J}$  tel que  $\kappa \circ \mathcal{J}$  soit antisymétrique. Supposons que pour tout  $x$  de  $F$  nous ayons

$$(1) \quad \|\mathcal{J}(x)\| \leq \|x\|.$$

Alors pour tout  $x$  et tout  $y$  de  $F$

$$(x \cdot y)^2 + (\mathcal{J}(x) \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

L'égalité est réalisée pour un couple  $(x, y)$  si et seulement si d'une part  $y$  est une combinaison linéaire de  $x$  et  $\mathcal{J}(x)$ , d'autre part  $\|\mathcal{J}(x)\| = \|x\|$ .

*Démonstration.* Les vecteurs  $x$  et  $\mathcal{J}(x)$  sont orthogonaux pour la structure euclidienne. En projetant  $y$  dessus, on obtient

$$\frac{(x \cdot y)^2}{\|x\|^2} + \frac{(\mathcal{J}(x) \cdot y)^2}{\|\mathcal{J}(x)\|^2} \leq \|y\|^2.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité (1).

Le choix d'un élément  $\Omega$  de  $\text{Hom}_a(E, E^*)$ , tel que l'endomorphisme  $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$  vérifie pour tout  $\vec{r}$  de  $E$

$$(2) \quad \|\mathcal{J}_E(\vec{r})\| \leq \|\vec{r}\|,$$

munit l'espace euclidien  $(E, \epsilon)$  d'une structure du type de celle considérée dans le lemme. L'extension à l'espace des configurations absolues peut se faire comme au 2.17. En effet, les égalités (1) et (2) équivalent chacune à la positivité de la forme  $\epsilon - {}^t\mathcal{J}_E \circ \epsilon \circ \mathcal{J}_E$ .

Voici ce que devient l'inégalité du lemme 3.1, quand on utilise l'expression du moment cinétique  $\mathcal{C} = -x \circ \mu \circ {}^t y + y \circ \mu \circ {}^t x$ , qui donne l'identité

$$(3) \quad \frac{1}{2} \langle \mathcal{C}, \Omega \rangle = \langle y \circ \mu \circ {}^t x, \Omega \rangle = \langle y, \Omega \circ x \circ \mu \rangle = y \cdot \mathcal{J}_E \circ x.$$

**3.2 Inégalité de Sundman.** Pour tout élément  $\Omega$  de  $\text{Hom}_a(E, E^*)$  tel que  $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$  vérifie l'inégalité (2), on a

$$\frac{1}{4} \langle \mathcal{C}, \Omega \rangle^2 \leq IK - J^2.$$

**3.3 Remarque.** Le premier membre de (3) est une "composante" du moment cinétique. C'est également le Hamiltonien de l'équation différentielle  $\dot{x} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ x$ ,  $\dot{y} = \epsilon^{-1} \circ \Omega \circ y$ . La forme  $\Omega$  est donc une *rotation instantanée de l'état* au sens de la preuve de la proposition 2.9. Dans [1], le même objet avait le statut de *multiplicateur* d'un équilibre relatif, et on l'avait noté  $\Lambda$ .

*Cas d'égalité et inégalité de Sundman optimale*

**3.4 Définition.** Nous appelons "espace fixe" le sous-espace de  $E$  image du moment cinétique  $\mathcal{C} \in \text{Hom}_a(E^*, E)$ . Etant sous-entendu que nous n'inversons l'endomorphisme  $[\mathcal{C}]$  que sur l'espace fixe, nous posons

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}] &= \sqrt{-(\mathcal{C} \circ \epsilon)^2}, \\ \mathcal{J}_{\mathcal{C}} &= [\mathcal{C}]^{-1} \circ \mathcal{C} \circ \epsilon, \\ \Omega_{\mathcal{C}} &= \epsilon \circ \mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \\ |\mathcal{C}| &= \frac{1}{2} \text{tr}[\mathcal{C}] = \frac{1}{2} \langle \mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}} \rangle. \end{aligned}$$

**3.5 Proposition.** Soient  $\mathcal{C}$  un élément de  $\text{Hom}_a(E^*, E)$  et  $\Omega$  un élément de  $\text{Hom}_a(E, E^*)$  tel que l'endomorphisme  $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$  vérifie l'inégalité (2). Il existe  $z = (x, y)$  tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -x \circ \mu \circ {}^t y + y \circ \mu \circ {}^t x, \\ \frac{1}{4} \langle \mathcal{C}, \Omega \rangle^2 &= \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2, \end{aligned}$$

si et seulement si  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  sont liés par la relation  $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}} + \Omega_0$ , où  $\Omega_0$  est tel que  $\text{Im } \Omega_0 \subset \ker \mathcal{C}$  (et ne joue aucun rôle). Dans ce cas  $y$  est une combinaison linéaire de  $x$  et  $\mathcal{J}_{E \circ x}$ , et l'espace du mouvement coïncide avec l'espace fixe.

*Démonstration.* Soit  $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}} + \Omega_0$ . On vérifie que les trois structures

$$\mathcal{C} \circ {}^t \mathcal{J}_{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}] \circ \epsilon^{-1}, \quad \mathcal{C}, \quad {}^t \mathcal{J}_{\mathcal{C}}^{-1}$$

munissent  $E^*/\ker \mathcal{C}$ , canoniquement dual à l'espace fixe, d'une structure hermitienne. Soit  $\zeta$  une injection unitaire de ce dernier espace dans l'espace  $2\mathcal{D}$ , dont la structure hermitienne est définie par

$$\kappa_{\mu}, \quad \omega_{\mu}, \quad \mathcal{J}_0,$$

homomorphismes qui envoient respectivement un couple  $(u, v)$  de dispositions sur  $(\mu(u), \mu(v))$ ,  $(-\mu(v), \mu(u))$  et  $(-v, u)$ . L'état  $z = {}^t \zeta$ , de  $2\mathcal{D}^*$  dans  $\text{Im } \mathcal{C}$ , vérifie les deux équations de la proposition : la première parce que, par définition, le moment cinétique est l'image directe de  $\omega_{\mu}$  par l'état absolu, la deuxième parce que,  $z = (x, y)$  étant une application complexe, on a  $y = \mathcal{J}_{\mathcal{C} \circ x}$ . Réciproquement, d'après la fin du lemme 3.1, tout  $z$  qui vérifie la deuxième équation est de la forme  $(x, y = \lambda x + \nu \mathcal{J}_{E \circ x})$ , et satisfait de plus  $\|\mathcal{J}_{E \circ x}\| = \|x\|$ , qui entraîne  $\mathcal{J}_{E^2 \circ x} = -x$ . Transformons  $z$  en une application complexe de  $2\mathcal{D}^*$  sur  $\text{Im } \mathcal{C}$ , de même moment cinétique, en posant  $z_0 = \sqrt{\nu}(x, \mathcal{J}_{E \circ x})$ . La forme  $\mathcal{C} \circ {}^t \mathcal{J}_E$ , image réciproque de  $\kappa_{\mu}$  par  ${}^t z_0$ , doit être symétrique et définie positive. Le carré de l'endomorphisme  $\mathcal{C} \circ {}^t \mathcal{J}_{E \circ \epsilon}$  associé à cette forme s'écrit  $\mathcal{C} \circ {}^t \mathcal{J}_{E \circ \epsilon} \circ \mathcal{J}_{E \circ \epsilon} \circ {}^t \mathcal{C} \circ \epsilon$ , ou encore  $-(\mathcal{C} \circ \epsilon)^2$ . Nous avons donc établi l'égalité de  $-\mathcal{C} \circ \Omega = \mathcal{C} \circ {}^t \mathcal{J}_{E \circ \epsilon}$  et  $\sqrt{-(\mathcal{C} \circ \epsilon)^2}$ , égalité déjà vérifiée quand on fait  $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}}$  (définition 3.4). Le noyau de  $\mathcal{C}$  contient donc l'image de  $\Omega - \Omega_{\mathcal{C}}$ .

Il suit des propositions 3.2 et 3.5 que, parmi les  $\Omega$  tels que  $\mathcal{J}_E = \epsilon^{-1} \circ \Omega$  vérifie l'inégalité (2),  $\Omega_{\mathcal{C}}$  maximise l'expression  $\langle \mathcal{C}, \Omega \rangle$  quand on fixe  $\mathcal{C}$ . Faisant ce choix nous obtenons l'

### 3.6 Inégalité de Sundman optimale : $|\mathcal{C}|^2 \leq IK - J^2$ .

Remarquons que la proposition 3.5 donne une autre caractérisation des états considérés dans la proposition 2.18 : ce sont les cas d'égalité dans l'inégalité de Sundman. Au cours d'un mouvement homographique dont la configuration est centrale, la structure complexe donnée par la proposition 2.18 est donc celle associée au moment cinétique : nous redémontrons ainsi son invariance au cours du mouvement, déjà conséquence de la proposition 2.20. Dans les mouvements homographiques à configuration non centrale, la quantité  $IK - J^2$  est une constante strictement supérieure à  $|\mathcal{C}|^2$ .

## 4. Equations des configurations équilibrées

### Résolution dans le cas de trois corps

*Méthode pour l'obtention d'équations explicites.* Une configuration relative  $\beta$  définit une forme bilinéaire sur l'hyperplan  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathbb{R}^n$ . Choisir une extension de cette forme à  $\mathbb{R}^n$ , c'est associer à  $\beta$  une matrice  $n \times n$ , qui peut être utile pour

calculer. Si par exemple  $\beta$  correspond à une configuration absolue de  $n$  points  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ , l'identité

$$\langle \beta(\xi), \eta \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j) \xi_i \eta_j = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 \xi_i \eta_j,$$

dans laquelle  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  et  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  désignent deux éléments de  $\mathcal{D}^*$ , suggère deux choix intéressants de tels représentants matriciels : la matrice des  $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$  et celle des  $-s_{ij}/2$ , où

$$s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2.$$

En général, deux matrices  $n \times n$  de coefficients respectifs  $b_{ij}$  et  $b'_{ij}$  définissent la même forme bilinéaire sur  $\mathcal{D}^*$  si et seulement s'il existe  $2n$  nombres réels  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$  tels que pour tout  $i$  et tout  $j$  on ait

$$b'_{ij} - b_{ij} = u_i + v_j.$$

Les combinaisons  $b_{ii} + b_{jj} - b_{ij} - b_{ji}$  sont indépendantes du représentant choisi. Lorsque la forme considérée est symétrique, ce sont ses coordonnées dans la base  $\sigma_{ij}$  de  $\text{Hom}_s(\mathcal{D}^*, \mathcal{D})$  définie dans la remarque 1.14. On retrouve ainsi l'expression  $\beta = \sum_{i < j} s_{ij} \sigma_{ij}$ .

Associons maintenant une matrice à

$$d\hat{U} = \sum_{i < j} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{ij}} ds_{ij}.$$

Une telle matrice est unique car  $d\hat{U}$  définit une forme bilinéaire sur  $\mathcal{D}$  et une telle forme s'écrit de manière unique

$$(u, v) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} u_i v_j, \text{ avec pour tout } i, \sum_j \alpha_{ij} = \sum_j \alpha_{ji} = 0.$$

De l'identité  $ds_{ij} = \sigma_{ij}^* = e_{ij}^* \otimes e_{ij}^*$ , on déduit que

$$\langle d\hat{U}(\beta)(u), v \rangle = \sum_{i < j} \frac{\partial \hat{U}(\beta)}{\partial s_{ij}} (u_i - u_j)(v_i - v_j)$$

pour tout couple  $(u, v)$  de dispositions représentées respectivement par les  $n$ -uples  $(u_1, \dots, u_n)$  et  $(v_1, \dots, v_n)$ . La matrice cherchée est formée des coefficients des termes  $u_i v_j$  dans cette somme. Comme de plus  $d\hat{U}(\beta)$  est symétrique, il nous suffit de retenir que parmi les coefficients  $\alpha_{ij}$  de la matrice obtenue, ceux pour lesquels  $i < j$  s'écrivent

$$\alpha_{ij} = -\frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{ij}}.$$

Un représentant matriciel de  $\Pi = \beta \circ d\hat{U} \circ \mu^{-1} = \beta \circ A$  s'obtient simplement en effectuant le produit de représentants matriciels de  $\beta$ ,  $d\hat{U}$  et  $\mu^{-1}$ . Nous prenons respectivement la matrice des  $-s_{ij}/2$ , celle des  $\alpha_{ij}$ , et la matrice diagonale de coefficients diagonaux  $m_i^{-1}$ . Les coefficients du produit sont les

$$(1) \quad P_{ij} = \frac{1}{2m_j} \sum_{l \neq j} (s_{il} - s_{ij}) \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{lj}}.$$

On obtient les coordonnées de la partie symétrique de  $\Pi$  en formant les combinaisons invariantes  $P_{ii} + P_{jj} - P_{ij} - P_{ji}$ . Elles peuvent, d'après le point *iii* de la proposition 2.15, servir à écrire des équations caractérisant les configurations centrales, ce que nous ne ferons pas ici. Quant à la partie antisymétrique, elle est connue dès que sont connues les combinaisons invariantes

$$P_{ijk} = P_{ij} + P_{jk} + P_{ki} - P_{ik} - P_{kj} - P_{ji},$$

avec  $i < j < k$ . Si  $n$  est strictement supérieur à 3, ces combinaisons sont redondantes. En effet, l'application "produit extérieur par  $(1, \dots, 1)$ " de  $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$  dans  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^n$  se factorise à travers une injection linéaire de  $\bigwedge^2 \mathcal{D}$  dans  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^n$ . Les  $P_{ijk}$ ,  $i < j < k$ , sont les coordonnées dans  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^n$  de l'image par cette injection du bivecteur  $\Pi - {}^t\Pi$ . Calculons-les : les termes où  $l$  vaut  $i$ ,  $j$  ou  $k$  dans l'équation (1) font apparaître le déterminant

$$\nabla_{ijk} = \begin{vmatrix} 1/m_i & 1/m_j & 1/m_k \\ s_{jk} - s_{ki} - s_{ij} & s_{ki} - s_{ij} - s_{jk} & s_{ij} - s_{jk} - s_{ki} \\ \partial \hat{U} / \partial s_{jk} & \partial \hat{U} / \partial s_{ki} & \partial \hat{U} / \partial s_{ij} \end{vmatrix}.$$

Les termes correspondant à une autre valeur de  $l$  font apparaître

$$Y_{ijk}^l = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{jk} + s_{il} & s_{ki} + s_{jl} & s_{ij} + s_{kl} \\ \frac{1}{m_i} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{il}} & \frac{1}{m_j} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{jl}} & \frac{1}{m_k} \frac{\partial \hat{U}}{\partial s_{kl}} \end{vmatrix},$$

de sorte que

$$P_{ijk} = -\frac{1}{2} \nabla_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq ijk} Y_{ijk}^l.$$

Jointes aux conditions de positivité de la forme  $\beta$ , les équations  $P_{ijk} = 0$ ,  $i < j < k$ , définissent les configurations équilibrées.

*Cas du potentiel newtonien.* Définissons une fonction  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}_+$  par la formule  $\Phi(s) = \mathcal{G}s^{-1/2}$ , où  $\mathcal{G}$  est une constante positive. Le potentiel newtonien s'écrit

$$(2) \quad \hat{U} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \Phi(s_{ij}).$$



Nous ne retiendrons de la forme particulière de  $\Phi$  que certaines propriétés, par exemple la concavité de sa dérivée  $\varphi = \Phi'$ . Les équations que nous venons d'obtenir pour les configurations équilibrées se simplifient : la dépendance de  $A$  en les masses devient linéaire, les coefficients  $P_{ij}$  s'écrivent

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{l \neq j} m_l (s_{il} - s_{ij}) \varphi(s_{lj}),$$

et  $\nabla_{ijk}$  et  $Y_{ijk}^l$  deviennent respectivement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_i(s_{jk} - s_{ki} - s_{ij}) & m_j(s_{ki} - s_{ij} - s_{jk}) & m_k(s_{ij} - s_{jk} - s_{ki}) \\ \varphi(s_{jk}) & \varphi(s_{ki}) & \varphi(s_{ij}) \end{vmatrix}$$

et

$$m_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{jk} + s_{il} & s_{ki} + s_{jl} & s_{ij} + s_{kl} \\ \varphi(s_{il}) & \varphi(s_{jl}) & \varphi(s_{kl}) \end{vmatrix}.$$

*Les configurations équilibrées de trois corps.* Nous noterons désormais  $a = s_{23}$ ,  $b = s_{31}$ ,  $c = s_{12}$  et  $\nabla = \nabla_{123}$ .

**4.1 Proposition.** Considérons un potentiel  $\hat{U}$  défini par la formule (2) dans laquelle  $\Phi$  désigne une application d'un intervalle de définition contenu dans  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  dont la dérivée  $\varphi$  est strictement concave ou strictement convexe. Une configuration de trois corps de masses égales est équilibrée si et seulement si elle est isocèle.

*Démonstration.* L'unique équation des configurations équilibrées s'écrit en effet

$$\nabla = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Elle équivaut à l'alignement sur le graphe de  $\varphi$  des trois points d'abscisses  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Nous dégageons dans le lemme suivant des incompatibilités entre l'ordre des trois masses et l'ordre des trois côtés d'une configuration équilibrée. Nous avons besoin supposer que le graphe de la fonction  $\varphi = \Phi'$  vérifie aussi

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a - b & b - a & c \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{vmatrix} \leq 0,$$

pour tout triplet ordonné  $a < b < c$  de nombres réels strictement positifs appartenant à l'intervalle de définition de  $\varphi$ . Pour le potentiel newtonien nous savons que sous les mêmes hypothèses

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^{-1} & b^{-1} & c^{-1} \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{vmatrix} > 0,$$

ce qui est plus fort que l'étrange inégalité (3), comme nous le montrerons au cours de la preuve du lemme. Notons qu'on peut aussi changer  $\varphi$  en  $-\varphi$  dans l'énoncé qui suit.

**4.2 Lemme.** Considérons une configuration équilibrée de trois masses  $m_1, m_2, m_3$  formant un triangle tel que  $a < b < c$ . Supposons que la fonction  $\varphi$ , définie sur un intervalle contenu dans  $]0, +\infty[$ , est strictement croissante, concave, et vérifie l'hypothèse (3) ci-dessus. Si  $m_1 \leq m_2$ , le triangle est acutangle (tous les angles sont aigus) et  $m_2 < m_3$ .

*Démonstration.* Remplaçons  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(b)$  et  $\varphi(c)$  par des constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  telles que  $A < B < C$ . Considérons l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées  $(a, b, c)$ . Appelons  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$  et  $p_7$  les points d'intersection du plan  $a + b + c = 1$  et des sept droites passant par l'origine et par les points  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ,  $(C - B, C - A, 2C - A - B)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, B - A, 2C - A - B)$  et  $(0, 0, 1)$ . La frontière définie par l'inégalité (3) passe par les points  $p_1, p_4$  et  $p_6$ . Celle définie par l'inégalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} \leq 0,$$

qui exprime la concavité du graphe de  $\varphi$ , passe par  $p_2$  et  $p_4$ . Le graphe de  $\varphi$  ne peut donc vérifier les hypothèses du lemme si le point  $(a, b, c)$  est en dehors du quadrilatère  $p_2p_4p_6p_7$ . On montre facilement que la condition (4) définit une région contenue dans ce quadrilatère, limitée par le segment  $p_2p_7$  et l'hyperbole passant par  $p_2$  et  $p_7$  et tangente à  $p_2p_4$  en  $p_2$ . Il ne nous reste plus qu'à situer la droite

$$\nabla = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1(a - b - c) & m_2(b - c - a) & m_3(c - a - b) \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Elle coupe le segment  $p_4p_5$  :  $\nabla$  prend le signe de  $(A - B)(B - C)(m_1 - m_2)$  en  $p_4$  et de  $m_1(C - B)$  en  $p_5$ . Comme  $p_4$  appartient au segment  $p_3p_5$ ,  $\nabla$  est encore négatif en  $p_3$ , alors qu'il est du signe de  $m_3(B - A)$  en  $p_1$ , c'est-à-dire positif : la droite coupe aussi le segment  $p_1p_3$ . Elle ne rencontre donc pas le quadrilatère  $p_2p_4p_6p_7$ , sauf si  $\nabla$  est positive en  $p_2$ , c'est-à-dire si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ A & B & C \end{vmatrix} \leq 0.$$

Cette inégalité n'est pas possible si  $m_1 < m_2$  et  $m_3 < m_2$ . Enfin, on doit avoir  $c - a - b < 0$  pour tous les points d'intersection, ce qui montre que le plus grand des trois angles du triangle est aigu.

Pour donner l'allure de la courbe  $\nabla = 0$ , et justifier les figures que nous donnons ensuite, on observe que lorsqu'on fixe  $b$  et  $c$ ,  $\nabla$  est une fonction très simple de  $a$ , vérifiant notamment

$$\frac{\partial^2 \nabla}{\partial a^2} = \varphi''(a) \left( (m_2 - m_3)\theta(a) - (m_2 + m_3)(b - c) \right),$$

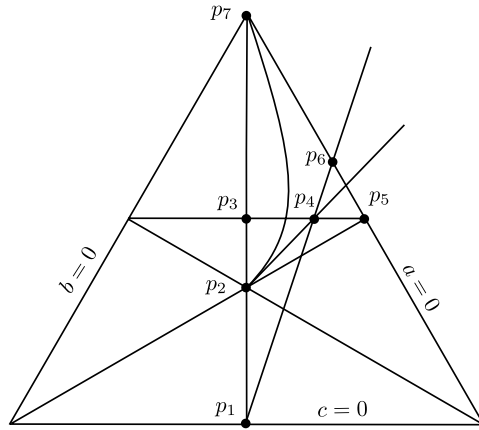


Figure 1

en notant  $\theta$  la fonction telle que

$$\theta(a) = a + 2 \frac{\varphi'(a)}{\varphi''(a)}.$$

Dans le cas newtonien,  $\Phi(a) = \mathcal{G}a^{-1/2}$  donne  $\theta(a) = a/5$  : la dérivée seconde de  $\nabla$  ne peut s'annuler qu'une fois. Le lemme suivant donne un résultat optimal.

