

ECOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ÎLE DE FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

présentée par

Gwenaël BOUÉ

pour obtenir le grade de
docteur de l'Observatoire de Paris
en Astronomie et Astrophysique

ROTATION À LONG TERME DES PLANÈTES,
APPLICATION AU BASCULEMENT D'URANUS

dirigée par

Jacques LASKAR

et soutenue le 9 avril 2010
devant la commission composée de

Alessandra CELLETTI rapporteur
Alexandre CORREIA examinateur
Jacques LASKAR directeur de thèse
Anne LEMAÎTRE examinatrice
Alessandro MORBIDELLI examinateur
Bruno SICARDY président du jury
Scott TREMAINE rapporteur

Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides
boue@imcce.fr

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude envers Jacques Laskar pour son encadrement et son accompagnement tout au long de cette thèse. Je lui suis aussi très reconnaissant pour m'avoir fait confiance et m'avoir proposé ce sujet suite à mon désir de me réorienter vers la mécanique céleste après deux années d'étude sur les amas de galaxies.

Je remercie également Alessandra Celletti et Scott Tremaine pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce manuscrit, ainsi qu'Anne Lemaître, Alexandre Correia, Alessandro Morbidelli et Bruno Sicardy pour l'honneur qu'ils me font en participant à ce jury.

Je souhaite remercier aussi Florence Durret et Gary Mamon avec qui j'ai travaillé les deux années précédant cette thèse pour leur gentillesse et leur complaisance qui m'ont permis de démarrer cette thèse sereinement.

Un grand merci à toute l'équipe de l'IMCCE. Cette thèse a bénéficié des nombreux échanges en particulier avec Philippe Robutel et Mickaël Gastineau.

Je remercie aussi tous les doctorants et amis qui m'ont accompagnés durant cette thèse et surtout Clément Baruteau, Guilhem Lavaux, Elisabetta Micelotta, Rémi Avriller, Christophe Bernicot, Nicolas Coquereau, Josselin Desmars, Dorothée Husson, Hervé Manche, Elisabete Da Cunha, Tatiana Ferraz Lagana, Kumiko Kotera, Aurélien Benoît-Levy, Marc Liley, Sara Caucci et Ali Aghaee.

Enfin, un grand merci à ma mère qui m'a accompagné dans mes longues études et à toute ma famille.

Rotation à long terme des planètes, application au basculement d'Uranus

Uranus est une planète singulière en raison de la forte inclinaison de son axe de rotation. L'origine de cette propriété constitue même l'un des problèmes majeurs concernant le système solaire. Jusqu'à aujourd'hui, aucune explication qui ait été donnée n'est parfaitement satisfaisante. L'hypothèse la plus communément admise suppose qu'une collision géante a eu lieu à la fin de la formation de la planète. Cependant, les satellites réguliers d'Uranus se situent dans le plan équatorial de la planète, et la collision ne permet pas d'expliquer le basculement de leur orbite. C'est dans ce cadre que se place cette thèse, le but étant d'étudier les mécanismes possibles de basculement sans collision de l'axe d'Uranus. Pour commencer, nous retraçons l'histoire du système solaire depuis sa formation afin d'en extraire les moments où le basculement a pu se produire. Ensuite, nous évaluons la vitesse limite supérieure à laquelle Uranus peut pivoter tout en conservant ses satellites dans le plan équatorial. À partir de là, nous présentons deux études différentes sur les évolutions possibles de l'axe d'Uranus, chacune correspondant à une époque distincte de l'histoire du système solaire. La première se réfère au moment où les planètes évoluent dans un disque de planétésimaux, et la seconde se rapporte à la migration tardive. Dans ce deuxième cas, Uranus est effectivement susceptible de basculer sans l'aide d'une collision géante. Cette étude s'appuie sur des résultats généraux liés à l'évolution des corps rigides. Le premier concerne le problème lunaire dont le but est de connaître l'effet d'un satellite sur le mouvement de précession de sa planète. Auparavant, seuls deux cas asymptotiques étaient résolus. À partir de techniques de moyennisation et grâce à une approche vectorielle, l'effet a pu être déterminé quelque soit la distance du satellite. De plus, cette approche très générale fournit une solution qui n'est pas spécifique au problème lunaire, mais qui s'applique aussi directement à l'étude des mouvements de rotation de deux corps rigides en interaction gravitationnelle tels que les astéroïdes binaires. Enfin, certains outils développés pour l'étude d'Uranus ont été appliqués au cas de Saturne. Cela a apporté de nouvelles contraintes sur la migration tardive. En particulier, la vitesse de migration de Neptune devait être suffisamment lente pour que l'axe de Saturne puisse atteindre son inclinaison actuelle.

mots-clés : précession, nutation, corps rigide, astéroïdes binaires, Uranus, Saturne, migration planétaire, méthode analytique, méthode numérique

Long term rotation of planets, application to Uranus tilting

Uranus is a special planet because of the large inclination of its spin-axis. The origin of this property is one of the great unanswered questions about the Solar system. It is sometimes believed that it is due to a great collision with a protoplanet at the end of the planetary formation. However, regular satellites are orbiting in the equatorial plane of the planet and this mechanism fails to explain the tilt of their orbit. This is at this point that this PhD thesis starts. The aim is to find a collisionless scenario for the tilt of Uranus. In this work, we review the history of the Solar system since its birth in order to see when the tilt could have occurred. Then, we evaluate the maximal rate at which Uranus could tilt such that the satellites remain in the equatorial plane. Two different periods in the history of the Solar system appear to be good candidates for the tilt. The first one corresponds to the period when the planets were evolving in a planetesimal disk, and the second one is related to the late migration. In the second case, Uranus can actually tilt without any giant collision. This study is based on general results on the evolution of rigid bodies. The first relates to the lunar problem whose goal is to know the effect of a satellite on the precession motion of its planet. Previously, only two asymptotic cases were solved. From averaging techniques and using a vectorial approach, the effect can be evaluated regardless of the distance of the satellite. Moreover, such a general approach provides a solution that is not unique to the lunar problem. It applies also directly to the study of the rotation of two rigid bodies in gravitational interaction such as binary asteroids. Finally, some tools developed for Uranus have been applied to Saturn case. This has brought new constraints on the late migration. In particular, the migration speed of Neptune should have been slow enough so that Saturn's axis could reach its current inclination.

keywords: precession, nutation, rigid body, binary asteroids, Uranus, Saturn, planetary migration, analytical method, numerical method

Table des matières

1	Histoire du système solaire	1
1.1	Formation du système solaire	1
1.1.1	Idée générale	1
1.1.2	Formation des planètes	1
1.1.3	Effets du disque de gaz	1
1.1.4	Effets du disque de planétésimaux	2
1.1.5	Stabilité des orbites aujourd’hui	3
1.2	Rotation des planètes et obliquité initiale	4
1.2.1	Première explication	4
1.2.2	Rotation des protoplanètes	4
1.2.3	Rotation des planètes gazeuses	4
1.2.4	Vénus : une rotation rétrograde expliquée	5
1.2.5	Uranus : une planète singulière	6
1.3	Sur l’origine de la forte obliquité d’Uranus	6
1.3.1	Basculement du système solaire	6
1.3.2	Décroissance orbitale d’un satellite rétrograde	7
1.3.3	La grande collision	8
1.3.4	Rencontres proches	8
1.4	Conclusion	9
2	Contraintes des satellites réguliers	11
2.1	Modèle de Kinoshita	11
2.1.1	Trajectoire du pôle de l’orbite du satellite	11
2.1.2	Distribution des inclinaisons finales	14
2.1.3	Conclusion	16
2.2	Nouvelle contrainte	16
2.2.1	Nouvelle conclusion	21
2.3	Effet de marée	21
2.3.1	L’origine de la dissipation dans les planètes géantes	21
2.3.2	Dépendance du facteur de dissipation Q	22
2.3.3	Contrainte sur le basculement d’Uranus	24
3	Effet d’un disque de planétésimaux	27
3.1	Modification de la précession d’une planète	27
3.1.1	Interaction solide-disque	27
3.1.2	Interaction solide-point	31
3.1.3	Interaction complète	31
3.2	Modélisation d’un disque déformable	32
3.2.1	Modélisation continue	32

3.2.2	Modélisation discrète	35
3.3	Spectre de l'évolution séculaire	38
3.3.1	Modélisation	38
3.3.2	Résultat	40
3.4	Evolution de l'axe	42
3.4.1	Formalisme	42
3.4.2	Simplifications	44
3.4.3	Système complet	46
3.5	Cas d'un disque chaud	47
3.6	Conclusion	49
4	Basculement durant la phase de migration	51
4.1	Contrainte sur l'inclinaison	51
4.1.1	Système étudié	51
4.1.2	Evolution maximale	52
4.1.3	Conclusion	55
4.2	Effet des rencontres proches sur l'inclinaison	55
4.2.1	Modèle d'Öpik	55
4.2.2	Système étudié	56
4.2.3	Déflexion	57
4.2.4	Distance minimale d'approche	59
4.2.5	Variation d'inclinaison	59
4.2.6	Conclusion	60
4.3	Scénario de basculement sans collision	60
4.3.1	Scénario	61
4.3.2	Simulations numériques	62
4.3.3	Détail du basculement	64
4.3.4	Conclusion	68
4.4	A collisionless scenario for Uranus tilting	70
4.4.1	Introduction	70
4.4.2	Numerical experiment	70
4.4.3	Dynamics of the tilt	71
4.4.4	Conclusion	73
5	Mouvement des corps rigides et application	75
5.1	Spin axis evolution of interacting bodies	77
5.1.1	Introduction	77
5.1.2	Two different problems	78
5.1.3	Similarities	79
5.1.4	A common resolution	80
5.1.5	Solutions	82
5.1.6	Conclusion	84
5.2	Precession of a planet with a satellite	87
5.2.1	Introduction	87
5.2.2	Fundamental equations	88
5.2.3	Secular equations	91
5.2.4	Global solution	95
5.2.5	Description of the solutions	97
5.2.6	Analytical approximation	98
5.2.7	Comparison with previous work	101

5.2.8	Conclusions	103
5.2.9	Appendix A. Averaged quantities	104
5.2.10	Appendix B. Linear algebra	104
5.2.11	Appendix C. Approximations in 3D	105
5.3	Spin axis evolution of two interacting bodies	107
5.3.1	Introduction	107
5.3.2	Fundamental equations	108
5.3.3	Secular equations	111
5.3.4	Analytical approximation	115
5.3.5	Global precession of an n -body system	116
5.3.6	Application	117
5.3.7	Conclusions	122
5.3.8	Appendix A. Gravitational interaction expansion	122
5.3.9	Appendix B. Inertia integral	123
5.3.10	Appendix C. Averaged quantities	123
5.4	Speed limit on Neptune migration imposed by Saturn tilting	125
5.4.1	Introduction	125
5.4.2	Spin axis evolution	125
5.4.3	Orbital evolution	126
5.4.4	Results	126
5.4.5	Fastest tilting	127
5.4.6	Conclusion	128
6	Conclusions et perspectives	129
	Bibliographie	131
	Index	136

Chapitre 1

Histoire du système solaire

1.1 Formation du système solaire

1.1.1 Idée générale

Parmi les différentes théories de la formation du système solaire apparues au XVIII^{ème} siècle, celle qui a été proposée indépendamment par le philosophe Kant (1755) et le scientifique Laplace (1796) reste encore aujourd'hui la plus populaire. Selon ce scénario, les planètes se sont formées dans un disque de gaz et de poussière en rotation autour du soleil naissant. Originellement, cette hypothèse a été faite pour expliquer les orbites progrades et quasiment coplanaires de toutes les planètes. Aujourd'hui de tels disques, appelés disques protoplanétaires, ont été observés autour d'étoiles jeunes par le télescope spatial Hubble (Fig. 1.1). Ces observations directes permettent en plus de contraindre les modèles de formation planétaire par l'analyse de la composition du disque, sa température et sa durée de vie. En particulier, le temps caractéristique de survie des disques circumstellaires autour des étoiles jeunes est de 10 millions d'années environ (Meyer, 2009), ce qui signifie que les planètes se forment pendant ce même laps de temps.

1.1.2 Formation des planètes

Selon le modèle communément accepté, le disque protoplanétaire se forme en même temps que l'étoile par contraction d'un nuage interstellaire. Ensuite, la matière solide sédimente vers le plan médian du disque. Durant ce processus, les grains de poussière s'agglomèrent pour former des objets dont la taille est de l'ordre du centimètre ou du mètre. Lors de l'étape suivante, encore mal comprise, des planétésimaux acquièrent une taille de l'ordre de plusieurs centaines de mètre. Après cela, l'accrétion de ces planétésimaux engendre les embryons de planètes. Si ces embryons ont une masse suffisante, alors ils capturent une grande quantité de gaz et deviennent une planète géante. Dans le cas contraire, le résultat est une planète rocheuse (Pollack et al., 1996).

1.1.3 Effets du disque de gaz

Pendant leur phase de formation, les planètes évoluent dans un disque de gaz. Goldreich & Tremaine (1979) ont étudié l'interaction entre une protoplanète et un disque protoplanétaire et ont constaté que la protoplanète subit une force qui tend à la faire spiraler vers son étoile. Depuis, de nombreuses planètes extrasolaires ont été détectées à moins de 0.1 UA de leur étoile. Certaines font plusieurs masses de Jupiter et n'ont pu se former à cette distance. Ces observations confirment donc le mécanisme de migration. Un tel scénario a dû se produire dans notre système solaire aussi, mais il a dû être stoppé ou même inversé car Jupiter et Saturne se situent à plus de 5 UA du soleil. Depuis les travaux précurseurs de Goldreich & Tremaine (1979), de nombreuses études ont été effectuées

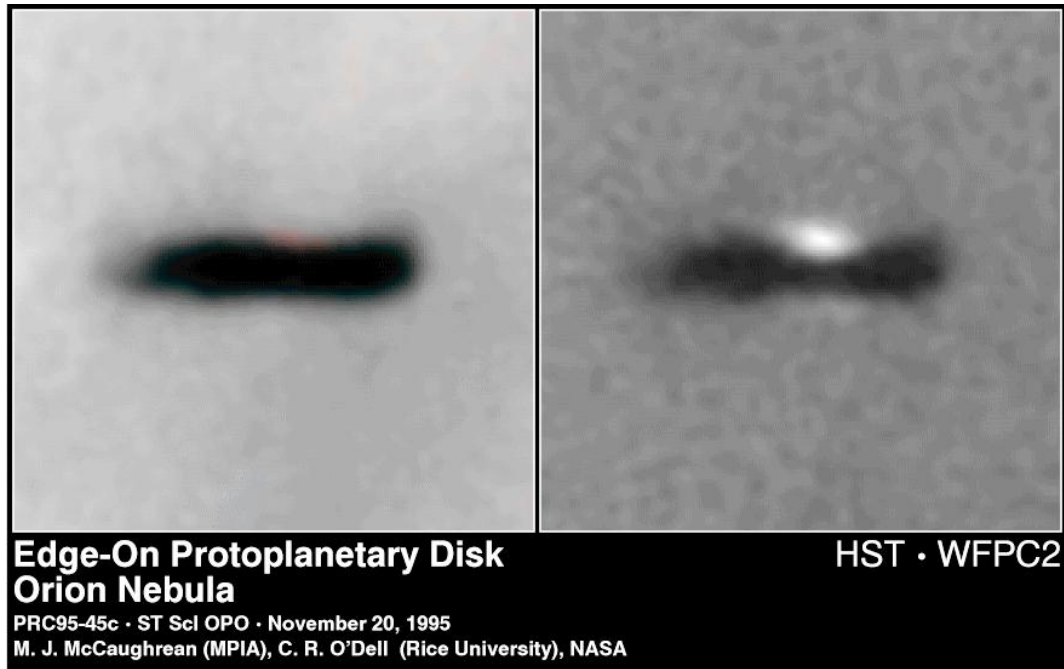


FIGURE 1.1 – Images directes de disques protoplanétaires observés dans la nébuleuse d’Orion par le télescope spatial Hubble, NASA (McCaughrean & O’dell, 1996).

sur la migration, notamment pour trouver des moyens de la ralentir. Il s’avère que ce phénomène est relativement sensible aux conditions qui règnent dans le disque, et que le sens de migration peut effectivement être inversé (Paardekooper et al., 2009). Pour le système solaire, l’arrêt de la migration est certainement dû à une capture en résonance 3 : 2 de moyen mouvement entre Jupiter et Saturne (Masset & Snellgrove, 2001; Morbidelli & Crida, 2007). Pour la suite (voir section 4.1), il est important de noter que le disque de gaz amortit très fortement les inclinaisons des orbites (Lubow & Ogilvie, 2001; Tanaka & Ward, 2004).

1.1.4 Effets du disque de planétésimaux

L’évolution du système solaire, une fois que le disque de gaz est dissipé, est ce que tente de décrire le modèle de Nice (Gomes et al., 2005; Morbidelli et al., 2005; Tsiganis et al., 2005). Selon ce modèle, la configuration planétaire est initialement plus compact, les orbites sont circulaires et de faible inclinaison. Au delà de la dernière planète, subsiste un disque de planétésimaux qui n’ont pas pu s’agglomérer. Dans ce système compact, Jupiter et Saturne traversent une ou plusieurs résonances en moyen mouvement suite aux interactions avec les planétésimaux. Cela déstabilise fortement les orbites, un grand nombre de planétésimaux balaient le système solaire, des rencontres proches entre planètes ont certainement excité leur inclinaisons et excentricités, et il est même possible qu’Uranus et Neptune aient interverti leur position. Après cette évolution rapide, les planètes externes ont continué à migrer lentement vers leur positions actuelles, leurs inclinaisons et excentricités se sont amorties.

Ce modèle est contraint par de nombreux faits observationnels telles que : le bombardement tardif (Gomes et al., 2005) qui fixe le début de la migration à -3.85 milliard d’années (Fig. 1.2) ; les excentricités actuelles des planètes, notamment celles de Jupiter et de Saturne qui ne s’expliquent que si l’une de ces deux planètes a subi une rencontre proche avec Uranus ou Neptune (Morbidelli et al., 2009) ; la distribution en demi-grand axe des astéroïdes dans la ceinture principale (Minton & Malhotra, 2009), et la distribution angulaire des objets trans-neptuniens en résonance 2 : 1 avec

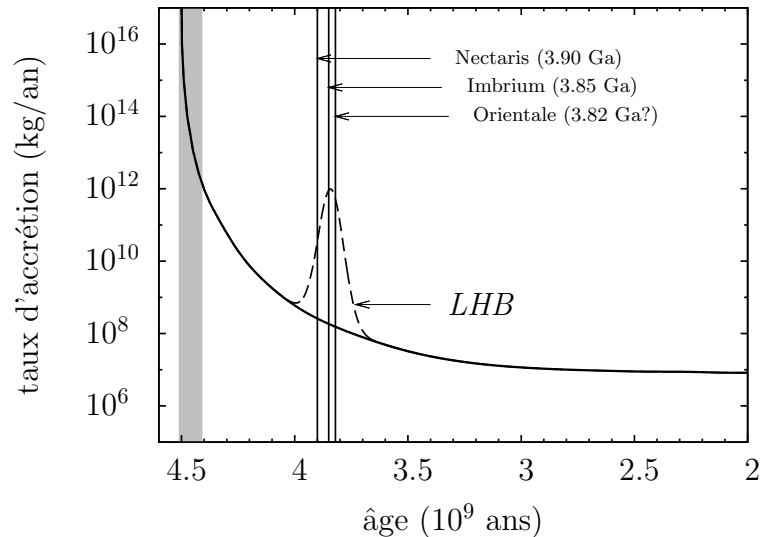


FIGURE 1.2 – Taux d'accrétion de la Lune en fonction du temps. La courbe épaisse représente l'évolution extrapolée jusqu'à l'origine du système solaire. L'âge des bassins des impacts majeurs sont indiqués. La bande grise marque l'âge de la Lune obtenue par radiométrie. La courbe en tiret représente le pic d'accrétion correspondant au bombardement tardif (Late Heavy Bombardment en anglais). Cette figure est adaptée de (Koeberl, 2006).

Neptune (Murray-Clay & Chiang, 2005) qui fournissent des contraintes sur la vitesse de migration des planètes ; enfin, l'orientation actuelle de l'axe de rotation de Saturne qui contraint à la fois la vitesse de migration et l'augmentation de l'inclinaison de Neptune (Boué et al., 2009). De plus, ce scénario permet d'expliquer l'origine des Troyens de Jupiter ainsi que la grande diversité de leurs excentricités et inclinaisons (Morbidelli et al., 2005), et aussi la présence des satellites irréguliers autour des planètes géantes (Nesvorný et al., 2007).

Dans les articles fondateurs du modèle de Nice (Gomes et al., 2005; Morbidelli et al., 2005; Tsiganis et al., 2005), les conditions initiales des planètes étaient plus ou moins arbitraires. Depuis, Morbidelli et al. (2007) ont montré qu'initialement les planètes étaient certainement toutes en résonance de moyen mouvement suite à la migration dans le disque de gaz. De plus, cette migration ne permet qu'un petit nombre de configurations résonantes dont certaines deviennent rapidement instables lorsque le gaz est dissipé. Cela fournit donc une contrainte supplémentaire au modèle de Nice.

1.1.5 Stabilité des orbites aujourd'hui

Après la phase de migration, le système solaire externe est très semblable à celui d'aujourd'hui. En effet, l'étude de l'évolution à long terme de notre système planétaire ne montre un comportement chaotique significatif que pour les planètes internes (Laskar, 2008). Celles-ci présentent des variations de leur inclinaison et excentricité similaires à une marche aléatoire ce qui peut engendrer d'éventuelles collisions dans le future (Laskar & Gastineau, 2009). En revanche, l'analyse des paramètres orbitaux des planètes géantes montre que leur évolution est essentiellement quasi-périodique. La stabilité des fréquences séculaires de ces mouvements est telle que les variations sur 100 millions d'années ne dépassent pas 0.2% (Laskar et al., 2004b). On peut donc considérer qu'il n'y a pas eu d'évolution significative du système solaire externe depuis la fin de la migration.

1.2 Rotation des planètes et obliquité initiale

1.2.1 Première explication

Dans son modèle de formation du système solaire, le philosophe Kant (1755) explique aussi comment les planètes acquièrent leur mouvement de rotation. A l'époque, on pense que Vénus tourne dans le sens prograde¹, et Uranus, dont l'axe est fortement incliné, ne sera découverte par William Herschel qu'en 1781. Pour Kant, toutes les planètes tournent donc dans le même sens. Kant cherche alors à expliquer cette observation et aussi le fait que les planètes les plus massives sont celles qui tournent le plus vite. Kant en vient à l'idée que les planètes se forment par accréation d'un disque situé dans leur sphère d'influence, ce disque étant aussi le lieu de formation des satellites. Les planètes ainsi formées possèdent le bon sens de rotation et leur vitesse de rotation est celle qui équilibre la gravitation et la force centrifuge à leur surface. De cette manière, Kant apporte une réponse aux deux problèmes soulevés. Il est intéressant de noter que ce mécanisme sera repris dans des travaux récents pour résoudre des difficultés rencontrées par des modèles de formation planétaire modernes (Schlichting & Sari, 2007).

1.2.2 Rotation des protoplanètes

Aujourd'hui, il est admis que c'est durant la phase d'accumulation des planétésimaux que les protoplanètes ont acquis leur mouvement de rotation. Cependant les détails de ce mécanisme ne sont pas encore parfaitement connus. Selon certains modèles (Lissauer & Kary, 1991; Dones & Tremaine, 1993; Kokubo & Ida, 2007), les trajectoires d'impact des planétésimaux sur la protoplanète sont aléatoires et isotropes. Ceux-ci proviennent du disque protoplanétaire et non d'un disque d'accréation autour de chacune des protoplanètes. En conséquence, les quantités de moment cinétique apportées à chaque collision ont tendance à se compenser et la protoplanète tourne très lentement sur elle-même. Trop lentement comparé aux périodes de rotation que l'on observe aujourd'hui. Deux propositions différentes ont été apportées pour résoudre ce problème. La première repose sur les impacts géants tels que celui qui est responsable de la formation de la Lune (Benz et al., 1986, 1987, 1989). En effet, un petit nombre d'impacts géants peut apporter suffisamment de moment cinétique pour rendre compte des observations (Lissauer & Kary, 1991; Dones & Tremaine, 1993; Brunini, 1995). Mais dans ce cas l'obliquité des planètes, l'angle que fait leur axe de rotation avec la normale à leur orbite, aurait une distribution isotrope et il devrait y avoir plus de planètes ayant une rotation rétrograde ou fortement inclinée. La seconde solution reprend les idées de Kant (1755) en s'appuyant sur un processus d'accréation qualifié de semi-collisionnel (Schlichting & Sari, 2007). Selon ce modèle, les planétésimaux ne rentrent pas directement en collision avec la protoplanète mais sont d'abord capturés dans un disque d'accréation. Ensuite, par friction dynamique, ils spiralent vers la protoplanète et fournissent systématiquement une composante positive au moment cinétique de la protoplanète. L'obliquité résultante est très faible, et la vitesse de rotation en accord avec les observations.

1.2.3 Rotation des planètes gazeuses

Pour les planètes gazeuses, les scénarios décrits ci-dessus expliquent uniquement l'origine du moment cinétique de leur noyaux solides. Or c'est leur atmosphère très massive et située à la périphérie qui contient la majorité du moment cinétique et qui détermine l'orientation de l'axe de rotation. Mais selon le modèle de Harris & Ward (1982) décrivant la façon dont les planètes capturent leur atmosphère, celles-ci se forment aussi avec une obliquité nulle. Le modèle représenté Fig. 1.3 est le

1. Au milieu du XVIII^{ème} siècle, les astronomes Francesco Bianchini et Jacques Cassini pensaient avoir observé une rotation dans le sens direct de Vénus. Aujourd'hui, depuis les observations radar menées par le Jet Propulsion Laboratory (USA) en 1962, nous savons que la planète possède une rotation rétrograde avec une période de 243 jours (Goldstein, 1964; Carpenter, 1964). L'erreur était due à l'épaisse atmosphère de Vénus qui empêche de voir sa surface.

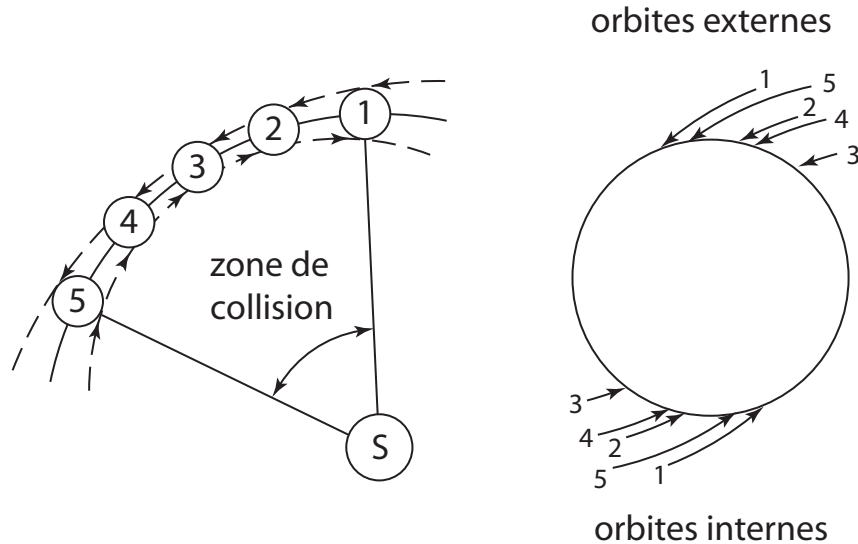


FIGURE 1.3 – Géométrie du flux de particules accrétants sur une planète dans un repère centré sur le Soleil (S), et dans un repère lié à la planète. Toutes les particules, venant d’une orbite interne ou d’une orbite externe, apportent une composante positive au moment cinétique de la planète. Cette figure est adaptée de (Harris & Ward, 1982).

suivant : la planète en formation est en orbite circulaire autour du soleil. Toute particule située sur une orbite interne (de demi-grand axe inférieur à celui de la planète) doit se trouver à l’aphélie pour être capturée par la planète. Or c’est à l’aphélie que la vitesse est la plus faible donc vue de la planète, la particule recule et apporte une composante positive au moment cinétique. Inversement, une particule en orbite externe (de demi-grand axe supérieur à celui de la planète) doit se trouver au périhélie pour être capturée par la planète. Comme la vitesse est maximale au périhélie, vue de la planète, la particule avance. Elle fournit donc aussi une composante positive au moment cinétique.