**4.3 Lemme.** Pour un potentiel newtonien, la fonction  $a \mapsto \nabla(a, b, c)$  s'annule au plus deux fois sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

*Démonstration.* Reprenons l'expression de la dérivée seconde de  $\nabla$ . Si  $m_2 - m_3$  et  $b - c$  sont de signes contraires,  $\partial^2 \nabla / \partial a^2$  garde un signe constant. Sinon,  $\nabla$  est équivalente à  $(m_2 + m_3)(c - b)\varphi(a)$  au voisinage de  $a = 0$  et à

$$(m_1 + m_2)(\varphi(b) - \varphi(c))a + (m_3 - m_2)(\varphi(a) - \varphi(b))a$$

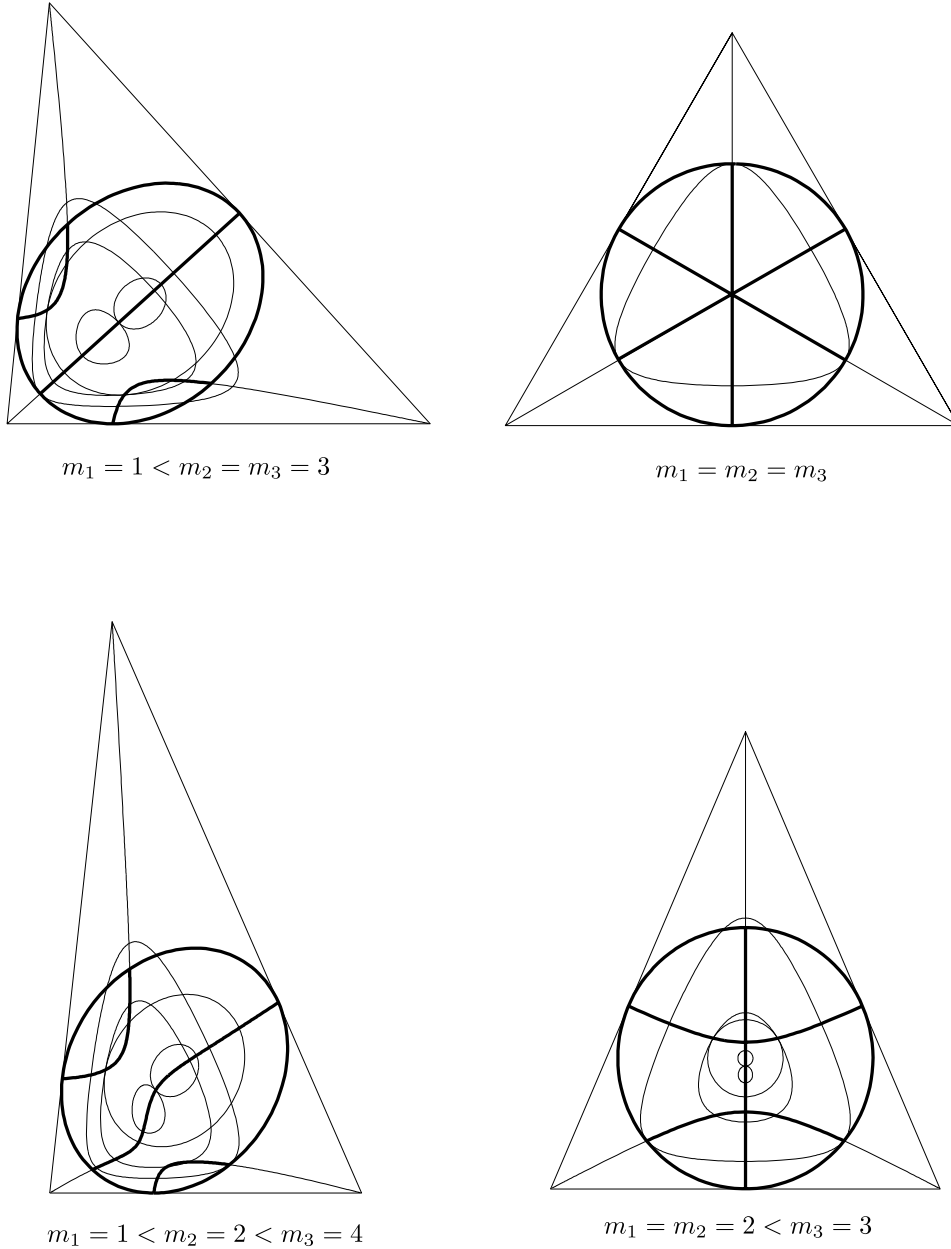
au voisinage de  $a = +\infty$ , deux expressions dont les signes coïncident. Dans les deux cas, la conclusion suit.

*Remarques*

**4.4.** Un analogue du lemme précédent pour des potentiels non newtoniens, et surtout non homogènes, s'obtient en faisant une hypothèse de monotonie sur la fonction  $\theta$ , qui revient supposer que la dérivée schwarziennne de  $\varphi$  ne s'annule jamais. Cela provient du fait que l'équation  $\nabla = 0$  définit implicitement le réel  $\varphi(a)$  comme une fonction homographique de  $a$  quand  $b$  et  $c$  sont fixés.

**4.5.** La conclusion de 4.2 découle facilement du lemme 4.3 : il suffit d'étudier le signe de  $\nabla$  sur les triangles isocèles.

La figure 2 décrit les configurations équilibrées pour quatre choix de masses. On a représenté en trait gras la courbe des configurations équilibrées de taille fixée et



*Figure 2*

l'ellipse des triangles d'aire nulle de taille fixée. En trait fin apparaissent le triangle qui borde le sous-ensemble

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, I = 1\}$$

et quelques lignes de niveau des fonctions potentiel et aire restreintes à ce sous-ensemble. On notera que la courbe des configurations équilibrées contient nécessairement les points singuliers de ces restrictions, respectivement le triangle équilatéral de Lagrange ( $d\hat{U}$  proportionnelle à  $\mu$ ) et le triangle dont le centre de masse coïncide avec l'orthocentre ( $\beta$  proportionnelle à  $\mu^{-1}$ ).

## [5] Recherches sur le problème des configurations centrales

**Résumé.** Nous nous intéressons à la résolution des équations algébriques qui définissent les configurations centrales. Nous recherchons plus précisément une description qualitative de l'ensemble des solutions, une "énumération" de ces configurations. Cette énumération représente pour A. Wintner "a fascinating unsolved problem". L'ensemble à énumérer, une fois fixées les  $n$  masses  $m_1, \dots, m_n$ , est vraisemblablement fini (voir [Win2] §360, §365 et [Sma3]).

Nous avons publié dans [2] et [3] la solution du problème dans le cas de quatre masses égales. Nous décrivons les configurations trouvées au début du paragraphe 3.3, et généralisons en fin de troisième partie deux des propositions qui constituent cette solution. Il s'agit de prouver la symétrie de la configuration quand seulement deux ou trois des masses sont égales. Les configurations de  $n$  corps avec  $n \geq 5$  ne sont concernées par nos énoncés que si la dimension de la configuration est  $n - 2$ .

Tous nos résultats sur les quadrilatères convexes seraient impliqués par une conjecture plus générale, qui semble pour l'instant hors d'atteinte : si on choisit quatre masses et si on décide lesquelles sont reliées par les diagonales, de tous les quadrilatères convexes obtenus un seul est central. Dans cette direction, nous démontrons au 2.17 qu'il n'y a qu'une configuration centrale de type trapèze. La preuve utilise une transformée de Legendre du potentiel, que nous décrivons au début de la deuxième partie.

Je tiens à remercier A. Chenciner, avec qui ce travail a commencé, Carles Simó, avec qui j'ai obtenu de nombreuses informations phénoménologiques, et Jaume Llibre, avec qui j'ai obtenu des généralisations dont seulement une partie apparaît dans ce travail.

### 1. Introduction

**1.1.** La notion de configuration centrale apparaît très naturellement quand on recherche des solutions simples des équations différentielles qui régissent le mouvement de trois ou de plusieurs masses ponctuelles soumises aux lois de Newton. Dans un mémoire lu en 1765, Euler[Eul] fut le premier à expliciter de telles solutions\*. Voulant avertir ses lecteurs de la difficulté du problème des trois corps, il mit un instant de côté le souci de l'application au système solaire et simplifia les conditions initiales, en disposant les trois masses ponctuelles ainsi que leurs vitesses sur une droite. Il obtenait ainsi un système différentiel d'ordre 3, pour toute valeur choisie de l'énergie. Il remarqua qu'on pouvait même obtenir un système d'ordre 2 quand l'énergie est nulle, en profitant des homogénéités. Il estimait le problème intraitable, malgré ces simplifications. Cependant, il pouvait intégrer des solutions

---

\* Le mémoire en question, rédigé en Français, a deux prédécesseurs en Latin, "Considerationes de motu corporum coelestium" et "De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium", qu'on trouvera dans le volume 25, série Mécanique, des œuvres d'Euler. Le premier a été lu à Berlin en avril 1762 et à Saint Petersburg en mai de la même année. Le second a été lu en décembre 1763, à l'académie de Saint Petersburg.

très particulières du système d'ordre 3, les mouvements “homothétiques”. C'est la configuration dans un tel mouvement qu'on qualifie de “centrale”.

Précisons ces notions dans un cadre plus général, en utilisant des notations que nous expliquerons bientôt. Le système d'équations associé aux lois de Newton s'écrit

$$\ddot{x} = \nabla U(x)$$

où  $x$  représente la configuration,  $U$  est le potentiel newtonien, et  $\nabla U(x)$  le gradient de  $U$  au point  $x$ . Les configurations centrales vérifient, pour un certain nombre réel  $\lambda$  négatif,

$$2\lambda x = \nabla U(x). \quad (1)$$

Une condition initiale formée d'une telle configuration et d'un système de vitesses  $\dot{x}$  proportionnel à  $x$  engendre un mouvement *homothétique* : la configuration  $x(t)$  reste au cours du temps proportionnelle à la configuration initiale  $x(0)$ . Ceci découle de l'homogénéité du potentiel  $U$ . Ces mouvements ressemblent en tout point aux mouvements de deux corps évoluant seuls sur une droite. Par exemple, ils “commencent” ou “finissent” nécessairement en une collision totale.

Lagrange étendit, en 1772, la recherche de solutions simples au problème de trois corps se mouvant dans l'espace à trois dimensions. Les mouvements qu'il obtint étaient encore tels que la configuration vérifiait l'équation (1), mais ils étaient cette fois *homographiques* : la configuration était seulement assujettie à rester au cours du temps semblable à elle-même. Euler avait résolu (1) dans le cas de trois corps alignés. Lagrange découvrit l'unique configuration de dimension deux qui vérifie cette équation, le triangle équilatéral.

L'équation (1) dans le cas de plusieurs corps fut pour la première fois discutée par Laplace en 1805. Son lien avec les mouvements homographiques n'est évident qu'en dimension deux. Il est élucidé dans [4] dans le cas général.

**1.2.** Avant de commencer l'exposé général, nous revenons sur la résolution bien connue des équations (1) dans le cas d'Euler. Nous nous inspirons de [Win2], plutôt que de la présentation plus commune qui ramène (1) à une équation du cinquième degré dont on détermine le nombre de racines avec la règle des signes de Descartes. Quelques notations :  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  repèrent les  $n$  corps dans un espace euclidien  $E$  ; on pose  $s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$ ,

$$U = -\frac{1}{\kappa} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j s_{ij}^\kappa \quad (2)$$

et (pour l'instant)  $\kappa = -1/2$ . Le facteur inhabituel  $-1/k$  s'avère commode, et ne crée pas de difficulté dans la comparaison avec les textes classiques : il suffit de dire qu'on a pris la constante  $\mathcal{G}$  de la gravitation égale à 2. On pose aussi  $a = \kappa - 1 = -3/2$ . Quand les corps sont alignés, on appelle  $x_i$  l'abscisse du corps  $i$  sur la droite  $E = \mathbb{R}$ . Supposons qu'il y a trois corps et développons (1). Le sens

précis que nous donnons à cette équation est : il existe un nombre réel  $\mu$  tel que

$$\begin{aligned}\lambda(x_1 - \mu) &= m_2(x_2 - x_1)s_{12}^a + m_3(x_3 - x_1)s_{13}^a, \\ \lambda(x_2 - \mu) &= m_3(x_3 - x_2)s_{23}^a + m_1(x_1 - x_2)s_{12}^a, \\ \lambda(x_3 - \mu) &= m_1(x_1 - x_3)s_{13}^a + m_2(x_2 - x_3)s_{23}^a.\end{aligned}$$

En additionnant les trois équations, avec les poids  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$ , on déduit que  $\mu$  doit être l'abscisse du centre de masse. Posons pour abrégé

$$\gamma_1 = x_3 - x_2, \quad \gamma_2 = x_1 - x_3, \quad \gamma_3 = x_2 - x_1, \quad M = m_1 + m_2 + m_3.$$

L'élimination de  $\mu$  remplace les trois équations indépendantes qui précèdent par les trois équations liées

$$\begin{aligned}0 &= m_2\gamma_3\left(|\gamma_3|^{2a} + \frac{\lambda}{M}\right) - m_3\gamma_2\left(|\gamma_2|^{2a} + \frac{\lambda}{M}\right), \\ 0 &= m_3\gamma_1\left(|\gamma_1|^{2a} + \frac{\lambda}{M}\right) - m_1\gamma_3\left(|\gamma_3|^{2a} + \frac{\lambda}{M}\right), \\ 0 &= m_1\gamma_2\left(|\gamma_2|^{2a} + \frac{\lambda}{M}\right) - m_2\gamma_1\left(|\gamma_1|^{2a} + \frac{\lambda}{M}\right).\end{aligned}$$

Soit  $\rho$  la fonction impaire définie par  $\rho(\gamma) = -\gamma|\gamma|^{2a}$ . L'élimination de  $\lambda$  ne laisse que l'équation

$$\delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \rho(\gamma_1) & \rho(\gamma_2) & \rho(\gamma_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons le deuxième corps situé entre le premier et le troisième. Posons pour normaliser  $\gamma_2 = -1$ , soit  $\gamma_3 = 1 - \gamma_1$ . La dérivée totale de  $\delta$  par rapport à  $\gamma_1$  vaut

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \rho(\gamma_1) & \rho(-1) & \rho(\gamma_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ \gamma_1 & -1 & \gamma_3 \\ \rho'(\gamma_1) & 0 & -\rho'(\gamma_3) \end{vmatrix}.$$

Le développement complet de ces deux déterminants donne 8 termes. L'inégalité  $\rho'(\gamma) > 0$  montre qu'ils sont tous strictement positifs. Le déterminant  $\delta$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $\gamma_1$  tend vers zéro, et vers  $+\infty$  lorsque  $\gamma_1$  tend vers 1. Il s'annule donc exactement une fois. *Il existe en conséquence une et une seule configuration d'Euler pour chaque ordre des trois masses.* Le même argument donne le même résultat pour tout exposant  $a = \kappa - 1$  strictement plus petit que  $-1/2$ .

Moulton a montré en 1910 que parmi toutes les configurations de  $n$  masses disposées sur une droite dans un certain ordre, une seule est centrale. Nous donnerons une démonstration très simple de ce résultat, utilisant la convexité du potentiel  $U$ . Nous posséderons ainsi deux démonstrations distinctes du résultat pour trois corps. Les deux utilisent la même condition  $a < -1/2$ , ou plus généralement la croissance de la fonction  $\rho$ .

Carles Simó m'a fait remarquer que pour les exposants  $a > -1/2$ , les configurations de trois corps telles que deux des corps soient confondus sont des configurations centrales. En effet,  $\delta$  s'annule pour les valeurs  $\gamma_1 = 0$  et  $\gamma_1 = 1$ . Mais la dérivée troisième de  $\delta$  par rapport à la variable  $\gamma_1$  se calcule facilement. Elle est positive pour  $-1/2 \leq a < 0$ . Il y a donc encore dans ce cas une et une seule configuration d'Euler, en plus des deux configurations de collision.

Nous venons d'utiliser le lemme élémentaire : toute fonction d'une variable dont la dérivée troisième est positive possède au plus trois racines. Nous ne connaissons pas hélas de lemme analogue concernant les fonctions de plusieurs variables. Nous avons voulu étendre le résultat d'Euler à des exposants "bizarres" pour illustrer cette difficulté qui semble bloquer la théorie des configurations centrales : on sait que les dérivées d'ordre supérieur à deux interviennent, mais, faute d'une technique appropriée, on ne sait pas les utiliser, dès que les fonctions qui entrent en jeu ont plusieurs variables.

## 2. Configurations centrales et distances mutuelles

Nous donnons ici une définition des configurations centrales qui nous permet de dégager rapidement des propriétés nouvelles. Nous faisons suivre des rappels sur les configurations de Moulton (2.11), l'étude nouvelle (2.14) d'une classe de configurations centrales que nous appelons configurations de Dziobek, et enfin un résultat (2.17) sur les configurations de Dziobek à symétrie de type axe.

**2.1.** Rappelons le schéma, détaillé dans [4], de "réduction" de l'espace des configurations :

$$\begin{array}{ccc} E^n = E \otimes \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \otimes \mathcal{D} \xrightarrow{rel} \mathcal{D} \vee \mathcal{D} \\ (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) & \longmapsto & x \longmapsto \beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x. \end{array}$$

La première flèche est la réduction des translations. Les  $n$  corps ou points de l'espace vectoriel euclidien  $E$ , muni de la forme euclidienne  $\epsilon$ , sont désignés par les vecteurs  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ . Réduire les translations revient à projeter sur l'espace des "configurations absolues"  $E \otimes \mathcal{D}$ . L'espace  $\mathcal{D}$ , que nous appelons "espace des dispositions", est le quotient de  $\mathbb{R}^n$  par la droite de générateur  $(1, \dots, 1)$ , autrement dit l'espace des configurations "à translation près" de  $n$  points sur la droite réelle. Suivant [Deh], nous notons  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  le carré tensoriel symétrique de  $\mathcal{D}$ . La deuxième flèche réduit les isométries ; elle envoie les configurations absolues dans les "configurations relatives", éléments du cône positif noté  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}_+$  de l'espace  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ . La notation  ${}^t x \circ \epsilon \circ x$  s'interprète au choix comme la composition naturelle des morphismes canoniquement associés aux tenseurs  ${}^t x$ ,  $\epsilon$  et  $x$ , ou en comprenant  $\circ$  comme le symbole du produit tensoriel suivi d'une contraction de ces tenseurs, éléments respectifs de  $\mathcal{D} \otimes E$ ,  $E^* \vee E^*$  et  $E \otimes \mathcal{D}$ . La contraction porte sur les couples d'espaces en dualité juxtaposés dans l'écriture. On peut encore dire que la forme quadratique positive  $\beta$  sur

$$\mathcal{D}^* = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \right\}$$

est l'image réciproque par  $x$ , interprété comme un morphisme de  $\mathcal{D}^*$  dans  $E$ , de la forme définie positive  $\epsilon$  sur  $E$ . Sa valeur sur la "codisposition"  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$



s'écrit

$$\langle \beta, \xi \otimes \xi \rangle = - \sum_{i < j} s_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (3)$$

Nous notons  $e_{ij}^*$  la codisposition  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  telle que  $\eta_i = 1$  et  $\eta_j = -1$  et que tous les autres  $\eta_k$  soient nuls. On a évidemment  $x \circ e_{ij}^* = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  et

$$\langle \beta, e_{ij}^* \otimes e_{ij}^* \rangle = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2 = s_{ij}.$$

**2.2.** Soit maintenant  $U$  une fonction réelle, par exemple le potentiel newtonien, définie sur un ouvert de  $E \otimes \mathcal{D}$ . Posons, pour chaque nombre réel  $\lambda$ ,

$$U_\lambda = U - \lambda \|x\|^2. \quad (4)$$

La quantité  $\|x\|^2 = \sum m_i \|\vec{r}_i - \vec{r}_G\|^2$  est appelée “moment d’inertie par rapport au centre de masse  $\vec{r}_G$ ” et notée  $I$ . Elle est définie grâce à la “forme quadratique des masses”, structure euclidienne sur  $\mathcal{D}$  notée  $\mu$ , qui induit une structure euclidienne sur  $E \otimes \mathcal{D}$ . La configuration absolue  $x$  est une *configuration centrale* pour la fonction  $U_\lambda$  quand  $dU_\lambda(x) = 0$ . Au lieu de cette définition “absolue”, nous utiliserons la définition “relative” suivante.

**Définition.** Soit  $g$  une fonction réelle définie sur un ouvert de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ . J’appelle *tenseur central* pour la fonction  $g$  un élément  $\beta$  de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  tel que  $\beta \circ dg(\beta) = 0$ . J’appelle *configuration centrale* pour  $g$  un tenseur central positif.

Le symbole  $\circ$  s’interprète comme ci-dessus, par exemple comme produit tensoriel suivi d’une contraction de  $\beta \in \mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  et de  $dg(\beta) \in \mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$ . Le produit tensoriel suivi de deux contractions est noté  $\langle \beta, dg \rangle$  : c’est le crochet de dualité naturel, qu’on peut écrire  $\text{tr}(\beta \circ dg)$  si l’on préfère penser en terme de morphismes.

**Caractérisation des tenseurs centraux.** Un tenseur central de rang  $p$  est un point critique de la fonction  $g$  restreinte aux éléments de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  de rang exactement  $p$ .

*Démonstration.* Dire que  $\beta$  est critique, c’est dire que  $\langle \beta', dg(\beta) \rangle$  s’annule pour tout élément  $\beta'$  tangent en  $\beta$  à la sous-variété formée par les éléments de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  de même rang que  $\beta$ . Les éléments voisins de  $\beta$  dans cette sous-variété sont de la forme  ${}^t R \circ \beta \circ R$ , où  $R$  est un élément de  $\mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}$  voisin de l’identité. On peut toujours écrire  $\beta' = {}^t R' \circ \beta + \beta \circ R'$ , ce qui donne  $\langle \beta', dg \rangle = 2 \langle R', \beta \circ dg \rangle$ . La nullité de cette expression pour tout  $R'$  équivaut à la nullité de  $\beta \circ dg$ .

*Lien avec le point de vue habituel.* Supposons que  $U$ , et donc  $U_\lambda$ , ne dépende que des distances mutuelles entre les corps, c’est-à-dire qu’il existe une fonction  $g$  telle que  $U_\lambda(x) = g(\beta)$ , avec  $\beta = {}^t x \circ \epsilon \circ x$ . Rappelons la proposition 1.12 de [4] : l’application *rel* induit un difféomorphisme entre le quotient par l’action du groupe des isométries de  $E$  de l’ouvert de  $E \otimes \mathcal{D}$  constitué des configurations absolues de dimension donnée  $p$  d’une part, et la sous-variété de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}_+$  constituée des configurations relatives de rang  $p$  d’autre part. Si donc  $\beta$  est une configuration, point critique de  $g$  en rang  $p$  comme dans la caractérisation,  $x$  est point critique de la restriction de  $U_\lambda$  aux configurations de rang  $p$ , et par suite point critique de  $U_\lambda$ ,

puisque cette fonction est invariante par les réflexions. On a ainsi  $dU_\lambda(x) = 0$ . La réciproque est claire.