1.2.4 Vénus : une rotation rétrograde expliquée

Les mouvements de rotation de la plupart des planètes du système solaire se comprennent bien à partir des modèles de formation planétaire. Cependant, bien que son axe de rotation soit pratiquement perpendiculaire au plan de son orbite (il y a un écart de 3 degrés seulement), Vénus est particulière car elle tourne très lentement sur elle-même, mais surtout dans une direction rétrograde par rapport à la plupart des autres planètes. Cette configuration résulte d’un état d’équilibre où les couples exercés par la marée gravitationnelle d’une part, et par la marée atmosphérique d’autre part se compensent (e.g. Correia & Laskar, 2001). En supposant que Vénus se soit formée avec une rotation initiale prograde, il existe deux types d’évolution amenant à la configuration actuelle : soit Vénus a basculé de 177 degrés, soit la vitesse de rotation a diminué jusqu’à s’inverser. Correia & Laskar (2001) ont montré que les probabilités d’occurrence de ces deux évolutions sont comparables. Cela est dû aux interactions séculaires avec les autres planètes qui rendent l’évolution de l’axe de Vénus chaotique (Laskar & Robutel, 1993). Ainsi, la marée solide exercée par le Soleil aurait ralenti la rotation de Vénus alors que son obliquité variait de façon chaotique. Ensuite, pour des vitesses angulaires suffisamment faibles, la friction noyau-manteau domine l’évolution chaotique. Elle a pour effet de redresser l’axe de rotation ce qui engendre une obliquité proche de 0 ou 180 degrés suivant le chemin suivi. Enfin, lorsque la rotation devient très faible, celle-ci est accélérée par la marée atmosphérique jusqu’à ce que l’équilibre avec la marée gravitationnelle soit atteint. Il existe aussi un autre état d’équilibre pour

lequel la rotation est cette fois dans le sens direct. Correia & Laskar (2001) ont toutefois montré à partir de simulations que cette dernière configuration est la moins probable. La rotation particulière de Vénus ne contredit donc pas les scénarios de formation.

1.2.5 Uranus : une planète singulière

Uranus, qui a été découverte par William Herschel en 1781 (Herschel, 1783), possède une obliquité proche de 98 deg. L'orientation singulière de son axe de rotation a été suspectée peu de temps après sa découverte grâce à l'observation de ses satellites, bien avant les premières mesures de sa rotation. En effet, Herschel (1787) annonce que les orbites des deux satellites qu'il vient de découvrir (Titania et Obéron) font un angle considérable avec l'écliptique. L'année suivante, il fournit la première valeur de cette inclinaison : $99^{\circ} 39' 53''$, 9 (Herschel, 1788). Dès lors, les astronomes soupçonnent l'axe d'Uranus d'être incliné de la même façon. Ensuite, les mesures de l'aplatissement de la planète ont été dans le même sens (pour une revue, voir See, 1900). Notamment, l'ellipticité observée de la figure d'Uranus varie suivant les dates d'observation jusqu'à s'annuler les moments où le pôle des orbites des satellites est dans l'axe de la Terre. Cela signifie qu'Uranus est aplatie et que les satellites orbitent dans son plan équatorial. De plus, l'aplatissement doit engendrer un mouvement séculaire des orbites des satellites. L'absence de ce mouvement est un argument supplémentaire pour dire que ces orbites sont peu inclinées par rapport à l'équateur. Les premières tentatives de mesure de la rotation d'Uranus, quant à elles, ont été effectuées plus tard par spectroscopie (Lowell, 1912; Slipher, 1912), puis par photométrie (Campbell & Pickering, 1917). Cependant ces mesures étaient peu précises à cause des mouvements atmosphériques à la surface de la planète. Il faut attendre le survol d'Uranus par la sonde Voyager 2 en 1986 pour avoir enfin une valeur précise de la période de rotation de la planète, à savoir 17.24h (Desch et al., 1986). La forte obliquité d'Uranus étant établie, les ingrédients qui permettent d'expliquer la rotation particulière de Vénus ne peuvent malheureusement pas être utilisés dans le cas d'Uranus. En effet, l'axe d'Uranus est très stable et ne présente pas de comportement chaotique (Laskar & Robutel, 1993). Par ailleurs, Uranus est trop éloignée du Soleil pour que les effets de marée aient une quelconque influence. Il faut donc chercher une autre explication...

1.3 Sur l'origine de la forte obliquité d'Uranus

Comme nous l'avons vu plus haut, les planètes géantes se forment préférentiellement avec une obliquité proche de zéro. Mais alors, comment expliquer le basculement de 97 deg de l'axe d'Uranus ? Plusieurs scénarios ont été avancés dans les dernières décennies pour tenter de résoudre ce problème. Nous les exposons ici dans un ordre arbitraire.

1.3.1 Basculement du système solaire

Tremaine (1991) a étudié la façon dont évoluerait le système solaire s'il était soumis à un couple extérieur. En particulier, Tremaine (1991) a montré qu'un couple, engendré par une distribution de masse (disons à symétrie axiale pour simplifier) située au delà du système solaire et dont l'axe de symétrie basculerait de 90 deg en 0.5 million d'années environ, pourrait faire basculer les orbites de toutes les planètes. Il suffit pour cela que la masse perturbatrice divisée par le cube de sa distance au soleil soit de l'ordre de $10^{-7} M_{\odot} \cdot \text{UA}^{-3}$. Car dans ce cas la précession des orbites engendrée par le perturbateur est plus rapide que l'évolution du perturbateur et les planètes restent dans son plan de symétrie.

Les évolutions des axes de rotation des planètes sont aussi déterminées par leur vitesse de précession comparée au temps caractéristique d'évolution de la perturbation. Toutes les planètes internes jusqu'à Jupiter précessent suffisamment rapidement pour garder une obliquité nulle. En revanche, Saturne, Uranus et Neptune, précessant moins vite, sont plus sujettes à voir leur obliquité augmenter.

Aujourd'hui, les obliquités actuelles de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune sont respectivement de 3 deg, 27 deg, 97 deg et 28 deg. Ainsi, ce mécanisme donne des résultats compatibles avec les observations.

Tremaine (1991) envisage alors qu'un tel événement a pu se produire durant les dernières étapes de la formation des planètes. Le couple extérieur serait dû à une asymétrie du nuage de gaz dans lequel le système solaire se serait formé. Cependant Tremaine (1991) montre que l'axe de rotation du soleil est très faiblement lié au plan des orbites des planètes : son axe précède trop lentement. Or, l'axe du soleil n'est aujourd'hui incliné que de 7 deg. Pour résoudre cette difficulté, Tremaine (1991) suppose que le soleil continue à accrêter de la matière pendant la phase de basculement. Mais alors dans ce cas, on peut objecter que les planètes aussi doivent accrêter de la matière pendant cette phase. C'est justement à la fin de leur formation que les planètes gazeuses acquièrent la quasi-totalité de leur atmosphère par un processus d'emballement (Pollack et al., 1996). Ainsi, même avec cette perturbation extérieure, les planètes gazeuses devraient se former avec une faible obliquité, étant donné que c'est leur atmosphère massive qui contient l'essentiel de leur moment cinétique. D'ailleurs, l'origine de l'obliquité de Saturne est maintenant comprise et repose sur un autre mécanisme (Ward & Hamilton, 2004; Boué et al., 2009). Concernant Uranus et Neptune qui sont essentiellement des planètes de glace, le mécanisme de Tremaine (1991) tient toujours.

1.3.2 Décroissance orbitale d'un satellite rétrograde

Le scénario envisagé par (Greenberg, 1974) est le suivant : un satellite initialement en orbite rétrograde échange du moment cinétique avec sa planète par effet de marée et la fait basculer avant de se briser. Ses hypothèses sont : (1) le système constitué de la planète et de son satellite est isolé ; (2) le moment cinétique de rotation du satellite est négligeable devant celui de son orbite \mathbf{L}_ω et celui de la planète \mathbf{L}_n ; (3) la période de rotation de la planète à la fin du basculement est égale à celle qu'avait la planète avant de basculer. Seule la direction de son axe a changé ; (4) la planète bascule de 98 deg. Dans son étude, Greenberg (1974) n'évoque pas l'effet de l'aplatissement de la planète qui est pourtant prépondérant sur celui de la marée. Cependant cela ne change pas les résultats car l'aplatissement a pour seul effet de faire tourner \mathbf{L}_n et \mathbf{L}_ω à la même vitesse autour du moment cinétique total \mathbf{L} , les trois vecteurs restent donc toujours coplanaires et les équations d'évolution sont inchangées dans ce repère tournant.

Greenberg (1974) a montré que comme dans le cas plan (inclinaisons nulles) traité par Counselman (1973), il existe une masse de satellite critique $m_s = m_c$ séparant deux types d'évolution possible. Cette masse critique est une fonction de la masse et du moment d'inertie de la planète. Pour Uranus, Greenberg (1974) trouve $m_c = 0.03M_U$, où M_U est la masse d'Uranus. Pour $m_s > m_c$, il n'existe qu'un seul point fixe vers lequel toutes les trajectoires convergent. A ce point, le demi-grand axe du satellite est nul ce qui signifie que le satellite plonge dans la planète. Pour $m_s < m_c$, il existe trois points fixes, deux stables et un instable. Partant d'une inclinaison initiale de 98 deg entre l'axe de la planète et le moment cinétique total, le seul point d'équilibre atteignable est celui où le moment cinétique orbital du satellite est non nul et donc où le satellite reste en orbite autour de la planète.

Comme ce satellite n'est pas observé autour d'Uranus, Greenberg (1974) en déduit que le satellite doit être plus massif que m_c . Cependant, il ne peut pas être beaucoup plus massif car il doit rester léger vis-à-vis d'Uranus pour que son moment cinétique de rotation reste faible devant les autres (2^{ème} hypothèse). Partant de $m_s = m_c$, Greenberg (1974) calcule que le demi-grand initial du satellite doit être égal à 25 rayons d'Uranus et son inclinaison initiale égale à 140 deg. L'inclinaison atteint une valeur proche de 0 lorsque le satellite se situe à environ 6 rayons d'Uranus. Pour comparaison, Obéron, le satellite régulier le plus éloigné d'Uranus, se situe à 23 rayons d'Uranus. En utilisant des valeurs plus récentes des paramètres physiques d'Uranus, Kubo-Oka & Nakazawa (1995) ont obtenu $m_c = 0.0095M_U$ au lieu de $m_c = 0.03M_U$ trouvé par Greenberg (1974).

Les contraintes fournies par Greenberg (1974) ne sont *a priori* pas suffisantes pour savoir si le

basculement peut avoir lieu. En particulier, Greenberg (1974) n'a pas vérifié si le basculement pouvait avoir lieu en un temps inférieur à l'âge du système solaire. Pour répondre à cette question, il est nécessaire de se donner un modèle de marée. Or, pour l'instant, il n'existe pas de modèle qui fasse l'unanimité (voir la section 2.3 ainsi que (Efroimsky & Williams, 2009; Greenberg, 2009)). Kubo-Oka & Nakazawa (1995) ont effectué une application numérique en supposant que le déphasage temporel $\Delta t = 0.8\text{s}$ reste constant tout au long de l'évolution (ce qui correspond à un facteur de qualité actuel $Q = 5 \times 10^3$). Par ce critère, Kubo-Oka & Nakazawa (1995) ont trouvé une nouvelle contrainte : $m_s > 0.012M_U$. Cette valeur doit être prise avec précaution sachant qu'elle dépend du paramètre Δt qui est mal connu et du modèle utilisé.

Dans tous les cas, le satellite doit avoir une masse supérieure à environ 1% de celle d'Uranus. Et ce satellite doit migrer d'une orbite externe à celle d'Obéron jusqu'à la surface d'Uranus. Les satellites actuels d'Uranus n'ont donc pas pu survivre à un tel mécanisme. Greenberg (1974) propose que les satellites réguliers se sont formés à partir des fragments de ce gros satellite.

1.3.3 La grande collision

La troisième possibilité est la plus communément admise. Il s'agit de l'impact géant (Safronov, 1966; Korycansky et al., 1990; Slattey et al., 1992; Brunini, 1995; Parisi & Brunini, 1997; Brunini et al., 2002; Parisi et al., 2008). L'idée est qu'une protoplanète de la masse de la Terre a pu percuter Uranus pour la faire basculer. Brunini et Parisi ont d'abord cherché à expliquer l'absence de satellite irrégulier autour d'Uranus par l'intermédiaire de la grande collision. Ensuite, de tels satellites ont été découverts et ils ont montré que ces satellites ne pouvaient pas exister au moment de la collision. Ils ont dû être capturés plus tard. Cela est en accord avec le scénario de capture des satellites irréguliers lors de la migration planétaire dans le disque de planétésimaux (Nesvorný et al., 2007). Cependant, le problème principal posé par l'impact géant est l'existence de satellites réguliers possédant une inclinaison très faible par rapport à l'équateur d'Uranus. Slattey et al. (1992) montrent que de la matière peut être éjectée suite à une collision et ainsi former les satellites. Cependant l'extension du disque de débris créé par un tel impact est trop faible comparée au demi-grand axe d'Obéron (Canup & Ward, 2000). Mosqueira & Estrada (2003a) soulèvent aussi un autre point, celui de la densité des satellites réguliers. En effet, alors que l'on s'attendrait à ce que les éléments les plus légers soit éjectés plus loin, on observe que la densité des satellites croît légèrement avec la distance. Ensuite, selon les simulations de Korycansky et al. (1990), lors de l'impact, soit aucune matière n'est éjectée, soit de la matière est éjectée mais alors Uranus perd toute son atmosphère. Le fait qu'Uranus ait toujours son atmosphère est donc un argument supplémentaire contre la collision. Enfin, on peut se demander ce que sont devenus les satellites qui ont été créés avant ? Si ce sont ceux que l'on observe aujourd'hui, alors il faut trouver un mécanisme susceptible de les faire basculer de 97 deg comme Uranus. Comme nous le verrons plus tard (section 2.3), cela ne peut pas être l'interaction de marée.

1.3.4 Rencontres proches

Enfin, Brunini (2006a) a considéré la possibilité de basculer Uranus lors des rencontres proches qui ont pu se produire entre les planètes géantes lors de la migration. De cette manière, Brunini expliquait les obliquités de toutes les planètes externes. Cependant, Brunini s'est ensuite rétracté à cause d'un problème de calcul de l'obliquité dans son programme (Brunini, 2006b). De plus, Lee et al. (2007) ont montré que lors d'une rencontre proche les planètes ne peuvent pas basculer de façon significative. La raison est que les rencontres proches sont trop rapides comparées au temps caractéristique d'évolution des axes de rotation.

1.4 Conclusion

Il est fort probable qu'Uranus se soit formé avec une obliquité proche de zéro. Comme son axe de rotation actuel est incliné de 97 deg, Uranus a dû basculer entre le moment de sa formation et aujourd'hui. L'hypothèse de la grande collision explique difficilement la présence de satellites réguliers qui orbitent dans le plan de l'équateur. Le basculement est donc plus probablement séculaire. Cependant, dans l'état actuel du système solaire, l'obliquité d'Uranus est très stable. Le basculement a donc dû se faire à un moment où le système solaire était différent. La phase pendant laquelle le disque de gaz était présent est encore mal contrainte, toutefois il est raisonnable de penser que les inclinaisons des orbites devaient être très faibles. Cela inhibe les interactions spin-orbite. Il reste alors la période qui débute au moment où le gaz est dissipé et qui se termine à la fin de la migration dans le disque de planétésimaux incluse.

Chapitre 2

Contraintes des satellites réguliers sur la vitesse de basculement

Dans ce chapitre, nous allons calculer la limite inférieure de la durée du basculement d'Uranus imposée par ses satellites réguliers. Dans une première partie, nous allons reprendre la démarche de Kinoshita (1993). Ensuite, par une analyse plus fine, nous montrerons que la limite de Kinoshita (1993) peut être réduite d'un facteur 75 environ. Enfin, nous étudierons l'effet de la marée sur la limite obtenue.

2.1 Modèle de Kinoshita

Il est admis que les satellites réguliers des planètes géantes se forment dans un disque protosatellite qui correspond aussi au disque d'accrétion de la planète (Mosqueira & Estrada, 2003a,b). Cela permet d'expliquer entre autre la faible inclinaison équatoriale de l'orbite de ces satellites. Cependant, si l'obliquité de la planète varie trop rapidement alors ces satellites réguliers ne peuvent pas suivre et leur inclinaison augmente. La valeur actuelle des inclinaisons des satellites d'Uranus fournit donc une limite sur sa vitesse de basculement. Kinoshita (1993) a précisément étudié le mouvement de l'orbite d'un satellite dû à l'évolution séculaire de l'obliquité de sa planète.

2.1.1 Trajectoire du pôle de l'orbite du satellite

Le système étudié par Kinoshita (1993) est composé d'une planète aplatie (Uranus) et d'un satellite proche de masse négligeable. Par hypothèse, le satellite n'a aucune influence sur le mouvement de l'axe de la planète, et on néglige le mouvement de précession de la planète. Cette dernière hypothèse faite par Kinoshita (1993) est justifiée par la très grande différence entre les périodes de précession de l'axe d'Uranus et de l'orbite du satellite. On note \mathbf{w} (resp. \mathbf{n}) le vecteur unitaire dirigé selon le moment cinétique d'Uranus (resp. selon le moment cinétique orbital du satellite). Dans un premier temps, on se place dans un repère fixe noté \mathcal{R} de base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que \mathbf{k} soit initialement confondu avec \mathbf{w} et \mathbf{n} . On note t le temps et on admet comme Kinoshita (1993) que le basculement se fait à vitesse constante entre $t = 0$ et $t = \delta_t$ (Fig. 2.1a). L'équation d'évolution séculaire de l'orbite du satellite est donnée par (Boué & Laskar, 2006)

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\eta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})\mathbf{w} \wedge \mathbf{n} \quad (2.1)$$

avec

$$\eta = \frac{3}{2} \frac{n_s J_2}{(1 - e_s^2)^2} \frac{R^2}{a_s^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right) \quad (2.2)$$

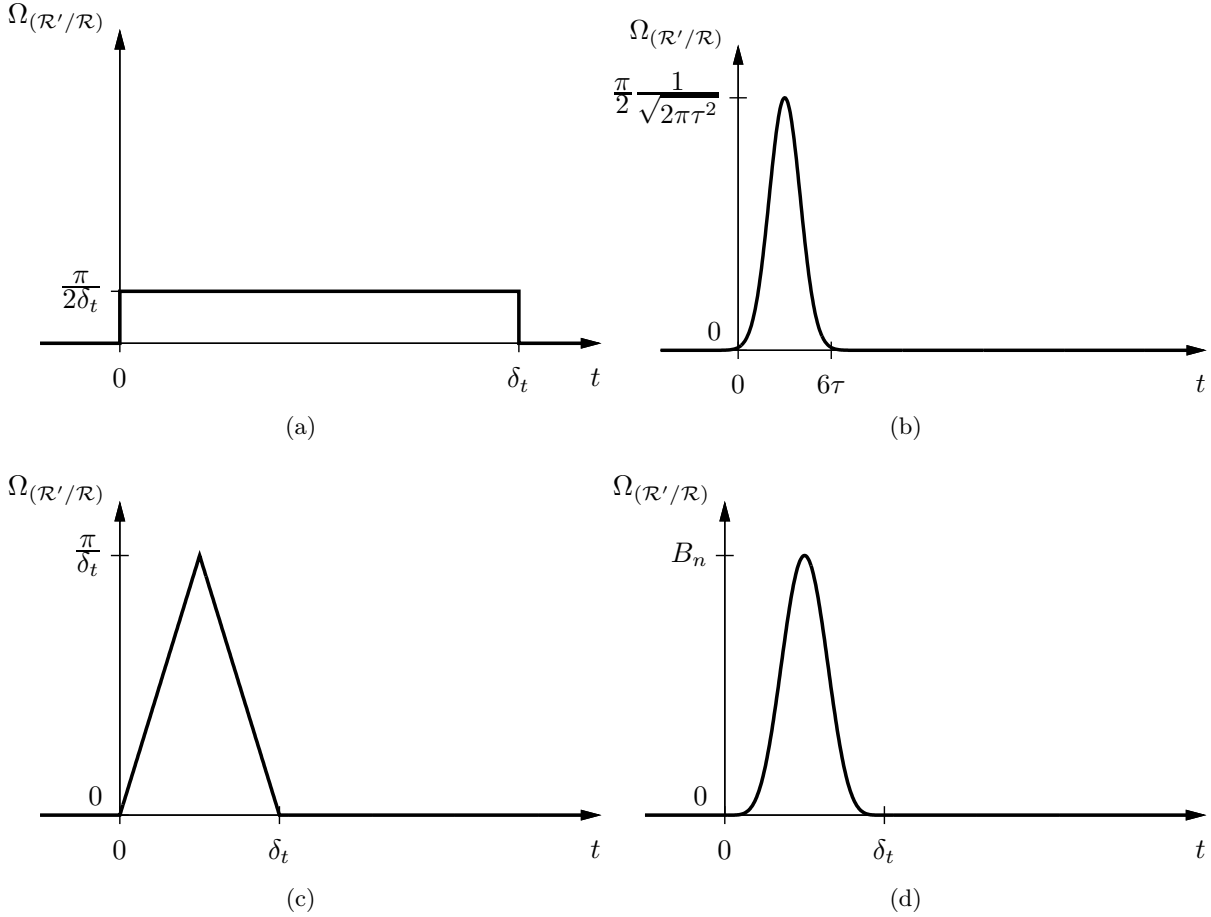


FIGURE 2.1 – (a) Type d'évolution de la vitesse de basculement utilisé par Kinoshita (1993) pour contraindre la durée du basculement. A partir de $t = 0$ le basculement commence, il s'effectue à vitesse constante ($\hat{e} = \pi/(2\delta_t)$), puis s'arrête à $t = \delta_t$. (b) Autre type d'évolution considérée dans la section 2.2. il s'agit d'une évolution gaussienne d'écart type τ . (c) Evolution triangulaire. (d) Evolution sinusoidale de la forme $B_n \sin^n(\pi t/\delta_t)$ tracée pour $n = 5$.

où n_s , a_s et e_s sont respectivement le moyen mouvement, le demi-grand axe et l'excentricité du satellite, R et J_2 sont respectivement le rayon équatorial et le coefficient quadrupolaire du potentiel de la planète, et J est l'angle entre l'axe de figure et le moment cinétique de la planète. Dans cette équation, \mathbf{w} n'est pas fixe car la planète bascule. On se place alors dans un nouveau repère, noté \mathcal{R}' fixe avec la planète, de base $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, tel que le troisième axe soit confondu avec \mathbf{w} (Fig. 2.2). La nouvelle équation du mouvement dans ce repère est

$$\left. \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} - \boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} \wedge \mathbf{n} \quad (2.3)$$

avec $\boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$ le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , ou de façon équivalente, le vecteur vitesse du basculement d'Uranus. Suivons la démarche de Kinoshita (1993) et prenons $\boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$ colinéaire au vecteur \mathbf{i} de la base du repère fixe. On peut alors choisir aussi $\mathbf{I} = \mathbf{i}$. En considérant un basculement de 90 deg, on obtient

$$\boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \hat{e}\mathbf{I} \quad (2.4)$$

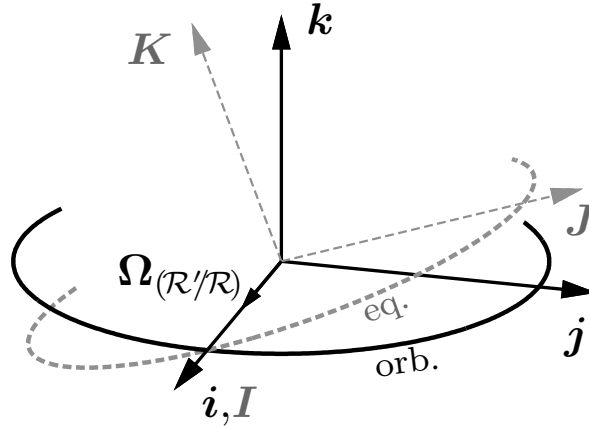


FIGURE 2.2 – Définition des repères utilisés. Le repère \mathcal{R} de base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est fixe, et est lié à l'orbite de la planète supposée invariante. Le repère \mathcal{R}' de base $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ est lié à la planète. Le vecteur $\mathbf{K} = \mathbf{w}$ donne la direction du pôle de la planète. Le repère \mathcal{R}' est en rotation par rapport à \mathcal{R} . Le vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$ correspondant est colinéaire à \mathbf{i} et à \mathbf{I} , et s'écrit $\boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \hat{\varepsilon}\mathbf{i}$.

avec $\hat{\varepsilon} = \pi/(2\delta_t)$. L'équation d'évolution de l'orbite du satellite dans \mathcal{R}' s'écrit alors (2.1, 2.3 et 2.4)

$$\left. \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = -\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} \wedge \mathbf{n} - \hat{\varepsilon}\mathbf{I} \wedge \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Les vecteurs \mathbf{I} et \mathbf{K} ainsi que les paramètres η et $\hat{\varepsilon}$ sont maintenant constants. L'équation (2.5) est intégrable, il s'agit très exactement du problème de la toupie de Colombo (1966). En effet, il y a trois inconnues qui sont les coordonnées (x, y, z) de \mathbf{n} dans \mathcal{R}' , et deux intégrales du mouvement : la norme de \mathbf{n} ($\|\mathbf{n}\| = 1$), et le hamiltonien dont dérive l'équation (2.5) (e.g., Breiter et al., 2005)

$$\mathcal{H} = -\frac{\eta}{2}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{n})^2 - \hat{\varepsilon}\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} \quad (2.6)$$

avec

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \nabla_{\mathbf{n}}\mathcal{H} \wedge \mathbf{n}. \quad (2.7)$$

Ecrites en fonction des coordonnées (x, y, z) , ces constantes du mouvement deviennent

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z^2 + 2x_0x = -\frac{2\mathcal{H}}{\eta} \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $x_0 = \hat{\varepsilon}/\eta$. On en déduit la trajectoire de la projection de \mathbf{n} dans le plan de l'équateur

$$(x - x_0)^2 + y^2 = 1 + \frac{2\mathcal{H}}{\eta} + x_0^2. \quad (2.9)$$

Il s'agit de l'équation du cercle centré sur $(x_0, 0)$ et dont le rayon est égal à la racine carrée du membre de droite. Le rayon dépend de la valeur du hamiltonien. Cette valeur s'obtient à partir des conditions initiales. A $t = 0$, le satellite est dans le plan de l'équateur donc \mathbf{n} est confondu avec \mathbf{K} , ce qui signifie que $x = y = 0$. On en déduit que le cercle passe par l'origine et que $\mathcal{H} = -\eta/2$. La figure 2.2 donne l'évolution de la projection de \mathbf{n} sur le plan de l'équateur de la planète.

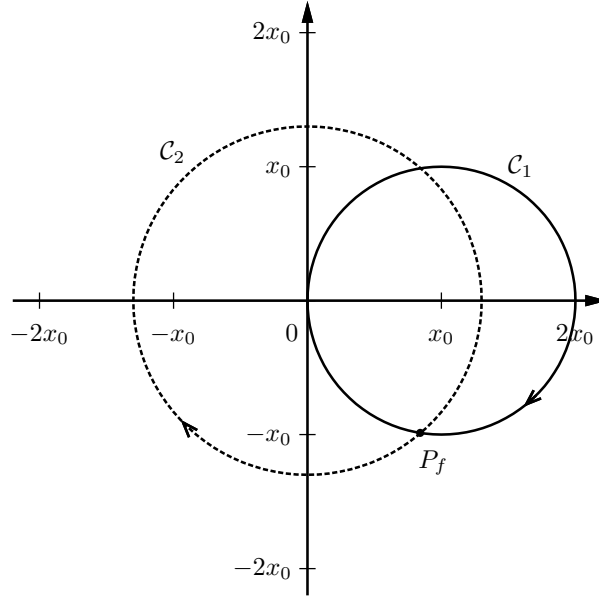


FIGURE 2.3 – Evolution de la projection de l'axe de l'orbite du satellite dans le plan équatorial (\mathbf{I}, \mathbf{J}) de la planète (voir aussi Fig. 2.2). Avant le basculement ($t < 0$), l'inclinaison du satellite est nulle, la projection de l'axe est confondue avec l'origine du repère. Pendant le basculement ($0 \leq t < \delta_t$), l'axe de l'orbite du satellite décrit un cercle \mathcal{C}_1 de centre $(x_0, 0)$ et passant par l'origine (courbe continue). A la fin du basculement ($t = \delta_t$), l'axe se situe en un point P_f quelconque du cercle \mathcal{C}_1 . Ensuite ($t > \delta_t$), la trajectoire est un cercle \mathcal{C}_2 centré sur l'origine et passant par P_f (courbe en tiret). Le sinus de l'inclinaison finale est égal au rayon du cercle \mathcal{C}_2 qui est compris entre 0 et $2x_0$.