**2.3 Transformée de Legendre.** L'équation  $0 = \beta \circ dg(\beta)$  possède une symétrie naturelle vis-à-vis de la transformation de Legendre. On peut définir une transformée de Legendre  $l$  de  $g$  quand la forme différentielle  $dg$ , considérée comme une application différentiable

$$\beta \longmapsto dg(\beta),$$

définie sur un ouvert de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  et à valeurs dans  $\mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$ , est inversible. L'application inverse peut être considérée comme une forme différentielle sur l'ouvert d'arrivée. Cette forme est exacte, autrement dit il existe une fonction  $l$  définie sur cet ouvert telle que l'application inverse s'écrive

$$\alpha \longmapsto dl(\alpha).$$

L'équation de la définition s'écrit aussi bien  $0 = dl(\alpha) \circ \alpha$ . Définissons le corang  $q$  d'un tenseur central  $\beta$  : c'est le rang de  $dg(\beta)$ . On a donc  $p + q \leq n - 1$ . Nous obtenons immédiatement une caractérisation symétrique de la précédente.

**Caractérisation des tenseurs centraux.** Un tenseur central de corang  $q$  correspond à un point critique de la fonction  $l$  restreinte aux éléments de  $\mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$  de rang exactement  $q$ .

**2.4 Potentiels explicites, incluant le potentiel newtonien.** Soit  $\varphi$  une fonction strictement croissante d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $\Phi$  une de ses primitives. Notons  $\beta$  l'élément de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  dont les coordonnées de type "carré des distances mutuelles" sont les  $s_{ij}$ . Appelons enfin  $\mu_{ij}$  des nombres strictement positifs. Ce seront les produits des masses :  $\mu_{ij} = m_i m_j$ , mais pour certains résultats il n'est pas nécessaire d'introduire les masses ; les  $\mu_{ij}$  suffisent. Le "potentiel" que nous considérons s'écrit

$$g(\beta) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_{ij} \Phi(s_{ij}).$$

Le cas newtonien correspond à  $\kappa = -1/2$  dans la famille plus spécifique, que nous appellerons "famille homogène", obtenue à partir des expressions (2) et (4) :

$$g(\beta) = U_\lambda = U - \lambda I = \sum_{i < j} m_i m_j \left( -\frac{s_{ij}^\kappa}{\kappa} - \frac{\lambda s_{ij}}{M} \right),$$

où  $M$  désigne la somme des masses. Les conventions ont été prises de sorte que la fonction  $\varphi$  soit croissante dans le cas newtonien, et pour qu'elle s'exprime simplement :

$$\Phi(s) = -\frac{s^\kappa}{\kappa} - \frac{\lambda s}{M} \quad \text{et} \quad \varphi(s) = -s^a - \frac{\lambda}{M},$$

où  $a = \kappa - 1$ . Quand nous parlerons de la famille homogène, nous supposerons toujours  $a < 0$ .

**2.5 Ecriture développée.** Explicitons l'équation  $\beta \circ dg(\beta) = 0$  en terme de distances mutuelles. Reprenons pour cela les représentations matricielles de [4]. Soient  $\alpha_{ij}$  les coefficients de la matrice représentant  $dg(\beta)$ . Pour tout indice  $i$ , on aura  $\alpha_{i1} + \dots + \alpha_{in} = 0$ . De plus, la matrice est symétrique :  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ . Il suffit donc de spécifier les  $\alpha_{ij}$  avec  $i < j$ . La valeur de  $dg(\beta)$  sur un élément arbitraire de  $\mathcal{D}$  dont un des représentants est  $(q_1, \dots, q_n)$  s'écrit

$$\sum_{ij} \alpha_{ij} q_i q_j = - \sum_{i < j} \alpha_{ij} (q_i - q_j)^2. \quad (5)$$

En posant  $S_{ij} = \varphi(s_{ij})$ , nous aurons

$$\alpha_{ij} = - \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} = -\mu_{ij} S_{ij} \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Exprimons la nullité de l'endomorphisme  $\beta \circ dg(\beta)$  de  $\mathcal{D}$ . Il est représenté par la matrice de coefficients

$$p_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{h \neq l} (s_{kh} - s_{kl}) \mu_{hl} S_{hl}.$$

Nous posons toujours  $s_{ll} = 0$ . La  $k$ -ième colonne de cette matrice représente la disposition nulle si et seulement si  $p_{ik} = p_{jk}$ , quels que soient  $i$  et  $j$ , soit

$$\sum_{l \neq k} \mu_{lk} S_{lk} (s_{il} - s_{ik} - s_{jl} + s_{jk}) = 0.$$

**2.6.** Nous avons supposé  $\varphi$  croissante :  $g$  est une fonction convexe, et l'application  $dg$  s'inverse. On peut expliciter la transformée de Legendre en fonction d'une primitive  $\Psi$  de l'unique fonction  $\psi$  telle que, pour tout  $S$  dans l'intervalle d'arrivée de  $\varphi$ ,

$$\varphi(\psi(S)) = S.$$

L'inversion explicite de l'application  $\beta \mapsto \alpha = dg(\beta)$  est en effet immédiate. Etant donnés les  $\alpha_{ij}$ ,  $i < j$ , qui caractérisent  $\alpha$ , on obtient les  $S_{ij} = -\alpha_{ij}/\mu_{ij}$ , puis les  $s_{ij} = \psi(S_{ij})$  qui caractérisent  $\beta$ . Comme les coordonnées duales des  $s_{ij}$  sont les  $-\alpha_{ij}$ , on doit avoir

$$-\frac{\partial l}{\partial \alpha_{ij}} = \psi(S_{ij}) = \psi\left(-\frac{\alpha_{ij}}{\mu_{ij}}\right), \quad \text{donc} \quad l = \sum_{i < j} \mu_{ij} \Psi(S_{ij}).$$

On ne devra pas se laisser abuser par la ressemblance des expressions de  $g$  et  $l$  : même lorsque tous les  $\mu_{ij}$  sont égaux à 1, les  $s_{ij}$  et les  $S_{ij}$  paramètrent de façon différente l'espace de formes quadratiques sous-jacent. Ainsi, la positivité de  $\beta$  entraîne d'après l'expression (3) celle des  $s_{ij}$ . L'expression (5) montre qu'au contraire la positivité de  $\alpha$  découle de celle des  $S_{ij}$ .

**2.7.** Les fonctions  $g$  et  $l$  sont strictement convexes et possèdent donc chacune un point critique au plus. Le minimum de  $g$  existe si  $\varphi$  s'annule quelque part. On le note alors  $\beta_0$ . Celui de  $l$  existe si  $\varphi$  est définie en zéro. On le note alors  $\alpha_0$ . Le tenseur  $\beta_0$  généralise la configuration centrale de Lagrange et celle de R. Lehmann-Filhès (voir [Win2], p. 430). C'est l'unique tenseur central de corang nul. On doit avoir  $\varphi(s_{ij}) = 0$  pour tout  $i$  distinct de  $j$  : les distances mutuelles sont donc égales. Pour la famille homogène,  $l$  ne possède pas de minimum, mais  $\beta_0$  existe et c'est une configuration :  $\varphi$  s'annule pour une valeur positive, la valeur commune des  $s_{ij}$ . Dans la suite, nous appellerons "hypothèse du 2.7" cette hypothèse sur  $\varphi$  vérifiée pour la famille homogène :  $\varphi$  s'annule pour une valeur strictement positive de sa variable  $s$ .

**2.8 Minimisation radiale.** Les études des configurations centrales considèrent ordinairement les classes d'équivalence de configurations modulo les homothéties plutôt que les configurations. Notre point de vue ne nous le permet pas : nous fixons le multiplicateur  $\lambda$  ; nous acceptons donc au plus une configuration par classe. Sa taille se calcule explicitement pour la famille homogène, mais pas dans le cas général. Même si nous nous étions limités à l'étude de la famille homogène, nous aurions dû considérer le cas général pour étudier le comportement de  $l$  lors d'un changement de la taille du tenseur  $\alpha$ , bien différent du comportement de  $g$ . En effet,

$$\Phi(s) = -\frac{s^\kappa}{\kappa} - \frac{\lambda s}{M} \quad \text{et} \quad \varphi(s) = -s^a - \frac{\lambda}{M}$$

donnent

$$\Psi(S) = -\frac{1}{\iota} \left( -S - \frac{\lambda}{M} \right)^\iota \quad \text{et} \quad \psi(S) = \left( -S - \frac{\lambda}{M} \right)^{\frac{1}{a}},$$

avec  $a = \kappa - 1$  et  $1/\kappa + 1/\iota = 1$ , soit  $\iota = 1/3$  dans le cas newtonien.

Soit un tenseur  $\beta$  non nul de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ . La fonction  $g$  restreinte à la droite passant par  $\beta$  et par l'origine possède au plus un minimum, puisque  $g$  est convexe. Notons  $\beta_r$  ce minimum, s'il existe. Soit  $\sigma$  une variable réelle. La dérivée en  $\sigma$  de la fonction  $g(\sigma\beta_r)$  doit s'annuler en  $\sigma = 1$ , ce qui donne

$$\langle dg(\beta_r), \beta_r \rangle = 0.$$

Cette équation, découlant évidemment de  $dg(\beta_r) \circ \beta_r = 0$ , possède la même symétrie que cette dernière vis-à-vis de la transformation de Legendre. Le problème analogue de minimisation de  $l$  sur les classes modulo homothétie aboutit aux mêmes tenseurs, que nous appelons "tenseurs radiaux" ou "configurations radiales".

Considérons un élément  $\alpha_r$  de  $\mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$ , minimum de  $l$  restreinte à la droite orientée passant par l'origine et par  $\alpha_r$ . La dérivée de  $l$  suivant le vecteur  $\alpha_r$  est croissante le long de la droite, puisque  $l$  est convexe, et elle vaut  $\langle dl(0), \alpha_r \rangle = \langle \beta_0, \alpha_r \rangle$  à l'origine. Comme cette dérivée s'annule en  $\alpha_r$ , on doit avoir

$$\langle \beta_0, \alpha_r \rangle < 0.$$

Nous avons obtenu une estimation très simple de l'image  $\alpha_r = dg(\beta_r)$  d'un tenseur radial  $\beta_r$ , et donc d'un tenseur central. Elle ne requiert que l'hypothèse du 2.7.

**2.9 Un résultat de Yoccoz.** Dès que l'on choisit un sous-espace vectoriel  $U$  de  $\mathcal{D}$ , on privilégie le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ , noté  $U \vee U$ , des tenseurs symétriques de support  $U$ . Le cône positif de cet espace a une interprétation géométrique simple. Soit  $\beta$  un élément de  $U \vee U_+$  dont le rang est la dimension de  $U$ , et  $x$  une configuration absolue associée dans un espace euclidien  $E$ . Tous les autres éléments de  $U \vee U_+$  sont des configurations relatives associées aux configurations absolues de la forme  $R \circ x$ , c'est-à-dire les transformées de  $x$  par un endomorphisme  $R$  de  $E$ .

De la convexité de la fonction  $g$  nous déduisons en suivant [Yoc] qu'il existe au plus un point critique de  $g$  restreinte à  $U \vee U$ , qui est un minimum. Nous appelons "tenseur minimal" ou "configuration minimale" un tel point critique. Tout tenseur central est évidemment minimal.

Pour la famille homogène, on a non seulement l'unicité, mais aussi l'existence du tenseur minimal, dès que  $U \vee U$  coupe le cône de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  défini par les conditions  $s_{ij} > 0$ , pour tout  $i < j$ . Mais ce tenseur n'est pas toujours une configuration.

**2.10 Estimations de Moeckel.** Nous supposons ici que les  $\mu_{ij}$  sont de la forme  $m_i m_j$ , et que l'espace  $\mathcal{D}$  est muni de la forme quadratique des masses  $\mu$ . La nullité de  $\beta \circ dg(\beta) = \beta \circ \alpha$  entraîne celle de

$$\eta = \beta \circ \alpha \circ \mu^{-1} + \mu^{-1} \circ \alpha \circ \beta.$$

Signalons que la réciproque est vraie si  $\beta$  est une configuration, d'après [4], qui donne aussi l'expression  $\pi_{ij} = 2(P_{ii} + P_{jj} - P_{ij} - P_{ji})$  des coordonnées de type "carrés des distances mutuelles" du tenseur  $\eta$  de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ . Les  $P_{kl}$  sont reliés aux  $p_{kl}$  du paragraphe 2.5 :

$$P_{kl} = \frac{p_{kl}}{m_l} = \frac{1}{2} \sum_{h \neq l} (s_{kh} - s_{kl}) m_h S_{hl}.$$

On trouve

$$\pi_{ij} = s_{ij} \Sigma_{ij} + \sum_{h \neq i, j} m_h (s_{ih} - s_{jh}) (S_{ih} - S_{jh}) = 0, \quad (6)$$

en posant

$$\Sigma_{ij} = 2(m_i + m_j) S_{ij} + \sum_{h \neq i, j} m_h (S_{ih} + S_{jh}). \quad (7)$$

Le deuxième terme de l'expression de  $\pi_{ij}$  est positif, puisque  $\varphi$  est croissante. On a donc, pour tout tenseur central,

$$s_{ij} > 0 \quad \implies \quad \Sigma_{ij} < 0.$$

Ces estimations ont été trouvées par Moeckel dans le cas des configurations centrales planes ; [Moe] effectuait aussi leur somme. Pour un tenseur central dont tous les  $s_{ij}$

sont positifs, donc en particulier pour tout tenseur central de la famille homogène, on obtient

$$\sum_{i < j} \Sigma_{ij} = n \sum_{i < j} (m_i + m_j) S_{ij} < 0.$$

Cette estimation peut être mise sous une forme qui permet de la comparer à celle du paragraphe 2.8 :

$$\frac{1}{n} \sum_{i < j} \Sigma_{ij} = \langle \mu^{-1}, \alpha \rangle < 0.$$

L'égalité se prouve simplement en utilisant les représentations matricielles. Remarquons que  $\mu^{-1}$ , élément de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ , peut être considéré comme une configuration relative. Comme tel, il possède la curieuse propriété de posséder un orthocentre, confondu avec le centre de masse des corps. Pour s'en assurer rapidement, on comparera deux représentants matriciels de  $\mu^{-1}$  : la matrice diagonale dont le  $i$ -ième élément diagonal vaut  $1/m_i$  d'une part, la matrice des  $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$  du début de la partie 4 de [4] d'autre part. Nous appelons  $\mu^{-1}$  "la configuration orthocentrique des masses". Son ellipsoïde d'inertie est une sphère. Son rôle est évoqué, dans le cas de trois corps, dans l'introduction de [1] et à la fin de [4].

**2.11 Configurations de Moulton.** On appelle configuration de Moulton une configuration centrale de rang un. Nous donnerons deux résultats généraux sur ces configurations. Le premier, dû à Moulton, résoud qualitativement le problème, en décrivant toutes les solutions. Le second, dû à Conley [Pac], montre que les configurations de Moulton sont de corang  $n - 2$ , et que la forme  $\alpha$  est négative. Si la théorie des tenseurs de Dziobek, commencée au paragraphe 2.14, possédait deux résultats analogues, nous l'estimerions achevée.

Une configuration  $\beta$  de dimension 1 peut bien entendu se représenter par un élément  $X$  de l'espace  $\mathcal{D}$ ,  $X$  et  $-X$  représentant la même configuration relative. On posera  $\beta = X \otimes X$ . Si  $(x_1, \dots, x_n)$  représente  $X$ , cela signifie simplement que  $s_{ij} = (x_i - x_j)^2$ . Nous noterons en conséquence

$$\tilde{g}(X) = g(\beta) = \sum_{i < j} \mu_{ij} \Phi((x_i - x_j)^2).$$

La dérivée seconde ou Hessienne de  $\tilde{g}$  est un élément de  $\mathcal{D}^* \vee \mathcal{D}^*$ . On la représente par la matrice des  $\Omega_{ij}$ , dont on calcule les coefficients tels que  $i < j$  :

$$\Omega_{ij} = -\mu_{ij} (4s_{ij} \varphi'(s_{ij}) + 2\varphi(s_{ij})).$$

**Théorème.** Supposons que la fonction  $r \mapsto \Phi(r^2)$  est strictement convexe, et que sa dérivée tend vers  $-\infty$  en zéro et s'annule quelque part (hypothèse du 2.7). Parmi les configurations linéaires telles que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , il existe une unique configuration de Moulton. Il y a donc au total  $n!/2$  configurations relatives de Moulton.

*Démonstration.* La fonction  $\tilde{g}$  est convexe, comme somme de fonctions strictement convexes, à l'intérieur de l'ouvert de  $\mathcal{D}$  défini par les inégalités  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Pour prouver l'unicité du point critique, il faut montrer qu'elle est strictement convexe. Cela découle du fait que les formes linéaires  $x_i - x_j$  engendrent  $\mathcal{D}^*$ . Plus concrètement, la Hessienne de  $\tilde{g}$  est définie positive, d'après l'expression des coefficients  $\Omega_{ij}$ , l'expression de la dérivée seconde en  $r$

$$r \mapsto 2\varphi(r^2) + 4r^2\varphi'(r^2)$$

de la fonction  $r \mapsto \Phi(r^2)$ , et l'expression (5). L'existence du point critique se déduit simplement du comportement de la fonction sur les bords du domaine et à l'infini.

L'hypothèse du théorème est vérifiée par la famille homogène dès que  $a < -1/2$ . La démonstration de Moulton n'utilisait qu'implicitement la convexité de  $\tilde{g}$ . Un calcul de Smale et Shub [Sma2] prouvant que tout point critique de  $\tilde{g}$  est un minimum a clarifié les arguments de [Mou]. Saari[Saa1] a, le premier, explicité l'argument de convexité. La présentation que nous venons de donner est encore un peu plus simple, parce qu'au lieu de fixer la taille  $I$  de la configuration, nous fixons, depuis le début, le multiplicateur  $\lambda$ . Nous l'avons empruntée à Yoccoz[Yoc].

**2.12.** Nous voulons obtenir des renseignements sur la quantité  $\alpha = dg(\beta)$  quand  $\beta = X \otimes X$  est une configuration de Moulton. Établissons d'abord un système d'équations simplifié. On peut abrégier  $\alpha \circ \beta = 0$  en  $\alpha \circ X = 0$ , qui signifie que pour tout  $i$ ,

$$\sum_{k \neq i} \mu_{ik} S_{ik}(x_i - x_k) = 0.$$

Nous supposons que les  $\mu_{ik}$  s'écrivent  $m_i m_k$ . L'équation des configurations de Moulton peut encore s'écrire

$$Y = X \circ A = 0 \quad \text{avec} \quad A = \alpha \circ \mu^{-1} \in \mathcal{D}^* \otimes \mathcal{D}.$$

Nous n'avons fait que retrouver l'équation "absolue" des configurations de Moulton, celle que nous avons utilisée pour étudier les configurations d'Euler dans l'introduction.

On sait, après la proposition 1.15 de [4], que  $\mu^{-1}$  "divise par les masses" : on a envie de retenir le système simplifié

$$y_i = \sum_{k \neq i} m_k S_{ik}(x_i - x_k) = 0.$$

C'est pourtant le système formé par les équations  $y_i = y_j$ ,  $i < j$ , que Conley a exploité.

Justifions *a posteriori* : l'utilisateur dogmatique de la notion de disposition n'écrira jamais  $y_i = 0$ . Le  $n$ -uple  $(y_1, \dots, y_n)$  représente la disposition  $Y$  ;  $y_i = 0$  ne concerne que le représentant. Ici c'est légitime, parce qu'on a implicitement choisi pour  $\mu^{-1}$  un représentant ayant la propriété *ad hoc* : il envoie la codisposition nulle sur le  $n$ -uple  $(0, \dots, 0)$ , représentant de la disposition nulle. C'est légitime mais ce n'est pas ce qu'il faut faire...

Nous calculons donc, avec Conley,

$$2(y_i - y_j) = (x_i - x_j)\Sigma_{ij} + \sum_{k \neq i,j} m_k(S_{ik} - S_{jk})(x_i + x_j - 2x_k). \quad (8)$$

Les  $\Sigma_{ij}$  sont définis par l'expression (7). La formule (6) se déduit aisément de (8) en multipliant les deux membres par  $x_i - x_j$  puisque  $X \otimes Y = X \otimes X \circ A = \beta \circ A$ . Nous retiendrons de (8) sa forme algébrique, et non pas le prétexte qui nous y a conduit : l'étonnant lemme qui suit ne parle pas de configuration centrale.

**Lemme.** Supposons  $\mu_{ij} = m_i m_j$ . Soit  $X$  une configuration alignée représentée par  $(x_1, \dots, x_n)$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Posons comme d'habitude  $\beta = X \otimes X$  et  $\alpha = dg(\beta)$ . L'endomorphisme  ${}^t A = \mu^{-1} \circ \alpha$  de  $\mathcal{D}$  possède exactement une disposition propre unitaire  $Q_0$  dont les représentants  $(q_1, \dots, q_n)$  vérifient  $q_1 < \dots < q_n$ , et c'est à elle qu'est associée la plus grande valeur propre de  ${}^t A$ .

*Démonstration.* Etudions la fonction  $\langle \alpha, Q \otimes Q \rangle$  restreinte à la sphère unité  $\mathcal{S}$  de l'espace des dispositions, définie par  $\|Q\|^2 = \langle \mu, Q \otimes Q \rangle = 1$ . Son champ de vecteur gradient s'écrit

$$2{}^t A \circ Q - 2\sigma Q,$$

où  $\sigma$  désigne un multiplicateur de Lagrange dont la valeur nous indiffère. La formule (8) explicitait l'équation  $Y = X \circ A$ . Explicitons de la même façon  $P = Q \circ A = {}^t A \circ Q$ , et choisissons une valeur de  $Q$  telle que

$$q_1 < \dots < q_i = q_{i+1} < \dots < q_n.$$

Le second membre de l'équation (8), où les  $x$  sont devenus des  $q$ , voit son premier terme s'annuler. Les autres sont tous négatifs. Le premier membre  $2(p_i - p_{i+1})$  est donc strictement négatif. Ceci est une information sur le gradient  $2P - 2\sigma Q$  de la fonction  $\langle \alpha, Q \otimes Q \rangle$  au point considéré : le vecteur gradient "entre" dans le simplexe de  $\mathcal{S}$  défini par les inégalités  $q_1 < \dots < q_n$ . Il en est ainsi pour tous les points du bord de ce simplexe, qui contient donc le maximum strict de la fonction étudiée. Ce dernier correspond comme on le sait au vecteur propre de plus grande valeur propre. Maintenant, on aurait

$$0 = \langle Q, Q' \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i < j} (q_i - q_j)(q'_i - q'_j),$$

s'il y avait deux dispositions propres  $Q$  et  $Q'$  dans le simplexe. C'est absurde : tous les termes de la somme sont positifs.

**Théorème.** Pour une configuration de Moulton de  $n$  corps, la quantité  $\alpha$  est négative de rang exactement  $n - 2$ .

*Démonstration.* On a  $X \circ A = 0$ , autrement dit  $X$  est disposition propre de valeur propre nulle. Il suffit d'appliquer le lemme.



**2.13 Remarque.** Pour tout  $i$  et tout  $j$ , les configurations de Moulton vérifient l'équation  $y_i - y_j = 0$ , que l'expression (8) développe. Elles vérifient donc

$$P_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} = 0,$$

quels que soient les indices  $i$ ,  $j$  et  $k$ . D'après le procédé d'élimination qui nous y a conduit, l'équation  $\delta = 0$  de l'introduction n'est autre que  $P_{123} = 0$ . Le calcul montre que  $\delta$  vaut précisément  $P_{123}$ . Ainsi, le passage des équations  $y_i = y_j$  aux équations  $P_{ijk} = 0$  correspond, même quand  $n$  est plus grand que 3, à l'élimination de  $\lambda$ . Autrement dit, au lieu d'écrire que la disposition  $X$  est dans le noyau de  ${}^tA$ , on écrit avec les nouvelles équations qu'elle est disposition propre de  ${}^tA$ , ou encore que  ${}^tA \circ \beta = \beta \circ A$ . Ainsi les équations  $P_{ijk} = 0$  sont les équations des *configurations équilibrées*, écrites dans le cas particulier d'une configuration de rang un. Les quantités  $P_{ijk}$  sont définies plus généralement dans [4].

**2.14 Configurations de Dziobek.** Nous appelons tenseur de Dziobek un tenseur central de corang un, et configuration de Dziobek une configuration centrale de corang un. Nous faisons l'hypothèse du 2.7 : le tenseur de rang un  $\alpha = dg(\beta)$  est négatif, d'après l'estimation du 2.8. Nous posons

$$\alpha = -\Delta \otimes \Delta, \quad \text{avec} \quad \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathcal{D}^*.$$

Nous avons donc  $\mu_{ij} S_{ij} = \Delta_i \Delta_j$ . Introduisons une nouvelle fonction qui correspond à la restriction de la transformée de Legendre  $l$  aux  $\alpha$  de rang 1 :

$$\tilde{l}(\Delta) = l(-\Delta \otimes \Delta) = \sum_{i < j} \mu_{ij} \Psi\left(\frac{\Delta_i \Delta_j}{\mu_{ij}}\right).$$

Ses points critiques sont les tenseurs de Dziobek. Ils vérifient l'équation abrégée  $\beta \circ \Delta = 0$ . Explicitement, on adopte le  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$ ,

$$t_i = \sum_{k \neq i} \Delta_j s_{ij} = \sum_{k \neq i} \Delta_j \psi\left(\frac{\Delta_i \Delta_j}{\mu_{ij}}\right),$$

pour représenter la disposition  $T = -2\beta \circ \Delta$  et on écrit le système  $t_i = t_j$ ,  $i < j$ .

L'hypothèse  $\mu_{ij} = m_i m_j$  introduit naturellement les quantités  $d_i = \Delta_i / m_i$ . On peut les considérer comme les coordonnées d'un représentant de la disposition  $\mu^{-1} \circ \Delta$ . Les estimations de Moeckel prennent une forme simplifiée, qu'on retrouve facilement en formant les quantités  $t_i - t_j$  :

$$-\Sigma_{ij} = (\Delta_i - \Delta_j)(d_i - d_j) > 0.$$

Etablissons maintenant des équations vérifiées par les tenseurs de Dziobek, analogues à celles de la remarque 2.13, et qui jouent un rôle important dans la troisième partie. Les équations  $t_i = t_j$  entraînent, quels que soient  $i$ ,  $j$  et  $k$ ,

$$P_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_i & t_j & t_k \\ d_i & d_j & d_k \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons gardé la notation  $P_{ijk}$  parce qu'il s'agit encore une fois de la quantité utilisée dans [4] pour définir explicitement les configurations équilibrées (ou les tenseurs équilibrés), particularisée au corang un. Fixons en effet  $\Delta$  et changeons  $\beta$  en  $\beta + \sigma\mu^{-1}$ ,  $\sigma$  désignant un nombre réel arbitraire. Les  $s_{ij}$  sont changés en  $s_{ij} + \sigma(1/m_i + 1/m_j)$ , et les  $t_i$  sont changés en

$$t_i + \sigma\left(-\frac{\Delta_i}{m_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\Delta_j}{m_j}\right).$$

Les déterminants  $P_{ijk}$  sont inchangés. La nullité des  $t_i - t_j$  exprimait celle de  $\Delta \circ \beta$ . La nullité des  $P_{ijk}$  exprime donc que  $\Delta$  est vecteur propre de l'endomorphisme  $\mu \circ \beta$ . Cela revient à la commutation  ${}^t A \circ \beta = \beta \circ A$ , avec  $A = \alpha \circ \mu^{-1}$ , équation des configurations équilibrées. Indiquons enfin les équations

$$Q_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_i & t_j & t_k \\ \Delta_i & \Delta_j & \Delta_k \end{vmatrix} = 0,$$

qui possèdent par rapport aux équations  $t_i = t_j$  une propriété utile : elles sont invariantes quand on change tous les  $s_{hl}$  en  $s_{hl} + \sigma$ ,  $\sigma$  étant un nombre réel arbitraire.

**2.15 Notion de convexité des configurations.** Les configurations de Dziobek sont divisées de façon naturelle en configurations convexes et configurations non convexes.

**Définition.** Soient  $n$  corps engendrant un espace affine de dimension exactement  $n - 2$ . La configuration qu'ils forment est dite convexe si aucun des corps n'est situé dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des autres.

On peut associer à tout tenseur  $\beta$  de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  de rang  $n - 2$  une codisposition notée  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  engendrant son noyau. Cela autorise la caractérisation qui suit.

**Proposition.** Une configuration de  $n$  corps engendrant un espace affine de dimension exactement  $n - 2$  est non convexe si et seulement si  $n - 1$  des  $\Delta_i$  associés à la configuration relative sont de même signe.

*Démonstration.* Si c'est  $\Delta_j$  qui n'a pas le même signe que les autres, le corps  $j$  est barycentre des autres avec les poids positifs  $-\Delta_i/\Delta_j$ .

**Extension de la définition.** Un tenseur  $\beta$  de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  de rang  $n - 2$  est dit non convexe si et seulement si  $n - 1$  des  $\Delta_i$  sont de même signe.

Comme Yoccoz l'avait fait remarquer dans [Yoc], la considération du nombre des coefficients  $\Delta_i$  positifs donne une classification des configurations de rang  $n - 2$  plus précise que la dichotomie convexe-non-convexe, dès que  $n$  est supérieur ou égal à six. Voyons cependant que c'est seulement à la frontière convexe-non-convexe qu'il est impossible de trouver des configurations de Dziobek.

**Proposition.** Si  $n > 3$ , il n'existe pas de configuration de Dziobek telle que  $n - 2$  des  $\Delta_i$  soient d'un signe donné et un des deux autres soit nul.

*Démonstration.* Supposons par exemple que  $\Delta_1 = 0$ , que  $\Delta_2 < 0$  et que tous les autres  $\Delta_i$  sont positifs. Notons  $s_0 = \psi(0)$ . Pour tout  $k > 1$ , on a  $s_{1k} = s_0$ . Tous les points sauf le premier sont donc sur une même hypersphère, mais aussi sur un même hyperplan, puisque  $\Delta_1 = 0$ . La configuration de  $n - 1$  points sur l’hyperplan est donc “cosphérique” et par suite convexe. Or l’hypothèse sur les  $\Delta_k$ ,  $k > 1$ , signifie au contraire qu’elle est non convexe.

**Remarque.** Pour une configuration  $\beta$  arbitraire, l’existence de coefficients  $\Delta_i$  tels que  $t_1 = \dots = t_n = 0$  signifie non seulement que le rang de  $\beta$  est au plus  $n - 2$ , mais aussi que la configuration est “cosphérique”. Dès que l’on a une configuration de Dziobek cosphérique, comme celle du 2.17, on peut obtenir un tenseur de Dziobek avec un corps de plus et un des coefficients  $\Delta_i$  nul.

## 2.16 Symétries des configurations de quatre corps

**Définition.** On dit qu’une configuration de quatre corps possède une symétrie de type plan si pour une certaine numérotation des corps on a  $s_{13} = s_{14}$  et  $s_{23} = s_{24}$ . On dit qu’elle possède une symétrie de type axe si pour une certaine numérotation des corps on a  $s_{12} = s_{34}$  et  $s_{13} = s_{24}$ .

**Remarque.** Les définitions ci-dessus s’étendent immédiatement aux tenseurs de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ . Elles ne dépendent pas du rang de la configuration. Elles ne correspondent aux notions habituelles de “plan de symétrie” et “axe de symétrie” que pour les configurations de rang trois. Pour les configurations planes, il faudrait dire respectivement “axe de symétrie contenant deux des points” et “axe de symétrie sur lequel la configuration se projette en deux points”.

## 2.17 Un résultat d’unicité

**Proposition.** Supposons que le potentiel  $U$  appartient à la famille homogène, et que l’exposant  $a$  est plus petit que  $-1$ . Donnons-nous quatre masses  $m_1, m_2, m_3$  et  $m_4$ , telles que  $m_1 = m_4$  et  $m_2 = m_3$ . Il existe une et une seule configuration de Dziobek ayant une symétrie de type axe et des masses disposées comme sur la figure.

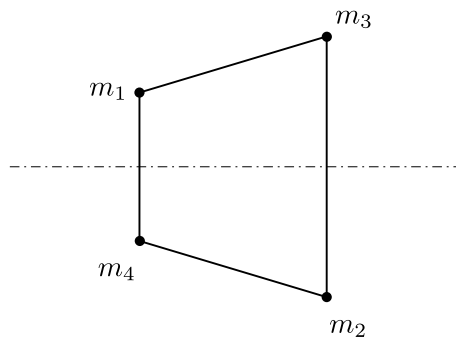


Figure 1

L’hypothèse de symétrie se traduit par  $\Delta_1 + \Delta_4 = \Delta_2 + \Delta_3 = 0$ . Ainsi, les  $s_{ij} = \psi(d_i d_j)$  vérifient  $s_{12} = s_{34}$  et  $s_{13} = s_{24}$ . Ces égalités équivalent à une propriété de  $\beta$ , considéré comme une forme quadratique sur  $\mathcal{D}^*$  : pour cette forme

la codisposition  $\zeta = (1, -1, -1, 1)$  est orthogonale au plan  $\pi$  d'équation  $\Delta_1 + \Delta_4 = 0$ . Calculons, à l'aide de la formule (3), les restrictions aux deux espaces orthogonaux. On pose  $\xi = (\xi_1, \xi_2, -\xi_2, -\xi_1)$ .

$$\begin{aligned}\langle \beta, \zeta \otimes \zeta \rangle &= 2s_{12} + 2s_{13} - s_{14} - s_{23}, \\ \langle \beta, \xi \otimes \xi \rangle &= s_{14}\xi_1^2 + s_{23}\xi_2^2 + 2(s_{13} - s_{12})\xi_1\xi_2.\end{aligned}$$

Le choix des positions des masses revient à imposer  $\Delta_1 > 0$  et  $\Delta_2 > 0$ . Dans ce domaine, les  $s_{ij} = \psi(d_i d_j)$  et  $s_0 = \psi(0)$  peuvent être ordonnés de deux façons :

$$\begin{aligned}d_2 < d_1 &\Rightarrow s_{14} < s_{13} < s_{23} < s_0 < s_{12}, \\ d_2 > d_1 &\Rightarrow s_{23} < s_{13} < s_{14} < s_0 < s_{12}.\end{aligned}$$

Montrons d'abord que  $\beta \circ \Delta = 0$  entraîne  $\beta \geq 0$ . Autrement dit si  $\beta$  est un tenseur central, c'est une configuration. La stratégie de démonstration doit tenir compte du fait qu'aux valeurs de  $\Delta$  voisines de celle donnant un tenseur central correspondent des  $\beta$  en général de rang 3 et pas toujours positifs. On obtient tout de suite la positivité dans la direction de  $\zeta$ . Il suffit donc de se placer dans le plan  $\pi$ .

Ce plan est muni des coordonnées naturelles  $(\xi_1, \xi_2)$ . Munissons-le de la métrique standard ou tout aussi bien de la métrique des masses  $2(m_1^{-1}\xi_1^2 + m_2^{-1}\xi_2^2)$ . La restriction de  $\beta$  au plan  $\pi$  possède alors une base orthonormée de vecteurs propres, qui ne coïncide jamais avec la base standard : le coefficient  $2(s_{13} - s_{12})$  de  $\xi_1\xi_2$ , ne peut s'annuler tant que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  restent strictement positifs. Comme ce coefficient est strictement négatif, nous savons plus précisément que *la valeur propre associée au vecteur propre situé dans le premier quadrant est toujours la plus petite des deux*. Nous invitons le lecteur à imiter la méthode de la démonstration du lemme 2.12 pour vérifier cette affirmation élémentaire.

Quand  $\beta$  est un tenseur de Dziobek, cette valeur propre correspond à la direction propre  $\Delta$ . Elle est donc nulle et l'autre est positive :  $\beta$  est une configuration.

Montrons maintenant qu'une configuration de Dziobek, vue comme un point critique de la fonction  $\tilde{l}$  restreinte au premier quadrant  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$  du plan  $\pi$ , n'est jamais dégénérée. Cette assertion suffit à prouver la proposition : elle assure qu'aucune bifurcation ne peut se produire lorsqu'on fait varier les deux masses  $m_1$  et  $m_2$ . Les axes  $\Delta_1 = 0$  et  $\Delta_2 = 0$  sont, nous le savons, des frontières étanches par lesquelles les configurations de Dziobek ne peuvent passer. Il nous suffit donc de savoir énumérer les solutions pour une valeur particulière des masses  $m_1$  et  $m_2$ . Nous savons le faire : le corollaire du 3.3 montre que quand  $m_1 = m_2$ , la seule configuration de Dziobek est le carré.

Commençons par des généralités sur la Hessienne  $\partial^2 \tilde{l}$  de la fonction  $\tilde{l}$ . Au point  $\Delta$  c'est un élément de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$ , soit encore une forme quadratique sur l'hyperplan  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathbb{R}^n$ . On peut l'étendre de diverses manières en une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ . L'expression la plus simple s'obtient en considérant d'emblée  $\tilde{l}$  comme une fonction de  $\mathbb{R}^n$ . On trouve :

$$\langle \partial^2 \tilde{l}, \xi \otimes \xi \rangle = \sum_{i < j} \frac{\psi'(S_{ij})}{\mu_{ij}} (\Delta_i \xi_j + \Delta_j \xi_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \psi(S_{ij}) \xi_i \xi_j,$$

avec  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathcal{D}^*$ . Une expression alternative peut être obtenue dans le cas de la famille homogène, où l'on a, pour tout  $S$ ,

$$S\psi'(S) = \frac{s^a - s_0^a}{as^{a-1}}, \quad \text{avec } s = \psi(S) \quad \text{et} \quad s_0 = \psi(0).$$

On trouve alors, en supposant les  $\Delta_i$  non nuls,

$$\langle \partial^2 \tilde{l}, \xi \otimes \xi \rangle = \frac{1}{a} \sum_i \frac{t_i \xi_i^2}{\Delta_i} + 2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \sum_{i < j} s_{ij} \xi_i \xi_j - \frac{w}{a},$$

avec

$$w = \sum_{i < j} \frac{s_0^a (\Delta_i \xi_j + \Delta_j \xi_i)^2}{s_{ij}^{a-1} \Delta_i \Delta_j}.$$

Dans le cas de la symétrie de type axe, cette expression montre rapidement que  $\tilde{l}$  restreinte au plan  $\pi$  ne possède que des points critiques de type selle. Il suffit de voir que  $\partial^2 \tilde{l}$  est positive dans une certaine direction et négative dans une autre. Dans la direction radiale  $\xi_1 = \Delta_1$  et  $\xi_2 = \Delta_2$ , la forme quadratique Hessienne est positive (voir le 2.8). Dans la direction  $\Delta_1 \xi_2 + \Delta_2 \xi_1 = 0$ , elle est négative dès que  $a < -1$ . En effet,  $w$  est somme de termes négatifs, tous les  $t_i$  sont nuls, puisqu'ils doivent être égaux et que  $t_1 = -t_4$ , et il ne reste que le second terme, multiple négatif de  $\beta$ , d'après la formule (3). La proposition est démontrée.

### 3. Symétries des configurations centrales

Nous dégageons ici des obstructions à l'existence de configurations de Dziobek ne possédant pas une symétrie d'un type donné.

**3.1. Illustration de la méthode.** Le résultat qui suit ne concerne, parmi les potentiels du 2.4 du type particulier (2), que ceux pour lesquels  $\kappa \geq 2$ . Néanmoins, sa démonstration, à laquelle est consacré tout le paragraphe, a l'aspect d'une méthode générale, tandis que les preuves que nous donnerons des résultats intéressant le potentiel newtonien ressemblent à des suites d'astuces. Il s'agit pourtant de la même démarche.

**Théorème.** Pour un potentiel du 2.4 tel que  $\psi' > 0$ ,  $\psi'' < 0$  et  $\psi''' > 0$ , les configurations (ou les tenseurs) de Dziobek de quatre masses égales, convexes, possèdent au moins une symétrie.

Rappelons qu'une codisposition  $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$  détermine dans le cas de masses égales à l'unité les variables  $S_{ij} = \Delta_i \Delta_j$ , avec  $i < j$ , puis les variables  $s_{ij} = \psi(S_{ij})$ . Le tenseur  $\beta$  de coordonnées  $s_{ij}$  est de Dziobek si les conditions  $t_k = t_l$  du 2.14 sont vérifiées pour tout  $k$  et tout  $l$ . Quitte à renuméroter les  $\Delta_i$ , supposer que  $\beta$  n'a pas de symétrie (2.16) et qu'il est convexe au sens du 2.15 quand il est de Dziobek se traduit par les deux conditions

$$\Delta_1 < \Delta_2 \leq 0 < \Delta_3 < \Delta_4 \quad \text{et} \quad \Delta_2 + \Delta_3 > 0.$$

En effet,  $\Delta_1 = \Delta_2$  entraînerait  $S_{13} = S_{23}$  et  $S_{14} = S_{24}$ , donc  $s_{13} = s_{23}$  et  $s_{14} = s_{24}$ . La configuration aurait une symétrie de type plan. La même chose arriverait avec l'hypothèse  $\Delta_3 = \Delta_4$ , tandis que l'hypothèse  $\Delta_2 + \Delta_3 = 0$  entraînerait, d'après les identités

$$\begin{aligned}\Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4 &= (\Delta_1 + \Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_3), \\ \Delta_1\Delta_3 - \Delta_2\Delta_4 &= (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_3 + \Delta_2), \\ \Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3 &= (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_4 + \Delta_2),\end{aligned}$$

les égalités  $S_{13} = S_{24}$  et  $S_{12} = S_{34}$ , traduisant une symétrie de type axe. Nous avons donc

$$S_{14} < S_{13} < S_{24} < S_{23} < S_{12} < S_{34}.$$

Nous fixons les variables  $\Delta_i$ . Les équations  $t_k = t_l$  sont linéaires dans les variables  $s_{ij}$ . Les conditions sur les dérivées de  $\psi$  se traduisent par des inéquations linéaires dans ces mêmes variables. Tout se ramène à prouver l'incompatibilité des équations et des inéquations, en appliquant la méthode dite du simplexe.

*Conditions sur de graphe de  $\psi$ .* Remarquons que dans la suite nous parlons de convexité parfois au sujet de la configuration, parfois au sujet du graphe de  $\psi$ , et parfois pour décrire certains espaces de fonctions  $\psi$ . L'énoncé élémentaire qui suit nous servira à décrire ces derniers espaces.

**Lemme.** Considérons le simplexe de l'espace affine de dimension  $k$  donné par les  $k + 1$  sommets indépendants  $A_0, A_1, \dots, A_k$ . Considérons une forme linéaire  $\omega$  de l'espace affine telle que  $\omega(A_0) > 0$ , et  $\omega(A_i) \leq 0$  pour tout les  $i$  non nuls. L'ensemble convexe des points intérieurs au simplexe et vérifiant  $\omega > 0$  est encore un simplexe (c'est-à-dire possède seulement  $k + 1$  sommets, qui sont indépendants).

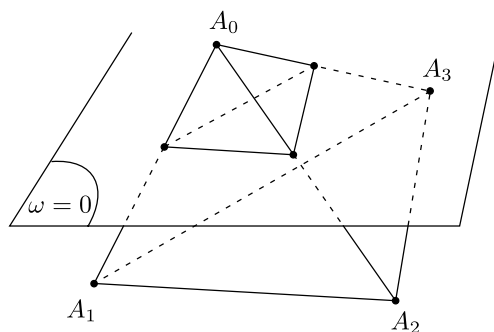


Figure 2

**Lemme.** Etant donnés  $p$  nombres réels  $S_1 < S_2 < \dots < S_p$ , considérons l'ensemble des  $p$ -uples  $(s_1, \dots, s_p)$  de nombres réels tels qu'il existe une fonction  $\psi$  croissante et concave vérifiant  $\psi(S_i) = s_i$  pour tout  $i$ . Identifions à  $(s_1, \dots, s_p)$  tous les  $p$ -uples de la forme  $(\xi s_1 + \eta, \dots, \xi s_p + \eta)$ ,  $\xi > 0$  et  $\eta$  désignant deux nombres réels. L'espace quotient obtenu est un simplexe d'un espace vectoriel  $H$  de dimension  $p - 2$ .