2.1.2 Distribution des inclinaisons finales

Nous allons maintenant étudier la distribution de l'inclinaison orbitale du satellite à la fin du basculement. A chaque instant, l'inclinaison i_s est donnée par

$$\sin i_s = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.10)$$

Celle-ci varie périodiquement de 0 deg à $\text{Arcsin}(2x_0)$. On souhaite, par exemple, que l'inclinaison finale à $t = \delta_t$ soit inférieure à $i_{Ob} = 0.1$ deg pour Obéron. Cela signifie que $|x_0|$ doit être inférieur ou de l'ordre de $\sin i_{Ob} \approx 0.0017$. Par conséquent, la vitesse de basculement \hat{e} est très petite devant la vitesse de précession η et l'axe \mathbf{n} décrira de nombreuses fois le cercle (2.9). Nous allons alors calculer la distribution de probabilité de l'inclinaison finale en supposant la position (x, y) aléatoire sur le cercle. Pour cela, nous avons besoin de la dépendance temporelle que nous n'avons toujours pas calculée. Pour l'obtenir, réécrivons les équations du mouvement (2.5) en fonction des coordonnées (x, y, z) de \mathbf{n} dans \mathcal{R}'

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \eta z y, \\ \frac{dy}{dt} = -\eta z x + \hat{e} z, \\ \frac{dz}{dt} = -\hat{e} y. \end{cases} \quad (2.11)$$

Comme Kinoshita (1993), nous effectuons le changement $d\ell = \eta z dt$, ce qui donne en se limitant aux deux premières équations

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\ell} = y, \\ \frac{dy}{d\ell} = -(x - x_0). \end{cases} \quad (2.12)$$

La solution de ce dernier système est triviale

$$\begin{cases} x(\ell) = x_0(1 - \cos \ell), \\ y(\ell) = x_0 \sin \ell, \end{cases} \quad (2.13)$$

où nous avons utilisé la condition initiale $(x, y) = (0, 0)$ en $\ell = 0$. Pour avoir la dépendance temporelle, il ne reste plus qu'à exprimer ℓ en fonction du temps t . Par définition, on a

$$\frac{d\ell}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \eta dt \quad (2.14)$$

ce qui donne

$$\frac{d\ell}{\sqrt{1 - 4x_0^2 \sin^2 \frac{\ell}{2}}} = \eta dt. \quad (2.15)$$

Le temps t est donc donné par une intégrale elliptique de première espèce de module $2x_0$ et d'amplitude $\ell/2$. Mais $x_0 \ll 1$, nous ne garderons que l'ordre 0. Il vient

$$\ell \approx \eta t. \quad (2.16)$$

La précession de \mathbf{n} se fait à vitesse pratiquement constante. Comme la trajectoire est symétrique autour de $\ell = \pi$, nous pouvons nous restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$ pour faire le calcul de la distribution des inclinaisons. Nous avons

$$\begin{aligned} i_s &\approx \sin i_s = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ &= 2x_0 \sin \frac{\ell}{2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous définissons alors $\Pr\{i'_s \leq i_{\text{Sat}}\}$ comme la probabilité que l'inclinaison finale i'_s de l'orbite du satellite soit inférieure à l'inclinaison observée i_{Sat} de l'un quelconque des satellites d'Uranus. Cette probabilité est donnée par la durée pendant laquelle l'inclinaison vérifie $i_s \leq i_{\text{Sat}}$ divisée par la période de précession

$$\begin{aligned} \Pr\{i'_s \leq i_{\text{Sat}}\} &= \frac{\int_0^{\delta_\ell} 2x_0 \sin \frac{\ell}{2} d\ell}{\int_0^\pi 2x_0 \sin \frac{\ell}{2} d\ell}, \\ &= 1 - \cos \frac{\delta_\ell}{2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec $\delta_\ell = \eta \delta_t$. En utilisant $\delta_\ell = 2 \text{Arcsin}[i_{\text{Sat}}/(2x_0)]$ (2.17), cela donne

$$\Pr\{i'_s \leq i_{\text{Sat}}\} = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{i_{\text{Sat}}}{2x_0}\right)^2} & \text{si } i_{\text{Sat}} < 2x_0, \\ 1 & \text{si } i_{\text{Sat}} \geq 2x_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Une fois que la planète se stabilise (à $t = \delta_t$), l'équation (2.1) montre que \mathbf{n} précesse autour de \mathbf{w} en gardant une inclinaison constante. La fonction de partition (2.19) caractérise donc bien la distribution finale des inclinaisons.

TABLE 2.1 – Valeur des périodes de précession T_{prec} et des inclinaisons i_{Sat} actuelles des principaux satellites proches d’Uranus. Dans la dernière colonne se trouve la durée minimale de basculement pour que les inclinaisons soient au maximum ce qu’elles sont aujourd’hui d’après le modèle de (Kinoshita, 1993).

satellite	T_{prec} (années)	i_{Sat} (degrés)	δ_t^c (années)
Miranda	18.9	4.22	129
Ariel	73.3	0.31	6 771
Umbriel	233.2	0.36	18 557
Titania	1 315.0	0.10	376 712
Obéron	3 634.2	0.10	1 041 116

La table (2.1) récapitule les valeurs des périodes de précession des différents satellites d’Uranus et leur inclinaison actuelle. Le temps δ_t^c calculé dans la troisième colonne est la valeur de δ_t pour laquelle $i_{\text{Sat}} = 2x_0 = T_{\text{prec}}/(2\delta_t)$. On retrouve en particulier la contrainte forte de Kinoshita (1993) due au satellite Obéron qui impose une durée de basculement d’au moins 1 million d’années. De façon plus statistique, nous pouvons étudier la probabilité pour que les 5 principaux satellites d’Uranus aient des inclinaisons inférieures où égales à leur valeur actuelle en fonction de δ_t . Celle-ci est obtenue à partir de l’équation (2.19) et est représentée figure (2.3). La figure montre qu’en dessous de 1 million d’années la probabilité décroît rapidement. Pour $\delta_t = 10^5$ ans, elle descend à quelques chances sur 10^4 .

2.1.3 Conclusion

D’après le modèle de Kinoshita (1993), il semble qu’il ne soit pas possible de basculer Uranus plus rapidement qu’en 1 million d’années car alors les satellites auraient une inclinaison plus élevée que celle observée. Cependant, la méthode de Kinoshita (1993) n’explique pas pourquoi il faut une vitesse si lente. Pour mieux comprendre le résultat, nous allons reprendre le problème sous un autre point de vue.

2.2 Nouvelle contrainte

Les équations du mouvement (2.12) que nous avons obtenues durant la phase de basculement peuvent être généralisées à tout instant et considérées comme dérivant du hamiltonien suivant

$$\mathcal{H}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - x_0x \quad (2.20)$$

où $x_0 = \hat{\epsilon}(t)/\eta$ est maintenant une fonction du temps et donc de ℓ . ℓ est toujours défini par $d\ell = \eta z dt$. Cependant, pour pouvoir expliciter $x_0(\ell)$, il est nécessaire de connaître l’évolution de z en fonction du temps et donc les évolutions de x et y aussi, or c’est justement ce que l’on recherche. Pour résoudre ce problème, nous effectuerons la même approximation qu’à la section précédente, à savoir $\ell = \eta t$ (i.e. $z \approx 1$). Nous discuterons cette approximation à la fin de cette section. Les équations du mouvement sont données par

$$\frac{dx}{d\ell} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{d\ell} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \quad (2.21)$$

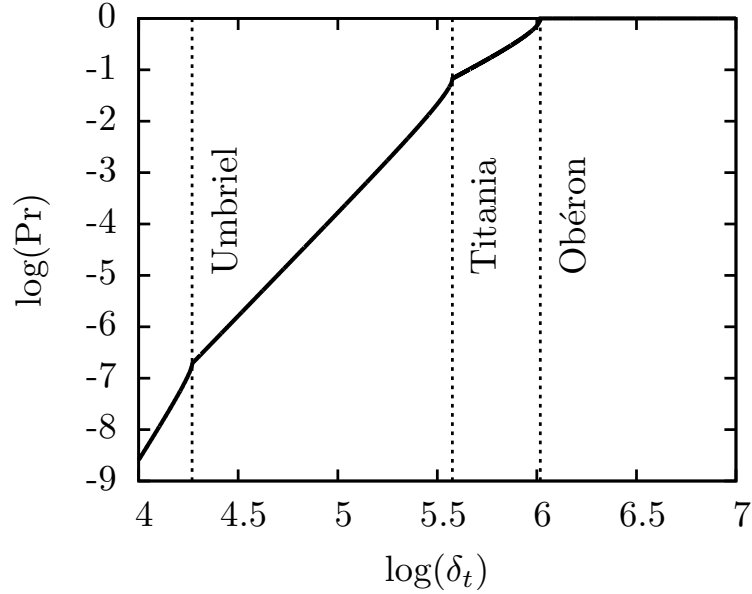


FIGURE 2.4 – Evolution de la probabilité que les inclinaisons finales des satellites, suite au basculement, soient inférieures ou égales aux inclinaisons actuelles. La probabilité calculée ici est égale au produit des probabilités (2.19) de chacun des satellites. Ce résultat a été obtenu à partir de la modélisation du basculement utilisée par Kinoshita (1993) et décrite dans la section 2.1. Les pointillés marquent les périodes de précession des satellites.

Kinoshita (1993) a résolu ce problème dans le cas particulier d’une vitesse de basculement $\hat{\epsilon}(t)$ constante par morceau

$$\hat{\epsilon}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{\pi}{2\delta_t} & \text{si } 0 \leq t < \delta_t, \\ 0 & \text{si } \delta_t \leq t. \end{cases} \quad (2.22)$$

Dans le cas général, le hamiltonien (2.20) se résout explicitement. En effet, en posant $Z = x + iy$, avec $i = \sqrt{-1}$, on se ramène à une équation différentielle ordinaire linéaire à coefficient constant avec second membre variable

$$\frac{dZ}{d\ell} + iZ = ix_0(\ell). \quad (2.23)$$

Cette équation se résout par la méthode de la variation de la constante. Cependant, ce n’est pas la solution qui nous intéresse dans un premier temps, mais une propriété de la solution. Dans le hamiltonien (2.20), x_0 est un paramètre variable. Il correspond à la vitesse de basculement de la planète mesurée en “tour par période de précession du satellite” ($\hat{\epsilon}$ divisé par η). Si les variations de cette vitesse de basculement sont lentes par rapport à la vitesse de précession du satellite, alors on parle d’évolution adiabatique. Dans ces conditions, la quantité

$$I = \oint x dy, \quad (2.24)$$

où l’intégrale est effectuée sur une période de précession, est un invariant adiabatique et varie peu pendant le basculement (Henrard, 1982). Cette quantité est simplement l’aire orientée décrite par le système dans l’espace des phases (x, y) pendant une période de précession. Or, avant le début du basculement, le satellite reste dans le plan de l’équateur donc $x = y = 0$ et $\oint x dy = 0$. Ensuite, à la

fin du basculement, l'axe de l'orbite du satellite \mathbf{n} décrit un cercle centré sur l'origine. La quantité I vaut alors en valeur absolue πR^2 où R est le rayon du cercle. Si l'évolution est adiabatique, il y a conservation de l'aire orientée durant le basculement donc le rayon final est nul (en fait très petit), dans le cas contraire, R dépend de l'évolution de la vitesse. Ainsi, la contrainte sur la vitesse de basculement est une contrainte d'adiabaticité.

L'évolution choisie par Kinoshita (1993) ne rentre pas dans le cadre de la théorie de l'invariant adiabatique car elle est discontinue au début du basculement (à $t = 0$), et à la fin du basculement (à $t = \delta_t$). C'est justement à ces deux moments que l'aire I change. A $t = 0$, celle-ci passe de 0 à πx_0^2 , puis à $t = \delta_t$, elle passe de πx_0^2 à πR^2 avec $0 \leq R \leq 2x_0$. En dehors de ces deux instants, la vitesse de basculement est constante et l'aire est conservée. Pour s'affranchir des sauts de la quantité I , il suffit donc de considérer une évolution continue et lisse de la vitesse de basculement. De cette façon, non seulement l'inclinaison finale sera plus faible, mais aussi l'évolution sera plus réaliste.

Comme exemple d'évolution lisse, on peut considérer une fonction gaussienne

$$\hat{e}_g(t) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right) \quad (2.25)$$

où τ est l'écart type (Fig. 2.1b). Sur un intervalle de temps égal à 6τ , la planète effectue plus de 99.7 % de sa rotation. Dans la suite, nous ferons référence à cet intervalle de temps ($n_\tau\tau$ avec $n_\tau = 6$) comme étant la durée du basculement (δ_t). Nous avons aussi étudié les évolutions de type triangulaire (Fig. 2.1c)

$$\hat{e}_t(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{2\pi}{\delta_t^2} t & \text{si } 0 \leq t < \frac{\delta_t}{2}, \\ \frac{2\pi}{\delta_t^2} (\delta_t - t) & \text{si } \frac{\delta_t}{2} \leq t < \delta_t, \\ 0 & \text{si } \delta_t \leq t, \end{cases} \quad (2.26)$$

puis sinusoïdal (Fig. 2.1d)

$$\hat{e}_n(t) = \begin{cases} B_n \sin^n\left(\frac{\pi t}{\delta_t}\right) & \text{si } 0 < t \leq \delta_t, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.27)$$

où n est un entier positif. Les coefficients de normalisation B_n sont tels que l'intégrale sur \mathbb{R} de $\hat{e}_n(t)$ fasse $\pi/2 = 90$ deg, de façon à avoir un basculement de 90 deg. Cela donne

$$B_{2p} = \frac{\pi}{2\delta_t} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \quad B_{2p+1} = \frac{\pi^2}{2\delta_t} \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}(p!)^2}. \quad (2.28)$$

On remarque que pour $n = 0$, on retrouve la fonction discontinue utilisée par Kinoshita (1993). Pour ces trois types de vitesse de basculement, nous avons intégré l'équation différentielle (2.23) en assimilant t à ℓ/η . Notons Z_g , Z_t et Z_n les solutions de (2.23) associées respectivement à \hat{e}_g , \hat{e}_t puis \hat{e}_n . Les modules de ces solutions à la fin du basculement ($t \rightarrow \infty$ dans le cas gaussien, et $t = \delta_t$ sinon)

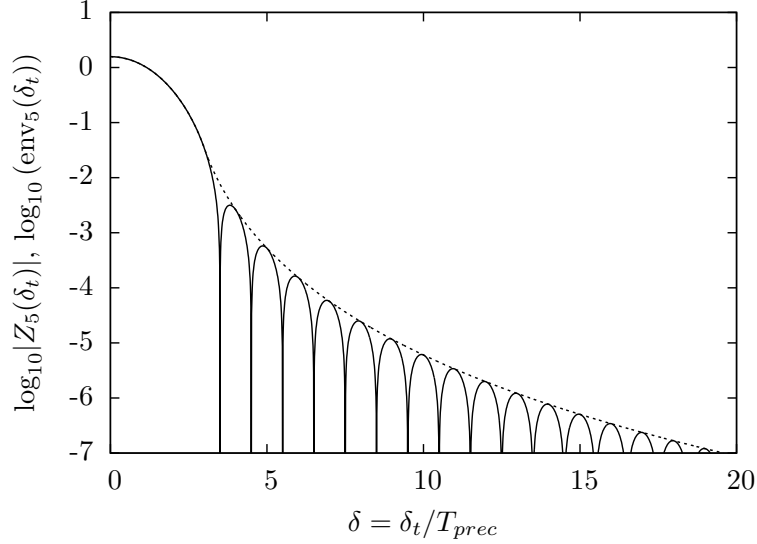


FIGURE 2.5 – Exemple d'évolution des distances entre la projection du pôle de l'orbite du satellite sur le plan de l'équateur et l'origine à la fin du basculement $|Z_n(\delta_t)|$, avec $n = 5$. Cette distance présente des oscillations et s'annule périodiquement à partir d'une certaine valeur de δ . Son enveloppe $\text{env}_5(\delta_t)$ est représentée en tiret.

sont

$$\begin{aligned}
|Z_g(\infty)| &= \frac{\pi}{2} \exp\left(-2\pi^2 \frac{\tau^2}{T_{\text{prec}}^2}\right), \\
|Z_t(\delta_t)| &= \frac{2}{\pi\delta^2} \sin^2 \frac{\pi\delta}{2}, \\
|Z_{2p}(\delta_t)| &= \frac{(p!)^2}{2\delta^{2p+1}} \left| \frac{\sin \pi\delta}{Q_{2p}(2\delta)} \right|, \\
|Z_{2p+1}(\delta_t)| &= \frac{2\pi}{(4\delta)^{2p+2}} \frac{[(2p+1)!]^2}{(p!)^2} \left| \frac{\cos \pi\delta}{Q_{2p+1}(2\delta)} \right|,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

avec $\delta = \delta_t/T_{\text{prec}}$ et

$$Q_n(x) = \prod_{k=0}^{(n-1)/2} \left[1 - \frac{(n-2k)^2}{x^2} \right]. \tag{2.30}$$

Pour $\delta \rightarrow 0$, toutes ces expressions tendent vers $\pi/2$. Mais pour $|Z|$ supérieur ou de l'ordre de 1, l'analyse faite ici n'est pas valide. L'approximation $\ell = \eta t$ n'est pas vérifiée. Comme nous nous intéressons à des inclinaisons finales de l'ordre de 0.1 deg, cela ne pose pas de problème. On vérifie que $|Z_0(\delta_t)|$ correspond bien à la solution (2.17) trouvée pour le modèle de Kinoshita (1993), avec $\ell = 2\pi\delta$.

Ensuite, nous avons calculé la durée δ_t minimale du basculement pour que l'inclinaison finale du satellite soit inférieure à $i_{\text{Ob}} = 0.1$ deg. L'inclinaison finale étant donnée par

$$i'_s \approx \sin i'_s = |Z(\delta_t)|. \tag{2.31}$$

A l'exception du cas gaussien, les expressions (2.29) présentent des oscillations (Fig. 2.5). Ces évolutions sont très similaires aux solutions pseudo-périodiques des oscillateurs amortis pour lesquels on peut définir une enveloppe qui est généralement une exponentielle décroissante. De la même façon,

nous avons calculé les enveloppes des fonctions $|Z(\delta_t)|$. Ce sont ces enveloppes que nous avons utilisées ensuite pour calculer les durées minimales de basculement. Ces enveloppes sont données par

$$\begin{aligned}
\text{cas gaussien } (n_\tau = 6) : \quad \text{env}_g(\delta) &= \frac{\pi}{2} \exp\left(-2\pi^2 \frac{\delta^2}{n_\tau^2}\right), \\
\text{cas triangulaire :} \quad \text{env}_t(\delta) &= \frac{2}{\pi\delta^2} \text{sint}^2\left(\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), \\
\text{cas sinusoïdal } (n = 2p) : \quad \text{env}_{2p}(\delta) &= \frac{(p!)^2}{2\delta^{2p+1}} \left| \frac{\text{sint}(\delta, p + 1/2)}{Q_{2p}(2\delta)} \right|, \\
\text{cas sinusoïdal } (n = 2p + 1) : \quad \text{env}_{2p+1}(\delta) &= \frac{2\pi}{(4\delta)^{2p+2}} \frac{[(2p+1)!]^2}{(p!)^2} \left| \frac{\text{cost}(\delta, p + 1)}{Q_{2p+1}(2\delta)} \right|,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

avec

$$\begin{aligned}
\text{sint} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{cost} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x, y) &\longmapsto \begin{cases} \sin \pi x & x \leq y, \\ \sin \pi y & x > y \end{cases} & (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \cos \pi x & x \leq y, \\ \cos \pi y & x > y \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Les enveloppes sont des fonctions monotones décroissantes sur \mathbb{R}^+ . La valeur δ_t^c de δ_t telle que $\text{env}(\delta_t/T_{\text{prec}}) = 0.1 \text{ deg}$ fournit la durée minimale du basculement. Pour tout basculement plus long ($\delta_t > \delta_t^c$), l'inclinaison finale sera inférieure à 0.1 deg. Les valeurs de δ_t^c correspondant aux différents types de basculement (gaussien, triangulaire, sinusoïdal avec $n \leq 20$) sont représentées Fig. 2.6. Toutes les valeurs de $\delta_t^c = \delta_t^c/T_{\text{prec}}$, à l'exception du cas discontinu (sinusoïdal avec $n = 0$), sont comprises entre $6 \times \sqrt{2 \ln 900}/(2\pi) \approx 3.522$ (cas gaussien) et $60/\pi \approx 19.099$ (cas triangulaire). La valeur minimale dans le cas sinusoïdal est obtenue pour $n = 5$ et vaut environ 4.222. Pour le modèle utilisé par Kinoshita (1993), δ_t^c vaut $900/\pi$, soit environ 286.479, ce qui est bien plus grand que toutes les valeurs trouvées dans les cas continus. En supposant que l'évolution de la vitesse de basculement est continue, il est donc légitime de dire que si le basculement dure plus de $19.099 T_{\text{prec}}$, alors le satellite garde une inclinaison inférieure à 0.1 deg. Comme Obéron est le satellite qui possède la plus longue période de précession, il fournit la contrainte la plus forte. En utilisant la valeur de la table 2.1, on obtient une durée minimale d'environ 70 000 ans. Mais suivant le type d'évolution de la vitesse de basculement, cette contrainte peut être réduite à environ 13 000 ans (cas gaussien).

Revenons un instant sur l'approximation $\ell = \eta t$. L'équation différentielle (2.23) que nous avons résolue est exprimée en fonction de la variable ℓ . La contrainte que nous avons obtenu s'écrit alors $\delta_\ell \geq \delta_\ell^c$, ce que nous avons traduit par $\delta_t \geq \delta_t^c$ avec

$$\delta_t^c \approx \frac{\delta_\ell^c}{\eta} = \frac{\delta_\ell^c}{2\pi} T_{\text{prec}}. \tag{2.34}$$

Or, si l'on tient compte de la définition exacte de ℓ (2.14), à une valeur donnée de δ_ℓ^c correspond une valeur de δ_t^c strictement supérieure à celle donnée par (2.34). Pour majorer l'effet, il suffit de connaître la valeur maximale atteinte par $|Z|$. En effet,

$$\delta_t^c < \frac{\delta_\ell^c}{\eta \sqrt{1 - \max(|Z|^2)}}. \tag{2.35}$$

Nous avons déjà remarqué que Z décrit un cercle de centre $(x_0, 0)$. A la fin du basculement, le cercle est centré sur l'origine et le rayon est très faible par hypothèse (inférieur à 0.1 deg). Nous supposons alors que les variations de $|Z|$ sont essentiellement dues au déplacement du centre du cercle, ce qui donne

$$\delta_t^c \lesssim \frac{\delta_\ell^c}{\eta \sqrt{1 - \max(x_0^2)}}, \tag{2.36}$$

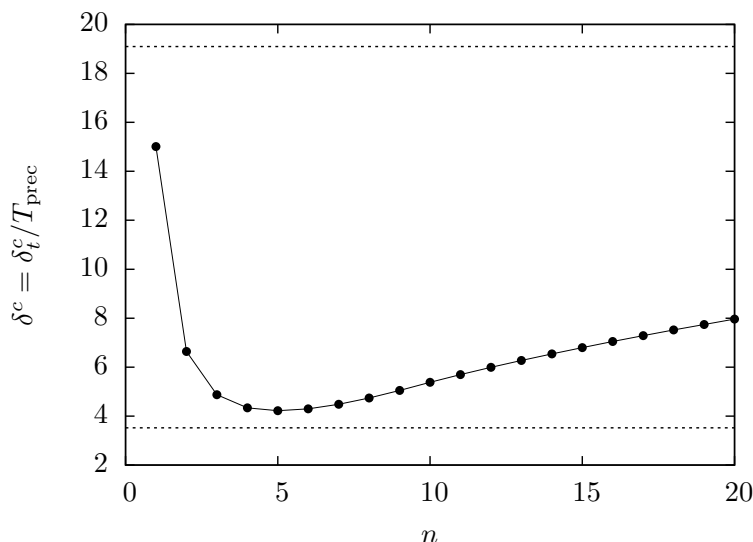


FIGURE 2.6 – Durée minimale du basculement pour qu’un satellite dont la période de précession de son orbite vaut T_{prec} puisse garder une inclinaison inférieure à 0.1 deg. Plusieurs évolutions de la vitesse de basculement sont considérées (gaussienne, triangulaire et sinusoïdale $\propto \sin^n \pi t / \delta_t$ avec $n \leq 20$). L’évolution gaussienne donne la contrainte la plus faible (courbe en tiret vers $\delta^c = 3.522$) et la triangulaire donne la contrainte la plus forte (courbe en tiret vers $\delta^c = 19.099$). Les points correspondent aux différentes évolutions sinusoïdales. Le cas $n = 0$ n’est pas représenté sur ce graphe, la valeur de δ_t^c correspondante vaut $900/\pi \approx 286.479$.

soit

$$\delta_t^c \lesssim \left(1 + \frac{1}{2} \max(x_0^2)\right) \frac{\delta_\ell^c}{\eta}. \quad (2.37)$$

La valeur maximale prise par $x_0 = \hat{\epsilon}(t)/\eta$ correspond à la vitesse maximale du basculement. Pour les durées optimales que nous avons obtenues, c’est-à-dire là où la vitesse est maximale, l’erreur relative commise : $\max(x_0^2)/2$, est inférieure à 2%.

2.2.1 Nouvelle conclusion

Kinoshita (1993) a obtenu un résultat très fort sur la durée du basculement d’Uranus. A partir de la modélisation du basculement qu’il a utilisé, il a obtenu une durée minimale de 1 million d’année pour cet événement. Cependant, ce modèle n’est pas très réaliste à cause des discontinuités qu’il a introduit dans la vitesse de basculement. Or, c’est justement ces discontinuités qui sont à l’origine de sa contrainte. A partir d’un modèle continu, et donc *a priori* plus réaliste, nous avons obtenu une contrainte beaucoup plus faible allant de 13 000 ans à 70 000 ans selon le type d’évolution.

2.3 Effet de marée

2.3.1 L’origine de la dissipation dans les planètes géantes

De nombreux satellites de Jupiter et de Saturne sont en résonance de moyen mouvement. Cette propriété s’explique très bien si l’on suppose que les satellites ont migré après leur formation, par exemple sous l’effet des forces de marée. Dans le cas des satellites de Jupiter, pour que la migration soit suffisamment efficace, il faut que le facteur de dissipation de Jupiter Q soit inférieur à environ

2×10^5 (Goldreich, 1965a). Des observations récentes de la migration des satellites galiléens donnent $Q = (3.56 \pm 0.66) \times 10^4$ (Lainey et al., 2009, valeur calculée à la fréquence d'excitation de Io). Or, une étude de la viscosité dans l'atmosphère de Jupiter donne un facteur de dissipation $Q \sim 2 \times 10^{13}$ (Goldreich & Nicholson, 1977).

Suite aux observations de Jupiter chauds, des planètes extrasolaires de masse comparable à celle de Jupiter mais situées très près de leur étoile, l'étude de la dissipation par effet de marée a connu un regain d'intérêt (par ex. Ogilvie & Lin, 2004; Wu, 2005; Goodman & Lackner, 2009). Malheureusement, ces études se heurtent à des problèmes numériques, dus par exemple à la très faible viscosité de l'atmosphère de ces planètes (Ogilvie & Lin, 2004; Wu, 2005), et à des problèmes de modélisation, comme l'effet du noyau central sur la dynamique de l'atmosphère (Wu, 2005; Goodman & Lackner, 2009). Les facteurs de dissipation obtenus restent supérieurs à $\sim 10^7$.

Il semble donc qu'il y ait une contradiction entre ce qui est déduit des observations astronomiques et la modélisation de l'atmosphère de Jupiter. Pourtant, Dermott (1979) a montré qu'il est possible de résoudre ce paradoxe. Pour cela, Dermott suppose que la dissipation n'a pas lieu dans l'atmosphère de la planète mais dans son noyau solide. Dans son étude, Wu (2005) cite les travaux de Dermott mais n'en tient pas compte pour deux raisons. La première est que la structure interne des noyaux est mal connue. La seconde est que Wu (2005) cherche à appliquer ses résultats aux planètes extrasolaires, or les valeurs de Dermott (1979) dépendent sensiblement des rayons des noyaux qui ne sont pas connus pour ces planètes. Ces arguments ne permettent pas de dire si la dissipation dans le noyau est négligeable ou non. L'origine de la dissipation est donc mal comprise, tout comme la dépendance du facteur de qualité Q par rapport à la fréquence d'excitation.