*Démonstration.* L'espace  $H$  est l'espace des  $p$ -uples  $(s_1, \dots, s_p)$  avec les conditions de normalisation  $s_1 = 0$  et  $s_p = 1$ . La condition de croissance de  $\psi$  correspond à la

simple condition  $0 < s_2 < \dots < s_{p-1} < 1$ , qui délimite un simplexe de  $H$ , dont les sommets  $A_1, \dots, A_{p-1}$  sont donnés par les  $p$ -uples

$$A_1 = (0, \dots, 0, 1), \quad A_2 = (0, \dots, 0, 1, 1), \quad \dots, \quad A_{p-1} = (0, 1, \dots, 1).$$

Le premier membre de la première condition de concavité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} < 0$$

définit une forme linéaire sur  $H$  nulle sur  $A_1, \dots, A_{p-3}$ , positive sur  $A_{p-2}$  et négative sur  $A_{p-1}$ . Cette condition “découpe”, d’après le lemme précédent, un nouveau simplexe, inclus dans le précédent. Tous ses sommets, sauf  $A_{p-2}$ , sont les mêmes que ceux du simplexe précédent. On remplace simplement  $A_{p-2}$  par

$$B_{p-2} = \left(0, \frac{S_2 - S_1}{S_3 - S_1}, 1, \dots, 1\right).$$

On considère ensuite la deuxième condition de convexité, faisant intervenir  $s_2, s_3$  et  $s_4$ . On vérifie, par un raisonnement géométrique, que le lemme précédent s’applique encore. On est seulement amené à changer  $A_{p-3}$  en

$$B_{p-3} = \left(0, \frac{S_2 - S_1}{S_4 - S_1}, \frac{S_3 - S_1}{S_4 - S_1}, 1, \dots, 1\right).$$

On réitère. Les  $p - 1$  nouveaux sommets obtenus seront notés  $B_{p-1} = A_{p-1}, B_{p-2}, B_{p-3}, \dots, B_1$ .

*Nouvelle écriture des équations des configurations équilibrées.* A la place des équations  $t_k = t_l$ , il convient d’utiliser les équations  $Q_{ijk} = 0$ , qui dans le cas de masses égales sont aussi les équations  $P_{ijk} = 0$  des configurations équilibrées. Ces équations sont toujours linéaires en  $s_{ij}$  et sont de plus invariantes par la translation  $s_{ij} \mapsto s_{ij} + \sigma$ , comme les conditions sur le graphe de  $\psi$ . On peut écrire les équations des configurations équilibrées de quatre masses égales sous forme d’un système de trois équations indépendantes, au lieu des quatre équations dépendantes  $P_{ijk} = 0$ . Il suffit de considérer la base de  $\mathcal{D}^*$  formée des trois vecteurs

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \quad \zeta_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1),$$

L’espace  $\mathcal{D}$  est muni de la base duale  $(Z_1, Z_2, Z_3)$ , formée de trois dispositions représentées par les trois éléments de  $\mathbb{R}^4$  qui définissent les  $\zeta_i$ ; toutes trois sont en “double collision double”. La configuration relative  $\beta$  est donnée par la matrice

$$\beta = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sigma - 2s_{12} - 2s_{34} & s_{14} - s_{23} & s_{13} - s_{24} \\ s_{14} - s_{23} & \sigma - 2s_{13} - 2s_{24} & s_{12} - s_{34} \\ s_{13} - s_{24} & s_{12} - s_{34} & \sigma - 2s_{14} - 2s_{23} \end{pmatrix},$$

où on a posé  $\sigma = s_{12} + s_{13} + s_{14} + s_{23} + s_{24} + s_{34}$ . La matrice de  $dg$  s'écrit

$$dg = \begin{pmatrix} \Sigma + \alpha_{12} + \alpha_{34} & \alpha_{23} - \alpha_{14} & \alpha_{24} - \alpha_{13} \\ \alpha_{23} - \alpha_{14} & \Sigma + \alpha_{13} + \alpha_{24} & \alpha_{34} - \alpha_{12} \\ \alpha_{24} - \alpha_{13} & \alpha_{34} - \alpha_{12} & \Sigma + \alpha_{14} + \alpha_{23} \end{pmatrix},$$

en posant  $\Sigma = -\alpha_{12} - \dots - \alpha_{34}$ . Quand les quatre masses sont égales à un, les bases considérées sont orthonormées pour la forme  $\mu$  et les équations des configurations équilibrées sont données par la commutation des deux matrices ci-dessus :

$$0 = \begin{vmatrix} S_{13} - S_{24} & S_{14} - S_{23} \\ s_{13} - s_{24} & s_{14} - s_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{12} - S_{34} & S_{14} + S_{23} - S_{13} - S_{24} \\ s_{12} - s_{34} & 2(s_{14} + s_{23} - s_{13} - s_{24}) \end{vmatrix}, \quad (9_1)$$

$$0 = \begin{vmatrix} S_{14} - S_{23} & S_{12} - S_{34} \\ s_{14} - s_{23} & s_{12} - s_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{13} - S_{24} & S_{12} + S_{34} - S_{14} - S_{23} \\ s_{13} - s_{24} & 2(s_{12} + s_{34} - s_{14} - s_{23}) \end{vmatrix}, \quad (9_2)$$

$$0 = \begin{vmatrix} S_{12} - S_{34} & S_{13} - S_{24} \\ s_{12} - s_{34} & s_{13} - s_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{14} - S_{23} & S_{13} + S_{24} - S_{12} - S_{34} \\ s_{14} - s_{23} & 2(s_{13} + s_{24} - s_{12} - s_{34}) \end{vmatrix}. \quad (9_3)$$

Rappelons que  $S_{ij} = -\alpha_{ij}$ . On peut aussi retrouver ce système à partir de celui des  $P_{ijk} = 0$ .

*Choix d'une forme linéaire en  $s_{ij}$ .* Nous allons montrer que l'équation (9<sub>1</sub>) n'est pas compatible avec les hypothèses  $\psi' > 0$ ,  $\psi'' < 0$  et  $\psi''' > 0$ , lorsque la configuration ne présente pas de symétrie. Nous essayerons d'abord sans l'hypothèse  $\psi''' > 0$ . Appelons  $\omega$  le second membre de (9<sub>1</sub>). Evaluons le signe de cette forme linéaire sur chacun des sommets  $B_1, \dots, B_5$  du simplexe de la concavité. Nous n'avons pas à nous préoccuper de normaliser les sextuples  $(s_{14}, s_{13}, s_{24}, s_{23}, s_{12}, s_{34})$  représentant ces sommets. Nous choisissons pour faciliter les calculs les représentants suivants.

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= (S_{14}, S_{13}, S_{24}, S_{23}, S_{12}, S_{34}) & B_4 &= (0, s_{13}, 1, 1, 1, 1) \\ \tilde{B}_2 &= (S_{14}, S_{13}, S_{24}, S_{23}, S_{12}, S_{12}) & B_5 &= (0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \tilde{B}_3 &= (S_{14}, S_{13}, S_{24}, S_{23}, S_{23}, S_{23}) \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{B}_1) &= (S_{14} + S_{23} - S_{13} - S_{24})(S_{12} - S_{34}) \\ &= (\Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_4 - \Delta_3)(S_{12} - S_{34}) > 0, \\ \omega(\tilde{B}_2) &= \omega(\tilde{B}_3) = 2(S_{14} + S_{23} - S_{13} - S_{24})(S_{12} - S_{34}) > 0, \\ \omega(B_4) &= S_{24} - S_{13} - S_{23} + S_{14} + s_{13}(S_{23} - S_{14} + 2S_{34} - 2S_{12}) \\ &= (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_4 - \Delta_3) + s_{13}(\Delta_1 + \Delta_3)(\Delta_1 - \Delta_2 - 2\Delta_3), \\ \omega(B_5) &= S_{24} - S_{13} + 2(S_{34} - S_{12}) > 0. \end{aligned}$$

Seul de signe de  $\omega(B_4)$  reste à déterminer. Posons  $s_{13} = (S_{13} - S_{14})/(S_{24} - S_{14})$ . Une factorisation apparaît :

$$\omega(B_4) = \frac{(\Delta_3 - \Delta_4)(\Delta_2 + \Delta_3)}{\Delta_4(\Delta_1 - \Delta_2)}(2\Delta_1^2 - \Delta_1\Delta_2 - \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_3)$$



Le dernier facteur est négatif quand  $\Delta_1$  est voisin de  $\Delta_2$ . L'hyperplan  $\omega = 0$  coupe alors le simplexe de la concavité : nous n'avons pas obtenu de contradiction. La situation s'améliore si nous utilisons l'hypothèse  $\psi''' > 0$ . L'inégalité suivante, qui en est une conséquence, nous permet de couper en deux le simplexe de la concavité :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ S_{14} & S_{13} & S_{24} & S_{23} \\ S_{14}^2 & S_{13}^2 & S_{24}^2 & S_{23}^2 \\ s_{14} & s_{13} & s_{24} & s_{23} \end{vmatrix} > 0.$$

Les sommets  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  annulent le premier membre. Le sommet  $B_4$  le rend négatif. En effet, le polynôme du troisième degré prenant en  $S_{14}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{24}$  et  $S_{23}$  les valeurs respectives 0,  $s_{13}$ , 1 et 1 est de la forme

$$\xi(X - S_{14})(X - S_{13})(X - S_{24}) + \eta X + \zeta,$$

$\eta$  étant un nombre positif. Il prend la même valeur en  $S_{24}$  et  $S_{23}$  :  $\xi$ , et par suite le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus, doivent être négatifs. Un raisonnement analogue montre que l'inégalité est vérifiée en  $B_5$ . Nous obtenons donc d'après le premier lemme un nouveau simplexe, dont les sommets sont  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $C_4$  et  $B_5$ . Le nouveau sommet  $C_4$  est situé sur le segment  $B_4B_5$ , c'est-à-dire est de la forme

$$C_4 = (0, s_{13}, 1, 1, 1, 1).$$

On doit évaluer  $s_{13}$  à la valeur en  $S_{13}$  du polynôme du second degré qui prend en  $S_{14}$ ,  $S_{24}$  et  $S_{23}$  les valeurs respectives 0, 1 et 1. Ce polynôme s'écrit

$$\frac{(X - S_{14})(X - S_{23})}{(S_{24} - S_{14})(S_{24} - S_{23})} + \frac{(X - S_{14})(X - S_{24})}{(S_{23} - S_{14})(S_{23} - S_{24})}.$$

Ainsi

$$s_{13} = \frac{\Delta_1 \Delta_3}{\Delta_4 \Delta_2} + \frac{\Delta_1(\Delta_3 + \Delta_2)}{\Delta_2(\Delta_3 + \Delta_1)} = \frac{\Delta_1(\Delta_4 - \Delta_3)}{\Delta_4(\Delta_1 + \Delta_3)}.$$

L'expression déjà utilisée pour exprimer  $\omega(B_4)$  en fonction de  $s_{13}$  nous donne cette fois

$$\omega(C_4) = \frac{\Delta_3 - \Delta_4}{\Delta_4}(\Delta_2 + \Delta_3)(3\Delta_1 + \Delta_2) > 0.$$

Nous avons donc démontré le théorème.

**3.2. Ebauche d'une méthode générale.** La méthode employée au paragraphe précédent peut s'étendre à de nombreux autres cas, incluant le potentiel newtonien, les configurations non convexes, les masses distinctes, comme nous le verrons bientôt. Elle ne donne pas toutefois tout ce qu'on pourrait en attendre. Nous n'avons pas pu prouver, par exemple, que la configuration centrale en trapèze n'est pas accompagnée de configurations centrales asymétriques. Essayons d'indiquer comment on peut prévoir le succès ou l'échec de la méthode.

Explorons d'abord quelques généralisations possibles. Nous pourrions écrire, en plus des conditions de convexité du graphe de  $\psi$ , quand  $S_1 < S_2 < S_3$  et quand  $\psi$  est de la forme  $(S_0 - S)^{1/a}$ , avec  $a < -1$ , la condition linéaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ s_2 & s_1 & 0 \end{vmatrix} < 0.$$

Nous renoncerions donc à l'invariance de translation en  $s$ . L'ensemble des conditions choisies définirait encore un polytope convexe, dont on pourrait déterminer les sommets. Nous pourrions d'autre part ne plus nous contenter d'extraire une équation du système d'équations des configurations de Dziobek, et considérer le système tout entier, qui définit, rappelons-le, une application linéaire de  $\mathcal{D} \vee \mathcal{D}$  dans  $\mathcal{D}$ . Il faudrait alors montrer que l'image du polytope précédent ne contient jamais l'origine. La seule difficulté est de calculer. On aurait tort d'espérer en général autant de simplifications que dans les quelques exemples que nous présentons.

Indiquons maintenant pourquoi nous avons choisi (9<sub>1</sub>) au paragraphe précédent et pourquoi un autre choix n'aurait pas mené à une contradiction. Le premier membre de (9<sub>1</sub>) possède en effet l'intéressante propriété de s'annuler sur les configurations de quatre corps ayant une des symétries du carré de diagonale 1–2. Les sommes et les différences de deux équations du système (9), ainsi que les équations écrites dans [2], possèdent chacune une propriété analogue. Cette propriété se traduit par la présence de facteurs  $\Delta_2 + \Delta_3$  et  $\Delta_3 - \Delta_4$  dans les expressions  $\omega(B_i)$ . Avec une autre équation, on ne verrait pas ces facteurs apparaître. Une contradiction qui se produirait dans le cas d'une configuration asymétrique se maintiendrait pour certaines configurations symétriques : on obtiendrait un résultat de symétrie plus fort. C'est ce qui se produit par exemple dans la situation du théorème suivant.

**Théorème.** Pour un potentiel tel que  $\psi' > 0$  et  $\psi'' < 0$ , la seule configuration (le seul tenseur) de Dziobek de quatre masses égales, non convexe, est formée de trois masses en triangle équilatéral et d'une quatrième au centre du triangle.

*Démonstration.* Supposons  $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < 0 < \Delta_4$ , et ne retenons de cette hypothèse que l'ordre qu'elle impose :  $S_{14} < S_{24} < S_{34} < S_{23} < S_{13} < S_{12}$ . L'équation  $P_{134} = 0$  s'écrit

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{34} & s_{13} & s_{41} \\ S_{34} & S_{13} & S_{41} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} + s_{34} & s_{42} + s_{13} & s_{32} + s_{41} \\ S_{12} & S_{42} & S_{32} \end{vmatrix}.$$

D'après l'hypothèse  $\psi'' < 0$ , le premier membre est positif. Comme d'autre part

$$s_{12} + s_{34} > s_{42} + s_{13} > s_{32} + s_{41},$$

le second membre est négatif : il suffit pour le voir d'interpréter le déterminant comme une aire orientée. Il y a donc contradiction. Maintenant cette contradiction ne s'évanouit pas aux configurations à symétrie de type plan qu'on obtiendrait pour

$\Delta_1 = \Delta_2$  ou pour  $\Delta_2 = \Delta_3$ . La seule échappatoire est  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ , ce qui donne le théorème.

Dans la situation du paragraphe 3.1, le résultat de symétrie annoncé est optimal. Un travail en collaboration avec Carles Simó nous a montré l'existence de configurations de Dziobek convexes avec une symétrie de type axe ou de type plan. Quand le potentiel est donné par la formule (2), les solutions sont des trapèzes (symétrie de type axe) quand le paramètre  $a = k - 1$  est plus petit que la valeur critique  $a_0 = 2,65986117\dots$  solution de l'équation  $2^a - 2a = 1$ . Pour des valeurs de  $a$  plus grandes que  $a_0$ , les solutions possèdent une symétrie de type plan. La connaissance de ces résultats a bien entendu servi à orienter la démonstration du théorème du paragraphe 3.1.

**3.3. Potentiels incluant celui de Newton ; cas convexe.** Nous allons généraliser des résultats prouvés dans [2] et [3]. Nous avons montré que toute configuration centrale de quatre masses égales possède un axe de symétrie ; que la seule configuration convexe est le carré ; qu'il n'existe qu'un seul type de solution non convexe en dehors de celle à symétrie ternaire. Ces résultats valent pour le potentiel newtonien, mais aussi pour d'autres potentiels analogues. Le très long calcul qui même au dernier résultat n'a toutefois été rédigé que dans le cas potentiel newtonien. Dans les deux cas particuliers d'un potentiel donné par l'expression (2) avec  $a = -1$  (potentiel logarithmique, intervenant notamment dans le problème des tourbillons de Helmholtz) ou  $a = -1/2$ , le même calcul montre cette fois rapidement que la seule solution est la configuration à symétrie ternaire. C'est une racine double des équations.

**Proposition.** Considérons un potentiel tel que  $\psi' > 0$  et  $\psi'' > 0$  et une configuration de Dziobek de  $n \geq 4$  masses  $m_1, \dots, m_n$  vérifiant l'hypothèse "de convexité" suivante : parmi les nombres  $\Delta_i$ , seuls  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont strictement négatifs. Notons encore  $d_i = \Delta_i/m_i$ . Si  $m_2 \leq m_1$  et  $|d_2| < |d_1|$ , toutes les masses  $m_j, j > 2$ , vérifient  $m_j > m_1$  ou  $m_j < m_2$ . Si le potentiel est aussi tel que  $\psi > 0$  et  $(1/\psi)'' < 0$ , la même hypothèse donne un résultat plus fort : toutes les masses  $m_j, j > 2$ , vérifient  $m_j > m_1$ .

*Remarque.* On peut remplacer  $|d_2| < |d_1|$  par l'hypothèse plus faible et plus naturelle  $|\Delta_2| < |\Delta_1|$ , grâce à l'estimation de Moeckel déduite de l'inégalité  $s_{12} > 0$ .

*Démonstration.* Il convient d'écrire l'équation  $P_{12j} = 0$ , après avoir posé pour abrégé  $\check{s}_{2j} = s_{2j} - s_{j1} - s_{12}$ ,  $\check{s}_{j1} = s_{j1} - s_{12} - s_{2j}$  et  $\check{s}_{12} = s_{12} - s_{2j} - s_{j1}$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 \check{s}_{2j} & m_2 \check{s}_{j1} & m_j \check{s}_{12} \\ S_{2j} & S_{j1} & S_{12} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{l>2 \\ l \neq j}} m_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{2j} + s_{1l} & s_{j1} + s_{2l} & s_{12} + s_{jl} \\ S_{1l} & S_{2l} & S_{jl} \end{vmatrix}.$$

D'après l'identité  $S_{ij} = d_i d_j$ , les termes du membre de droite s'écrivent encore

$$\Delta_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{2j} & s_{j1} & s_{12} \\ d_1 & d_2 & d_j \end{vmatrix} + m_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{1l} & s_{2l} & s_{jl} \\ S_{1l} & S_{2l} & S_{jl} \end{vmatrix}.$$

En interprétant ces déterminants comme des aires orientées, et en se rappelant les ordres  $d_1 < d_2 < d_j$ ,  $S_{1l} \leq S_{2l} \leq S_{jl}$ , et  $S_{1j} \leq S_{2j} < S_{12}$ , on montre que chacun d'eux est négatif, et que le membre de droite est strictement négatif. Quant au membre de gauche, il est la somme d'une quantité positive et de l'expression

$$(m_2 - m_j)(S_{12} - S_{2j})\check{s}_{j1} + (m_j - m_1)(S_{12} - S_{j1})\check{s}_{2j}.$$

Les deux nombres  $\check{s}_{j1}$  et  $\check{s}_{2j}$  sont négatifs. Le membre de gauche est donc positif si  $m_2 \leq m_j \leq m_1$ , et il y a contradiction, ce qui prouve la première partie de la proposition. Pour la seconde partie, on utilise le lemme 4.2 de [4], qui montre que le membre de gauche n'est jamais nul quand  $m_2 \leq m_1$ , si  $m_j$  n'est pas strictement plus grand que  $m_1$ . Il reste alors positif, et on a la même contradiction.

**Corollaire.** Considérons un potentiel tel que  $\psi' > 0$  et  $\psi'' > 0$  et une configuration de Dziobek convexe de quatre masses égales. Cette configuration est un carré.

*Démonstration.* On traduit la convexité de la configuration en supposant que par exemple  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 < 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  et  $\Delta_4 > 0$ . La proposition interdit  $\Delta_1 < \Delta_2$  et  $\Delta_2 < \Delta_1$ . On a le droit de changer tous les signes des  $\Delta_i$  : la proposition interdit de même  $\Delta_3 < \Delta_4$  et  $\Delta_4 < \Delta_3$ . Donc  $-\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4$ , ce qui démontre le corollaire.

**3.4. Potentiels incluant celui de Newton ; cas non convexe.** Il serait vain d'essayer d'affaiblir l'hypothèse d'égalité des trois masses du théorème qui suit en une égalité de deux seulement. La configuration non triviale de quatre masses égales donne en effet naissance à des configurations de Dziobek asymétriques quand on fait varier un couple de masses.

**Théorème.** Considérons un potentiel tel que  $\psi' > 0$  et  $\psi'' > 0$ , et une configuration de Dziobek de  $n$  masses  $m_1, \dots, m_n$  avec  $m_1 = m_2 = m_3$ . Supposons que parmi les nombres  $\Delta_i$  seuls  $\Delta_1, \Delta_2$  et  $\Delta_3$  sont strictement négatifs. Alors deux au moins de ces trois nombres sont égaux : la configuration possède un hyperplan de symétrie.

*Démonstration.* On utilise l'équation  $P_{123} = 0$  en regroupant dans le membre de gauche les termes faisant intervenir  $s_{12}, s_{23}$  et  $s_{31}$ . Il reste dans le membre de droite :

$$\sum_{l>3} m_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{1l} & s_{2l} & s_{3l} \\ S_{1l} & S_{2l} & S_{3l} \end{vmatrix}.$$

On suppose par exemple  $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < 0$  ; donc  $S_{1l} \leq S_{2l} \leq S_{3l}$ . Chaque déterminant est négatif puisque  $\psi$  est convexe, et la somme est strictement négative. On considère le membre de gauche

$$\omega = 2m_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_{31} & s_{12} \\ S_{23} & S_{31} & S_{12} \end{vmatrix} - \sum_{l>3} m_l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_{31} & s_{12} \\ S_{1l} & S_{2l} & S_{3l} \end{vmatrix}$$

comme une forme linéaire en  $(s_{23}, s_{31}, s_{12})$  invariante par la translation  $s \mapsto s + \sigma$ . Sachant que  $S_{23} < S_{31} < S_{12}$ , on veut connaître son signe sur le domaine déterminé

par la condition suivante : les trois points  $(S_{23}, s_{23})$ ,  $(S_{31}, s_{31})$  et  $(S_{12}, s_{12})$  de  $\mathbb{R}^2$  délimitent une ligne brisée croissante et convexe. C'est à peu près la situation que nous avons dans les lemmes du 3.1. Il nous suffit d'évaluer la forme sur les triplets  $(s_{23}, s_{31}, s_{12})$  suivants :  $B_1 = (S_{23}, S_{31}, S_{12})$  et  $B_2 = (0, 0, 1)$ . On trouve

$$\omega(B_1) = -(\Delta_4 + \dots + \Delta_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$\omega(B_2) = (\Delta_2 - \Delta_1)(2\Delta_3 + \Delta_4 + \dots + \Delta_n).$$

En se rappelant que la somme des  $\Delta_i$  est nulle, et en factorisant le déterminant, on montre facilement que ces deux nombres sont positifs. Le membre de gauche est donc positif, et il y a contradiction.

**3.5 Le losange.** Nous donnons un dernier résultat de symétrie, qui se déduit aussi de la proposition du 3.3, sauf quand les deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont strictement plus petites que  $m_3 = m_4$ .

**Proposition.** Considérons un potentiel tel que  $\psi' > 0$  et  $\psi'' > 0$  et une configuration de Dziobek convexe de quatre corps possédant la symétrie de type plan suivante : la médiatrice séparant les deux masses égales  $m_3$  et  $m_4$  contient les deux autres masses, quelconques,  $m_1$  et  $m_2$ . Alors les deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont ordonnées comme les inverses de leurs distances au segment  $[m_3 m_4]$ . En particulier, si  $m_1 = m_2$ , la configuration est un losange.

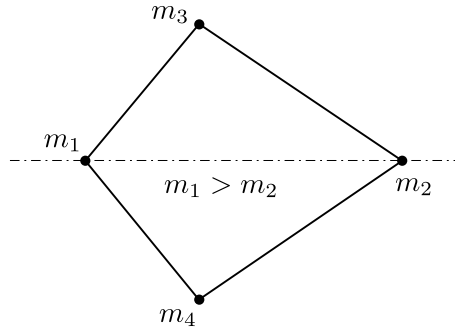


Figure 3

*Nouvelle écriture des équations des configurations équilibrées.* L'équation des configurations équilibrées de quatre masses égales  $P_{123} = 0$  devient, en ajoutant le déterminant adéquat aux deux membres

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3s_{23} + s_{14} & 3s_{31} + s_{24} & 3s_{12} + s_{34} \\ S_{23} & S_{31} & S_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} + s_{14} & s_{31} + s_{24} & s_{12} + s_{34} \\ S_{23} + S_{14} & S_{31} + S_{24} & S_{12} + S_{34} \end{vmatrix}.$$

L'hypothèse de symétrie  $\Delta_3 = \Delta_4$  entraîne la nullité du second membre, et réduit le système des équations équilibrées à la seule équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3s_{23} + s_{13} & 3s_{31} + s_{23} & 3s_{12} + s_{34} \\ S_{23} & S_{31} & S_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas de masses différentes, en substituant dans l'équation précédente les  $S_{ij}$  par les  $\Delta_i\Delta_j$  (et non par les  $d_id_j$ ), on obtient l'équation  $Q_{123} = 0$ , vérifiée par les configurations de Dziobek possédant la symétrie de l'énoncé.

*Démonstration de la proposition.* Pour ne pas avoir à nous préoccuper de l'ordre des deux variables  $s_{12}$  et  $s_{34}$ , nous poserons  $s_m = (3s_{12} + s_{34})/4$ . Nous poserons ensuite  $\Delta_1 = -1 - t$ ,  $\Delta_2 = -1 + t$  et  $\Delta_3 = 1$ . L'équation  $Q_{123} = 0$  devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3s_{23} + s_{13} & 3s_{31} + s_{23} & 4s_m \\ -1 + t & -1 - t & 1 - t^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Prouvons l'incompatibilité de cette équation, lorsque  $0 < t < 1$  et  $m_2 < m_1$ , avec les deux conditions

$$s_{13} < s_{23} < s_m \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{13} & s_{23} & s_m \\ S_{13} & S_{23} & S_m \end{vmatrix} < 0,$$

Posons  $4S_m = 3S_{12} + S_{34}$  et rappelons-nous que les  $S_{ij}$  peuvent être remplacés dans cette expression par les  $d_id_j$ . Adaptons à ce cas élémentaire la méthode du 3.1. Lorsqu'on y fait  $s_{13} = s_{23} = 0$  et  $s_m = 1$ ,  $Q_{123}$  prend la valeur positive  $8t$ . Lorsqu'on fait  $s_{13} = S_{13}$ ,  $s_{23} = S_{23}$  et  $s_m = S_m$ ,  $Q_{123}$  vaut à un facteur positif près

$$(m_1 + m_2 - 3m_3)t^3 + 3(m_2 - m_1)t^2 + \left(3m_3 + \frac{m_1m_2}{m_3}\right)t + 2(m_1 - m_2).$$

En substituant  $t$  par  $u/(1 + u)$  et en chassant les dénominateurs, ce polynôme devient

$$\begin{aligned} & m_2(2m_3 + m_1)u^3 + (3m_3(m_1 - m_2 + 2m_3) + 2m_1m_2)u^2 + \\ & + (3m_3(2m_1 - 2m_2 + m_3) + m_1m_2)u + 2m_3(m_1 - m_2). \end{aligned}$$

Si  $m_1 \geq m_2$  tous les coefficients du polynôme sont positifs. Il est positif quand  $u$  est positif, c'est-à-dire quand  $t$  est compris entre 0 et 1. L'équation  $Q_{123} = 0$  n'est donc pas possible. La proposition est démontrée.

## [6] Les Configurations Centrales Spatiales du Problème des 1+4 Corps

**Résumé.** Nous considérons le problème des configurations centrales de 1+4 corps, c'est-à-dire la recherche des configurations sans collision qui sont une limite de configurations centrales de cinq corps quand une des masses tend vers l'infini. Nous nous intéressons au cas où les quatre "petites" masses sont égales, et où la configuration limite est tridimensionnelle.

Nous prouvons que toutes ces configurations centrales possèdent un plan de symétrie au moins. Nous remarquons l'existence de quatre configurations centrales (plus précisément de quatre types de configuration centrale ; on peut toujours permuter les masses) ayant davantage de symétries : la configuration où les petites masses forment un tétraèdre régulier, deux configurations à symétrie ternaire, et une configuration en forme de pyramide ayant pour base un carré formé par les petites masses. Nous prouvons que toutes les autres configurations centrales sont de la "troisième classe", c'est-à-dire telles que les quatre petites masses, situées comme on le sait sur une sphère centrée sur la grosse masse, sont dans un même hémisphère et sont telles qu'une des masses est située à l'intérieur du triangle sphérique formé par les trois autres. Nous conjecturons enfin, sur la base d'une étude numérique très claire, qu'il existe une et une seule configuration centrale en plus des quatre citées.

### 1. Introduction

Les configurations centrales sont définies techniquement comme les configurations telles que l'accélération newtonienne appliquée à chacun des corps soit égale, à un facteur multiplicatif près noté  $\lambda$  et indépendant du corps considéré, au vecteur qui relie le centre de gravité au corps. L'image d'une configuration centrale par une homothétie est encore une configuration centrale, mais le facteur multiplicatif  $\lambda$  change.

La propriété dynamique la plus simple qui caractérise les configurations centrales, c'est qu'elles donnent naissance à un mouvement homothétique, si l'on choisit les vitesses convenablement. On appelle mouvement homothétique un mouvement tel que la configuration ne subit ni déformation, ni rotation, et change simplement de taille au cours du temps. Si l'on accepte aussi les rotations, on parlera de mouvement homographique, et si l'on accepte les rotations, mais pas les changements de taille, on parlera de mouvement rigide, ou encore de mouvement d'équilibre relatif. Les configurations centrales planes sont les seules configurations possibles dans les mouvements homographiques plans, et il n'y a pas de mouvement homographique strictement tridimensionnel qui ne soit pas homothétique. Pour les mouvements en dimension plus grande que trois il faut être un peu plus précis : les configurations centrales sont les seules configurations possibles pour les mouvements homographiques et non rigides. Il y a des mouvements rigides avec d'autres configurations (cf. [Pal] et surtout [4]) dès la dimension quatre.

Tout mouvement se terminant en collision totale, et tout mouvement complètement parabolique, est asymptote à un mouvement homothétique. Chacun de

ces mouvements fait donc encore intervenir une configuration centrale, qui joue le rôle de configuration normalisée limite. Le résultat concernant les mouvements de collision totale est initialement dû à K. F. Sundman, celui sur les mouvements complètement paraboliques à D. Saari et N. Hulkower. Le premier de nous avait demandé si l'utilisation systématique du champ de vecteurs  $Y$  de [4] ne permettait pas de simplifier les preuves dans ces théories. L'élégante réponse positive [Che] précise, après [Bry], le statut de la traditionnelle "variété de collision" : il s'agit du quotient par le flot de  $Y$  de la variété des états d'énergie et de moment cinétique nuls. [Che] propose aussi la nouvelle terminologie "variété de McGehee" parce que ce quotient joue un rôle parfaitement symétrique dans le cas des collisions et des mouvements paraboliques. Il apparaît aussi que les estimations taubériennes utilisées par [Win2] sont inutiles.

Les configurations centrales interviennent encore de manière cruciale dans le problème des changements de topologie des variétés intégrales du problème des  $n$  corps. Le centre de masse des particules étant fixé, la variété intégrale  $(h, \mathcal{C})$  est par définition la variété des états d'énergie  $h$  et de moment cinétique  $\mathcal{C}$ . L'étude des variétés intégrales permet d'obtenir, comme l'a le premier remarqué Hill, quelques résultats qualitatifs sur le mouvement. En un point régulier d'un niveau du moment cinétique, la restriction de la fonction énergie est critique si et seulement si l'état est d'équilibre relatif. En dimension deux et trois les configurations centrales sont donc responsables de tous les changements de topologie dus à des points critiques. Mais il y a d'autres changements de topologie intéressants, comme l'avait déjà remarqué le second de nous dans son travail de maîtrise sous la direction de Carles Simó. Ils sont dus à des points critiques à l'infini qui correspondent tous, selon [1], à des empilements de configurations centrales planes. Le travail récent [MMW] démontre que la variété intégrale du problème des trois corps change de topologie chaque fois que le paramètre  $h\mathcal{C}^2$  passe par une valeur correspondant à un point critique, et chaque fois qu'il passe par une valeur correspondant à un point critique à l'infini.

Les configurations centrales, qui interviennent si profondément dans la dynamique du problème des  $n$  corps, sont très difficiles à dénombrer (cf. [5]). L'hypothèse simplificatrice des masses nulles est devenue standard depuis que [Ped] a réussi à résoudre le problème avec 3+1 corps quand les trois grosses masses sont égales et situées au sommet d'un triangle équilatéral. Une étape cruciale dans ce travail est de prouver que la petite masse se situe toujours sur un des axes de symétrie du triangle. Le travail non publié [Hal] s'attaque au problème de  $1 + n$  corps dans le plan, et montre que si  $n$  est plus grand que  $e^{896\pi^3}$ , il n'y a qu'une configuration centrale, le polygone régulier. [CLN] a remplacé cette hypothèse par  $n > e^{73}$  pour obtenir la même conclusion. [Hal] a aussi résolu le problème des configurations centrales planes du problème des  $1 + 3$  corps, en commençant encore par prouver la symétrie de la configuration. Il concluait son article par "Finally we could consider spacial  $1 + n$ -body central configurations in an analogous manner to the above. However, the corresponding critical point problem would be for masses restricted to the unit sphere and seems to take on much of the difficulty of the usual central configuration problem. Indeed its not even clear what the natural analog of the



“regular  $n$ -gon” solution is for three dimension.” Nous ne considérons pas ici ce problème dans le cas où  $n$  est grand, mais nous mettons à l’œuvre, pour  $n = 4$ , des techniques très efficaces qui prouvent la symétrie des configurations centrales.

## 2. Généralités

Posons  $a = -3/2$  et  $s_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2$ . Les équations des configurations centrales s’écrivent

$$\lambda(\vec{r}_i - \vec{r}_G) = \sum_{j \neq i} m_j s_{ij}^a (\vec{r}_j - \vec{r}_i).$$

Il est fort utile de transformer ce système en éliminant le vecteur pointant le centre de masse  $\vec{r}_G$ . En particulier, la fameuse solution trouvée par Lagrange, le triangle (ou le tétraèdre ou le simplexe) équilatéral, apparaît clairement quand on utilise les  $n$  équations non indépendantes du système (1), alors qu’elle n’apparaît pas si on laisse le système comme ci-dessus.

$$0 = \sum_{j \neq i} m_j \left( s_{ij}^a + \frac{\lambda}{M} \right) (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1)$$

On a noté  $M = m_0 + \dots + m_n$  et  $S_{ij} = -s_{ij}^a - \lambda/M$ . Soit  $\kappa = a + 1$ ,

$$U = -\frac{1}{\kappa} \sum_{0 \leq i < j \leq n} m_i m_j s_{ij}^\kappa \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{M} \sum_{0 \leq i < j \leq n} m_i m_j s_{ij}.$$

Il est clair que les solutions de (1) sont les points critiques de la fonction

$$U_\lambda = U - \lambda I.$$

Supposons  $m_0 = 1$  et  $m_i = \varepsilon \mu_i$  si  $i \geq 1$ . Considérons une configuration centrale dépendant de  $\varepsilon$ , et supposons que quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  les  $\vec{r}_i$  occupent  $n + 1$  positions limites distinctes. Pour tout indice  $i$  non nul, la  $i$ -ème équation du système (1) montre que  $S_{0i}$  tend vers zéro, puisque nous supposons que  $\vec{r}_0 - \vec{r}_i$  tend vers une limite non nulle. Plus précisément,  $\varepsilon^{-1} S_{0i}$  doit tendre vers une limite finie, que nous notons  $\theta_i$ . Le système (1) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i > 0} \mu_i \theta_i (\vec{r}_0 - \vec{r}_i), \\ \theta_i (\vec{r}_0 - \vec{r}_i) &= \sum_{j \neq i} \mu_j S_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j). \end{aligned} \quad (2)$$

La première équation se déduit aisément des suivantes. Les solutions de ce système sont appelées configurations centrales de  $1 + n$  corps. Hall se préoccupe aussi du cas où deux des petites masses occupent la même position limite : “Which configurations with  $q_i = q_j$  are  $1 + n$  body central configurations and is this equivalent to studying the problem of 1 large and  $n$  small but possibly unequal masses?”. On consultera l’élégant article [Xia] consacré à un thème voisin.

Soit  $s_0 = (-\lambda)^{1/a}$ . On remarque que  $s_{0i}$  tend vers  $s_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Les  $n$  petites masses sont donc à la limite situées sur une sphère de centre la grosse. On peut de nouveau trouver une interprétation variationnelle : d'après les  $n$  dernières équations de (2), les configurations sont les points critiques de la fonction

$$\tilde{U}_\lambda = \tilde{U} - \lambda \tilde{I} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j \left( -\frac{1}{\kappa} s_{ij}^\kappa - \lambda s_{ij} \right),$$

restreinte aux configurations telles que  $s_{01} = \dots = s_{0n} = s_0$ . Les  $\mu_i \theta_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes.

Examinons ces configurations centrales limites dans le cas particulier des “configurations de Dziobek” définies dans [5], c'est-à-dire essentiellement dans le cas où la configuration de  $n+1$  corps est de dimension  $n-1$ . Nous voulons d'abord établir les équations des configurations de Dziobek d'une manière élémentaire qui complète la démarche originale de Dziobek. Il s'agit, rappelons-le, d'utiliser les carrés des distances mutuelles  $s_{ij}$  comme variables. Limitons-nous pour fixer les idées au cas de cinq corps et considérons le déterminant de Cayley[Cay]

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{01} & s_{02} & s_{03} & s_{04} \\ 1 & s_{01} & 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ 1 & s_{02} & s_{12} & 0 & s_{23} & s_{24} \\ 1 & s_{03} & s_{13} & s_{23} & 0 & s_{34} \\ 1 & s_{04} & s_{14} & s_{24} & s_{34} & 0 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Sa nullité exprime l'appartenance des cinq corps à un même espace tridimensionnel. Les configurations de Dziobek sont points critiques de la fonction  $U_\lambda$  restreinte à l'hypersurface  $S = 0$ . Cette formulation pourrait aussi faire apparaître des points critiques, appelés “tenseurs de Dziobek”, pour lesquels les  $s_{ij}$  ne vérifient pas les inégalités triangulaires et leurs analogues multidimensionnels. Nous n'en rencontrerons pas. A chaque solution correspond un multiplicateur de Lagrange  $\nu$  tel que, pour  $i < j$ ,

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial s_{ij}} = \nu \frac{\partial S}{\partial s_{ij}}. \quad (4)$$

Nous devons calculer les dérivées partielles de  $S$ . Pour cela nous rappelons quelques faits de la théorie des matrices.

Soit  $A = (A_{kl})_{1 \leq k, l \leq m}$  une matrice carrée. La différentielle au point  $A$  de la fonction déterminant est la forme linéaire sur l'espace des matrices carrées d'ordre  $m$

$$B \longmapsto \text{tr}(BA^*).$$

Nous avons noté  $A^* = (A_{kl}^*)_{1 \leq k, l \leq m}$  la transposée de la matrice des cofacteurs de la matrice  $A$ , qui vérifie comme on le sait  $AA^* = A^*A = \det(A)\mathcal{I}d$ . Autrement dit la matrice  $A^*$  est constituée des dérivées partielles par rapport aux coefficients de  $A$

de la fonction déterminant. Quand  $A$  est une matrice de rang  $m - 1$ , les équations  $AA^* = A^*A = 0$  montrent que  $A^*$  est un multiple non nul de la matrice de rang un  $(c_k d_l)_{1 \leq k, l \leq m}$ , où le  $m$ -uplet  $(c_k)_{1 \leq k \leq m}$  est un élément du noyau de  $A$ , et les  $d_l$  sont les coefficients d'une équation de l'image de  $A$ .

Pour utiliser cette remarque dans notre situation, le lecteur devra en premier lieu la traduire du langage de la théorie des matrices dans le langage de l'algèbre linéaire abstraite. Ensuite, on doit considérer la matrice carrée d'ordre cinq  $H$  obtenue en enlevant la première ligne, puis la première colonne du déterminant (3). On restreint l'application linéaire obtenue à l'hyperplan noté  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathbb{R}^5$  d'équation  $\xi_0 + \dots + \xi_4 = 0$ , et on la compose à l'arrivée avec la projection de  $\mathbb{R}^5$  sur le quotient, noté  $\mathcal{D}$ , de  $\mathbb{R}^5$  par la droite de générateur  $(1, 1, 1, 1, 1)$ . Les espaces  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^*$  sont naturellement en dualité. Le déterminant  $S$  s'annule précisément quand l'application linéaire notée  $\beta$  déduite ainsi de  $H$  n'est pas inversible. La remarque du paragraphe précédent montre que la différentielle de la fonction  $S$  en un point où  $S = 0$  s'identifie à un multiple de la matrice carrée d'ordre cinq  $(\Delta_i \Delta_j)_{0 \leq i, j \leq 4}$ , en appelant  $\Delta = (\Delta_0, \dots, \Delta_4)$  un élément de  $\mathcal{D}^*$  appartenant au noyau de  $\beta$ , c'est-à-dire tel que

$$\Delta_0 + \dots + \Delta_4 = 0 \quad (5)$$

et que les cinq nombres

$$t_i = \sum_{j=0}^4 s_{ij} \Delta_j \quad (6)$$

soient égaux. On en déduit l'existence d'un nombre réel  $\sigma$  tel que

$$\frac{\partial S}{\partial s_{ij}} = \sigma \Delta_i \Delta_j. \quad (7)$$

Dziobek déduit cette identité (plus exactement une variante où  $\sigma = 32$  et où les  $\Delta_i$  sont des volumes orientés) "aus analytisch-geometrischen Untersuchungen". La déduction un peu longue que nous venons de résumer peut servir à motiver la lecture de [4] et de [5], qui détaillent les notions sous-jacentes. Il nous reste à interpréter les coefficients  $\Delta_i$  à partir de la relation  $t_0 = \dots = t_4$ , omise dans le travail de Dziobek. Ils sont caractérisés à un facteur près par la relation

$$\Delta_0 \vec{r}_0 + \dots + \Delta_4 \vec{r}_4 = 0 \quad (8)$$

quand la configuration est de dimension trois. Quand par exemple  $\Delta_0$  est non nul les coefficients  $-\Delta_i/\Delta_0$ ,  $i > 0$ , sont les coordonnées barycentriques du point 0 dans le repère barycentrique formé par les quatre autres points. Si les  $\Delta_i$  vérifient (5) et (8), la quantité

$$\eta = \Delta_0 \|\vec{r}_0 - \vec{r}\|^2 + \dots + \Delta_4 \|\vec{r}_4 - \vec{r}\|^2$$

ne dépend pas du vecteur  $\vec{r}$ . Les cas particuliers  $\vec{r} = \vec{r}_i$  donnent l'égalité des  $t_i$ , c'est-à-dire l'appartenance de  $\Delta$  au noyau de  $\beta$ . Réciproquement, comme d'après [4] le rang de  $\beta$  est la dimension de la configuration, il est clair que dans l'hypothèse

où nous nous plaçons d'une configuration tridimensionnelle, tout élément du noyau de  $\beta$  est multiple du vecteur  $\Delta$  donné par la relation (8).

Jusqu'à présent nous n'avons défini les  $\Delta_i$  qu'à un facteur près. Remplacer les équations (4) et (7) par l'équation compatible

$$\frac{\partial U_\lambda}{\partial s_{ij}} = m_i m_j S_{ij} = \Delta_i \Delta_j$$

revient à choisir une normalisation pour les  $\Delta_i$ . C'est ce choix qui a été fait dans [5]. Dans notre situation où  $n$  des masses s'annulent, cela conduirait à la nullité de tous les  $\Delta_i$ . Il est plus judicieux d'imposer

$$m_i m_j S_{ij} = \varepsilon^2 \Delta_i \Delta_j.$$

On obtient à la limite, si  $i$  et  $j$  sont non nuls et distincts,

$$\mu_i \theta_i = \Delta_0 \Delta_i \quad \text{et} \quad \mu_i \mu_j S_{ij} = \Delta_i \Delta_j. \quad (9)$$

Il suffit d'associer ces équations aux relations

$$s_{0i} = s_0 = (-\lambda)^{1/a} \quad \text{et} \quad S_{ij} = -s_{ij}^a - \lambda, \quad (10)$$

aux relations (5) et (6) et au système  $t_0 = \dots = t_4$  pour caractériser les configurations centrales de  $1 + 4$  corps. On remarquera que  $t_0 = -\Delta_0 s_0$ . Il est utile pour démontrer des résultats de symétrie de remplacer le système  $t_0 = \dots = t_4$  par celui formé par les dix équations

$$Q_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_i & t_j & t_k \\ \Delta_i & \Delta_j & \Delta_k \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

qui en est une conséquence évidente. Les quantités  $Q_{ijk}$  sont invariantes quand on ajoute un même nombre réel aux  $s_{ij}$ . On les mettra dans la suite sous une forme plus convenable, en développant les  $t_i$ .