2.3.2 Dépendance du facteur de dissipation Q

Pour comprendre le problème de la dépendance du facteur Q en fonction de la fréquence d'excitation, rappelons la façon dont est modélisée la marée. Considérons une planète de masse m et de rayon R autour de laquelle orbite un satellite de masse m_s^* situé en \mathbf{r}_s^* par rapport au centre de la planète. Le potentiel gravitationnel calculé en un point \mathbf{R} de la surface de la planète s'écrit

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) = U_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) + W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) \quad (2.38)$$

avec

$$U_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) = -\frac{\mathcal{G}m}{R} - \frac{\mathcal{G}m_s^*}{r_s^*}, \quad W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) = -\mathcal{G}m_s^* \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{R} - \mathbf{r}_s^*\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r}_s^*\|} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_s^*}{\|\mathbf{r}_s^*\|^3} \right\}, \quad (2.39)$$

où \mathcal{G} est la constante de gravitation. $U_0(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*)$ est le potentiel principal créé par la planète et le satellite, et $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*)$ est une perturbation. Le dernier terme dans l'expression de $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*)$ est dû à l'accélération d'entraînement engendré par le mouvement du centre de la planète. Dans la suite, on ne s'intéresse qu'au potentiel $W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*)$. Traditionnellement, ce potentiel est développé en puissance de (R/r_s^*) à l'aide de polynômes de Legendre P_l sous la forme

$$W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) = \sum_{l=2}^{\infty} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*), \quad W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) = -\frac{\mathcal{G}m_s^*}{r_s^*} \left(\frac{R}{r_s^*} \right)^l P_l(\cos S) \quad (2.40)$$

où S est l'angle entre \mathbf{R} et \mathbf{r}_s^* . Ensuite, les $W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*)$ sont exprimés en fonctions des paramètres orbitaux du satellite a_s^* , e_s^* , i_s^* , M_s^* , ω_s^* et Ω_s^* qui sont respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison équatoriale, l'anomalie moyenne, l'argument du périastre et la longitude du nœud ascendant. L'expression de W_l fait aussi apparaître la longitude λ et la latitude ϕ du point \mathbf{R} ainsi

que le temps sidéral Θ^* qui mesure la rotation de la planète. Cela donne (Kaula, 1961)

$$W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) = -\frac{\mathcal{G}m_s^*}{a_s^*} \left(\frac{R}{a_s^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) P_{lm}(\sin \phi) \quad (2.41)$$

$$\sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_s^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e_s^*) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\}_{l-m}^{\text{pair}} \left(\nu_{lmpq}^* - m(\lambda + \Theta^*) \right),$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, et où F_{lmp} et G_{lpq} sont des fonctions connues. L'angle ν_{lmpq}^* est défini par

$$\nu_{lmpq}^* = (l - 2p)\omega_s^* + (l - 2p + q)M_s^* + m\Omega_s^*. \quad (2.42)$$

Ce potentiel ressenti par les points de la surface entraîne une déformation de la planète. Si la déformation est instantanée, alors le potentiel créé par cette déformation s'écrit en tout point \mathbf{r}_s situé au delà de la surface de la planète et dans la direction de \mathbf{R}

$$U(\mathbf{r}_s) = \sum_{l=2}^{\infty} k_l \left(\frac{R}{r_s}\right)^{l+1} W_l(\mathbf{R}, \mathbf{r}_s^*) \quad (2.43)$$

avec k_l , les nombres de Love de la planète. Exprimé en fonction des paramètres orbitaux d'un corps situé en \mathbf{r}_s , cela donne

$$U(\mathbf{r}_s) = -\frac{\mathcal{G}m_s^*}{a_s^*} \sum_{l=2}^{\infty} k_l \left(\frac{R}{a_s}\right)^{l+1} \left(\frac{R}{a_s^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \quad (2.44)$$

$$\sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_s^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e_s^*) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_s)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{lhj}(e_s) \cos \left[\left(\nu_{lmpq}^* - m\Theta^* \right) - (\nu_{lmhj} - m\Theta) \right].$$

Pour modéliser l'amortissement dans la déformation de la planète, la prescription qui est utilisée est de rajouter un déphasage ϵ_{lmpq} dans chacun des termes de l'équation (2.44). On obtient alors

$$U(\mathbf{r}_s) = -\frac{\mathcal{G}m_s^*}{a_s^*} \sum_{l=2}^{\infty} k_l \left(\frac{R}{a_s}\right)^{l+1} \left(\frac{R}{a_s^*}\right)^l \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \quad (2.45)$$

$$\sum_{p=0}^l F_{lmp}(i_s^*) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e_s^*) \sum_{h=0}^l F_{lmh}(i_s)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{lhj}(e_s) \cos \left[\left(\nu_{lmpq}^* - m\Theta^* \right) - (\nu_{lmhj} - m\Theta) - \epsilon_{lmpq} \right].$$

Ce déphasage angulaire ϵ_{lmpq} peut être vu comme résultant d'un déphasage temporel Δt_{lmpq} défini par

$$\nu_{lmpq}^{*(\text{retardé})} - m\Theta^{*(\text{retardé})} = \left(\nu_{lmpq}^* - m\Theta^* \right) - \left(\dot{\nu}_{lmpq}^* - m\dot{\Theta}^* \right) \Delta t_{lmpq} \quad (2.46)$$

$$= \left(\nu_{lmpq}^* - m\Theta^* \right) - \epsilon_{lmpq}$$

d'où

$$\epsilon_{lmpq} = \omega_{lmpq}^* \Delta t_{lmpq} \quad (2.47)$$

avec

$$\omega_{lmpq}^* = (l - 2p)\dot{\omega}_s^* + (l - 2p + q)\dot{M}_s^* + m(\dot{\Omega}_s^* - \dot{\Theta}^*). \quad (2.48)$$

Ainsi, chaque terme du développement du potentiel (2.45) possède une fréquence ω_{lmpq}^* et un déphasage qui lui sont associés. Le facteur de dissipation est défini comme l'inverse de la tangente du déphasage angulaire. Comme il y a *a priori* un déphasage différent pour chaque terme du développement, il y a donc aussi un facteur de dissipation différent pour chaque terme

$$Q_{lmpq} = \frac{1}{|\tan \epsilon_{lmpq}|}. \quad (2.49)$$

A partir de là, il y a essentiellement deux approches qui permettent de simplifier les calculs. La première consiste à supposer les Q_{lmpq} indépendants des fréquences d'excitation ω_{lmpq}^* . Cela revient à dire que les déphasages temporels Δt_{lmpq} varient comme l'inverse des fréquences (Gerstenkorn, 1955; MacDonald, 1964; Kaula, 1964). L'autre approche consiste à supposer que ce sont les déphasages Δt_{lmpq} qui sont constants (Singer, 1968; Mignard, 1979). Dans ce cas, si les ϵ_{lmpq} sont petits, alors ce sont les Q_{lmpq} qui varient comme l'inverse des fréquences. Dans le cas des planètes joviennes, cette dépendance est, comme nous l'avons vu, toujours inconnue. En revanche pour la Terre, les données géophysiques et des mesures en laboratoire donnent $Q \sim |\omega^*|^\alpha$ avec $\alpha = 0.2 - 0.4$ (voir Efroimsky & Lainey, 2007). On voit que cela ne correspond à aucune des deux approches.

remarque : Lorsqu'une seule valeur de Q est donnée, nous supposons qu'il s'agit de Q_{2200} . C'est la première combinaison non nulle qui intervient dans le calcul du couple qui s'exerce entre la planète et son satellite.

2.3.3 Contrainte sur le basculement d'Uranus

Dans les sections 2.1 et 2.2, nous avons calculé la durée minimale du basculement pour que les satellites gardent une inclinaison inférieure ou égale à celle d'aujourd'hui. On peut objecter à cela le fait que les effets de marée ont tendance à ramener les satellites sur le plan de l'équateur, et que donc le basculement peut avoir été plus rapide. Nous allons étudier ici l'évolution de l'inclinaison des satellites et en particulier celle d'Obéron qui avait apporté la contrainte la plus forte sur le basculement d'Uranus. Comme nous l'avons vu plus haut, les modèles de marée ne sont pas certains, tout du moins concernant les échelles de temps. Le résultat que nous allons obtenir est général et indépendant du temps.

Au vu de ce qui précède, nous nous limiterons au premier ordre pour l'expression du couple de marée exercé sur les satellites. Celui-ci est donné par Mignard (1979); Neron de Surgy & Laskar (1997)

$$\Gamma = -3 \frac{\mathcal{G} m_s^2 R^2 k_2 \Delta t}{r_s^8} [(\mathbf{r}_s \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_s - r_s^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_s \wedge \boldsymbol{\omega}] \quad (2.50)$$

où m_s et \mathbf{r}_s sont la masse et le rayon vecteur du satellite (ici le corps qui crée les marées m_s^* et le corps qui subit les marées m_s sont les mêmes, alors nous avons supprimé l'étoile). Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de la planète. Dans cette étude, nous supposons que le satellite évolue sur une orbite circulaire. Cela simplifie l'analyse et reste cohérent avec la modélisation approchée de l'effet de marée.

Dans un premier temps, nous allons calculer le couple séculaire qui s'exerce sur le satellite. Pour cela, on note

$$\mathbf{r}_s = a_s \begin{pmatrix} \cos M_s \\ \sin M_s \\ 0 \end{pmatrix}_{(_, _, \mathbf{n})} \quad (2.51)$$

où M_s et a_s sont respectivement l'anomalie moyenne et le demi-grand axe du satellite, et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à son orbite. La seule moyenne à effectuer est la suivante

$$\langle \mathbf{r}_s^t \mathbf{r}_s \rangle_{M_s} = \frac{a_s^2}{2} (\text{Id} - \mathbf{n}^t \mathbf{n}). \quad (2.52)$$

On obtient alors

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{sec}} = \langle \mathbf{\Gamma} \rangle_{M_s} = \frac{3 \mathcal{G} m_s^2 R^2 k_2 \Delta t}{2 a_s^6} \left[\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{n} - 2 \frac{\mathbf{L}_n}{\beta_s a_s^2} \right] \quad (2.53)$$

où $\mathbf{L}_n = \beta_s \sqrt{\mu_s a_s}$ est le moment cinétique orbital du satellite, $\beta_s = m m_s / (m + m_s)$ la masse réduite et $\mu_s = \mathcal{G}(m + m_s)$. Notons C le moment d'inertie de la planète le long de son 3^{ème} axe, son moment cinétique est alors $\mathbf{L}_\omega = C\boldsymbol{\omega}$. Par effet de marée, les deux moments cinétiques \mathbf{L}_n et \mathbf{L}_ω varient. Mais le moment cinétique total, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_n + \mathbf{L}_\omega$, est conservé car les couples qui s'exercent sur chacun des deux corps sont opposés l'un de l'autre. Il est alors possible d'exprimer le couple en fonction de \mathbf{L}_n seul

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{sec}} = \frac{3 \mathcal{G} m_s^2 R^2 \beta_s^{12} \mu_s^6 k_2 \Delta t}{2 C L_n^{12}} \left[\mathbf{L} + \frac{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}_n) \mathbf{L}_n}{L_n^2} - 2 \mathbf{L}_n - 2 C \beta_s^3 \mu_s^2 \frac{\mathbf{L}_n}{L_n^4} \right]. \quad (2.54)$$

Nous allons maintenant étudier la façon dont évolue \mathbf{L}_n dans le plan engendré par les vecteurs \mathbf{L} et \mathbf{L}_n . Pour cela, on pose

$$x = \frac{L_n}{L} \sin \theta, \quad y = \frac{L_n}{L} \cos \theta, \quad \text{avec} \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}_n}{L L_n}, \quad (2.55)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{L}}_n}{L^2}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{x} \left(\frac{\mathbf{L}_n \cdot \dot{\mathbf{L}}_n}{L^2} - y \dot{y} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Pour obtenir la deuxième équation, on utilise $x^2 + y^2 = L_n^2 / L^2$. A partir de ces deux équations, on obtient l'évolution relative de x par rapport à y

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x} \frac{\mathbf{L}_n \cdot \dot{\mathbf{L}}_n}{\mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{L}}_n} - \frac{y}{x}. \quad (2.57)$$

En utilisant l'expression de couple (2.54), on trouve

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{2xr^2 - xy + 2cx/r^2}{(1-2y)r^2 + y^2 - 2cy/r^2}, \quad (2.58)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $c = C\beta_s^3 \mu_s^2 / L^4$. Dans le cas d'Obéron et d'Uranus, c'est le moment cinétique d'Uranus qui domine le moment cinétique total ($L_\omega \approx 240L_n$) et $c = 4 \times 10^{-9}$.

La figure 2.7 représente l'évolution de \mathbf{L}_n/L dans le repère xy pour le système Uranus-Obéron. Elle montre qu'au voisinage de la configuration actuelle du système, l'inclinaison d'Obéron a tendance à croître légèrement en même temps que son demi-grand axe augmente. Le seul endroit où l'inclinaison diminue, et où l'évolution peut mener à la configuration actuelle, c'est au voisinage de la séparatrice. Or, celle-ci est instable comme le montre les deux trajectoires qui sont représentées sur la figure. On en conclut que l'inclinaison de l'orbite d'Obéron n'a pas diminué par effet de marée et que les contraintes obtenues dans la section précédente ne peuvent pas être dépassées. En particulier, cela exclut le basculement instantané, tel qu'il aurait pu se produire avec une collision, si on suppose qu'Obéron existait avant. En effet, suite à la collision, Obéron se serait retrouvé avec une inclinaison proche de 90 deg et d'après la figure, la probabilité pour qu'Obéron arrive à sa position actuelle est quasiment nulle.

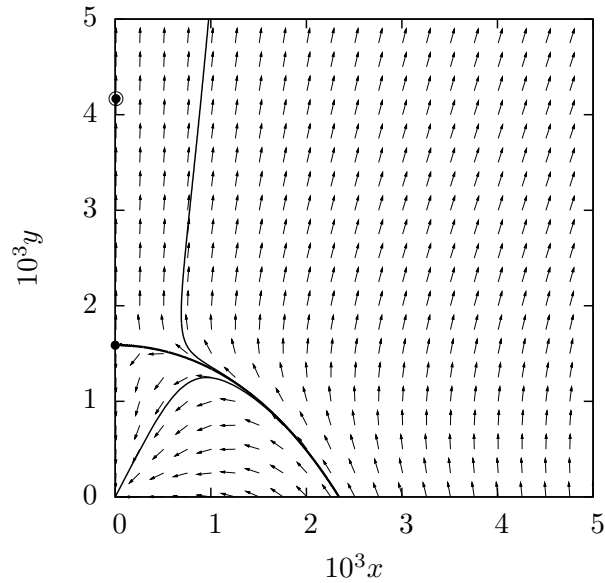


FIGURE 2.7 – Evolution de l'orbite d'Obéron par effet de marée. $x = (L_n/L) \sin \theta$ et $y = (L_n/L) \cos \theta$ avec L_n , L et θ , la norme du moment cinétique orbital d'Obéron, la norme du moment cinétique total et l'angle entre les deux moments cinétiques, respectivement. La configuration actuelle, $L_n = 4.2 \times 10^{-3} L$ et $\theta = 0.1$ deg, est représentée par un disque cerclé. Le point situé en $x_c = 0$, $y_c = 1.6 \times 10^{-3}$ est un point d'équilibre instable correspondant à une résonance 1:1 entre la rotation d'Uranus et la révolution d'Obéron. Pour $x = 0$ et $y < y_c$, l'évolution tend vers $L_n = 0$ (diminution du demi-grand axe d'Obéron). Pour $x = 0$ et $y > y_c$ l'évolution tend vers $L_n \approx L$. La courbe épaisse est une séparatrice qui converge après un temps infini vers le point d'équilibre instable. Les courbes fines sont des exemples d'évolution partant d'une inclinaison de 90 deg ($y = 0$). Les conditions initiales sont $x_1 = 2.342 \times 10^{-3}$ et $x_2 = 2.343 \times 10^{-3}$.

Chapitre 3

Effet d'un disque de planétésimaux

Dans ce chapitre, nous allons considérer la période de l'histoire du système solaire comprise entre la disparition du disque de gaz et le début de la migration dans le disque de planétésimaux. Durant cet intervalle de temps qui dure environ 600 millions d'années, le système externe est composé des quatre planètes géantes sur des orbites à peu près stables entourées du disque de planétésimaux. Nous allons en particulier étudier l'effet de ce disque sur l'axe d'Uranus.

3.1 Modification de la précession d'une planète

Considérons un système composé d'une étoile, d'une planète et d'un disque de matière (Fig. 3.1). Il faut noter que l'on parle ici d'un "disque" car c'est le terme qui est employé par la communauté. Il s'agit en fait d'une couronne centrée sur l'étoile dont le bord intérieur se situe au delà de la planète. Dans cette section, le disque est plan et immobile. Comme les inclinaisons et excentricités sont amorties par la migration en phase gazeuse, nous supposons que la planète possède une orbite circulaire contenue dans le plan du disque. Nous allons maintenant calculer la contribution du disque à la constante de précession de la planète.

3.1.1 Interaction solide-disque

Dans cette étude, nous supposons que le disque est de densité surfacique σ uniforme. Les rayons interne et externe sont notés respectivement R_1 et R_2 . Enfin, on repère un point courant du disque de masse $dm' = \sigma r' d\theta' dr'$ par le vecteur \mathbf{r}' . Pour modéliser la planète, on note A , B et C ses moments principaux d'inertie (donnés par ordre croissant), et nous ferons l'hypothèse que la planète est axisymétrique ($B = A$). Comme la planète évolue sur une orbite circulaire uniforme, la position héliocentrique de son barycentre est une fonction connue du temps. On la note indifféremment \mathbf{r} ou $\mathbf{r}(t)$. Les inconnues sont les coordonnées de l'axe de la planète repéré par le vecteur unitaire \mathbf{w} . Le hamiltonien (non autonome) qui décrit l'interaction entre la planète et le disque s'écrit (Boué & Laskar, 2006, eq. 31)

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{S}} \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}(C - A)}{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'\|^5} [(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{w}]^2 dm' \quad (3.1)$$

avec \mathcal{G} la constante de gravitation et \mathcal{S} la surface du disque. Dans cette expression, nous avons implicitement effectué l'approximation gyroscopique, ce qui est justifié pour le cas qui nous intéresse. Nous n'avons de plus gardé que le terme contenant \mathbf{w} , car les équations du mouvement restent inchangées par l'ajout d'une fonction explicite du temps dans le hamiltonien. L'équation du mouvement de \mathbf{w} est donné par

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{1}{L_{\mathbf{w}}} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H} \wedge \mathbf{w} \quad (3.2)$$

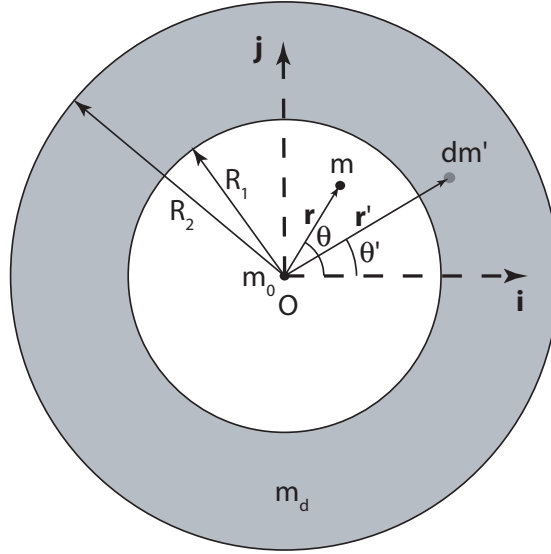


FIGURE 3.1 – Système étudié dans cette partie. Il est constitué du soleil, d'une planète et d'un anneau. Le soleil est situé au centre du disque en O . La planète de masse m est repérée par sa position \mathbf{r} , et le disque de masse m_d est représenté par un anneau gris compris entre les rayons R_1 et R_2 . Chaque élément dm' du disque est repéré par sa position \mathbf{r}' .

où $L_\omega = C\omega$ est la norme du moment cinétique et ω la vitesse de rotation de la planète.

Pour calculer l'intégrale (3.1), on se place dans un repère fixe $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ défini de telle sorte que le disque et l'orbite de la planète sont dans le plan (\mathbf{i}, \mathbf{j}) . On note θ et θ' les angles respectifs que font les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}' par rapport à \mathbf{i} . Nous avons alors dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} r' \cos \theta' \\ r' \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' = R_3(\theta) \begin{pmatrix} r - r' \cos \hat{\theta} \\ -r' \sin \hat{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

avec $\hat{\theta} = \theta' - \theta$ et où $R_3(\theta)$ est la matrice de rotation d'angle θ autour de \mathbf{k} . Nous introduisons cette matrice afin de simplifier les calculs à venir. Le hamiltonien s'écrit alors

$$\mathcal{H} = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}(C - A)m_d}{r^3} {}_t\mathbf{w} R_3(\theta) \mathcal{N} R_3(-\theta) \mathbf{w} \quad (3.4)$$

avec

$$\mathcal{N} = \int_S \frac{\rho^3}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \hat{\theta})^{5/2}} \begin{pmatrix} (\rho - \cos \hat{\theta})^2 & -(\rho - \cos \hat{\theta}) \sin \hat{\theta} & 0 \\ -\sin \hat{\theta} (\rho - \cos \hat{\theta}) & \sin^2 \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 d\rho d\hat{\theta}}{\pi \rho^3 (\rho_1^2 - \rho_2^2)} \quad (3.5)$$

où $\rho = r/r'$ varie de $\rho_2 = r/R_2$ à $\rho_1 = r/R_1$, et $\hat{\theta} = \theta' - \theta$ de 0 à 2π . Nous avons utilisé $m_d = \pi\sigma(R_2^2 - R_1^2)$. Pour l'intégration sur $\hat{\theta}$, on utilise la définition des coefficients de Laplace (e.g., Laskar, 2005b)

$$\frac{1}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \hat{\theta})^s} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_s^{(k)}(\rho) e^{ik\hat{\theta}} \quad (3.6)$$

qui permet de remplacer le dénominateur dans l'expression de \mathcal{N} par une série d'exponentielles complexes plus facilement intégrables. Ici, l'indice s des coefficients de Laplace vaut $5/2$. Les éléments de la matrice s'expriment aussi en fonction des mêmes exponentielles

$$\begin{aligned} (\rho - \cos \hat{\theta})^2 &= \rho^2 - \rho (e^{i\hat{\theta}} + e^{-i\hat{\theta}}) + \frac{1}{4} (e^{2i\hat{\theta}} + 2 + e^{-2i\hat{\theta}}) \\ \sin^2 \hat{\theta} &= -\frac{1}{4} (e^{2i\hat{\theta}} - 2 + e^{-2i\hat{\theta}}) \\ -\sin \hat{\theta} (\rho - \cos \hat{\theta}) &= -\frac{\rho}{2i} (e^{i\hat{\theta}} - e^{-i\hat{\theta}}) + \frac{1}{4i} (e^{2i\hat{\theta}} - e^{-2i\hat{\theta}}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Comme les primitives de $\exp(ik\hat{\theta})$ sont 2π -périodiques lorsque k est non nul, seuls les termes constants vont contribuer à l'intégrale sur $\hat{\theta}$ entre 0 et 2π . On obtient alors

$$\mathcal{N} = \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{2(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \begin{pmatrix} N_{11}(\rho) & N_{12}(\rho) & 0 \\ N_{12}(\rho) & N_{22}(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\rho \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{cases} N_{11}(\rho) = (2\rho^2 + 1)b_{5/2}^{(0)}(\rho) - 4\rho b_{5/2}^{(1)}(\rho) + b_{5/2}^{(2)}(\rho) \\ N_{22}(\rho) = b_{5/2}^{(0)}(\rho) - b_{5/2}^{(2)}(\rho) \\ N_{12}(\rho) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où on a utilisé la propriété $b_s^{(-k)}(\rho) = b_s^{(k)}(\rho)$ des coefficients de Laplace (e.g., Laskar, 2005b). Pour le calcul du hamiltonien, il ne manque plus que l'intégration sur ρ . Cependant, ce qui nous intéresse ici, c'est l'évolution à long terme de l'axe de la planète. Celle-ci s'obtient en moyennant le hamiltonien sur l'anomalie moyenne θ de la planète. Faire cette moyenne maintenant permet de simplifier les calculs d'intégrale. En effet,

$$\left\langle R_3(\theta) \begin{pmatrix} N_{11}(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & N_{22}(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_3(-\theta) \right\rangle_{\theta} = \frac{1}{2} (N_{11}(\rho) + N_{22}(\rho)) (Id - \mathbf{k}^t \mathbf{k}), \quad (3.10)$$

avec Id la matrice identité. En oubliant le terme constant, on obtient

$$\mathcal{H}_s = \langle \mathcal{H} \rangle_{\theta} = -\frac{3\mathcal{G}(C-A)m_d}{4r^3} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} [B_{3/2}^{(0)}(\rho_1) - B_{3/2}^{(0)}(\rho_2)] (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})^2 \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} B_{3/2}^{(0)}(x) &= \int_0^x [(\rho^2 + 1)b_{5/2}^{(0)}(\rho) - 2\rho b_{5/2}^{(1)}(\rho)] d\rho \\ &= \int_0^x b_{3/2}^{(0)}(\rho) d\rho \end{aligned} \quad (3.12)$$

est une fonction régulière (Fig. 3.2) qui se calcule à partir du développement limité des coefficients de Laplace (e.g., Laskar, 2005b)¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_s^{(k)}(\rho) &= \frac{(s)_k}{k!} \rho^k F(s, s+k, k+1; \rho^2), \\ &= \frac{(s)_k}{k!} \rho^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s)_n (s+k)_n}{(k+1)_n n!} \rho^{2n}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

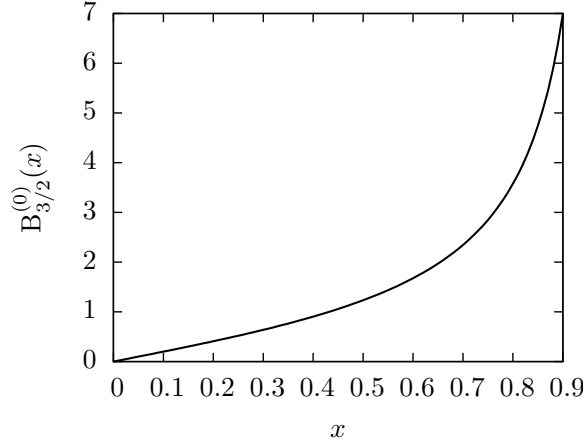


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction $x \rightarrow B_{3/2}^{(0)}(x)$ intervenant dans le calcul de l'interaction séculaire entre une planète et un disque (3.12), et définie sur $[0, 1[$ par $B_{3/2}^{(0)}(x) = \int_0^x b_{3/2}^{(0)}(\rho) d\rho$. Au voisinage de $x = 1$, $B_{3/2}^{(0)}(x) \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-x}$.

$F(a, b, c; z)$ étant la fonction hypergéométrique de Gauss, $(s)_0 = 1$, et $(s)_k = s(s+1) \cdots (s+k-1)$ pour $k \geq 1$. L'expression de $b_{3/2}^{(0)}(\rho)$ apparaissant dans l'expression de $B_{3/2}^{(0)}(\rho)$ (3.12) est donc

$$b_{3/2}^{(0)}(\rho) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 \rho^{2n}, \quad (3.14)$$

d'où

$$B_{3/2}^{(0)}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (3.15)$$

D'après (Laskar & Robutel, 1995), au voisinage de $\rho = 1$,

$$\frac{1}{2} b_s^{(k)}(\rho) \sim \frac{\Gamma(2s-1)}{[\Gamma(s)]^2} (1-\rho^2)^{1-2s} \quad \text{si} \quad s > \frac{1}{2}, \quad (3.16)$$

on en déduit qu'au voisinage de $\rho = 1$

$$b_{3/2}^{(0)}(\rho) \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1-\rho)^2}, \quad (3.17)$$

et au voisinage de $x = 1$

$$B_{3/2}^{(0)}(x) \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-x}. \quad (3.18)$$

Le hamiltonien \mathcal{H}_s (3.11) décrit l'évolution séculaire de l'axe de la planète interagissant avec un disque de densité uniforme de masse m_d et compris entre les rayons R_1 et R_2 . Les équations du mouvement sont identiques à (3.2), \mathcal{H} étant remplacé par \mathcal{H}_s

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{1}{L_{\omega}} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{w}. \quad (3.19)$$

1. Dans (Laskar, 2005b), il y a une coquille dans l'expression des coefficients de Laplace (Eq. 7). Il manque un facteur 1/2 devant le membre de gauche.

3.1.2 Interaction solide-point

Nous venons de calculer le hamiltonien séculaire \mathcal{H}_s qui décrit l'évolution de l'axe d'une planète soumise à l'effet d'un disque de matière. Nous rappelons maintenant l'expression du hamiltonien séculaire décrivant le mouvement de précession d'une planète soumise à l'interaction gravitationnelle du soleil seul. Notons \mathcal{H}_0 ce hamiltonien. Il s'écrit (par ex. Boué & Laskar, 2006, eq. 44)

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{3}{4} \frac{\mathcal{G}(C-A)m_0}{r^3} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{w})^2 \quad (3.20)$$

où m_0 est la masse du soleil.

3.1.3 Interaction complète

Les expressions (3.11) et (3.20) sont très similaires, le hamiltonien total décrivant l'évolution de l'axe de la planète dans le système étoile-planète-disque s'écrit simplement

$$\mathcal{H}_t = (1 + \kappa)\mathcal{H}_0 \quad (3.21)$$

avec

$$\kappa = \frac{m_d}{m_0} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1^2 - \rho_2^2} \left[B_{3/2}^{(0)}(\rho_1) - B_{3/2}^{(0)}(\rho_2) \right]. \quad (3.22)$$

Le coefficient κ décrit la contribution du disque au mouvement de précession de l'axe.

Regardons maintenant comment ce paramètre κ varie en fonction des données du problème. Comme κ est proportionnel à m_d , nous pouvons déjà en conclure que l'effet du disque est d'autant plus important que le disque est massif. Réécrivons κ en utilisant la formule des accroissements finis appliquée à $B_{3/2}^{(0)}$. Il existe $\rho \in [\rho_2, \rho_1]$ tel que

$$B_{3/2}^{(0)}(\rho_1) - B_{3/2}^{(0)}(\rho_2) = (\rho_1 - \rho_2) b_{3/2}^{(0)}(\rho). \quad (3.23)$$

Ainsi,

$$\kappa = \frac{m_d}{m_0} \frac{\rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2} b_{3/2}^{(0)}(\rho). \quad (3.24)$$

Comme les coefficients de Laplace sont positifs sur $[0, 1[$, on en déduit que κ est toujours positif. De plus, $B_{3/2}^{(0)}$ est convexe donc

$$\rho_2 \mapsto \frac{B_{3/2}^{(0)}(\rho_1) - B_{3/2}^{(0)}(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} \quad (3.25)$$

est une fonction croissante. Comme $\rho_2 \mapsto \rho_2^2/(\rho_1 + \rho_2)$ est aussi une fonction croissante, on en conclut que l'effet du disque est d'autant plus grand que le bord externe se rapproche du bord interne ($\rho_2 \rightarrow \rho_1 > \rho_2$). Dit autrement, l'effet est maximal lorsque toute la masse du disque est concentré sur le bord inférieur, c'est-à-dire au plus près de la planète. Dans ces conditions, κ vaut

$$\kappa_m = \frac{m_d}{m_0} \frac{\rho_1^3}{2} b_{3/2}^{(0)}(\rho_1). \quad (3.26)$$

La figure 3.3 montre comment varie κ_m en fonction de la distance du bord interne du disque à la planète pour des masses de disque en accord avec les simulations de Gomes et al. (2005). Pour une masse de disque donnée, l'effet décroît plus ou moins comme l'inverse du carré de la distance planète-bord interne du disque. Et comme le montre l'expression (3.26), l'effet est proportionnel à la masse du disque. κ_m atteint des valeurs non négligeables, supérieures ou de l'ordre de l'unité lorsque la distance planète-bord interne du disque passe en dessous de 0.1 UA environ. Cela signifie que toute la masse

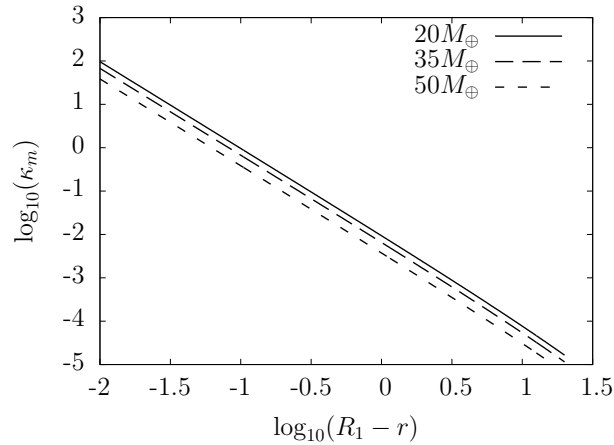


FIGURE 3.3 – Effet maximal d’un disque sur la précession d’une planète en fonction de la distance entre la planète et le bord interne du disque. La distance de la planète au soleil est fixée à $r = 14.2$ UA et le bord interne R_1 du disque varie de 14.21 à 34 UA. L’effet est calculé pour trois masses de disque: 20, 35 et 50 masses terrestres. Ces valeurs ont été choisies à partir de la simulation de référence de Gomes et al. (2005) dans laquelle Uranus est placée à 14.2 UA et le disque de 35 masses terrestres s’étend de 15.5 à 34 UA. L’effet devient significatif lorsque toute la masse du disque se trouve à moins de 0.1 UA de la planète.

du disque se situe à moins de 0.1 UA de la planète. Or à cette distance, le disque est instable et les planétésimaux qui le composent sont rapidement éjectés (Morbidelli et al., 2007). Nous pouvons en conclure que si le disque a joué un rôle dans le basculement d’Uranus, ce n’est pas en augmentant la constante de précession.

3.2 Modélisation d’un disque déformable

Nous avons montré qu’un disque de planétésimaux ne permet pas d’augmenter significativement la constante de précession d’Uranus. Cela ne signifie pas qu’un tel disque est sans effet sur son obliquité. En particulier, on peut imaginer que la présence d’un disque modifie les fréquences séculaires du système constitué des quatre planètes géantes et du soleil. Si le spectre créé est continu alors cela peut engendrer un comportement chaotique de l’obliquité. Pour étudier cela, nous devons dans un premier temps modéliser l’évolution séculaire d’un disque de planétésimaux. Nous supposons que le disque est constitué d’un ensemble de particules en orbite circulaire de faible inclinaison. Nous ne traiterons pas ici les effets collisionnels qui ont lieu dans le disque.

3.2.1 Modélisation continue

Dans ce paragraphe, nous allons tenter de modéliser un disque continu. Nous étudions les effets séculaires donc la longitude de chaque particule constituant le disque disparaît des calculs, seule intervient l’orientation de leur orbite. Toutes les particules situées à une même distance de l’étoile sont donc équivalentes et on peut voir le disque comme étant constitué d’un ensemble d’anneaux rigides. Dans ce qui suit, nous allons calculer les équations du mouvement de chacun de ces anneaux.

Rappel

Avant de passer au cas d'un disque continu, rappelons brièvement les équations d'évolution séculaire dans le cas d'un nombre n fini de corps en orbite circulaire autour d'une étoile de masse m_0 . Nous aurons l'occasion de les redériver dans un cas un peu plus général dans la suite. Pour chaque corps, définissons

$$\zeta_k = \sin \frac{i_k}{2} \exp(i\Omega_k) \quad (3.27)$$

où i_k et Ω_k sont respectivement l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant du corps k . Le hamiltonien régissant l'évolution séculaire des ζ_k , $k = 1 \dots n$, est (Laskar & Robutel, 1995)

$$\mathcal{H} = -2 \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} C_3 \left(\frac{a_i}{a_j} \right) \left(\zeta_i \bar{\zeta}_j + \bar{\zeta}_i \zeta_j - \zeta_i \bar{\zeta}_i - \zeta_j \bar{\zeta}_j \right), \quad (3.28)$$

avec $C_3(\rho) = \frac{1}{4} \rho b_{3/2}^{(1)}(\rho)$. m_i et a_i sont respectivement la masse et le demi-grand axe du corps i . Les corps sont rangés par ordre croissant de demi-grand axe de sorte que le quotient a_i/a_j soit toujours inférieur à 1 dans le hamiltonien. Les équations du mouvement se déduisent du hamiltonien à partir de

$$\dot{\zeta}_k = -i \frac{1}{2\Lambda_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\zeta}_k} \quad (3.29)$$

où $\Lambda_k = \beta_k \sqrt{\mu_k a_k}$ est le moment cinétique orbital du corps k , $\beta_k = m_0 m_k / (m_0 + m_k)$ et $\mu_k = \mathcal{G}(m_0 + m_k)$.

Passage au continu

On reprend les mêmes notations, sauf que maintenant il n'y a plus un nombre fini de particules mais un continuum. Les variables ζ_k deviennent une fonction de la distance à l'étoile que l'on note $\zeta(x)$. De même, les masses m_k sont remplacées par les masses linéïques $\hat{\sigma} = 2\pi x \sigma(x)$ avec

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma & \text{si } R_1 \leq x \leq R_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Le hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}[\zeta, \bar{\zeta}] = -2\mathcal{G} \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x')}{x'} C_3 \left(\frac{x}{x'} \right) \left[\zeta(x)\bar{\zeta}(x') + \bar{\zeta}(x)\zeta(x') - \zeta(x)\bar{\zeta}(x) - \zeta(x')\bar{\zeta}(x') \right] dx' dx. \quad (3.31)$$

Ici, nous traitons le disque seul autour de l'étoile, c'est-à-dire sans planète. Comme la densité surfacique $\sigma(x)$ est nulle si $x < R_1$ ou si $x > R_2$, il n'y a pas de problème de divergence des intégrales en 0 ou en $+\infty$. Les équations du mouvement correspondantes deviennent

$$\dot{\zeta}(x) = -i \frac{1}{2\Lambda(x)} \frac{\delta \mathcal{H}[\zeta, \bar{\zeta}]}{\delta \bar{\zeta}} \quad (3.32)$$

où $\delta \mathcal{H}[\zeta, \bar{\zeta}] / \delta \bar{\zeta}$ représente une dérivée fonctionnelle (Cartan, 1977). Dans cette expression, $\Lambda(x) = \hat{\sigma}(x) \sqrt{\mu x}$ avec $\mu = \mathcal{G}m_0$. En substituant l'expression du hamiltonien dans l'équation du mouvement, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(x) &= i \frac{\mathcal{G}}{\Lambda(x)} \int_x^\infty \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x')}{x'} C_3 \left(\frac{x}{x'} \right) \left[\zeta(x') - \zeta(x) \right] dx' \\ &+ i \frac{\mathcal{G}}{\Lambda(x)} \int_0^x \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x')}{x} C_3 \left(\frac{x'}{x} \right) \left[\zeta(x') - \zeta(x) \right] dx', \end{aligned} \quad (3.33)$$

et en remplaçant $\Lambda(x)$ par $\hat{\sigma}(x)\sqrt{\mu x}$, il vient

$$\dot{\zeta}(x) = i \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\mu x}} \left(\int_x^\infty \frac{\hat{\sigma}(x')}{x'} C_3 \left(\frac{x}{x'} \right) [\zeta(x') - \zeta(x)] dx' + \int_0^x \frac{\hat{\sigma}(x')}{x} C_3 \left(\frac{x'}{x} \right) [\zeta(x') - \zeta(x)] dx' \right). \quad (3.34)$$

Le problème avec cette expression, c'est qu'au voisinage de $\rho = 1$, $C_3(\rho) \sim 1/(2\pi(1-\rho)^2)$. Il n'est donc pas évident *a priori* que les intégrales convergent. Pour s'en convaincre, on peut faire un développement limité des deux fonctions à intégrer au voisinage de $x' = x$. Les deux développements ont le même terme dominant, à savoir

$$\frac{1}{2\pi} \frac{x \hat{\sigma}(x) \zeta'(x)}{x' - x}. \quad (3.35)$$

Donc, pour que chacune des intégrales converge en $x' = x$, il faut que $\zeta'(x)$ ou $\hat{\sigma}(x)$ soit nul. Ainsi, partout où il y a de la matière ($\hat{\sigma}(x) > 0$), c'est-à-dire entre $x = R_1$ et $x = R_2$, on a $\zeta'(x) = 0$. Cela signifie que les orientations de tous les anneaux qui composent le disque sont toutes identiques et donc que le disque est plan et rigide. Ce n'est bien sûr pas le cas. En fait les divergences de chacune des intégrales se compensent et le résultat reste fini même si $\zeta'(x) \neq 0$. Pour le voir, effectuons les changements de variable $u = x/x'$ dans la première intégrale et $u = x'/x$ dans la seconde. On obtient alors

$$\dot{\zeta}(x) = i \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\mu x}} \int_0^1 C_3(u) \left(\frac{\hat{\sigma}(x/u)}{u} [\zeta(x/u) - \zeta(x)] + \hat{\sigma}(xu) [\zeta(xu) - \zeta(x)] \right) du. \quad (3.36)$$

Au voisinage de $u = 0$, x/u tend vers l'infini. Comme le disque est limité dans l'espace, pour u suffisamment petit $\hat{\sigma}(x/u) = 0$. L'intégrale converge donc en 0. Au voisinage de $u = 1$, la fonction sous le signe intégrale, que l'on note $f_x(u)$, est finie

$$f_x(u) \sim \frac{1}{2\pi} x \left[2\hat{\sigma}(x)\zeta'(x) + 2x\hat{\sigma}'(x)\zeta'(x) + x\hat{\sigma}(x)\zeta''(x) \right]. \quad (3.37)$$

Par suite, l'intégrale (3.36) converge en 1 aussi. La formule (3.36) permet d'étudier l'évolution du disque. Il y a deux intégrales premières du mouvement, le hamiltonien (3.31) et la troisième composante du moment cinétique total

$$L_3 = \int_0^\infty \Lambda(x) \underbrace{\left[1 - 2\zeta(x)\bar{\zeta}(x) \right]}_{\cos i(x)} dx. \quad (3.38)$$

Les deux premières composantes du moment cinétique total ne sont pas conservées, car dans le problème séculaire nous n'avons gardé que le premier ordre en inclinaison. On peut vérifier que L_3 (3.38) est bien conservé. En effet,

$$\dot{L}_3 = -2 \int_0^\infty \Lambda(x) \left[\dot{\zeta}(x)\bar{\zeta}(x) + \zeta(x)\dot{\bar{\zeta}}(x) \right] dx. \quad (3.39)$$

En utilisant le fait que $\dot{\bar{\zeta}}(x) = \bar{\dot{\zeta}}(x)$, et l'équation (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= -2i \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x')}{x'} C_3 \left(\frac{x}{x'} \right) \left[\zeta(x')\bar{\zeta}(x) - \zeta(x)\bar{\zeta}(x') - \zeta(x)\bar{\zeta}(x') + \zeta(x)\bar{\zeta}(x) \right] dx' dx \\ &\quad - 2i \int_0^\infty \int_0^x \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x')}{x} C_3 \left(\frac{x'}{x} \right) \left[\zeta(x')\bar{\zeta}(x) - \zeta(x)\bar{\zeta}(x') - \zeta(x)\bar{\zeta}(x') + \zeta(x)\bar{\zeta}(x) \right] dx' dx. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Les termes en $\zeta(x)\bar{\zeta}(x)$ se simplifient. On inverse l'ordre d'intégration dans la seconde intégrale double, et on renomme les variables x, x' (on les intervertit). Cela donne

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= -2i \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x')}{x'} C_3\left(\frac{x}{x'}\right) \left[\zeta(x')\bar{\zeta}(x) - \zeta(x)\bar{\zeta}(x') \right] dx' dx \\ &\quad - 2i \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\hat{\sigma}(x')\hat{\sigma}(x)}{x'} C_3\left(\frac{x'}{x}\right) \left[\zeta(x)\bar{\zeta}(x') - \zeta(x')\bar{\zeta}(x) \right] dx' dx, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ce que l'on recherche ici, ce sont les fréquences propres du système pour savoir si le spectre est continu et s'il peut faire basculer une planète comme Uranus. Pour trouver les fréquences propres, il faut diagonaliser l'opérateur Φ défini à partir de (3.36) par

$$\Phi : \zeta \mapsto \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\mu x}} \int_0^1 C_3(u) \left(\frac{\hat{\sigma}(x/u)}{u} \left[\zeta(x/u) - \zeta(x) \right] + \hat{\sigma}(xu) \left[\zeta(xu) - \zeta(x) \right] \right) du. \quad (3.42)$$

L'opérateur Φ est défini de telle sorte que

$$\dot{\zeta} = i\Phi[\zeta]. \quad (3.43)$$

Les fonctions constantes font partie du noyau de Φ . Physiquement, cela correspond au cas où le disque est plan (puisque $\zeta = Cste$). Et si le disque est plan, alors il n'y a aucun couple qui le fait pivoter, le disque reste statique ($\dot{\zeta} = 0$).

Recherchons maintenant les autres valeurs propres possibles. Supposons que $\nu \in \mathbb{C}$ soit valeur propre de Φ . Alors il existe une fonction $\zeta_\nu \neq 0$ telle que

$$\Phi[\zeta_\nu] = \nu\zeta_\nu. \quad (3.44)$$

La fonction ζ_ν doit être telle que la troisième composante du moment cinétique $L_3[\zeta_\nu]$ reste constante. Or, la dérivée temporelle de L_3 est dans ce cas

$$\dot{L}_3[\zeta_\nu] = -2i(\nu - \bar{\nu}) \int_0^\infty \Lambda(x) \zeta_\nu(x) \bar{\zeta}_\nu(x) dx. \quad (3.45)$$

La fonction intégrée est positive car $\Lambda(x) = \hat{\sigma}(x)\sqrt{\mu x}$ et $\zeta_\nu(x)\bar{\zeta}_\nu(x) = |\zeta_\nu(x)|^2$. La fonction ζ_ν étant non nulle, pour que $\dot{L}_3[\zeta_\nu]$ soit nulle, il faut que $\nu - \bar{\nu}$ soit nul, et donc que ν soit réelle. Cela correspond effectivement à une rotation pure du disque à la fréquence ν . Malheureusement, il n'est pas possible d'aller plus loin, car il est difficile de trouver les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

3.2.2 Modélisation discrète

Comme je n'ai pas réussi à obtenir le spectre du disque analytiquement dans le cas continu, il ne reste plus qu'à faire l'étude numériquement. Mais numériquement il n'est pas possible de manipuler des fonctions continues, il faut donc discrétiser. Cela revient alors à considérer le disque comme étant constitué d'un nombre n fini de corps, et donc à faire une modélisation discrète.

Touma et al. (2009) ont étudié l'évolution séculaire d'un anneau constitué d'étoiles autour d'un trou noir galactique. Leurs équations sont valables pour toute inclinaison et toute excentricité, et les orbites sont amenées à se croiser. Pour éviter des divergences numériques, Touma et al. (2009) ont utilisé un potentiel lissé. C'est-à-dire que l'énergie potentielle d'interaction entre deux étoiles de l'anneau de masses m_i et m_j est remplacée par

$$U_{ij} = -\frac{\mathcal{G}m_i m_j}{\Delta_b}, \quad (3.46)$$

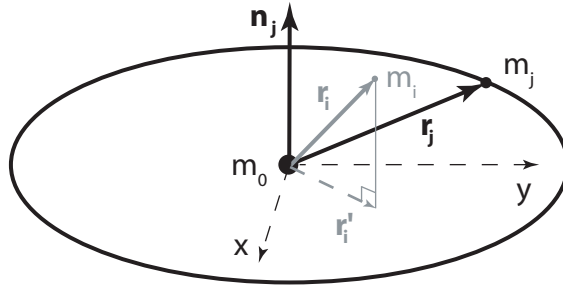


FIGURE 3.4 – Notations pour le calcul de l'interaction séculaire avec potentiel lissé entre deux corps de masses m_i et m_j et de position \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j . \mathbf{n}_j est le vecteur unitaire dirigé selon le moment cinétique orbital du corps j . \mathbf{r}'_i est la projection orthogonale de \mathbf{r}_i sur le plan de l'orbite du corps j .

avec $\Delta_b = \sqrt{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^2 + r_b^2}$. Il s'agit du potentiel de Plummer. Celui-ci se réduit au potentiel Képlérien lorsque $r_b = 0$. Ici, nous nous limiterons toujours aux orbites circulaires et au premier ordre en inclinaison pour pouvoir calculer numériquement les fréquences propres sans avoir à faire de simulation. Nous allons néanmoins étudier l'effet de la longueur de lissage r_b . Les équations du mouvement séculaire calculées par Laskar & Robutel (1995) correspondent au potentiel Képlérien, il faut donc les recalculer pour le potentiel de Plummer. Comme nous nous limitons au premier ordre en inclinaison, nous pouvons faire cela assez simplement.

Considérons dans un premier temps uniquement 2 corps de masses m_i et m_j tournant autour d'une étoile de masse m_0 (Fig. 3.4). On note respectivement \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j les positions héliocentriques des corps i et j . Les orbites étant circulaires, les rayons des orbites sont aussi les demi-grands axes et on pose $a_i = \|\mathbf{r}_i\|$ et $a_j = \|\mathbf{r}_j\|$. On suppose que $a_i < a_j$. On associe le plan (x, y) à l'orbite de la masse m_j . On note \mathbf{r}'_i la projection de \mathbf{r}_i sur le plan (x, y) et θ'_i et θ_j les angles que font \mathbf{r}'_i et \mathbf{r}_j par rapport à une direction de référence dans ce plan. Enfin, $a'_i = \|\mathbf{r}'_i\|$. Avec ces notations,

$$\Delta_b^2 = r_b^2 + a_i^2 + a_j^2 - 2a'_i a_j \cos(\theta'_i - \theta_j) + (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2, \quad (3.47)$$

où \mathbf{n}_j est le vecteur unitaire porté par le moment cinétique orbital du corps j . $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)$ représente la troisième composante du vecteur \mathbf{r}_i dans le repère associé à l'orbite j . En supposant l'inclinaison relative des orbites petite : $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2 \ll a_i^2$, on peut écrire

$$a'_i = a_i \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2}{a_i^2} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^4}{a_i^4} \right). \quad (3.48)$$

En remplaçant dans (3.47), on obtient

$$\Delta_b = r_b^2 + a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(\theta'_i - \theta_j) + a_i a_j \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2}{a_i^2} \cos(\theta'_i - \theta_j) + \mathcal{O} \left(\frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^4}{a_i^4} \right). \quad (3.49)$$

Dans la suite, nous oublierons le $\mathcal{O}((\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^4/a_i^4)$. Notons

$$\Delta_b'^2 = r_b^2 + a_i^2 + a_j^2 - 2a_i a_j \cos(\theta'_i - \theta_j). \quad (3.50)$$

Au même ordre de petitesse, on peut écrire

$$\frac{1}{\Delta_b} = \frac{1}{\Delta_b'} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a_i a_j (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2}{\Delta_b'^2 a_i^2} \cos(\theta'_i - \theta_j) \right]. \quad (3.51)$$

Pour la suite des calculs, il reste à écrire $(\Delta'_b/a_j)^2$ sous la forme $\Delta_0^2(1 + \rho_b^2 - 2\rho_0 \cos(\theta'_i - \theta_j))$. En effet, cette forme est classique et se décompose facilement en coefficients de Laplace. Ensuite, il suffira de moyenner sur la longitude des corps pour avoir l'effet séculaire. Posons $\rho = a_i/a_j$ et $\rho_b = r_b/a_j$,

$$\frac{\Delta'_b{}^2}{a_j^2} = 1 + \rho_b^2 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta'_i - \theta_j). \quad (3.52)$$

Il faut donc trouver ρ_0 et Δ_0 solutions de

$$\begin{cases} \Delta_0^2(1 + \rho_b^2) = 1 + \rho_b^2 + \rho^2, \\ \Delta_0^2 \rho_0 = \rho. \end{cases} \quad (3.53)$$

On en déduit une équation sur ρ_0

$$\rho \rho_0^2 - (1 + \rho_b^2 + \rho^2) \rho_0 + \rho = 0. \quad (3.54)$$

Le discriminant D de ce binôme vaut $(1 + \rho_b^2 + \rho^2)^2 - 4\rho^2$. Il est strictement supérieur à $(1 - \rho^2)^2$ pour $\rho_b \neq 0$, donc est strictement positif. L'équation (3.54) possède deux racines réelles

$$\rho_0 = \frac{1}{2\rho} \left(1 + \rho_b^2 + \rho^2 \pm \sqrt{D} \right). \quad (3.55)$$

Les deux solutions sont positives et inverses l'une de l'autre. Il y a donc toujours une racine comprise entre 0 et 1. C'est cette racine que l'on choisie (celle avec le signe moins). Ensuite, on choisit

$$\Delta_0 = +\sqrt{\rho/\rho_0}. \quad (3.56)$$

En multipliant (3.51) par a_j , on obtient

$$\frac{a_j}{\Delta_b} = \frac{a_j}{\Delta'_b} - \frac{1}{2} \left(\frac{a_j}{\Delta'_b} \right)^3 \rho \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2}{a_i^2} \cos(\theta'_i - \theta_j), \quad (3.57)$$

avec

$$\frac{a_j}{\Delta'_b} = \frac{1}{\Delta_0} \frac{1}{[1 + \rho_b^2 - 2\rho_0 \cos(\theta'_i - \theta_j)]^{1/2}}. \quad (3.58)$$

L'expression (3.57) se moyenne en utilisant exactement la même démarche que pour l'interaction solide-disque (section 3.1.1, page 28). La moyenne s'effectue d'abord sur θ_j qui varie linéairement avec le temps. On obtient

$$\left\langle \frac{a_j}{\Delta_b} \right\rangle_{\theta_j} = \frac{1}{2} \frac{b_{1/2}^{(0)}(\rho_0)}{\Delta_0} - C'_3(\rho) \frac{(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2}{a_i^2}, \quad (3.59)$$

avec

$$C'_3(\rho) = \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\Delta_0^3} b_{3/2}^{(1)}(\rho_0), \quad (3.60)$$

où ρ_0 et Δ_0 sont donnés par (3.55) et (3.56). Pour la moyenne sur la longitude θ_i du corps i , on utilise

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i}{a_i^2} \right\rangle_{\theta_i} = \frac{1}{2} (\text{Id} - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i). \quad (3.61)$$

On obtient alors

$$\left\langle \frac{a_j}{\Delta_b} \right\rangle_{\theta_i, \theta_j} = \frac{1}{2} \frac{b_{1/2}^{(0)}(\rho_0)}{\Delta_0} - \frac{1}{2} C'_3(\rho) + \frac{1}{2} C'_3(\rho) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2. \quad (3.62)$$

TABLE 3.1 – Interactions utilisées pour la modélisation de l'évolution de n planètes et d'un disque de p planétésimaux autour du soleil.

	soleil	planète	planétésimal
soleil	–	Newton	Newton
planète		Newton	Newton
planétésimal			Plummer

Le hamiltonien décrivant l'évolution séculaire de n corps interagissant entre eux par l'intermédiaire d'un potentiel lissé est donc (à une constante près)

$$\mathcal{H}_b = -\frac{1}{2} \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} C'_3 \left(\frac{a_i}{a_j} \right) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2. \quad (3.63)$$

Les équations d'évolution sont données par

$$\dot{\mathbf{n}}_i = \nabla_{\mathbf{n}_i} \mathcal{H}_b \wedge \mathbf{n}_i. \quad (3.64)$$

Avec les notations de la section précédente, le hamiltonien s'écrit aussi (à une constante près)

$$\mathcal{H}_b = -2 \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} C'_3 \left(\frac{a_i}{a_j} \right) (\zeta_i \bar{\zeta}_j + \bar{\zeta}_i \zeta_j - \zeta_i \bar{\zeta}_i - \zeta_j \bar{\zeta}_j) \quad (3.65)$$

avec $C'_3(\rho)$ donné par (3.60). Dans le cas où le paramètre de lissage est nul, on retrouve le hamiltonien (3.28).

3.3 Spectre de l'évolution séculaire

Dans la section précédente, nous avons écrit les hamiltoniens d'évolution séculaire d'un ensemble fini de corps en interaction newtonienne (3.28), ou soumis à un potentiel lissé (3.65). Nous allons maintenant utiliser une combinaison de ces deux hamiltoniens pour modéliser l'évolution du système solaire entre les deux phases de migration. Nous négligerons l'effet des planètes intérieures. Notre système est constitué uniquement des quatre planètes géantes, sur des orbites rapprochées, entourées d'un disque de planétésimaux.

3.3.1 Modélisation

Pour étudier l'évolution de leur système, un ensemble d'étoiles autour d'un trou noir, Touma et al. (2009) ont modélisé les interactions étoiles-trou noir par un potentiel newtonien et les interactions des étoiles entre elles par un potentiel lissé. Nous allons utiliser la même approche. Nous supposons que l'évolution du système est bien décrite par les interactions résumées dans la table 3.1, c'est-à-dire où seul le potentiel d'interaction entre les planétésimaux est lissé.

Le hamiltonien du système constitué de n planètes et p planétésimaux s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -2 \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} C'_3 \left(\frac{a_i}{a_j} \right) (\zeta_i \bar{\zeta}_j + \bar{\zeta}_i \zeta_j - \zeta_i \bar{\zeta}_i - \zeta_j \bar{\zeta}_j) \\ & -2 \sum_{n < k < l \leq n+p} \frac{\mathcal{G}m_k m_l}{a_l} C'_3 \left(\frac{a_k}{a_l} \right) (\zeta_k \bar{\zeta}_l + \bar{\zeta}_k \zeta_l - \zeta_k \bar{\zeta}_k - \zeta_l \bar{\zeta}_l) \\ & -2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\mathcal{G}m_i m_k}{a_k} C'_3 \left(\frac{a_i}{a_k} \right) (\zeta_i \bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_i \zeta_k - \zeta_i \bar{\zeta}_i - \zeta_k \bar{\zeta}_k) \end{aligned} \quad (3.66)$$

où les indices de 1 à n font référence aux planètes et les indices de $n+1$ à $n+p$ font référence aux planétésimaux. La première somme décrit les interactions planète-planète; la deuxième, les interactions planétésimal-planétésimal; et la troisième, les interactions entre les planètes et les planétésimaux.

Le disque de planétésimaux est divisé en p couronnes de masse m_k , $k = n+1, \dots, n+p$ et délimitées par les rayons r_k et r_{k+1} avec

$$r_k = R_1 + (k - n - 1) \frac{R_2 - R_1}{p}. \quad (3.67)$$

Pour rappel, R_1 et R_2 sont respectivement les rayons interne et externe du disque. Les masses sont choisies de sorte à ce que la densité surfacique σ soit constante

$$m_k = \sigma \pi (r_{k+1}^2 - r_k^2), \quad (3.68)$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} m_k = m_d. \quad (3.69)$$

Le demi-grand axe a_k de la couronne k est choisi de façon à ce que le moment cinétique calculé avec cette valeur et la masse m_k soit effectivement le moment cinétique de la couronne

$$m_k \sqrt{\mu a_k} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} 2\pi r \sigma \sqrt{\mu r} dr. \quad (3.70)$$

D'où

$$\begin{aligned} a_k &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{r_{k+1}^{5/2} - r_k^{5/2}}{r_{k+1}^2 - r_k^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left[\frac{r_{k+1}^4 + r_{k+1}^3 r_k + r_{k+1}^2 r_k^2 + r_{k+1} r_k^3 + r_k^4}{(r_{k+1} + r_k)(r_{k+1}^{5/2} + r_k^{5/2})}\right]^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Les deux expressions sont égales, mais la seconde, bien que plus compliquée, est plus stable numériquement dans le cas où la différence entre r_{k+1} et r_k est petite.