### 3. Résultats de symétrie

On suppose désormais  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 1$ . Nous rassemblons les résultats de symétrie dans le seul énoncé :

**Théorème.** Une configuration centrale tridimensionnelle de  $1 + 4$  corps ayant ses quatre petites masses égales possède toujours un plan de symétrie. Elle possède davantage de symétries dans les cas suivants :

— quand la grosse masse est située dans l'intérieur de l'enveloppe convexe des quatre petites. La configuration possède alors une symétrie ternaire dont l'axe contient une des petites masses.

— quand l'enveloppe convexe des quatre demi-droites  $D_{0i}$  (demi-droite ayant pour origine la grosse masse et contenant la  $i$ -ième petite masse,  $1 \leq i \leq 4$ ) est

un cône de sommet la grosse masse et de section strictement quadrilatérale. La configuration possède alors deux plans de symétrie orthogonaux.

Remarquons qu'un plan ou un axe de symétrie de la configuration passe nécessairement par la grosse masse. Nous consacrons la fin de cette partie à la démonstration du théorème. Nous appelons configurations de la première classe celles correspondant au premier cas du théorème, et configurations de la deuxième classe celles correspondant au second cas. Une troisième et dernière classe est décrite ainsi : une des demi-droites (par exemple  $D_{01}$ ) est contenue dans l'enveloppe convexe des trois autres demi-droites (dans l'exemple  $D_{02}$ ,  $D_{03}$  et  $D_{04}$ ). On se convaincra qu'une configuration n'appartenant à aucune des trois classes est telle que trois des demi-droites  $D_{0j}$  sont coplanaires. Elles sont aux frontières des trois ouverts définis par les trois classes. Il n'y a pas de configuration centrale sur cette frontière. En effet, on aurait  $\Delta_i = 0$  pour l'indice  $i$  correspondant à la demi-droite non coplanaire. On devrait donc avoir  $s_{ij} = s_0$  pour tout  $j$  différent de  $i$ , d'après les relations (9) et (10), ce qui est impossible. Nous devons examiner les trois classes séparément pour prouver le théorème.

Pour prouver qu'une configuration de Dziobek possède une symétrie, on utilise le raisonnement par l'absurde suivant détaillé dans [5]. On considère les  $\Delta_i$  comme des paramètres, sur lesquels on impose un certain nombre d'inégalités qui permettent de déduire l'ordre des quantités  $S_{ij} = \Delta_i \Delta_j$ . Dans un des sous-cas de la première classe on aura par exemple

$$0 < S_{12} < S_{13} < S_{14} < S_{23} < S_{24} < S_{34}.$$

L'inégalité  $S_{12} < S_{13}$  par exemple interdit une symétrie qui échangerait les points 2 et 3 en fixant le point 1. On montre que l'hypothèse est absurde en raisonnant sur les sept variables  $s_0, s_{12}, \dots, s_{34}$ . Des relations (10) on retient qu'il passe par les sept points du plan  $\mathbb{R}^2$

$$(0, s_0), (S_{12}, s_{12}), (S_{13}, s_{13}) \dots, (S_{34}, s_{34})$$

une ligne brisée *croissante* et *convexe*. Cette hypothèse s'exprime bien dans l'espace à cinq dimensions des lignes brisées normalisées par la transformation

$$s \longmapsto \eta(s) = \frac{s - s_0}{s_{34} - s_0}.$$

Dans cet espace la ligne brisée repérée par  $\eta(s_{12}), \dots, \eta(s_{24})$  est croissante et convexe si et seulement si elle est contenue dans le simplexe dont les six sommets correspondent aux schémas de la figure suivante.

Les  $Q_{ijk}$  sont des formes linéaires en  $s_0$  et  $s_{ij}$ . La condition  $Q_{ijk} = 0$  est invariante par la transformation  $\eta$ , et définit donc un hyperplan dans l'espace des lignes brisées normalisées. Cet hyperplan doit couper le simplexe ci-dessus. On exhibera au contraire dans les situations correspondant aux diverses classes une

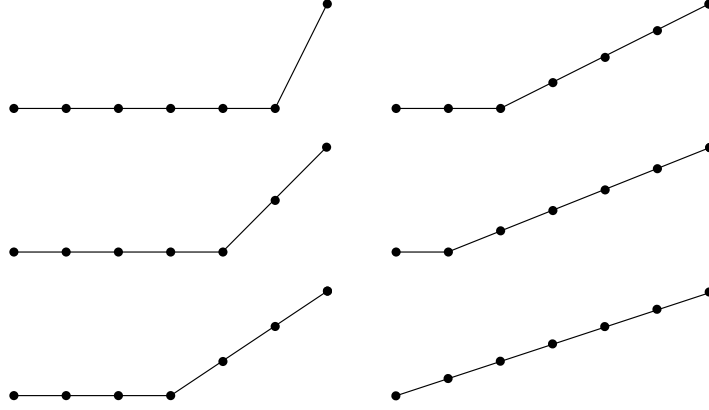


Figure 1

forme  $Q_{ijk}$  qui prend le même signe sur tous les sommets du simplexe, ce qui donne la contradiction annoncée.

**La première classe.** On la caractérise techniquement en disant que les quatre  $\Delta_i$  avec  $i$  non nul sont strictement positifs. Quand il n'y a pas de symétrie, on peut toujours supposer les inégalités  $\Delta_0 < 0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4$ , quitte à renuméroter les  $\Delta_i$ . On considère la condition  $Q_{012} = 0$ , qui s'écrit

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_0 & s_0 \\ \Delta_1\Delta_2 & \Delta_0\Delta_2 & \Delta_0\Delta_1 \end{vmatrix} = \Delta_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{13} & s_{23} \\ \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 \end{vmatrix} + \Delta_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{12} & s_{14} & s_{24} \\ \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 \end{vmatrix}.$$

On évalue le signe de  $Q_{012}$  sur les sommets des deux simplexes possibles, suivant l'ordre de  $\Delta_1\Delta_4$  et de  $\Delta_2\Delta_3$ , de l'espace des lignes brisées normalisées formées des points dont les ordonnées sont  $s_0, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{23}$  et  $s_{24}$ . Notons que  $s_{34}$  n'intervient pas dans la discussion, puisqu'il n'apparaît pas dans  $Q_{012}$ . Appelons  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  les sommets du simplexe dans le cas  $\Delta_1\Delta_4 < \Delta_2\Delta_3$ . Dans le cas contraire, le simplexe est délimité par  $A_0, A_1, A_2, A'_3$  et  $A_4$ . La table suivante donne des représentants simples de ces sommets (il n'est pas utile de normaliser).

	$s_0$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{14}$	$s_{23}$	$s_{24}$
$A_0$ :	0	$\Delta_1\Delta_2$	$\Delta_1\Delta_3$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_4$
$A_1$ :	$\Delta_1\Delta_2$	$\Delta_1\Delta_2$	$\Delta_1\Delta_3$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_4$
$A_2$ :	$\Delta_1\Delta_3$	$\Delta_1\Delta_3$	$\Delta_1\Delta_3$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_4$
$A_3$ :	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_4$
$A_4$ :	0	0	0	0	0	1
$A'_3$ :	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_1\Delta_4$	$\Delta_2\Delta_3$	$\Delta_2\Delta_4$

Il suffit de montrer que  $Q_{012}$  est positive sur tous ces sommets. On a

$$\begin{aligned} Q_{012}(A_0) &= 2\Delta_1\Delta_2\Delta_0(\Delta_2 - \Delta_1) + (\Delta_1\Delta_2 - \Delta_0\Delta_3)\Delta_3(\Delta_2 - \Delta_1) \\ &\quad + (\Delta_1\Delta_2 - \Delta_0\Delta_4)\Delta_4(\Delta_2 - \Delta_1) \\ &= (\Delta_2 - \Delta_1)(-\Delta_0(\Delta_3^2 + \Delta_4^2 - 2\Delta_1\Delta_2) + \Delta_1\Delta_2(\Delta_3 + \Delta_4)) > 0 \end{aligned}$$

et

$$Q_{012}(A_1) = (\Delta_2 - \Delta_1)(-\Delta_0(\Delta_3^2 + \Delta_4^2) + \Delta_1\Delta_2(\Delta_3 + \Delta_4)) > 0$$

et

$$Q_{012}(A_2) = (\Delta_2 - \Delta_1)((\Delta_1 - \Delta_0)\Delta_3^2 + (\Delta_1\Delta_3 - \Delta_0\Delta_4)\Delta_4) > 0.$$

De même, puisque justement pour le premier simplexe  $\Delta_2\Delta_3 > \Delta_1\Delta_4$ ,

$$Q_{012}(A_3) = ((\Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_4)\Delta_3 + (\Delta_2 - \Delta_1)\Delta_4^2)(\Delta_1 - \Delta_0) > 0.$$

Enfin  $Q_{012}(A'_3) = (\Delta_3\Delta_2 - \Delta_0\Delta_4)\Delta_4(\Delta_2 - \Delta_1)$  et  $Q_{012}(A_4) = \Delta_4(\Delta_1 - \Delta_0)$  sont positifs. Comment donc  $Q_{012}$  peut-il s'annuler? En gardant des  $\Delta_i$  dans le même ordre, mais en les supposant cette fois ordonnés au sens large, on voit que le seul moyen d'annuler  $Q_{012}(A_4)$  ou  $Q_{012}(A_0)$  est de supposer  $\Delta_1 = \Delta_2$ . On a alors les égalités  $s_{i1} = s_{i2}$ , qui assurent la nullité de  $Q_{012}$ . Nous savons donc que  $\Delta_1 = \Delta_2$ , mais on peut aller plus loin : nous allons montrer que  $\Delta_3 = \Delta_1 = \Delta_2$ . Pour cela écrivons l'équation  $Q_{023} = 0$ , en remplaçant  $\Delta_1$  par  $\Delta_2$  :

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_0 & s_0 \\ \Delta_2\Delta_3 & \Delta_0\Delta_3 & \Delta_0\Delta_2 \end{vmatrix} = \Delta_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_{12} & s_{23} \\ \Delta_0 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} + \Delta_4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_{24} & s_{34} \\ \Delta_0 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}.$$

On applique une autre fois la méthode du simplexe, en considérant les quatre sommets  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$ , représentés par

$$\begin{array}{l} A_0 : \\ A_1 : \\ A_2 : \\ A_3 : \end{array} \begin{array}{ccccc} s_0 & s_{12} & s_{23} & s_{24} & s_{34} \\ 0 & \Delta_2^2 & \Delta_2\Delta_3 & \Delta_2\Delta_4 & \Delta_3\Delta_4 \\ \Delta_2^2 & \Delta_2^2 & \Delta_2\Delta_3 & \Delta_2\Delta_4 & \Delta_3\Delta_4 \\ \Delta_2\Delta_3 & \Delta_2\Delta_3 & \Delta_2\Delta_3 & \Delta_2\Delta_4 & \Delta_3\Delta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On obtient  $Q_{023}(A_0)$  à partir de  $Q_{012}(A_0)$  en permutant les indices 1, 2 et 3, et en remplaçant 1 par 2 :

$$Q_{023}(A_0) = (\Delta_3 - \Delta_2)(-\Delta_0(\Delta_2^2 + \Delta_4^2 - 2\Delta_2\Delta_3) + \Delta_2\Delta_3(\Delta_2 + \Delta_4)).$$

Le facteur  $\Delta_2^2 + \Delta_4^2 - 2\Delta_2\Delta_3$  est positif : il est plus grand que  $(\Delta_2 - \Delta_3)^2$ . Donc  $Q_{023}(A_0)$  est positif. Pour obtenir  $Q_{023}(A_1)$ , il suffit d'effacer le terme  $-2\Delta_2\Delta_3$ , ce qui ne change pas le signe. Dans  $Q_{023}(A_2)$  seul le troisième déterminant contribue. On obtient

$$Q_{023}(A_2) = (\Delta_2\Delta_3 - \Delta_0\Delta_4)(\Delta_3 - \Delta_2)\Delta_4 > 0.$$

Enfin  $Q_{023}(A_3) = \Delta_4(\Delta_2 - \Delta_0) > 0$ . Encore une fois on s'assure que la nullité de  $Q_{023}$  n'est possible que si  $\Delta_2 = \Delta_3$ . Nous laissons le lecteur utiliser les relations (10) pour vérifier que la conclusion  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$  correspond bien à celle énoncée dans le théorème. Nous avons même obtenu une information supplémentaire sur les configurations centrales possibles : l'inégalité  $\Delta_3 \leq \Delta_4$ .

**L'estimation de Moeckel.** Etablissons l'estimation de Moeckel (cf. [5]) qui correspond à notre situation. En supposant  $1 \leq i, j \leq 4$ , (6) donne

$$0 = t_0 - t_i = s_0(\Delta_i - \Delta_0) + \sum_{j \neq i} \Delta_j(s_0 - s_{ij}).$$

Comme  $s_0 - s_{ij}$  est d'après la relation (10) du signe de  $-\Delta_i\Delta_j$ , et que  $s_0$  est positif,  $\Delta_i - \Delta_0$  doit être du signe de  $\Delta_i$ .

**La deuxième classe.** On la caractérise techniquement en disant que deux des  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , sont strictement négatifs et que les deux autres sont strictement positifs. On peut supposer  $\Delta_1 < \Delta_2 < 0 < \Delta_3 < \Delta_4$ . L'estimation de Moeckel montre qu'ici  $\Delta_0$  est compris entre  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ . Le signe de  $\Delta_0$  n'est pas important dans l'immédiat. Notons toutefois que  $\Delta_0 + \Delta_4$  est positif. Dans le cas contraire en effet le classement montre que  $\Delta_2 + \Delta_3$  serait *a fortiori* négatif. La somme  $\Delta_0 + \dots + \Delta_4$  serait donc aussi négative, ce qui contredirait (5). Ecrivons l'équation adéquate, à savoir  $Q_{123} = 0$ , soit

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_{31} & s_{12} \\ S_{23} & S_{31} & S_{12} \end{vmatrix} - (\Delta_0 + \Delta_4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{23} & s_{31} & s_{12} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est positif d'après la convexité de la ligne brisée et le classement  $S_{13} < S_{23} < S_{12}$ , qui se déduit immédiatement du classement des  $\Delta_i$ . Le troisième déterminant est négatif, toujours d'après la convexité, mais avec cette fois le classement  $S_{14} < S_{24} < S_{34}$ . En interprétant le second déterminant comme l'aire d'un triangle, on montre immédiatement qu'il est négatif. On obtient donc, grâce à l'estimation  $\Delta_0 + \Delta_4 > 0$ , l'inéquation  $Q_{123} > 0$ , sauf si les trois déterminants sont nuls, ce qui n'est possible que si  $\Delta_1 = \Delta_2$ . Cette égalité doit donc être vérifiée, et il y a donc un plan de symétrie contenant les points 0, 3 et 4. Maintenant, comme les coefficients  $\Delta_i$  peuvent être changés de signe ensemble, on peut faire jouer aux points 4 et 3 les rôles que viennent de jouer les points 1 et 2. On en déduit que  $\Delta_3 = \Delta_4$ . Il y a donc aussi un plan de symétrie, nécessairement orthogonal au précédent, contenant les points 0, 1 et 2.

**La troisième classe.** On la caractérise techniquement en disant que trois des  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , sont strictement négatifs et que le quatrième est strictement positif. Nous supposons  $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < 0 < \Delta_4$ , sans nous préoccuper de  $\Delta_0$ . Pour montrer la contradiction, nous utilisons une méthode intermédiaire entre l'approche systématique, avec la méthode du simplexe, utilisée pour la première classe, et les "astuces" utilisées pour la deuxième classe. Reprenons l'équation  $Q_{123} = 0$  utilisée ci-dessus et considérons de nouveau ses trois déterminants. La convexité de la ligne brisée et le classement  $S_{14} < S_{24} < S_{34}$  assurent que le troisième déterminant est négatif. Le membre de gauche constitue une forme linéaire dans les variables  $s_{23}$ ,  $s_{31}$  et  $s_{12}$ , invariante par translation  $s_{ij} \mapsto s_{ij} + k$ . On cherche son signe avec la méthode du simplexe. Il suffit de l'évaluer sur les deux extrémités d'un intervalle (simplexe de dimension un), dont deux représentants simples sont obtenus en donnant au



triplet  $(s_{23}, s_{31}, s_{12})$  les valeurs  $(\Delta_2\Delta_3, \Delta_3\Delta_1, \Delta_1\Delta_2)$  et  $(0, 0, 1)$ . Sur le premier sommet on obtient

$$(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \Delta_1^2 & \Delta_2^2 & \Delta_3^2 \end{vmatrix},$$

manifestement positif, et sur le second  $(\Delta_2 - \Delta_1)(2\Delta_3 + \Delta_0 + \Delta_4)$ , soit encore  $(\Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_1)$ , qui est positif. La forme linéaire considérée est donc toujours positive. Clairement  $Q_{123}$  s'annule si et seulement si  $\Delta_1 = \Delta_2$  ou  $\Delta_2 = \Delta_3$ . Il y a donc un plan de symétrie.

#### 4. Equations algébriques

**Cas de la symétrie ternaire.** Nous avons réduit les solutions de la première classe à des configurations à symétrie ternaire. Nous allons déterminer toutes les configurations ayant une telle symétrie. On en trouvera trois, deux de la première classe, dont le tétraèdre régulier, et une de la troisième classe.

On suppose donc  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ . On écrira  $\Delta_4 = t\Delta_1$ . La relation (5) nous donne  $\Delta_0 = -(3+t)\Delta_1$ . On fixe  $\lambda = -1$ , soit  $s_0 = 1$ . D'après les relations (9) et (10), il n'y a que deux distances mutuelles distinctes en plus de  $s_0$ , que nous désignerons par  $s_{12}$  et  $s_{14}$ . Le système  $t_0 = t_1 = t_4$  s'écrit  $2(3+t) = 2s_{12} + ts_{14} = 3s_{14}$ , soit

$$3s_{14} = 2(3+t) \quad \text{et} \quad 3s_{12} = 9 - t^2.$$

Les deux relations  $s_{14}^a = 1 - \Delta_1\Delta_4$  et  $s_{12}^a = 1 - \Delta_1^2$  se mettent, quand on pose  $\rho = \Delta_1^2$ , sous la forme

$$s_{14}^a = 1 - \rho t \quad \text{et} \quad s_{12}^a = 1 - \rho.$$

Nous avons ainsi obtenu un système de quatre équations à quatre inconnues, que nous abordons avec l'hypothèse  $a = -b/2$ , où  $b$  désigne un nombre entier positif. Éliminons tout de suite les variables  $s_{ij}$ . Il reste :

$$(1 - \rho t)^2(3+t)^b 2^b = 3^b \quad \text{et} \quad (1 - \rho)^2(9 - t^2)^b = 3^b. \quad (12)$$

En multipliant la première par  $(3-t)^b$ , la seconde par  $2^b t^2$  et en retranchant, on obtient une équation linéaire en  $\rho$ , où  $(1-t)$  est en facteur. La quantité

$$K = \frac{(3-t)^b - 2^b t^2}{1-t}$$

est en effet un polynôme. On obtient donc, en excluant le cas  $t = 1$  (le tétraèdre régulier), l'équation

$$2^b(9 - t^2)^b(1 + t - 2\rho t) = 3^b K.$$

On en tire par exemple

$$\rho = \frac{(1+t)2^b(9-t^2)^b - 3^b K}{2^{b+1}t(9-t^2)^b},$$

qu'on substitue dans la deuxième équation (12), qui devient

$$(3^b K - (1-t)2^b(9-t^2)^b)^2 = 3^b 2^{2b+2} t^2 (9-t^2)^b.$$

Dans le cas particulier  $b = 3$ , il s'agit là de l'équation polynômiale

$$\begin{aligned} 0 = & 64t^{14} - 128t^{13} - 3392t^{12} + 6912t^{11} + 74304t^{10} - 155952t^9 \\ & - 848016t^8 + 1866240t^7 + 5178816t^6 - 12387168t^5 - 14905863t^4 \\ & + 42830208t^3 + 8857350t^2 - 59521392t + 26040609. \end{aligned}$$

L'algorithme de Sturm montre que cette équation possède quatre racines réelles. Celle proche de  $t = -2.6309$  donne  $\rho = 2.7346\dots$  et donc une valeur négative pour  $s_{12}^a = 1 - \rho$ . Il faut la rejeter. Celle proche de  $t = 0.6074$  donne  $\rho = 1.20492\dots$  et doit être rejetée pour la même raison. Les deux autres sont bonnes. La quatrième racine  $t = 2.2042\dots$  donne les valeurs approchées suivantes pour une configuration de la première classe

$$\begin{aligned} s_{12} &= 1.3804891068430122, & \Delta_0 &= -3.2227254203274491, \\ s_{14} &= 3.4694719655517931, & \Delta_1 &= 0.6192537754689517, \\ & & \Delta_4 &= 1.3649640939205939. \end{aligned}$$

La seconde racine  $t = -2.0630\dots$  donne les valeurs approchées suivantes pour une configuration de la troisième classe

$$\begin{aligned} s_{12} &= 1.5813135789261655, & \Delta_0 &= -0.6606260592252785, \\ s_{14} &= 0.6246520822842270, & \Delta_1 &= 0.7050602812470176, \\ & & \Delta_4 &= -1.4545547845157745. \end{aligned}$$

**Cas des deux plans de symétrie.** Nous avons réduit les solutions de la deuxième classe à des configurations possédant deux plans de symétrie, plus précisément telles que pour une certaine numérotation des petites masses on ait  $\Delta_1 = \Delta_2$  et  $\Delta_3 = \Delta_4$ . On va montrer que la seule configuration centrale de ce type vérifie de plus  $\Delta_0 = 0$ . Les quatre petites masses forment un carré.