Les équations du mouvement engendrées par le hamiltonien (3.66) sont

$$\dot{\zeta}_i = i \frac{m_i}{\Lambda_i} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathcal{G} m_j}{a_i} C_3 \left(\frac{a_j}{a_i}\right) (\zeta_j - \zeta_i) + \sum_{j=i+1}^{n+p} \frac{\mathcal{G} m_j}{a_j} C_3 \left(\frac{a_i}{a_j}\right) (\zeta_j - \zeta_i) \right], \quad (3.72)$$

pour $i = 1, \dots, n$, et

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_k &= i \frac{m_k}{\Lambda_k} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{G} m_i}{a_k} C_3 \left(\frac{a_i}{a_k}\right) (\zeta_i - \zeta_k) + \sum_{i=n+1}^{k-1} \frac{\mathcal{G} m_i}{a_k} C_3 \left(\frac{a_i}{a_k}\right) (\zeta_i - \zeta_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k+1}^{n+p} \frac{\mathcal{G} m_i}{a_i} C_3' \left(\frac{a_k}{a_i}\right) (\zeta_i - \zeta_k) \right], \end{aligned} \quad (3.73)$$

pour $k = n+1, \dots, n+p$. Il s'agit des équations du problème linéarisé, elles peuvent s'écrire sous une forme matricielle. Soit $Y = {}^t(\zeta_1, \dots, \zeta_{n+p})$, on a

$$\dot{Y} = i \mathcal{M} Y, \quad (3.74)$$

avec \mathcal{M} la matrice à coefficients réels donnée par les équations (3.72) et (3.73). L'étude qui a été effectuée dans le cas continu concernant les contraintes sur les valeurs propres s'applique ici aussi.

TABLE 3.2 – Table des paramètres et conditions initiales utilisés: les masses m , les demi-grand axes a , les inclinaisons i et les longitudes des nœuds Ω . La masse du disque correspond à 35 masses terrestres. Le demi-grand axe d'Uranus est choisi plus grand que celui de Neptune contrairement à la configuration actuelle. Les inclinaisons sont données par rapport au plan invariant.

objet	m (10^{24} kg)	a UA	i (deg)	Ω (deg)
soleil	1989.1×10^6	–	–	–
Jupiter	1898.600	5.45	0.030	-152.3
Saturne	568.460	8.18	0.095	18.6
Neptune	102.430	11.50	0.075	87.0
Uranus	86.832	14.20	0.100	-155.7
disque	209.076	15.50 - 34.00	0.000	0.0

Notamment, les valeurs propres de \mathcal{M} sont réelles. Il s'agit des fréquences séculaires du système. Soit P la matrice de passage qui rend la matrice \mathcal{M} diagonale, c'est-à-dire telle que

$$\mathcal{D} = P\mathcal{M}P^{-1} \quad (3.75)$$

soit diagonale, et posons $Y^* = PY$. Dans les variables étoilées, les équations du mouvement deviennent

$$\dot{Y}^* = i\mathcal{D}Y^*, \quad (3.76)$$

ce qui s'intègre simplement car \mathcal{D} est diagonale. En notant ν_k , $k = 1, \dots, n + p$ les éléments de la diagonale de \mathcal{D} , la solution s'écrit, pour tout k entre 1 et $n + p$,

$$\zeta_k^*(t) = \zeta_k^*(0)e^{i\nu_k t}. \quad (3.77)$$

En revenant aux variables de départ, cela donne

$$Y(t) = P^{-1}e^{i\mathcal{D}t}PY_0, \quad (3.78)$$

avec $Y_0 = Y(0)$ les conditions initiales. Cela permet entre autre d'obtenir la décomposition en fréquence du mouvement de précession orbital de la planète qui nous intéresse, à savoir Uranus.

3.3.2 Résultat

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la méthode présentée ci-dessus avec des valeurs de paramètres correspondant au système solaire. Les demi-grands axes des quatre planètes géantes, ainsi que les rayons interne et externe du disque de planétésimaux, ont été choisis de sorte à reproduire les conditions initiales de la simulation de Gomes et al. (2005). Le choix des conditions initiales pour les inclinaisons est plus difficile. En effet, la migration en phase gazeuse, qui précède l'époque que l'on étudie, a tendance à atténuer les inclinaisons (Lubow & Ogilvie, 2001; Tanaka & Ward, 2004). Or, en l'absence d'inclinaison, le système est stationnaire et il n'y a pas d'évolution. Il faut donc introduire artificiellement des inclinaisons. Nous avons choisi de prendre des inclinaisons égales à 10% de leur valeur actuelle, ce qui équivaut à $\sin i \sim 10^{-3}$. Tous les paramètres utilisés sont récapitulés dans la table 3.2.

Choix de l'échantillonnage

L'évolution du système dépend *a priori* du nombre de couronnes utilisées pour représenter le disque de planétésimaux. En effet, si le système contient $n + p$ corps, alors le système possède aussi

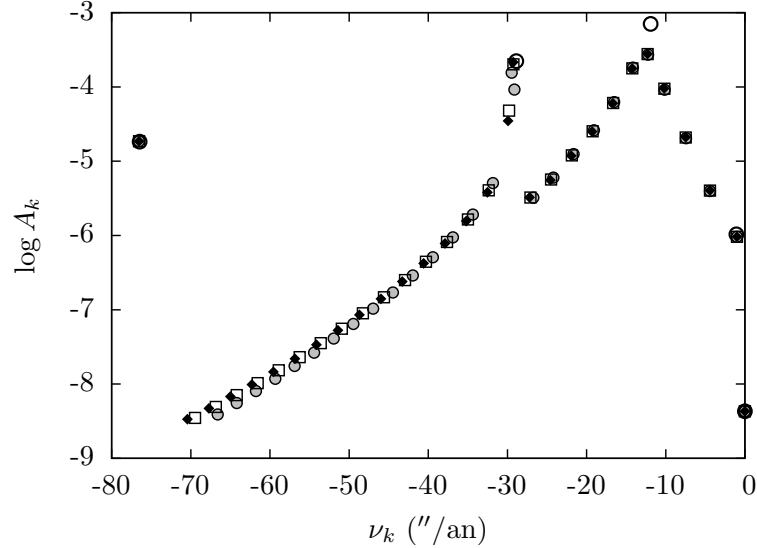


FIGURE 3.5 – Spectre du mouvement de précession de l'orbite d'Uranus pour différentes discrétisations du disque. Les cinq grands cercles vides correspondent au cas où le disque est représenté par une seule couronne. Les autres symboles correspondent à $p = 200$ (cercles pleins), $p = 500$ (carrés vides) et $p = 1000$ (losanges noirs). Seuls les 30 termes de plus grande amplitude sont représentés, les termes suivants se situent à des fréquences $|\nu| > 70''/\text{an}$ avec une amplitude descendant jusqu'à quelque 10^{-30} dans le cas $p = 1000$. Il est important de noter que le spectre n'est pas continu, chaque point représente un terme de la décomposition en fréquence du mouvement.

$n + p$ fréquences fondamentales (dont une qui est nulle). Ainsi, plus le disque est subdivisé, plus il y a de fréquences dans le système. Cependant, les fréquences supplémentaires sont de faible amplitude et ne participent pas significativement à l'évolution temporelle.

La figure 3.5 donne les spectres du mouvement de l'orbite d'Uranus calculés avec différentes valeurs de p . Les 5 fréquences propres du cas $p = 1$ sont représentées, alors que pour p allant de 200 à 1000, seuls les 30 termes de plus grande amplitude ont été reportés. Cette figure montre qu'il n'y a pas de différence notable entre les différents spectres calculés avec $p \geq 200$. On y retrouve les 5 fréquences fondamentales du cas $p = 1$, plus les 25 autres termes régulièrement espacés et d'amplitude similaire d'une valeur de p à l'autre.

Par ailleurs, la figure 3.6 montre les évolutions temporelles de la coordonnée x du pôle de l'orbite d'Uranus reconstruites à partir des 30 termes de plus grande amplitude et de tout le spectre dans le cas $p = 1000$. La différence entre les deux évolutions n'est pas discernable à l'œil. Pour avoir l'effet des 974 termes de plus petite amplitude, la différence a aussi été tracée. Elle montre que l'erreur relative obtenue en tronquant le spectre ne dépasse pas 0.01%. Cette différence présente des battements réguliers de période légèrement inférieure au million d'années. Cela est dû à l'espacement entre les fréquences fondamentales qui est de l'ordre de $2.71''/\text{an}$.

Effet du paramètre de lissage

Voyons maintenant l'effet de la longueur de lissage r_b . La figure 3.7 montre le spectre de l'évolution séculaire de l'orbite d'Uranus pour différentes valeurs de ce paramètre. Il n'y a pratiquement pas de différences entre le modèle sans lissage ($r_b = 0$) et celui avec $r_b = 0.01$ UA. En revanche, pour $r_b = 0.1$ UA et au-delà, il y a un écart pour les termes de petites amplitudes. On pouvait s'y attendre car l'espacement entre les couronnes qui représentent le disque est ici de 0.0372 UA. Tant que la longueur

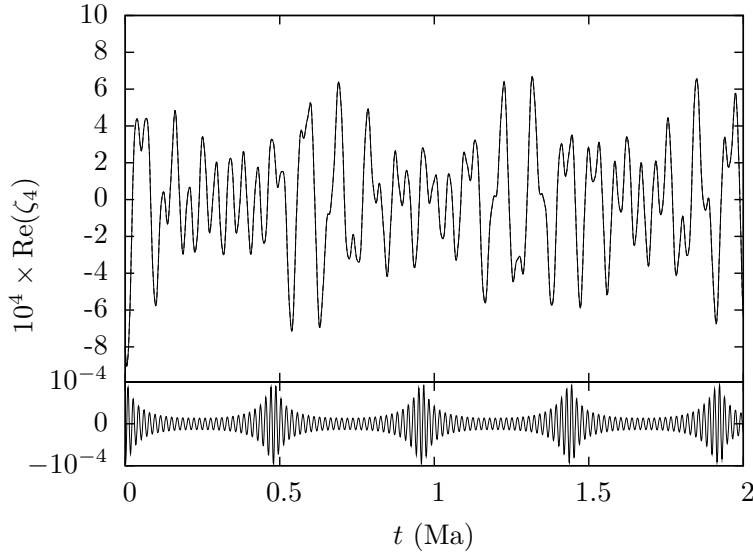


FIGURE 3.6 – Effet de la troncature du spectre sur l'évolution de l'orbite d'Uranus (ζ_j avec $j = 4$) dans le cas $p = 1000$. Dans la partie supérieure, l'évolution sur 2 millions d'années reconstruite à partir des 30 premiers termes et avec le spectre en entier (on ne peut pas distinguer les deux courbes sur le graphe). En bas, la différence entre les deux évolutions. Le comportement reste identique sur 600 millions d'années.

de lissage est inférieure à cette distance, l'interaction est pratiquement newtonienne, et au-delà, le lissage domine. On peut noter tout de même que jusqu'à ces valeurs, le lissage ne modifie pas le spectre au niveau des basses fréquences.

A la différence du problème étudié par Touma et al. (2009) dans lequel les excentricités sont libres, ici les orbites sont circulaires et ne se croisent pas. Le lissage n'est donc pas justifié par une nécessité d'ordre numérique. Par ailleurs, avec les valeurs utilisées dans ce travail, le lissage ne modifie que les hautes fréquences. Qualitativement, cela n'a donc pas d'effet sur l'évolution de l'axe d'Uranus dont la constante de précession α , calculée pour un demi-grand axe de 14.2 UA en tenant compte des satellites actuels, vaut $0.1''/\text{an}$. Dans le chapitre suivant, nous verrons que la constante de précession a pu être plus élevée si Uranus possédait un satellite supplémentaire. Dans le cas d'un satellite dont la masse vaut 1% de celle d'Uranus, cette constante peut atteindre $20''/\text{an}$. Même jusqu'à cette valeur, le lissage est sans effet significatif.

3.4 Evolution de l'axe

3.4.1 Formalisme

Dans cette section, nous allons étudier l'évolution de l'axe d'une planète connaissant le spectre du mouvement de son orbite. Pour ce travail, nous nous plaçons dans le repère lié à l'orbite. Notons \mathbf{w} le vecteur unitaire porté par l'axe de la planète. On note x et y ses coordonnées dans le plan de l'orbite et z sa troisième composante. Soient ψ et $X = \cos \epsilon$ respectivement l'angle de précession et le cosinus de l'obliquité. Les coordonnées de \mathbf{w} sont alors

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - X^2} \sin \psi \\ \sqrt{1 - X^2} \cos \psi \\ X \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

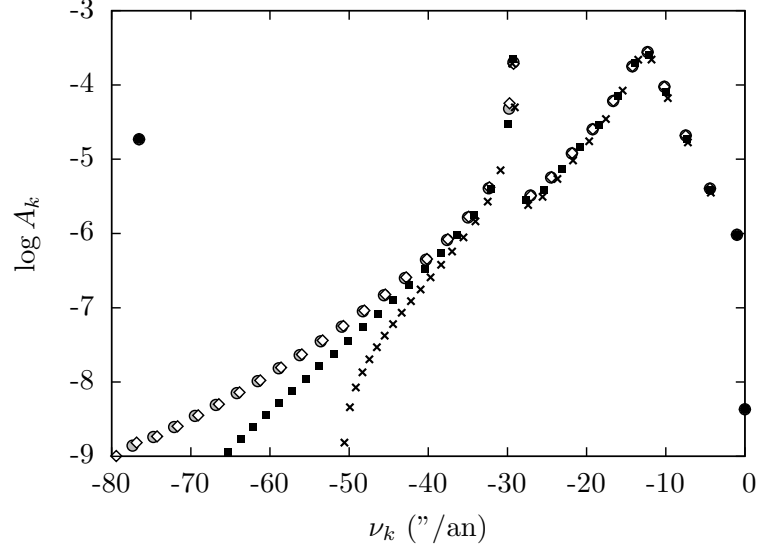


FIGURE 3.7 – Effet de la longueur de lissage sur le spectre du mouvement de l'orbite d'Uranus pour $p = 500$: $r_b = 0$ (cercles gris), $r_b = 0.01$ UA (losanges vides), $r_b = 0.1$ UA (carrés noirs) et $r_b = 0.2$ UA (croix). Tous les termes d'amplitude supérieure à 10^{-9} ont été représentés.

Les variables (ψ, X) sont conjuguées l'une de l'autre, et le hamiltonien qui décrit leur évolution est (Kinoshita, 1977; Laskar & Robutel, 1993; Neron de Surgy & Laskar, 1997)

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{2}X^2 - 2\mathcal{C}(t)X + \sqrt{1 - X^2}[\mathcal{A}(t) \sin \psi + \mathcal{B}(t) \cos \psi], \quad (3.80)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= \frac{2(\dot{q} + p\mathcal{C})}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \\ \mathcal{B}(t) &= \frac{2(\dot{p} - q\mathcal{C})}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \\ \mathcal{C}(t) &= q\dot{p} - p\dot{q}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Les grandeurs p et q sont les parties réelle et imaginaire de la variable complexe définie dans la section précédente

$$q + ip = \sin \frac{i}{2} \exp(i\Omega). \quad (3.82)$$

Les équations d'évolution de l'axe de la planète déduites de \mathcal{H} sont

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = \sqrt{1 - X^2}(-\mathcal{A} \cos \psi + \mathcal{B} \sin \psi), \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = \alpha X - 2\mathcal{C} - \frac{X}{\sqrt{1 - X^2}}(\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Les quantités $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ et $\mathcal{C}(t)$ se calculent à partir du spectre de l'évolution orbitale. Nous supposons l'inclinaison orbitale petite. Dans ces conditions,

$$\mathcal{A} \approx 2\dot{q}, \quad \mathcal{B} \approx 2\dot{p}, \quad \mathcal{C} \approx 0. \quad (3.84)$$

En utilisant

$$q = \sum_k A_k \cos(\nu_k t + \varphi_k), \quad \text{et} \quad p = \sum_k A_k \sin(\nu_k t + \varphi_k), \quad (3.85)$$

le hamiltonien devient

$$\mathcal{H} \approx \frac{\alpha}{2} X^2 + 2\sqrt{1 - X^2} \sum_k A_k \nu_k \cos(\psi + \nu_k t + \varphi_k). \quad (3.86)$$

3.4.2 Simplifications

Dans le cas où il n'y a pas de résonance, la partie temporelle du hamiltonien oscille rapidement. En moyennant, on obtient

$$\langle \mathcal{H} \rangle_t = \frac{\alpha}{2} X^2. \quad (3.87)$$

Dans ce cas, le hamiltonien se résout simplement, l'obliquité reste constante et l'angle de précession croît linéairement avec le temps

$$X(t) = X_0 \quad \text{et} \quad \psi(t) = \psi_0 + \alpha X_0 t. \quad (3.88)$$

Supposons maintenant que le système soit résonant, c'est-à-dire qu'il existe une valeur de k telle que $\psi' = \psi + \nu_k t + \varphi_k$ varie lentement par rapport à ψ . Effectuons alors un changement de variable canonique. Soit $G(\psi, X'; t)$ la fonction génératrice permettant de passer des variables (ψ, X) aux variables (ψ', X') selon

$$\psi' = \frac{\partial G}{\partial X'}, \quad \text{et} \quad X = \frac{\partial G}{\partial \psi}. \quad (3.89)$$

La fonction génératrice s'écrit alors

$$G(\psi, X'; t) = X'(\psi + \nu_k t + \varphi_k). \quad (3.90)$$

On en déduit que $X = X'$. Comme il s'agit d'une transformation dépendante du temps, il faut ajouter au hamiltonien $\partial G / \partial t$. Celui-ci devient

$$\mathcal{H}' = \frac{\alpha}{2} X'^2 + \nu_k X' + 2\sqrt{1 - X'^2} A_k \nu_k \cos \psi' + 2\sqrt{1 - X'^2} \sum_{j \neq k} A_j \nu_j \cos[\psi' + (\nu_j - \nu_k)t + \varphi_j - \varphi_k]. \quad (3.91)$$

Supposons que les fréquences soient suffisamment éloignées les unes des autres, la partie temporelle est alors à nouveau une fonction qui oscille rapidement, et on peut effectuer une nouvelle moyenne pour obtenir

$$\langle \mathcal{H}' \rangle_t = \frac{\alpha}{2} X'^2 + \nu_k X' + 2\sqrt{1 - X'^2} A_k \nu_k \cos \psi'. \quad (3.92)$$

Ce hamiltonien est celui de la toupie de Colombo (Colombo, 1966). Comme le système ne contient qu'un seul degré de liberté, il est intégrable. Les orbites sont données par $\langle \mathcal{H}' \rangle_t(\psi', X') = Cte$. Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= 2\sqrt{1 - X'^2} A_k \nu_k \sin \psi', \\ \dot{\psi}' &= \alpha X' + \nu_k - 2 \frac{X'}{\sqrt{1 - X'^2}} A_k \nu_k \cos \psi'. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Les points fixes (ψ'_c, X'_c) sont obtenus en annulant ces équations. Cela donne

$$\psi'_c = 0 \text{ ou } \pi, \quad \text{et} \quad \alpha X'_c + \nu_k \mp 2 \frac{X'_c}{\sqrt{1 - X'^2}} A_k \nu_k = 0. \quad (3.94)$$

Suivant les valeurs des paramètres ν_k / α et A_k , il existe 2 ou 4 solutions qui correspondent aux états de Cassini. Les états de Cassini numérotés 2 et 4 sont très similaires aux points stable et instable du pendule simple (voir Fig. 3.8). Le premier et le troisième état de Cassini correspondent respectivement

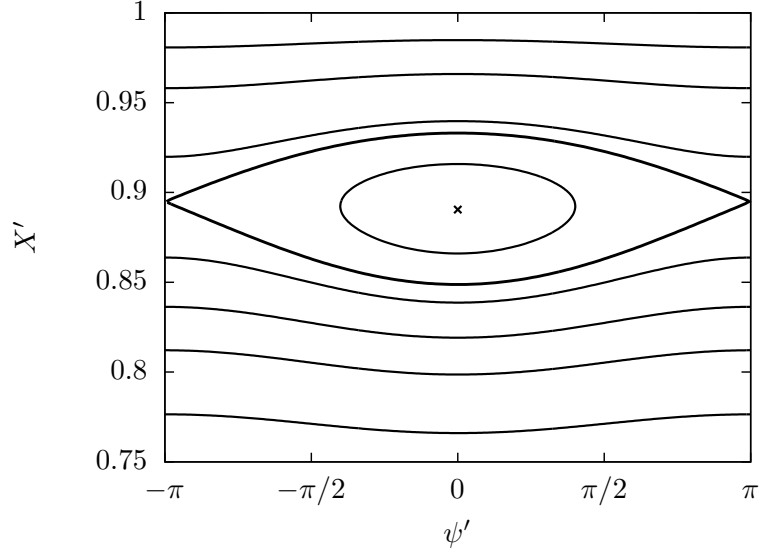


FIGURE 3.8 – Espace des phases du problème de la toupie de Colombo. Le centre de l'île de résonance correspond à l'état de Cassini numéro 2, et le point fixe instable à l'extrémité des séparatrices, l'état de Cassini numéro 4. L'état de Cassini numéro 1 ne se distingue pas sur cette figure, il est très proche de $\psi' = \pm\pi$, $X' = 1$. Les paramètres utilisés pour cette figure sont $\nu_k/\alpha = -0.89$ et $A_k = 5.6 \times 10^{-4}$.

au cas où l'obliquité est proche de 0 et de 180 deg. Ils n'interviennent pas dans l'étude qui nous intéresse.

On suppose que le coefficient A_k est très petit devant 1. C'est effectivement le cas si l'on considère les spectres de la section précédente. Alors les états de Cassini 2 et 4 se situent au voisinage de

$$X'_m = -\frac{\nu_k}{\alpha}, \quad (3.95)$$

respectivement en $\psi' = 0$ et $\psi' = \pm\pi$.

Nous allons maintenant calculer la taille de la zone de libration. Le hamiltonien (3.92) est une fonction paire de ψ' . Cela explique pourquoi les orbites $X'(\psi')$ représentées figure 3.8 sont symétriques par rapport à $\psi' = 0$. On en déduit aussi que la dérivée de X' par rapport à ψ' s'annule en $\psi' = 0$. La largeur de l'île de résonance se calcule donc en $\psi' = 0$. Notons \mathcal{H}'_4 la valeur du hamiltonien au niveau des séparatrices. Les valeurs minimale et maximale de X' sur les séparatrices sont alors données par

$$\mathcal{H}'_4 = \frac{\alpha}{2}X'^2 + \nu_k X' + 2A_k \nu_k \sqrt{1 - X'^2}. \quad (3.96)$$

En se limitant au premier ordre en A_k , on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\frac{\alpha}{2}X'^2 + \nu_k X' - \mathcal{H}'_4 + 2A_k \nu_k \sqrt{1 - \frac{\nu_k^2}{\alpha^2}} = 0. \quad (3.97)$$

On s'est alors ramené à une équation polynomiale du second degré en X' . Les racines sont

$$X'_{\pm} = \frac{1}{\alpha} \left(-\nu_k \pm \sqrt{\nu_k^2 + 2\alpha \mathcal{H}'_4 - 4\alpha A_k \nu_k \sqrt{1 - \frac{\nu_k^2}{\alpha^2}}} \right). \quad (3.98)$$

La taille et le centre de la zone de libration sont donc

$$\Delta_{X'} = X'_+ - X'_- = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\nu_k^2 + 2\alpha\mathcal{H}'_4 - 4\alpha A_k \nu_k \sqrt{1 - \frac{\nu_k^2}{\alpha^2}}}, \quad \text{et} \quad X'_m = \frac{X'_+ + X'_-}{2} = -\frac{\nu_k}{\alpha}. \quad (3.99)$$

Il ne reste plus qu'à calculer la valeur du hamiltonien au niveau des séparatrices. Au premier ordre en A_k , elle est donnée par $\mathcal{H}'_4 \approx \mathcal{H}'(\pi, X'_m)$. En utilisant l'expression du hamiltonien (3.92), cela donne

$$\mathcal{H}'_4 \approx -\frac{1}{2} \frac{\nu_k^2}{\alpha} - 2A_k \nu_k \sqrt{1 - \frac{\nu_k^2}{\alpha^2}}, \quad (3.100)$$

et donc

$$\Delta_{X'} \approx 4 \sqrt{-2A_k \frac{\nu_k}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{\nu_k^2}{\alpha^2}}}. \quad (3.101)$$

Pour rappel, pour qu'il y ait résonance, il faut que ν_k soit négatif. Dans notre approximation, il faut aussi que ν_k/α soit inférieur à 1. Les racines carrées sont donc bien positives. L'application de la formule (3.101) au cas de la figure 3.8 donne $\Delta_{X'} \approx 0.085$, ce qui est effectivement la largeur de l'île de résonance.

3.4.3 Système complet

Maintenant, on oublie les moyennisations, et on considère le hamiltonien complet. Au vue de ce qui vient d'être fait, le système complet est une superposition d'îles de résonance centrées en $X_k = -\nu_k/\alpha$. Le nombre d'îles de résonance est égal au nombre de fréquences orbitales inférieures à la constante de précession en valeur absolue.

Pour déterminer qualitativement les possibilités d'évolution de l'axe de la planète, nous allons utiliser le critère de Chirikov (1979). Si l'espacement entre les îles est supérieur à leur taille, alors celles-ci sont séparées par des zones de circulation dans lesquelles l'obliquité ne varie pas séculairement. En revanche, si la taille des îles est supérieure à leur espacement, c'est-à-dire si les séparatrices de deux îles se croisent, alors il se crée une zone chaotique dans laquelle l'obliquité est susceptible de diffuser. Ce critère est approximatif car entre les îles principales, il se crée des résonances secondaires qui engendrent du chaos plus rapidement que ce qui est donné par le critère de Chirikov. Pour avoir une idée de l'effet des résonances secondaires sur la disparition de la zone de circulation entre deux îles principales, nous avons utilisé le résultat de l'étude numérique d'un pendule simple perturbé dont le hamiltonien est

$$\mathcal{H} = \frac{J_1^2}{2} + J_2 + \alpha [\cos \phi_1 + \cos(\phi_1 + \phi_2)] \quad (3.102)$$

et dont les variables conjuguées sont (J_1, ϕ_1) et (J_2, ϕ_2) . Pour ce système, nous avons obtenu la disparition de la dernière orbite circulante lorsque $\alpha = \rho_c \alpha_c$, avec α_c la valeur critique de α donnée par le critère de Chirikov et $\rho_c \approx 0.22$.

La figure 3.9 donne les tailles des îles de résonance, ainsi que leur espacement. Dans cette figure, nous avons tracé directement l'obliquité ϵ au lieu de la variable $X = \cos \epsilon$ de la figure 3.8. On constate que plus la constante de précession α est élevée, plus il y a d'îles de résonance. Pour chaque valeur de α , les zones de libration principales restent bien séparées. En revanche, en tenant compte du facteur $\rho_c \approx 0.22$ modélisant l'apparition des résonances secondaires, il est possible que du chaos apparaisse pour $\alpha > 16''/\text{an}$ permettant de faire diffuser l'obliquité entre 16 et 55 degrés environ. Pour $\alpha \approx 15''/\text{an}$, les zones de librations sont très proches les unes des autres. Il se peut qu'elles se recouvrent pour des valeurs un peu différentes des demi-grands axes, par exemple. Dans ce cas, on obtiendrait une diffusion possible allant de 0 à quelque 50 degrés. Pour le vérifier, nous avons

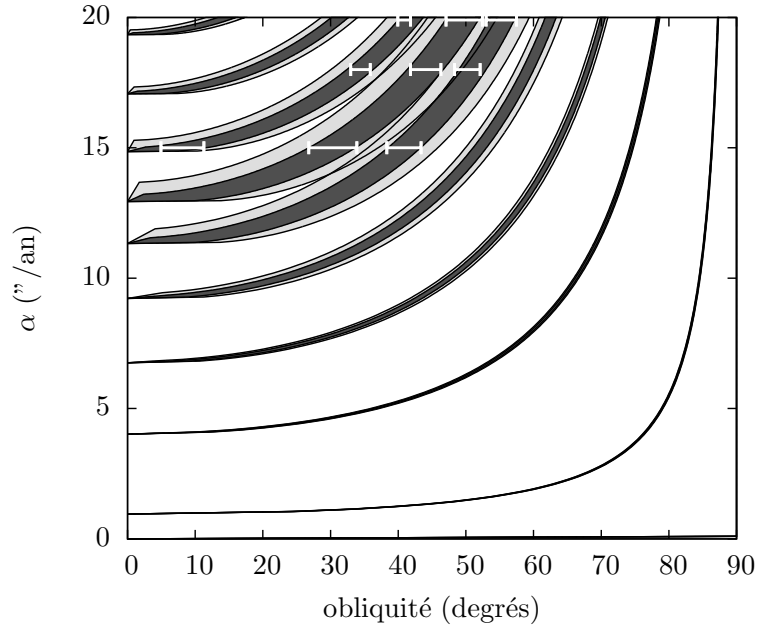


FIGURE 3.9 – Localisation des îles de résonance en fonction de la constante de précession α . Les régions foncées donnent les positions et les largeurs des zones de libration dans la variable $\epsilon = \text{Arccos } X$ (Eq. 3.99, 3.101). Les régions gris claires modélisent l'apparition de résonances secondaires entre les zones de libration principales. Le recouvrement de deux régions grisées marque l'apparition possible de chaos permettant à l'obliquité de diffuser. Les 9 intervalles blancs sont les excursions observées numériquement sur 600 millions d'années pour différentes conditions initiales. Les évolutions de l'obliquité sont en fait confinées dans les régions gris foncées. Le spectre utilisé pour cette figure a été calculé avec 500 couronnes et sans lissage.

effectué 9 intégrations numériques de l'évolution de l'axe d'Uranus (intervalles blancs de la figure 3.9). Ces simulations montrent que le système est en fait bien confiné à l'intérieur des zones de libration principales et qu'il ne diffuse pas. Pour information, les périodes de libration sont comprises entre 5 et 10 millions d'années, le système a donc parcouru les orbites de libration entre 60 et 100 fois dans chaque simulation.

3.5 Cas d'un disque chaud

Dans ce qui précède, nous avons considéré un disque mince initialement confondu avec le plan invariant. Cependant, dans la modélisation de Tsiganis et al. (2005), le disque de planétésimaux est chaud ce qui se traduit au niveau des inclinaisons par $\sin i \sim 0.05$ pour chacun des corps composant ce disque. Il en résulte que le disque n'est pas mince. Pour rendre compte de cette chaleur, nous pourrions reprendre l'étude qui a été faite ici en modifiant uniquement les inclinaisons initiales de chacune des couronnes. Mais cela n'est pas très réaliste car dans un disque réel, à un demi-grand axe donné, les longitudes des nœuds ascendants des corps qui composent le disque sont toutes différentes. La représentation est donc *a priori* meilleure si on modélise le disque chaud non pas par une suite de couronnes très inclinées les unes par rapport aux autres, mais par une suite de "rubans de matière" dont la hauteur est fonction de l'inclinaison moyenne des corps qui le constitue (voir Fig. 3.10).

Considérons alors un système constitué de n rubans concentriques en interaction gravitationnel. Pour tout ruban $k = 1, \dots, n$, notons a_k le demi-grand axe (le rayon du ruban), \mathbf{N}_k le vecteur

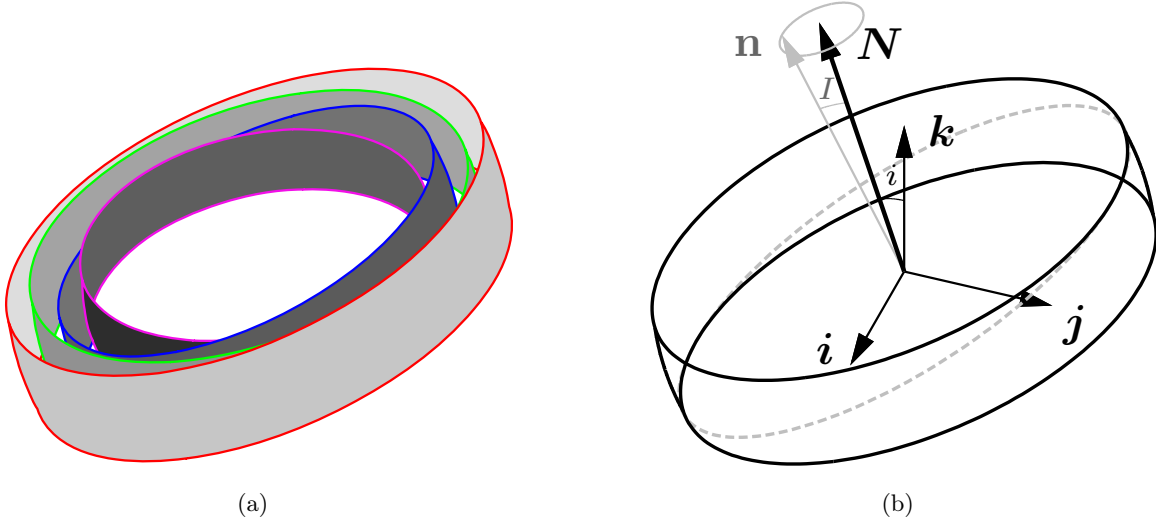


FIGURE 3.10 – Modèle utilisé pour simuler un disque chaud de planétésimaux (les angles ont été exagérés pour une meilleure visualisation). (a) Le disque de planétésimaux est modélisé par une succession de “rubans de matière” dont les axes de symétrie sont libres d’évoluer en fonction des interactions gravitationnelles avec les planètes et avec les autres rubans. (b) Chaque ruban possède un axe de symétrie repéré par son vecteur \mathbf{N} et est caractérisé par sa dispersion en inclinaison I . Ces rubans ont été construits en faisant précesser une orbite d’axe \mathbf{n} (tirets gris) autour de \mathbf{N} . L’angle i entre la normale au plan invariant \mathbf{k} et l’axe du ruban \mathbf{N} représente l’inclinaison du ruban.

normal dirigé selon le moment cinétique du ruban, et I_k la dispersion en inclinaison définissant la hauteur du ruban (I_k est une inclinaison orbitale mesurée par rapport au plan médian du ruban k). Dans l’approximation des faibles inclinaisons, le hamiltonien \mathcal{H}_r régissant l’évolution de ce système s’obtient simplement à partir de celui gouvernant l’évolution d’un système de n couronnes (3.63). En effet, pour l’obtenir il suffit de moyenniser (3.63) sur la rotation des pôles \mathbf{n}_k de chacune des couronnes k autour des normales \mathbf{N}_k des rubans associés. Pour plus de clarté, rappelons l’expression du hamiltonien ² (3.63)

$$\mathcal{H}_b = -\frac{1}{2} \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} C'_3 \left(\frac{a_i}{a_j} \right) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)^2, \quad (3.103)$$

et détaillons le calcul de la moyennisation sur la rotation d’un vecteur \mathbf{n}_k autour du pôle \mathbf{N}_k . La dépendance en \mathbf{n}_k dans le hamiltonien (3.63 ou 3.103) est de la forme $\mathbf{n}_k^t \mathbf{n}_k$. C’est donc $\langle \mathbf{n}_k^t \mathbf{n}_k \rangle$ que l’on doit calculer. Or, dans un repère où \mathbf{N}_k est le troisième vecteur, les coordonnées de \mathbf{n}_k s’écrivent de la façon suivante

$$\mathbf{n}_k = \begin{pmatrix} \sin I_k \cos \Omega_k \\ \sin I_k \sin \Omega_k \\ \cos I_k \end{pmatrix}_{(_, _, \mathbf{N}_k)} \quad (3.104)$$

où Ω_k est un angle de précession de la couronne k défini par rapport à une origine quelconque. On en déduit

$$\mathbf{n}_k^t \mathbf{n}_k = \begin{pmatrix} \sin^2 I_k \cos^2 \Omega_k & \sin^2 I_k \cos \Omega_k \sin \Omega_k & \cos I_k \sin I_k \cos \Omega_k \\ \sin^2 I_k \cos \Omega_k \sin \Omega_k & \sin^2 I_k \sin^2 \Omega_k & \cos I_k \sin I_k \sin \Omega_k \\ \cos I_k \sin I_k \cos \Omega_k & \cos I_k \sin I_k \sin \Omega_k & \cos^2 I_k \end{pmatrix}_{(_, _, \mathbf{N}_k)}. \quad (3.105)$$

2. Ce hamiltonien correspond au cas d’un potentiel lissé. On passe au potentiel non lissé en remplaçant la fonction C'_3 par la fonction analogue sans le prime C_3 (voir section 3.2.2).

La moyenne se fait alors en intégrant Ω_k entre 0 et 2π , et on obtient

$$\langle \mathbf{n}_k^t \mathbf{n}_k \rangle_{\Omega_k} = \frac{1}{2} (\sin^2 I_k) Id + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I_k \right) \mathbf{N}_k^t \mathbf{N}_k. \quad (3.106)$$

Le terme contenant l'identité engendre un terme constant dans le hamiltonien moyen, nous l'oublions. En remplaçant tous les termes de la forme $\mathbf{n}_k^t \mathbf{n}_k$ dans (3.103) par leur expression moyenne, on obtient le hamiltonien associé au système des n rubans

$$\mathcal{H}_r = -\frac{1}{2} \sum_{0 < i < j \leq n} \frac{\mathcal{G} m'_i m'_j}{a_j} C'_3 \left(\frac{a_i}{a_j} \right) (\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j)^2, \quad (3.107)$$

avec pour tout $k = 1, \dots, n$

$$m'_k = \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 I_k \right) m_k. \quad (3.108)$$

Il s'agit du même hamiltonien que celui qui régit l'évolution des couronnes à ceci près que les masses doivent être corrigées par un facteur $1 - (3/2) \sin^2 I_k$. Il n'est donc pas nécessaire de refaire l'étude sur l'évolution de l'axe d'Uranus. Les nouvelles masses effectives étant plus faibles, les interactions sont atténuées et les îles de résonance plus étroites. Selon cette approche, l'obliquité d'Uranus est donc encore plus confinée, et le basculement plus difficile.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la possibilité de basculer Uranus durant la phase intermigration. Nous avons regardé dans un premier temps l'effet du disque sur la constante de précession et avons conclu que celui-ci est négligeable lorsqu'on se place dans les conditions initiales du modèle de Nice. Dans un second temps, nous avons modélisé l'évolution à long terme d'un disque froid de planétésimaux soumis aux interactions séculaires de planètes. Sous réserve que ce modèle décrive bien la réalité, nous avons montré que les perturbations engendrées sur l'orbite d'Uranus ne sont pas suffisantes pour modifier de façon significative son obliquité. Enfin, nous avons montré que ces perturbations sont encore plus faibles si le disque de planétésimaux est chaud.

Chapitre 4

Basculement durant la phase de migration

4.1 Contrainte sur l'inclinaison

La possibilité de basculer une planète par interaction séculaire dépend de plusieurs paramètres. 1) Le premier est la constante de précession, notée α . Plus celle-ci est élevée, plus vite le basculement peut avoir lieu. Aujourd'hui cette valeur est très faible pour Uranus. La période correspondante à obliquité nulle $P_0 = 2\pi/\alpha$ vaut 29 millions d'années. 2) Ensuite, même avec un fort taux de précession, il se peut que l'obliquité n'évolue pas du tout. Cela dépend des fréquences séculaires du système planétaire. En effet, l'obliquité ne varie significativement que si il y a une résonance entre les précessions de l'axe de la planète et de son orbite. Il faut aussi que la fréquence orbitale, qui est en résonance, évolue ou bien soit dans une zone chaotique. Dans le chapitre précédent, nous avons analysé l'effet d'un disque sur ces deux paramètres. 3) Dans cette section, nous allons ajouter une nouvelle contrainte donnée par l'inclinaison de l'orbite de la planète. Cette contrainte a été utilisée pour l'étude du basculement de Saturne (Boué et al., 2009).

4.1.1 Système étudié

Le système étudié ici est composé d'une planète aplatie orbitant autour d'une étoile. On suppose que le système n'est pas isolé et que d'autres corps perturbent le mouvement orbital de la planète. Par hypothèse, seule l'étoile agit sur l'aplatissement de la planète. L'effet d'éventuels satellites autour de la planète sont implicitement pris en compte dans la constante de précession. Ce genre d'approximations s'applique parfaitement aux planètes du système solaire.

Soient \mathbf{w} et \mathbf{n} les vecteurs unitaires dans la direction des moments cinétiques de la planète et de son orbite, respectivement. Soit α la constante de précession de la planète. L'équation du mouvement du vecteur \mathbf{w} dans un repère fixe est

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})\mathbf{n} \wedge \mathbf{w}. \quad (4.1)$$

Dans cette équation, \mathbf{n} et α sont des fonctions du temps qui dépendent des perturbations créées par les autres corps. Dans le cas général, cette équation n'est pas intégrable. Cela dépend de la façon dont \mathbf{n} varie. Les variations de α peuvent être absorbées par un changement de l'échelle des temps

$$d\ell = \alpha dt. \quad (4.2)$$

Comme cette équation n'est pas intégrable dans le cas général, nous n'allons pas chercher à la résoudre. A la place, nous allons chercher une majoration de l'obliquité à tout instant. Tant que cette obliquité

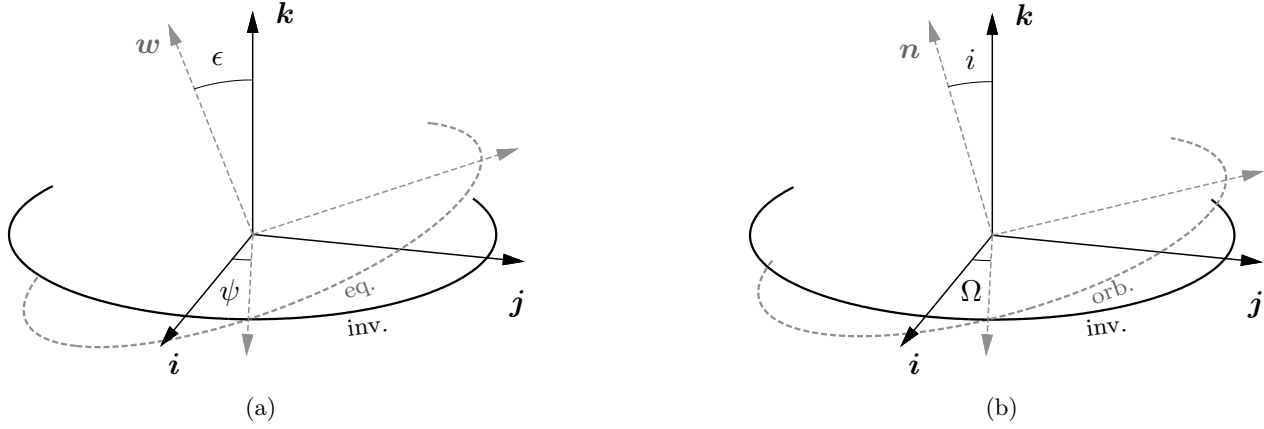


FIGURE 4.1 – Le pôle de la planète w (a), et celui de l'orbite n (b) sont repérés par rapport à un plan invariant associé au repère (i, j, k) . Les angles ψ et ϵ sont respectivement la longitude et l'obliquité de l'axe de la planète. Les angles Ω et i sont respectivement la longitude et l'inclinaison du plan orbital de la planète.

maximale ne dépassera pas une certaine valeur, nous serons sûrs que l'obliquité de la planète n'aura pas dépassé cette même valeur pendant le laps de temps considéré.

L'orbite de la planète pouvant être sujette à des fortes variations de son inclinaison, nous repérerons l'obliquité par rapport à un plan fixe et non par rapport à son orbite. Par hypothèse, nous supposons qu'après un temps caractéristique donné, les perturbations sur l'orbite de la planète sont suffisamment faibles pour que l'inclinaison reste constante. Nous supposons de plus que l'inclinaison finale est petite devant l'obliquité pour que les deux définitions de l'obliquité coïncident en ordre de grandeur.

4.1.2 Evolution maximale

Soient ψ et Ω les longitudes des nœuds ascendants de l'équateur de la planète et de l'orbite par rapport à une direction fixe du plan invariant, et ϵ et i , l'obliquité et l'inclinaison de la planète mesurées par rapport à ce plan invariant. Les coordonnées de w et n dans le repère fixe (i, j, k) sont alors (voir Fig. 4.1)

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sin \epsilon \sin \psi \\ -\sin \epsilon \cos \psi \\ \cos \epsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin i \sin \Omega \\ -\sin i \cos \Omega \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

L'évolution de l'obliquité s'obtient à partir de (4.1) de la façon suivante

$$\frac{d \cos \epsilon}{dt} = \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{n} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{k}, \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= \sin \epsilon \sin i \cos(\psi - \Omega) + \cos \epsilon \cos i, \\ (\mathbf{n} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{k} &= -\sin \epsilon \sin i \sin(\psi - \Omega). \end{aligned} \quad (4.5)$$

On en déduit alors

$$\frac{d \cos \epsilon}{dt} = \alpha \sin \epsilon \cos \epsilon \sin i \cos i [1 + h(\epsilon, i) \cos(\psi - \Omega)] \sin(\psi - \Omega) \quad (4.6)$$

où $h(\epsilon, i) = \tan \epsilon \tan i$ peut varier de 0 à $\pm\infty$ suivant la valeur de l'obliquité ou de l'inclinaison. La variation de l'obliquité dépend des paramètres orbitaux : la longitude du nœud ascendant, l'inclinaison,

mais aussi le demi-grand axe et l'excentricité par l'intermédiaire de α . Pour rappel (Boué & Laskar, 2006),

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_0(C-A)}{Ga^3(1-e^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J\right), \quad (4.7)$$

avec \mathcal{G} , m_0 , A , C , G , a , e , et J , respectivement la constante de gravitation, la masse du corps central, les moments d'inertie équatorial et polaire, le moment cinétique de rotation de la planète, son demi-grand axe, son excentricité et l'angle, supposé très faible, que fait le moment cinétique de la planète avec son axe de figure. La variation de l'obliquité dépend aussi des coordonnées de l'axe données par ψ et ϵ . Simplifions l'expression en effectuant le changement de l'échelle des temps (4.2). Il vient

$$\frac{d \cos \epsilon}{d\ell} = \sin \epsilon \cos \epsilon \sin i \cos i [1 + h(\epsilon, i) \cos(\psi - \Omega)] \sin(\psi - \Omega). \quad (4.8)$$

Cette expression montre que parmi les éléments orbitaux, seules l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant jouent un rôle sur la façon dont évolue l'obliquité.

Dans la suite, nous nous plaçons à un instant donné et recherchons l'expression de Ω qui maximise l'évolution de l'obliquité. Tout d'abord, il est intéressant de noter que le signe de (4.8) peut être modifié par la transformation

$$\Omega \longrightarrow 2\psi - \Omega. \quad (4.9)$$

Ainsi, nous ne nous intéresserons qu'à la valeur absolue de l'évolution de l'obliquité. Celle-ci s'écrit

$$\left| \frac{d \cos \epsilon}{d\ell} \right| = |\sin \epsilon \cos \epsilon \sin i \cos i| \sqrt{f[\cos(\psi - \Omega)]} \quad (4.10)$$

avec f , la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = (1 + hx)^2(1 - x^2) \quad (4.11)$$

et où $h = h(\epsilon, i)$. Maximiser (4.8) par rapport à Ω revient alors à maximiser f par rapport à x . Il suffit ensuite de choisir $\Omega = \pm(\psi - \text{Arccos } x)$. La dérivée de f par rapport à x s'écrit

$$f'(x) = 2(1 + hx) [h(1 - x^2) - x(1 + hx)]. \quad (4.12)$$

Elle s'annule en

$$x_0 = -1/h, \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8h^2}}{4h}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8h^2}}{4h}. \quad (4.13)$$

L'étude des variations de f à h fixé montre f définie sur $[-1, 1]$ atteint toujours son maximum en x_2 . En ce point, $f(x_2)$ vaut

$$f(x_2) = \frac{1}{8} \frac{(3 + \sqrt{1 + 8h^2})^3}{1 + \sqrt{1 + 8h^2}}. \quad (4.14)$$

En injectant ce résultat dans (4.8), on obtient

$$\left| \frac{d \cos \epsilon}{d\ell} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{16} |\cos \epsilon \sin \epsilon \sin 2i| \frac{(3 + \sqrt{1 + 8h^2})^{3/2}}{(1 + \sqrt{1 + 8h^2})^{1/2}}. \quad (4.15)$$

On en déduit alors que l'évolution de l'obliquité maximale ϵ_m est donnée par

$$\frac{d \cos \epsilon_m}{d\ell} = -\frac{\sqrt{2}}{16} |\cos \epsilon_m \sin \epsilon_m \sin 2i| \frac{(3 + \sqrt{1 + 8h^2})^{3/2}}{(1 + \sqrt{1 + 8h^2})^{1/2}}, \quad (4.16)$$

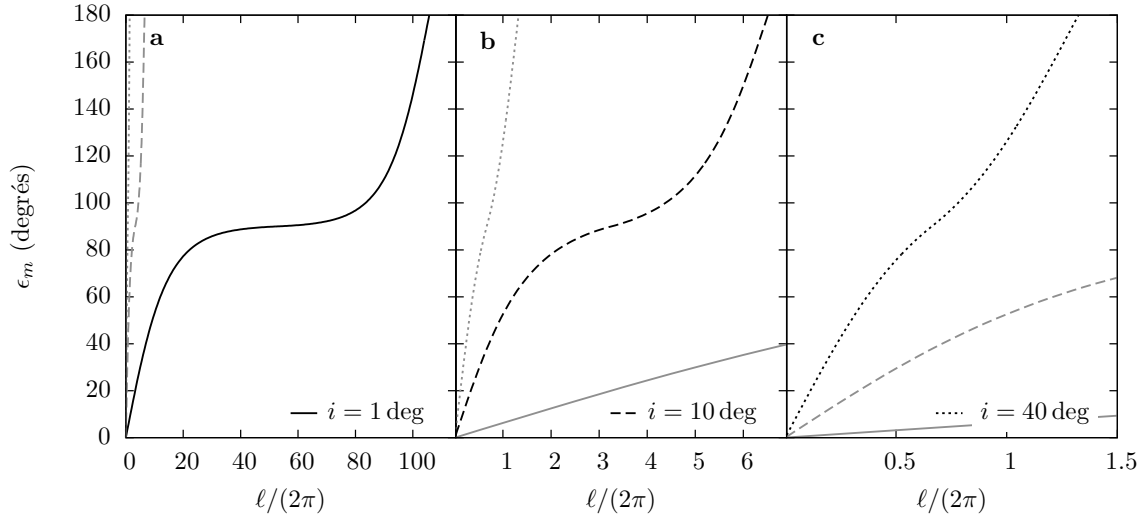


FIGURE 4.2 – Obliquité maximale en fonction du temps pour différentes valeurs de l’inclinaison. $\ell/(2\pi)$ représente le temps en période de précession à obliquité nulle. Ces évolutions ont été obtenues en intégrant l’équation (4.17) pour des inclinaisons constantes valant 1 deg (a), 10 deg (b) et 40 deg (c). On peut noter les échelles de temps très différentes d’une figure à l’autre. Pour le visualiser, les trois évolutions ont été tracées à chaque fois dans chacune des sous-figures.

avec $h = h(\epsilon_m, i)$. Ou de façon équivalente

$$\frac{d\epsilon_m}{d\ell} = \frac{\sqrt{2}}{16} |\cos \epsilon_m \sin 2i| \frac{(3 + \sqrt{1 + 8h^2})^{3/2}}{(1 + \sqrt{1 + 8h^2})^{1/2}}. \quad (4.17)$$

La dépendance en ℓ dans le second membre se fait par l’intermédiaire de l’inclinaison orbitale i .

La figure 4.2 montre les évolutions de l’obliquité maximale pour différentes valeurs de l’inclinaison supposée constante. Lorsque l’inclinaison est faible, de l’ordre de 1 degré, l’évolution maximale présente un palier vers $\epsilon_m = 90$ deg. Il faut alors au minimum environ 80 périodes de précession pour atteindre l’obliquité actuelle d’Uranus. En revanche, plus l’inclinaison augmente, plus le palier diminue, et plus la pente augmente. Pour $i = 10$ deg, il ne faut plus que 4 périodes de précession. Pour $i = 40$ deg, il est même possible que la planète bascule en moins d’une période de précession si la longitude de l’orbite varie de façon optimale.

Ces différents comportements se comprennent à partir de l’équation d’évolution (4.17). En effet, au début de l’évolution, lorsque l’obliquité est faible, ou plus exactement lorsque $\epsilon_m \ll |\pi/2 - i|$, le terme $h(\epsilon_m, i)$ est très petit devant 1 et l’équation (4.17) devient

$$\frac{d\epsilon_m}{d\ell} \approx \frac{1}{2} \cos \epsilon_m \sin 2i. \quad (4.18)$$

Dans cette équation, la valeur absolue est omise car par hypothèse ϵ_m est très petit et on se place dans le cas où l’inclinaison ne dépasse pas 45 deg. D’après cette équation, la pente à l’origine est approximativement égale à l’inclinaison. C’est effectivement ce que l’on observe dans la figure 4.2. Au voisinage de $\epsilon_m = \pi/2$ en revanche, ou plus exactement lorsque $|\epsilon_m - \pi/2| \ll i$, le terme $h(\epsilon_m, i)$ devient arbitrairement grand et (4.17) s’écrit

$$\frac{d\epsilon_m}{d\ell} \approx \frac{1}{2} \sin \epsilon_m \sin^2 i. \quad (4.19)$$

La pente est donc approximativement égale à $i^2/2$, ce qui explique le plateau d’autant plus prononcé que l’inclinaison est faible.

4.1.3 Conclusion

L'étude faite ici montre qu'il est plus facile de basculer une planète (i.e. le basculement peut être plus rapide) lorsque l'inclinaison orbitale de cette planète est élevée. Par exemple, Uranus dont la période de précession à obliquité nulle vaut 29 millions d'années, ne peut pas basculer en moins de 2.4 milliards d'années (80×29 millions d'années) si l'inclinaison de son orbite reste inférieure à 1 degré. De plus, il faut noter que la contrainte porte sur l'obliquité maximale qui n'est atteinte que si la précession de l'orbite reste en résonance avec l'axe. Donc en pratique, le temps nécessaire pour le basculement est strictement supérieur à cette valeur. De cette façon, on voit que l'inclinaison joue un rôle fondamental.

Si l'on ne considère que les quatre planètes géantes du système solaire, alors au premier ordre les mouvements de précession orbitale ne sont des combinaisons que de quatre fréquences propres dont une qui est nulle. Actuellement les périodes associées à ces modes fondamentaux de fréquence non nulle valent 1.87×10^6 ans, 431×10^3 ans et 49.2×10^3 ans. Ces périodes sont beaucoup plus courtes que les 29 millions d'années correspondant à la constante de précession d'Uranus. Si un terme résonant existe dans la décomposition en fréquences du mouvement orbital d'Uranus, alors il est une combinaison d'ordre élevé des fréquences principales, et son amplitude est faible. Il semble très peu probable qu'une résonance que l'on n'observe plus aujourd'hui ait duré plus de 2.4 milliards d'années avec une amplitude d'au moins 1 degré. Si le basculement est séculaire, alors soit l'inclinaison, soit la constante de précession, soit les deux, étaient plus élevées dans le passé, par exemple pendant la phase de migration.

4.2 Effet des rencontres proches sur l'inclinaison

Comme nous l'avons vu à la section 1.3.4, Brunini (2006a,b) a cherché à expliquer l'origine de la forte obliquité d'Uranus à partir de rencontres proches qui ont pu se produire dans une phase précoce de l'histoire du système solaire. Mais suite à la rétractation de Brunini, Lee et al. (2007) ont montré que les rencontres proches entre planètes ne permettent pas de modifier de façon significative leur obliquité. Cela est dû à la très lente évolution des axes de rotation des planètes comparée à la durée des rencontres proches. Cependant, les rencontres proches peuvent avoir agi de manière indirecte sur le basculement d'Uranus. En effet, nous avons vu dans la section 4.1 qu'il est nécessaire qu'une planète ait une forte inclinaison pour que le basculement puisse avoir lieu rapidement. Nous allons voir ici que les rencontres proches permettent d'engendrer de fortes inclinaisons.

4.2.1 Modèle d'Öpik

L'évolution des paramètres orbitaux suite à une rencontre proche a été étudiée par Öpik (1976). Le système considéré était composé d'un corps central, comme le soleil, d'une planète et d'une particule qui ne modifie pas l'orbite de la planète et dont on suit l'évolution. La méthode d'Öpik (1976) repose sur trois hypothèses qui sont

hypothèse 1. La rencontre est bien modélisée par un problème à deux corps. Durant cette phase, l'effet du corps central peut être négligé.

hypothèse 2. Cette hypothèse concerne le calcul de la vitesse de la particule au minimum de distance avec la planète. Pour cela, il faut considérer un corps évoluant sur une orbite képlérienne non perturbée, de même excentricité que celle de la particule, mais orientée de sorte à intersecter l'orbite de la planète. La vitesse cherchée est alors celle du corps au point d'intersection de son orbite avec celle de la planète.

hypothèse 3. En dehors de la zone de déflexion, la planète n'a aucun effet sur l'évolution de la particule qui suit alors une orbite képlérienne autour du soleil.

A ces trois hypothèses, Greenberg et al. (1988) en rajoutent une autre qui est implicite dans le travail d'Öpik (1976)

hypothèse 1b. Les parties asymptotiques de la trajectoire hyperbolique de la particule autour de la planète sont contenues dans la sphère d'influence de la planète, c'est-à-dire là où l'approximation à deux corps est valide.

En comparant avec des intégrations numériques du problème à trois corps, Greenberg et al. (1988) ont montré que le modèle d'Öpik (1976) donne de bons résultats dès lors que l'orbite de la particule croise celle de la planète avec un angle non nul. Inversement, si les orbites sont tangentes alors la seconde hypothèse est mise en défaut. La raison invoquée par Greenberg et al. (1988) est qu'il y a de nombreuses orientations de l'orbite qui amènent à une intersection avec la planète et par suite, la vitesse de la particule au minimum d'approche est mal déterminée. Sinon, dans le cas d'une faible vitesse d'approche, la particule reste un moment à l'endroit où l'interaction du soleil est comparable à celle de la planète, et l'hypothèse trois n'est pas vérifiée. Mais Greenberg et al. (1988) montrent que la déflexion se modélise toujours bien avec un problème à deux corps. Il faut alors pouvoir prendre en compte les effets à distance pour savoir d'où vient la particule qui va subir la rencontre proche.