On écrira  $\Delta_0 = -4t\delta$ ,  $\Delta_1 = \delta(1+t)$  et  $\Delta_3 = \delta(-1+t)$ . La solution en tétraèdre régulier est ainsi rejetée à l'infini. On fixera encore  $\lambda = -1$  et  $s_0 = 1$ . Les trois distances mutuelles qui entrent en jeu sont  $s_{12}$ ,  $s_{34}$  et  $s_{13}$ . Le système  $t_0 = t_1 = t_3$  s'écrit

$$8t = (1+t)s_{12} + 2(t-1)s_{13} = 2(1+t)s_{13} + (t-1)s_{34}.$$

Posons  $\rho = \delta^2$ . Les relations

$$s_{12}^a = 1 - \rho(1+t)^2, \quad s_{34}^a = 1 - \rho(1-t)^2, \quad s_{13}^a = 1 - \rho(t^2 - 1)$$

complètent les précédentes pour former un système de cinq équations à cinq inconnues. On suppose  $a = -3/2$  et on pose  $s_{13} = z^2$ . On tire

$$\rho = \frac{1 - z^{-3}}{t^2 - 1} \quad \text{et} \quad s_{12}^a = \frac{-2 + z^{-3} + tz^{-3}}{t - 1}.$$

On notera

$$\begin{aligned} P(z, t) &= z^3(t - 1)s_{12}^a = 1 + t - 2z^3, \\ Q(z, t) &= (1 + t)s_{12} = 8t - 2(t - 1)z^2. \end{aligned}$$

On doit avoir

$$R(z, t) = P^2Q^3 - z^6(t - 1)^2(t + 1)^3 = 0.$$

La manipulation analogue avec  $s_{34}$  montre que  $R(z, -t) = 0$ . Le système complet s'écrit

$$R(z, t) = R(z, -t) = 0.$$

Nous voulons montrer que ce système n'admet pas de solution en dehors de la solution triviale avec  $t = 0$ , soit  $\Delta_0 = 0$ . Les solutions non triviales vérifient

$$R_i(z, t) = R_p(z, t) = 0,$$

les polynômes  $R_i$  et  $R_p$  étant définis par

$$R_i(z, t) = \frac{1}{2t}(R(z, t) - R(z, -t)), \quad R_p(z, t) = \frac{1}{2}(R(z, t) + R(z, -t)).$$

En posant  $u = t^2$ , ces polynômes s'écrivent

$$\begin{aligned} R_i &= -(96z^8 - 384z^6 - 64z^5 + 384z^3 + 9z^2 - 96)z^4 \\ &\quad - (-32z^{12} + 384z^{10} - 64z^9 - 1536z^8 + 384z^7 + 2066z^6 \\ &\quad \quad - 192z^4 - 2048z^3 + 384z^2 + 512)u \\ &\quad - (3z^2 - 8)(3z^4 - 24z^2 + 64)u^2 \\ R_p &= (32z^6 - 32z^3 + 7)z^6 \\ &\quad + 2(48z^{10} - 384z^8 + 768z^6 + 192z^5 - 7z^4 - 768z^3 + 192)z^2u \\ &\quad + (32z^9 - 384z^7 + 7z^6 + 1536z^5 - 2048z^3 - 384z^2 + 1024)u^2. \end{aligned}$$

Le résultant  $S(z)$  en  $u$  des deux polynômes se factorise ainsi :

$$\begin{aligned} S &= -65536z^6(128z^{39} - 4608z^{37} - 80z^{36} + 73728z^{35} + 4176z^{34} \\ &\quad - 688112z^{33} - 88896z^{32} + 4127520z^{31} + 1044991z^{30} \\ &\quad - 16477248z^{29} - 7600020z^{28} + 43447424z^{27} + 35813508z^{26} \\ &\quad - 70044672z^{25} - 109970016z^{24} + 44256960z^{23} + 212037648z^{22} \\ &\quad + 79735680z^{21} - 225282624z^{20} - 253473024z^{19} + 56217664z^{18} \\ &\quad + 318091776z^{17} + 162110976z^{16} - 157988864z^{15} - 236374272z^{14} \\ &\quad - 59535360z^{13} + 144228352z^{12} + 102813696z^{11} + 12331008z^{10} \\ &\quad - 73521152z^9 - 26148864z^8 - 1290240z^7 + 22179840z^6 \\ &\quad + 3563520z^5 + 49152z^4 - 3710976z^3 - 196608z^2 + 266240). \end{aligned}$$

On applique l'algorithme de Sturm au facteur de degré 39 ; on montre ainsi que ce polynôme possède cinq racines réelles, dont quatre positives. La première racine positive, environ 0.8221, correspond à une valeur négative de la variable  $u = t^2$ , et doit être rejetée. La même chose se produit avec les troisième et quatrième racines positives, soit environ 1.8394 et 2.3580. L'exclusion de la seconde racine positive  $z = 1.6677\dots$  demande plus d'attention. Elle correspond à une valeur positive de  $u$ , donnant la valeur  $t = 4.8221\dots$ , qu'on substitue dans l'expression de  $P(z, t)$ . On obtient une valeur négative de  $z$ . Le cube d'une des distances mutuelles est donc négatif, ce qui est impossible.

On peut se demander si le long calcul qui précède ne pourrait pas être remplacé par un argument plus simple. La constatation qui suit rend improbable en tout cas l'existence d'une démonstration courte du style de celles de la troisième partie. Si on remplace dans les calculs précédents l'exposant  $-3/2$  par l'exposant  $-4$ , on obtient une configuration centrale non triviale, qui provient sans doute d'une dégénérescence de la configuration triviale se produisant quand l'exposant  $a$  prend la valeur  $-3.37645159\dots$ , solution de l'équation

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{2^{a+2}a} = \left( \frac{1 + 2^a}{2} \right)^{1/a}.$$

Il nous reste à décrire la solution triviale où les quatre petites masses forment un carré. On fait donc  $t = 0$  dans le système précédent, et on obtient  $s_{12} = s_{34} = 2s_{13}$ ,  $s_{12}^a = 1 - \rho$  et  $s_{13}^a = 1 + \rho$ . On en tire aisément

$$s_{13}^a = \frac{2}{1 + 2^a}.$$

Dans le cas newtonien  $a = -3/2$ , on trouve la valeur  $s_{13} = 0.7708388\dots$  du carré du côté. On trouve aussi  $\Delta_1 = 0.69108049\dots$

### 5. Argument numérique.

Nous n'avons pas obtenu assez de renseignements sur les configurations de la troisième classe. Rien n'empêche en effet l'existence de configurations de cette classe ayant seulement un plan de symétrie. Il en existe une en effet, mais les calculs nécessaires pour la caractériser comme correspondant à une racine d'un polynôme d'une variable sont infaisables. Pour illustrer la différence de degré de difficulté entre les problèmes que nous venons de résoudre avec un programme de calcul formel, et celui qui nous reste à résoudre, signalons qu'un procédé général permet de ramener les premiers à la recherche des points critiques d'une fonction d'une variable, et le second à la recherche des points critiques d'une fonction de deux variables.

La mise en œuvre de ce procédé général, et le tracé numérique des lignes de niveau de la fonction de deux variables obtenue, convaincront sans doute le lecteur le plus sceptique de l'existence et de l'unicité de la configuration centrale n'ayant qu'un plan de symétrie. Ils ne constituent pas toutefois une preuve rigoureuse.

La fonction de deux variables que nous utiliserons est la *maximisée radiale* de l'analogue de la *transformée de Legendre* du potentiel  $U_\lambda$ . Ces deux notions sont introduites dans la référence [5]. La fonction

$$L_\lambda = -\frac{a}{\kappa} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \mu_i \mu_j \left( -\lambda - \frac{\Delta_i \Delta_j}{\mu_i \mu_j} \right)^{\kappa/a} - s_0 (\Delta_1 + \dots + \Delta_4)^2$$

vérifie, quand on considère les  $\Delta_i$ ,  $i \neq 0$ , comme les variables,

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial \Delta_i} = \sum_{j \neq i} \Delta_j (-\lambda - S_{ij})^{1/a} + 2s_0 \Delta_0 = \sum_{j=1}^4 \Delta_j s_{ij} + 2s_0 \Delta_0.$$

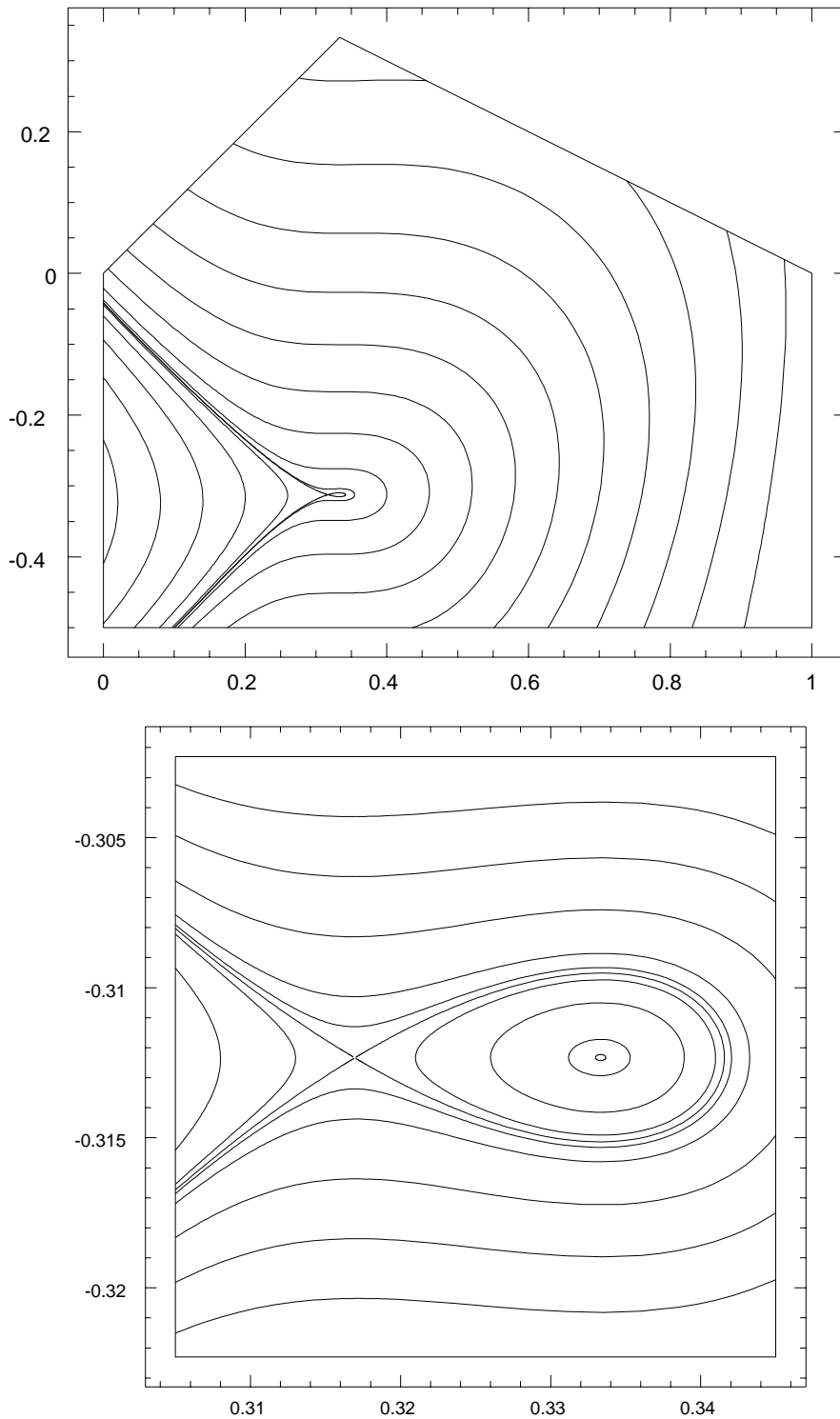
Annuler cette dérivée partielle revient à poser  $t_0 = t_i$ . Les points critiques correspondent donc aux configurations centrales. Passons à la maximisée radiale de  $L_\lambda$ . Quand on substitue les  $\Delta_i$  par  $\sqrt{x} \Delta_i$  dans l'expression de  $L_\lambda$ , et qu'on dérive deux fois par rapport à  $x$ , on trouve une quantité négative. La fonction de  $x$  possède donc au plus un maximum, et on peut facilement trouver les conditions sur les  $\Delta_i$  qui assurent l'existence de ce maximum. La maximisée radiale  $\bar{L}_\lambda$  de  $L_\lambda$  associée à tout rayon de l'espace  $\mathbb{R}^4$  des  $\Delta_i$  le maximum de  $L_\lambda$  sur ce rayon.

Revenons au cas qui nous intéresse, soit  $\mu_i = 1$  et  $\Delta_1 = \Delta_2$ . La fonction  $L_{-1}$  est une fonction de trois variables, et  $\bar{L}_{-1}$  est la fonction de deux variables annoncée. Nous sommes plus particulièrement intéressés par le domaine des configurations de la troisième classe, soit  $\Delta_1 < 0$  et  $\Delta_3 < 0 < \Delta_4$ . Nous pouvons restreindre ce domaine en profitant des estimations de Moeckel,  $\Delta_1 < \Delta_0$  et  $\Delta_3 < \Delta_0 < \Delta_4$ . Pour paramétrer les rayons de ce domaine, nous utiliserons le quadruple  $(\delta_0, \delta_1, \delta_3, \delta_4)$  proportionnel à  $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_3, \Delta_4)$  mais normalisé par la condition  $\delta_0 + \delta_4 = -1$ . Comme dans le domaine qui nous intéresse  $\Delta_0 + \Delta_4$  est positif, le facteur de proportionnalité qui relie les  $\Delta_i$  aux  $\delta_i$  est négatif.

Dans les deux figures, on a choisi  $\delta_3$  pour abscisse et  $\delta_0$  pour ordonnée. Le couple  $(\delta_3, \delta_0)$  permet de retrouver les autres variables avec les formules  $\delta_4 + \delta_0 = -1$  et  $2\delta_1 + \delta_3 = 1$ . La frontière  $\Delta_1 = \Delta_0$  correspond à la droite  $1 - \delta_3 = 2\delta_0$ , la frontière  $\Delta_3 = \Delta_0$  à la droite  $\delta_0 = \delta_3$ , la frontière  $\Delta_3 = 0$  à la droite  $\delta_3 = 0$ , la frontière  $\Delta_0 = \Delta_4$  à la droite  $\delta_0 = -1/2$  et enfin la frontière  $\Delta_1 = 0$  correspond à la droite  $\delta_3 = 1$ . Le domaine a donc une forme pentagonale. Il est traversé par la droite verticale  $\delta_3 = 1/3$  qui correspond aux configurations à symétrie ternaire.

On voit clairement apparaître deux points critiques. Celui de type selle ne correspond à aucune symétrie particulière, en dehors du plan de symétrie traduit par l'égalité  $\Delta_1 = \Delta_2$ . On détermine à l'aide de l'algorithme de Newton les valeurs approximatives suivantes

$$\begin{aligned} s_{12} &= 1.6344258590966159, & \Delta_0 &= -0.6603872550365788, \\ s_{13} &= 1.5542386197227904, & \Delta_1 &= 0.7220959947493725, \\ s_{14} &= 0.6196964039100773, & \Delta_3 &= 0.6701496285793221, \\ s_{34} &= 0.6354012737838050, & \Delta_4 &= -1.4539543630414884. \end{aligned}$$



*Figure 2*

Remarquons que sur la figure les deux points critiques sont presque sur la même ligne horizontale : on trouve pour le point selle  $\delta_0 = -0.31233706\dots$ , et pour le point à symétrie ternaire  $\delta_0 = -0.31232603\dots$ .

## Références bibliographiques

- [Ale] V.M. Alexeyev, *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps*, Actes, congrès international de Mathématiques 2 (1970) pp. 893–907
- [AKN] V.I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Encyclopaedia of Math. Sciences, Dynamical Systems III*, translated by A. Iacob, Springer-Verlag (1987)
- [Arn] V.I. Arnold, *Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, édition Mir, Moscou (1976)
- [Ban] T. Banachiewicz, *Sur un cas particulier du problème des trois corps*, C. R. Acad. Sci. Paris 142 (1906) pp. 510–512
- [Bet] E. Betti, *Sopra il moto di un sistema di un numero qualunque di punti che si attraggono o si respingono tra di loro*, Annali di Matematica s.2 t.8 (1877) pp. 301–311
- [Bir] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Providence, RI (1927, 1966)
- [Blu] L.M. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*, Oxford at the Clarendon Press (1953)
- [Bry] J. Bryant, *Sur une réduction du problème des  $N$  corps mettant en évidence une structure de contact*, C. R. Acad. Sci. Paris 290 (1980) pp. 673–675, *La variété de collision triple comme variété invariante d'un système de contact*, ib. 291 (1980) pp. 205–208
- [Cab] H. Cabral, *On the integral manifolds of the  $n$ -body problem*, Invent. Math. 20 (1973) pp. 59–72
- [Car] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann (1922)
- [Cay] A. Cayley, *On a theorem in the geometry of position*, œuvres v.1 (1841) pp. 1–4
- [Che] A. Chenciner, *Le rôle des collisions dans le Problème des  $n$  corps*, Journée annuelle de la Société Mathématique de France (1996)
- [CLN] J. Casasayas, J. Llibre, A. Nunes, *Central Configurations of the planar  $1+n$  Body Problem*, Celest. Mech. Dyn. Astron. 60 (1994) pp. 273–288
- [Deh] R. Deheuvels, *Tenseurs et Spineurs*, Presses Universitaires de France (1993)
- [DNF] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, *Géométrie Contemporaine, Méthodes de la théorie de l'homologie*, édition Mir, Moscou (1987)
- [Dzi] O. Dziobek, *Ueber einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems*, Astron. Nachr. 152 (1900) pp. 33–46
- [Eas] R.W. Easton, *Some topology of  $n$ -body problems*, J. Differential Eq. 19 (1975) pp. 258–269
- [Eul] L. Euler, *Considérations sur le probleme des trois corps*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 19 (1763) pp. 194–220
- [Hal] G.R. Hall, *Central Configurations in the Planar  $1+n$  Body Problem*, preprint

- [Jac] C.G.J. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik* (1843), Gesammelte Werke, Chelsea (1969)
- [Lap] P.S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, œuvres v.4 (1805)
- [Lag1] J.L. Lagrange, *Essai sur le problème des trois corps*, œuvres v.6 (1772) pp. 229–324
- [Lag2] J.L. Lagrange, *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps*, œuvres v.4 (1777) pp. 401–418
- [Lic] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. of Diff. Geom. 12 (1977) pp. 253–300
- [May] A.M. Mayer, *Floating magnets*, Nature 17 & 18 (1878) pp. 487–488 & pp. 258–260
- [MeS1] K.R. Meyer, D.S. Schmidt, *Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 8\* (1988) pp. 215–225
- [MeS2] K.R. Meyer, D.S. Schmidt, *Bifurcations of relative equilibria in the N-body and Kirchhoff problems*, SIAM J. of Math. Anal. 19-6 (1988) pp. 1295–
- [MiS] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Math. Studies 76, Princeton University Press, Princeton, NJ (1974)
- [MMW] C. McCord, K. Meyer, Q. Wang, *The Integral Manifolds of the Three Body Problem*, preprint of University of Cincinnati
- [Moe] R. Moeckel, *On Central Configurations*, Math. Z. 205 (1990) pp. 499–517
- [Mou] F.R. Moulton, *The straight line solutions of the problem of N bodies*, Ann. of Math. 2-12 (1910) pp. 1–17
- [Pac] F. Pacella, *Central configurations of the n-body problem via equivariant Morse theory*, Archive for Rat. Mech. and Anal. 97 (1987) pp. 59–74
- [Pal] J. Palmore, *Central Configurations and Relative Equilibria in the n-Body Problem in  $E^4$* , Celestial Mechanics 21 (1980) pp. 21–24
- [PaS] R. S. Palais, S. Smale, *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) pp. 165–172
- [Ped] P. Pedersen, *Stabilitätsuntersuchungen im restringierten vierkörperproblem*, Dan. Mat. Fys. Medd. 26 (1952) p. 16
- [Piz] P. Pizzetti, *Casi particolari del problema dei tre corpi*, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei s.5 v.13 (1904) pp. 17–26
- [Saa1] D.G. Saari, *On the role and properties of n body central configurations*, Celestial Mechanics 21 (1980) pp. 9–20
- [Saa2] D.G. Saari, *From rotations and inclinations to zero configurational velocity surfaces, II. The best possible configurational velocity surfaces*, Celestial Mechanics 40 (1987) pp. 197–223
- [Shu] M. Shub, *Appendix to Smale's paper: Diagonals and relative equilibria, in*



- Manifolds-Amsterdam*, Springer Lectures Notes in Math. 197 (1970) pp. 199–201
- [Sie] C.L. Siegel, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer-Verlag (1956), édition anglaise avec J.K. Moser, Springer-Verlag (1971)
- [Sim] C. Simó, *El conjunto de bifurcación en el problema espacial de tres cuerpos*, Actas I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica, Instituto de Astrofísica, Univ. de la Laguna, Espagne (1975) pp. 211–217
- [Sma1] S. Smale, *Topology and mechanics I*, Invent. Math. 10 (1970) pp. 305–331
- [Sma2] S. Smale, *Topology and mechanics II*, Invent. Math. 11 (1970) pp. 45–64
- [Sma3] S. Smale, *Dynamics retrospective: great problems, attempts that failed*, Physica D 51 (1991) pp. 267–273
- [Sun1] K.F. Sundman, *Recherches sur le problème des trois corps*, Acta Soc. Sci. Fennicae 34 nr. 6 (1907)
- [Sun2] K.F. Sundman, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. 36 (1913) pp. 105–179
- [Tho] W. Thompson, *Floating magnets*, Nature 18 (1878) pp. 13–14
- [Win1] A. Wintner, *Galilei group and law of gravitation*, Amer. Journ. of Math. 60 (1938) pp. 473–476
- [Win2] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton Math. Series 5, Princeton University Press, Princeton, NJ (1941)
- [Xia] Z. Xia, *Central Configurations with Many Small Masses*, J. Diff. Eqtns. 91 (1991) pp. 168–179
- [Yoc] J.C. Yoccoz, “Configurations centrales dans le problème des quatre corps dans le plan”, conférence à Palaiseau, le 21 avril 1986