4.2.2 Système étudié

Le problème que l'on étudie ici est proche de celui d'Öpik (1976). La différence est que la particule est remplacée par une autre planète. En effet, notre système est composé du soleil de masse m_0 et de deux planètes de masse m_1 et m_2 , respectivement Jupiter ou Saturne, et Uranus. La principale difficulté avec le modèle d'Öpik (1976) est, comme nous l'avons vu, la détermination des conditions initiales pour le calcul de la trajectoire hyperbolique qui engendre la déflexion. Par conséquent, nous ne chercherons pas à déterminer de façon précise ces conditions initiales à partir des trajectoires des deux planètes. Notons a_k le demi-grand axe de la planète k et $\mu_k = \mathcal{G}(m_0 + m_k)$. Si les orbites sont képlériennes alors les normes des vitesses se déduisent de l'expression de l'énergie

$$\frac{1}{2}v_k^2 - \frac{\mu_k}{r_k} = -\frac{\mu_k}{2a_k}, \quad (4.20)$$

où r_k est la distance héliocentrique. D'où

$$v_k = \sqrt{2\mu_k \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{2a_k} \right)}. \quad (4.21)$$

Dans la suite, r_d est la distance de la rencontre proche par rapport au soleil (Fig. 4.3). A la rencontre proche, on a donc $r_1 = r_2 = r_d$. Comme les masses des planètes sont très faibles devant celle du soleil, $\mu_1 \approx \mu_2$. D'après (4.21), c'est donc la planète qui a le plus grand demi-grand axe qui a la vitesse la plus grande (ici la planète de masse m_2). Pour la suite des calculs, nous supposons qu'au moment de la rencontre proche

1. les vitesses \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont colinéaires au plan de référence (par rapport auquel les inclinaisons sont mesurées),
2. les normes v_1 et v_2 des vitesses sont données par (4.21).

Il s'agit bien évidemment d'une approximation, mais étant données les limites du modèle d'Öpik (1976), nous ne chercherons pas à aller plus loin. Cela rendrait la lecture plus compliquées pour un résultat pas significativement différent.

Soient \mathbf{r}_G et \mathbf{v}_G la position et la vitesse du barycentre des deux planètes par rapport au soleil. On définit le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tel que \mathbf{i} soit selon $-\mathbf{r}_G$ et tel que \mathbf{k} soit aligné avec $\mathbf{r}_G \wedge \mathbf{v}_G$. Le vecteur \mathbf{j} est donné par $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$. Par hypothèse, les coordonnées des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

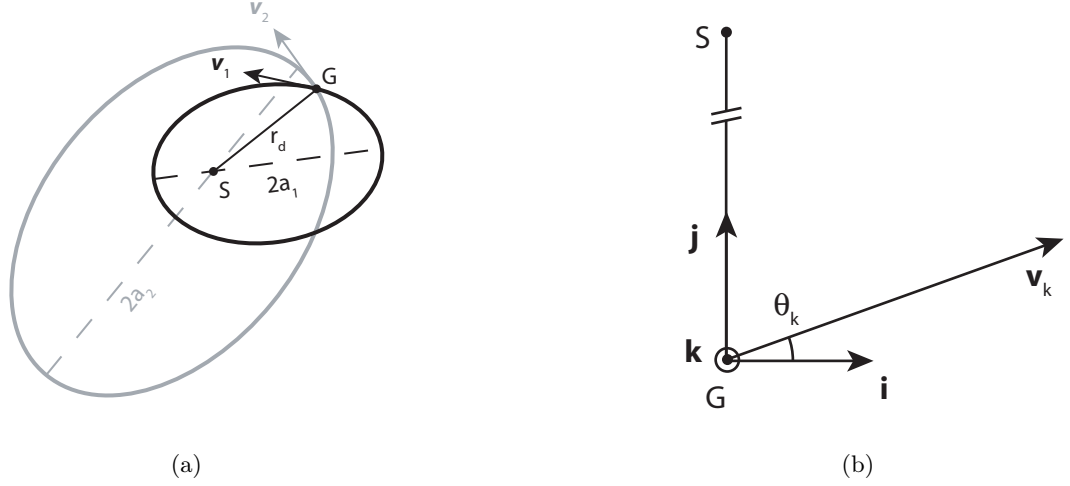


FIGURE 4.3 – Configuration du système autour de la rencontre proche. Deux planètes, sur des orbites elliptiques de demi-grands axes a_1 et a_2 subissent une rencontre proche lorsqu'elle passe à une distance r_d du Soleil S . A cet instant, leurs vitesses respectives sont \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 (a). Pour chacune des planètes, le vecteur vitesse \mathbf{v}_k correspondant est repéré par un angle θ_k (b).

sont

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = v_2 \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

avec θ_1 et θ_2 deux angles pouvant varier de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Au delà de cet intervalle, les planètes auraient un mouvement rétrograde, ce qui est exclu ici. On en déduit l'expression de la vitesse du barycentre \mathbf{v}_G et la vitesse relative $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \theta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 \cos \theta_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \sin \theta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 \sin \theta_2 \right) \mathbf{j} \\ \mathbf{v} &= (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} + (v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2.3 Déflexion

Soit $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ le repère tel que \mathbf{I} soit dans la direction de \mathbf{v} et telle que (\mathbf{I}, \mathbf{J}) soit le plan dans lequel s'effectue la déflexion (Fig. 4.4). Par construction, \mathbf{I} est dans le plan (\mathbf{i}, \mathbf{j}) . On note χ l'angle que fait \mathbf{I} avec \mathbf{i} . A partir des coordonnées de \mathbf{v} (4.23), on déduit

$$\cos \chi = \frac{v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1}{v}, \quad \sin \chi = \frac{v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1}{v}. \quad (4.24)$$

On note γ l'inclinaison du plan de diffusion, i.e. $\cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{K}$. Soit φ l'angle de diffusion, la formule de Rutherford (1911) s'écrit

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{bv^2} \quad (4.25)$$

avec b le paramètre d'impact. On note \mathbf{v}' la vitesse relative à la sortie de la rencontre proche. Ses coordonnées dans le repère $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ sont

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v \cos \varphi \\ v \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Exprimées dans le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ de départ, cela donne

$$\mathbf{v}' = v \mathcal{R}_3(\chi) \mathcal{R}_1(\gamma) \mathcal{R}_3(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

soit

$$\mathbf{v}' = v \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \varphi - \sin \chi \cos \gamma \sin \varphi \\ \sin \chi \cos \varphi + \cos \chi \cos \gamma \sin \varphi \\ \sin \gamma \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Les vecteurs vitesses de chaque planète après la rencontre proche se déduisent de

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}', \\ \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ce qui donne pour la seconde planète, celle qui nous intéresse,

$$\begin{aligned} v'_{2x} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \theta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) \cos \varphi - (v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1) \cos \gamma \cos \varphi \right], \\ v'_{2y} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \sin \theta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(v_2 \sin \theta_2 - v_1 \sin \theta_1) \cos \varphi + (v_2 \cos \theta_2 - v_1 \cos \theta_1) \cos \gamma \sin \varphi \right], \\ v'_{2z} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \sin \gamma \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Pour obtenir cette expression, les cosinus et sinus de l'angle χ ont été remplacés par leur définition (4.24). La norme de la vitesse relative \mathbf{v} qui intervient dans cette expression s'écrit

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (4.31)$$

L'inclinaison après la rencontre proche est donnée par

$$\tan i'_2 = \left| \frac{v'_{2z}}{v'_{2x}} \right|. \quad (4.32)$$

Si le plan de déflexion est confondu avec le plan de référence ($\gamma = 0$), alors l'inclinaison n'est pas modifiée. En revanche, si $\gamma = \pi/2$ alors la troisième composante de v'_2 est maximale. Nous nous placerons dans ce cas pour faire les applications numériques. Pour $\gamma = \pi/2$, l'inclinaison finale devient

$$\tan i'_2 = \left| \frac{v \sin \varphi}{v_1 \cos \theta_1 (1 - \cos \varphi) + v_2 \cos \theta_2 (\rho_m + \cos \varphi)} \right|, \quad (4.33)$$

avec $\rho_m = m_2/m_1$.

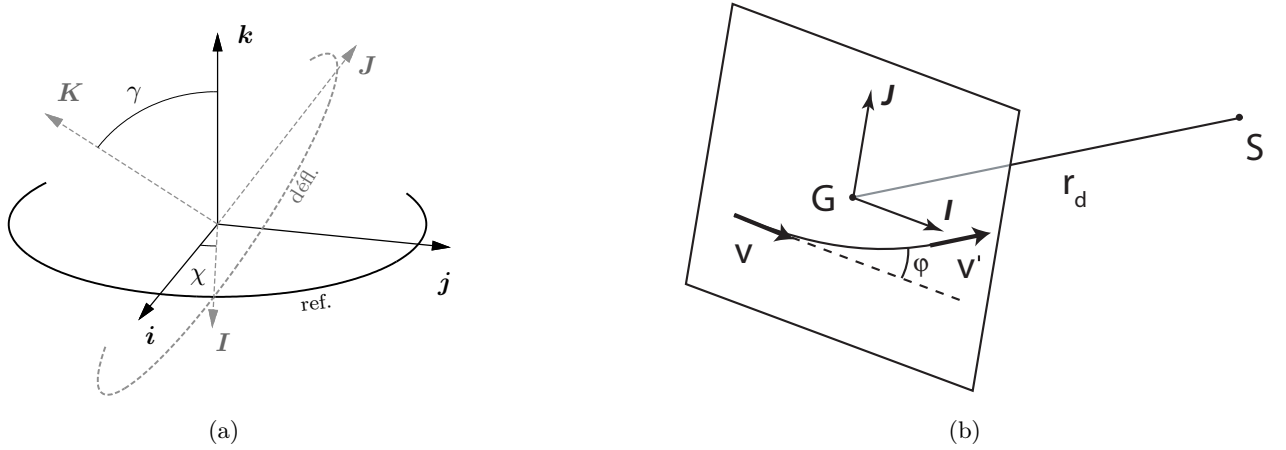


FIGURE 4.4 – Orientation du plan de déflexion par rapport au plan de référence (a). Le soleil se situe dans la direction \mathbf{j} et le vecteur vitesse relative \mathbf{v} est initialement aligné avec \mathbf{I} . L'angle χ est l'angle entre \mathbf{i} et \mathbf{I} . Le plan (\mathbf{I}, \mathbf{J}) où se fait la déflexion est incliné d'un angle γ par rapport au plan de référence. Evolution de la vitesse relative dans le plan de diffusion (b). La vitesse relative initiale notée \mathbf{v} est parallèle au vecteur \mathbf{I} . Après la déflexion d'angle φ , la vitesse finale est notée \mathbf{v}' .

4.2.4 Distance minimale d'approche

L'angle de diffusion φ est exprimé en fonction du paramètre d'impact b (4.25). Il est intéressant de l'exprimer en fonction de la distance minimale d'approche r_m . Celle-ci se déduit de la conservation du moment cinétique et de l'énergie. En effet, la conservation du moment cinétique donne

$$\beta b v = \beta r_m v_m, \quad (4.34)$$

avec $\beta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Le membre de gauche est l'expression du moment cinétique "à l'infini". Le membre de droite, l'expression au rayon minimal et à la vitesse maximale. D'autre part, la conservation de l'énergie permet d'écrire

$$\frac{1}{2} \beta v^2 = \frac{1}{2} \beta v_m^2 - \frac{\mu \beta}{r_m}, \quad (4.35)$$

avec $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$. De ces deux égalités, on obtient

$$r_m = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2 + 1} - \frac{1}{2} \tan \frac{\varphi}{2} \right) b \quad (4.36)$$

4.2.5 Variation d'inclinaison

A partir des expressions (4.25), (4.33) et (4.36), il est possible de paramétrer l'inclinaison i'_2 et la distance minimale d'approche r_m par l'angle de diffusion φ . C'est ce qui a été utilisé pour tracer l'évolution de l'inclinaison finale en fonction de la distance minimale d'approche (Fig. 4.5).

Les directions θ_1 et θ_2 des vitesses des deux planètes (Fig. 4.3b) étant données, la figure 4.5 montre que l'inclinaison finale passe par un maximum pouvant dépasser 20 deg pour $r_m \lesssim 0.02$ UA puis décroît lentement vers des valeurs allant de 1 à 5 deg environ pour $r_m = 0.2$ UA. Pour $\theta_2 = -\theta_1$ variant de 0 à 45 deg, l'inclinaison finale après une rencontre proche avec Jupiter peut atteindre des valeurs allant de 8 deg à 13.5 deg lorsque $r_m = 0.05$ UA. A cette même distance minimale, l'inclinaison varie entre 4.5 deg et 10 deg après une rencontre avec Saturne.

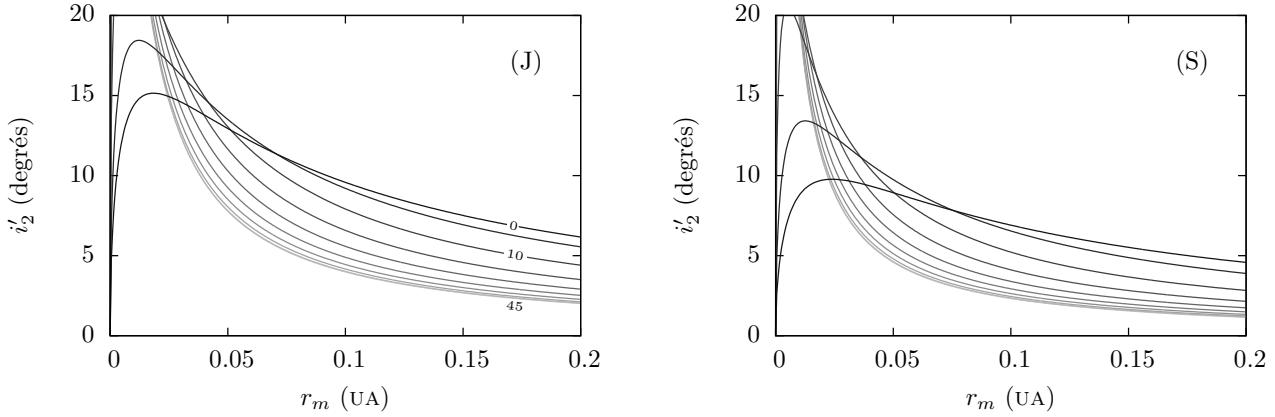


FIGURE 4.5 – Inclinaison maximale d’Uranus suite à une rencontre proche avec Jupiter (J) ou Saturne (S), en fonction de la distance minimale d’approche r_m . Les différentes courbes correspondent à différentes orientations des vecteurs vitesses des deux planètes dans le plan de référence: $\theta_2 = -\theta_1$ varie de 0 à 45 deg tous les 5 deg (de la courbe la plus foncée à la courbe la plus claire). Les courbes correspondant à $\theta_2 = 0, 10$ et 45 deg sont indiquées dans la figure associée à Jupiter. L’inclinaison initiale est supposée nulle. Les paramètres utilisés pour cette figure sont $a_2 = 14$ UA quelque soit la rencontre; $a_1 = 5.35$ UA et $r_d = 5.4$ UA soit $v = 3.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la rencontre avec Jupiter; $a_1 = 8.5$ UA et $r_d = 9$ UA soit $v = 1.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la rencontre avec Saturne. Pour information, les tailles typiques Δ_r des zones d’influences sont de 0.54 UA et 0.62 UA respectivement pour Jupiter et Saturne.

Ces valeurs ont un sens si l’effet du soleil peut être négligé. Les tailles typiques des sphères d’influences de Jupiter et de Saturne s’écrivent

$$\Delta_r = r_d \left(\frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \right)^{1/3}, \quad (4.37)$$

avec r_d la distance de la rencontre au soleil. Cela correspond au rayon de Hill à un facteur $3^{-1/3}$ près (Henon & Petit, 1986; Gladman, 1993). Cette expression donne 0.54 UA et 0.62 UA respectivement pour Jupiter et Saturne. Ces valeurs se situent au delà des limites de la figure 4.5. Pour comparaison, nous donnons aussi les distances des satellites réguliers les plus éloignés des planètes géantes. Pour Jupiter, il s’agit de Callisto orbitant à 0.0126 UA. Japet orbite autour de Saturne 0.0238 UA et Obéron se situe à 0.0039 UA d’Uranus.

4.2.6 Conclusion

Si les rencontres proches ne permettent pas de modifier directement l’obliquité des planètes, elles peuvent néanmoins augmenter leurs inclinaisons. C’est une fois que les inclinaisons sont élevées que les interactions séculaires deviennent importantes et que les obliquités peuvent évoluer significativement. Finalement, les rencontres proches ont quand-même un effet indirect sur le comportement des obliquités.

4.3 Scénario de basculement sans collision

A partir de toutes les contraintes qui ont été obtenues jusqu’ici, nous allons maintenant présenter un nouveau scénario de basculement d’Uranus sans collision étayé par des simulations numériques. Cette section est la traduction française de l’article (Boué & Laskar, 2010) que nous avons reporté à la section suivante (pages 70 à 73).

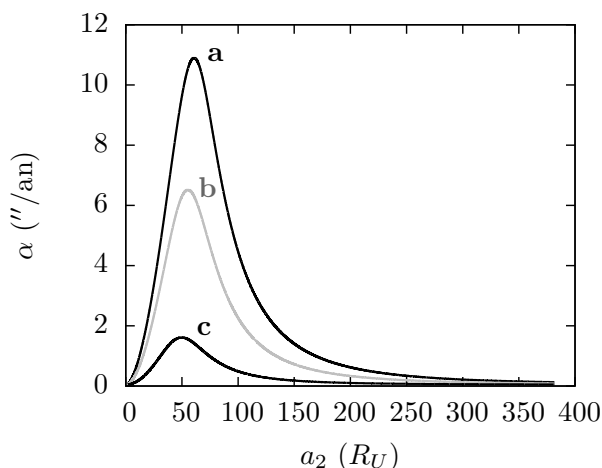


FIGURE 4.6 – Constante de précession effective d’Uranus en fonction de la distance d’un satellite additionnel de masse $m = 0.01M_U$ (a), $m = 0.005M_U$ (b) et $m = 0.001M_U$ (c), où M_U est la masse d’Uranus (Boué & Laskar, 2006). Pour ce graphe, le demi-grand et l’excentricité d’Uranus sont fixés à leur valeur actuelle et le satellite est placé sur une orbite circulaire. Toutes les inclinaisons sont mises à 0.

4.3.1 Scénario

Pour que le basculement puisse avoir lieu, il faut qu’il y ait commensurabilité entre les fréquences séculaires orbitales et celle de précession de l’axe. Or, aujourd’hui la constante de précession d’Uranus est trop faible. Pour établir la commensurabilité, nous avons supposé qu’Uranus possédait dans le passé un satellite massif. Suivant la masse du satellite et la taille de son orbite, il est en effet possible d’accroître la fréquence de précession d’un facteur 1000 par exemple (par rapport à la planète seule ; cf Fig. 4.6). Cette hypothèse est renforcée par des modèles de formation de satellites qui prédisent la présence d’un satellite à l’endroit même où l’effet sur la constante de précession est maximal (Mosqueira & Estrada, 2003a,b).

Cependant, ce satellite n’est pas observé aujourd’hui autour d’Uranus. Il faut donc un mécanisme capable de l’éjecter par exemple. Justement, le système solaire a connu dans son histoire une phase violente propice à cette éjection. Il s’agit de la phase de migration des planètes géantes due au disque de planétésimaux décrite entre autre par le modèle de Nice (Morbidelli et al., 2005; Tsiganis et al., 2005; Gomes et al., 2005). En effet, un résultat récent montre qu’il a dû y avoir des rencontres proches entre Jupiter ou Saturne et l’une des planètes de glace pour expliquer les excentricités actuelles (Morbidelli et al., 2009).

Considérons, en particulier, un satellite de masse $m = 0.01M_U$, avec M_U la masse d’Uranus, situé à 50 rayons d’Uranus. Pour comparaison, Obéron, un des plus gros satellite d’Uranus et aussi le plus éloigné des satellites réguliers, a une masse de $3.45 \times 10^{-5}M_U$ et est situé à 23 rayons d’Uranus. Ce satellite additionnel permet d’atteindre une constante de précession α d’environ $35''/\text{an}$ (Fig. 4.11) pour une distance Soleil-Uranus de 10 UA. Cela correspond à une période de 37 mille ans. D’après la figure 4.2 donnant l’obliquité maximale en fonction du temps, il faut donc plus de 3 millions d’années (80×37 mille ans) pour qu’Uranus bascule si l’inclinaison ne dépasse pas 1 deg. Au moment où nous avons effectué les simulations que nous décrirons plus tard, nous avons supposé que le temps caractéristique τ de la migration était de quelques millions d’années et avons pris $\tau = 2 \times 10^6$ ans. Cela est donc trop court pour le basculement. De plus, il est probable que le satellite est été éjecté bien avant la fin de la migration, au moment où les rencontres proches étaient plus nombreuses. Par suite, nous avons supposé que l’inclinaison d’Uranus avait due être élevée durant le basculement.

Cela est compatible avec le résultat que nous avons obtenu précédemment, section 4.2. Cependant, différents travaux suggèrent que la migration a pu durer plus longtemps (Murray-Clay & Chiang, 2005; Boué et al., 2009; Lykawka et al., 2009), ce qui réduit les contraintes sur la masse du satellite et/ou l'inclinaison d'Uranus.

Le scénario est donc le suivant : Uranus possédait initialement un gros satellite. Pendant la phase de migration planétaire, l'inclinaison d'Uranus a augmenté significativement. L'interaction spin-orbite étant renforcée, le basculement s'est effectué rapidement avant qu'une rencontre proche n'éjecte ce gros satellite. Une fois le satellite éjecté, la fréquence de précession d'Uranus a chuté et l'obliquité s'est stabilisée. Le basculement a eu lieu en plus de 2 200 ans qui est le temps nécessaire pour que les satellites réguliers restent dans le plan de l'équateur (voir la conclusion de la section 2.2).

4.3.2 Simulations numériques

Pour vérifier si le scénario que l'on vient de décrire est réalisable, nous l'avons simulé numériquement. Pour cela, nous avons procédé en quatre étapes.

Dans un premier temps, nous avons simulé le modèle de Nice (Tsiganis et al., 2005). Plus exactement, nous avons intégré 10 000 migrations des planètes géantes sur 10 millions d'années. En plus des interactions newtoniennes entre les planètes et avec le soleil, nous avons ajouté les lois d'évolution suivantes

$$\begin{aligned} da/dt &= \frac{\delta a}{\tau} \exp(-t/\tau) \\ de/dt &= -e/(2\tau_e) \\ di/dt &= -i/(2\tau_i) \end{aligned} \tag{4.38}$$

avec $\tau = 2 \times 10^6$ ans et $\tau_e = \tau_i = \tau/10$ (Lee et al., 2007). a , e et i sont respectivement les demi-grands axes, excentricités et inclinaisons des planètes géantes ; t est le temps et δa est la différence entre le demi-grand axe initial d'une planète et sa valeur actuelle. Le demi-grand axe initial de Jupiter est fixé à 5.45 UA. Les demi-grands axes des autres planètes sont obtenus aléatoirement suivant des lois de distribution uniformes. Celui de Saturne est compris entre 8.38 et 8.48 UA. L'ordre initial des deux planètes de glaces est inversé par rapport à l'état actuel du système solaire : Neptune est placé entre 9.9 et 12 UA alors que le demi-grand axe d'Uranus est choisi entre 13.4 et 17.1 UA. Les planètes telluriques ne sont pas prises en compte.

Ensuite, sur les 5 142 simulations qui ont survécu sans éjection de planètes, ni collision, nous avons sélectionné celles qui se sont terminées avec les planètes dans le même ordre que dans le système solaire actuel. Nous avons ainsi obtenu 1 995 intégrations différentes. Comme le basculement nécessite une forte inclinaison, nous n'avons gardé que les simulations dans lesquelles l'inclinaison d'Uranus dépasse un certain seuil. Nous avons fixé ce seuil à 17 deg, ce qui limite le nombre de simulations à 31. Parmi celles-ci, nous avons rejeté celles dont les rencontres proches avec Uranus se faisaient à moins de 50 rayons d'Uranus de façon à éviter qu'Obéron soit éjecté trop facilement. Avec ce critère, nous avons finalement sélectionné 17 simulations. L'une d'entre elles est représentée dans la figure 4.7a, 4.7b. Nous l'appelons simulation de référence.

Dans une troisième étape, nous avons calculé l'effet maximal d'un satellite additionnel sur l'obliquité d'Uranus à partir des paramètres orbitaux a , e et i obtenus dans la simulation de référence. L'effet du satellite supplémentaire est implicitement pris en compte dans la constante de précession (Boué & Laskar, 2006). La formule (4.17) est celle qui a été utilisée pour ce calcul. Le satellite a été placé à 50 rayons d'Uranus sur des orbites circulaire, puis excentrique. La figure 4.7c montre les résultats obtenus. En particulier, l'obliquité maximale ne croît de façon significative que lorsque l'inclinaison orbitale est élevée. Par ailleurs, pour cette simulation, un basculement de 97 deg ne peut pas avoir lieu si la masse du satellite est inférieure à $0.01M_U$. Avec un satellite de masse $m = 0.001M_U$

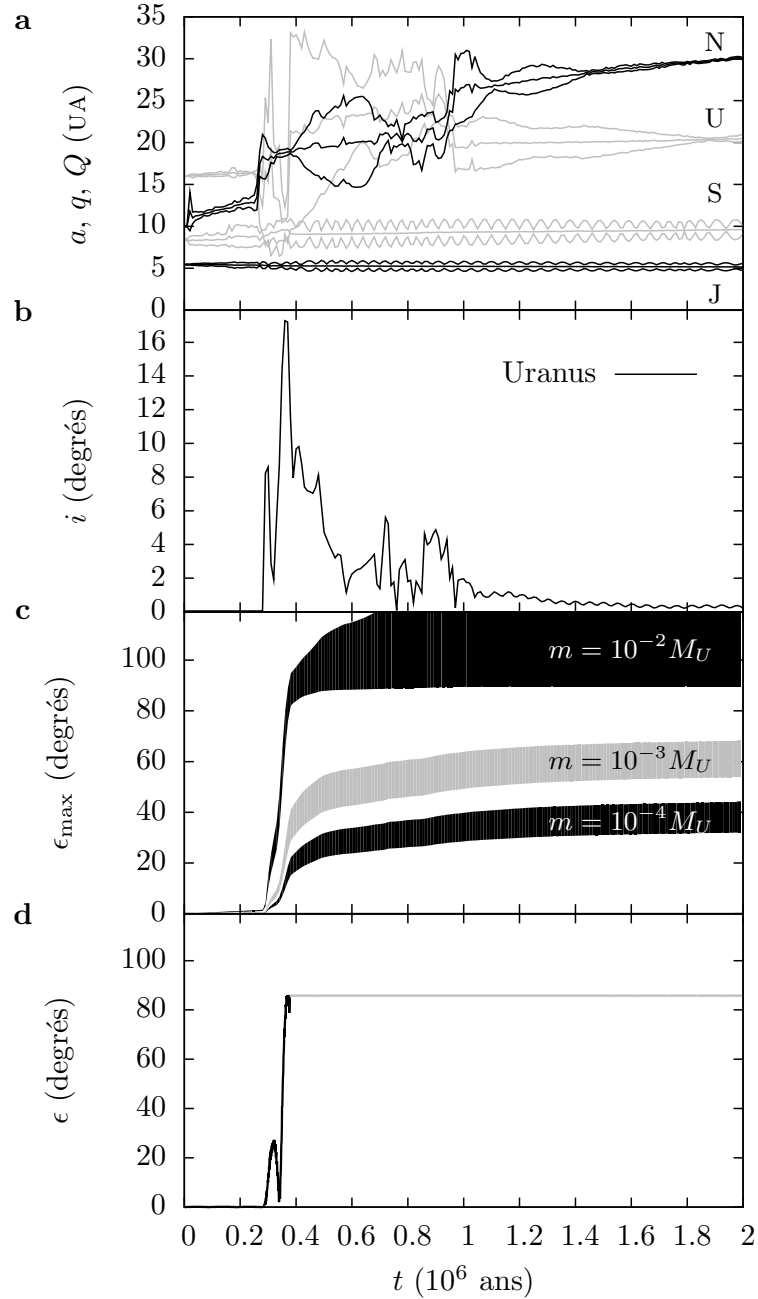


FIGURE 4.7 – Comparaison entre évolution orbitale et accroissement de l’obliquité. **a**, **b**, Exemple d’évolution orbitale des planètes géantes pendant la phase de migration sur 2 millions d’années. **(a)** demi-grand axe a , distance héliocentrique minimale q et maximale Q . **(b)** Inclinaison d’Uranus. **c**, Obliquité maximale que peut atteindre Uranus calculée avec l’équation (4.17) et les paramètres orbitaux a , e et i des sous figures **a** et **b**. Dans ces calculs, l’effet d’un satellite additionnel situé à 50 rayons d’Uranus est implicitement pris en compte dans la constante de précession. Nous avons considéré 3 masses de satellites différentes: $10^{-4} M_U$, $10^{-3} M_U$ et $10^{-2} M_U$, avec M_U la masse d’Uranus. Pour chaque masse, l’excentricité du satellite est fixée à 0 (limite inférieure des zones sombres) puis à 0.5 (limite supérieure). **d**, Résultat d’une simulation avec un satellite de masse $m = 0.01 M_U$ intégré numériquement (courbe noire). Le satellite est éjecté par une rencontre proche avec Saturne à $t = 380$ mille ans. Une fois que le satellite est éjecté, l’obliquité reste constante et stable (courbe grise). Dans cette figure, l’obliquité est mesurée par rapport au plan fixe perpendiculaire au moment cinétique orbital total à la fin de la simulation.

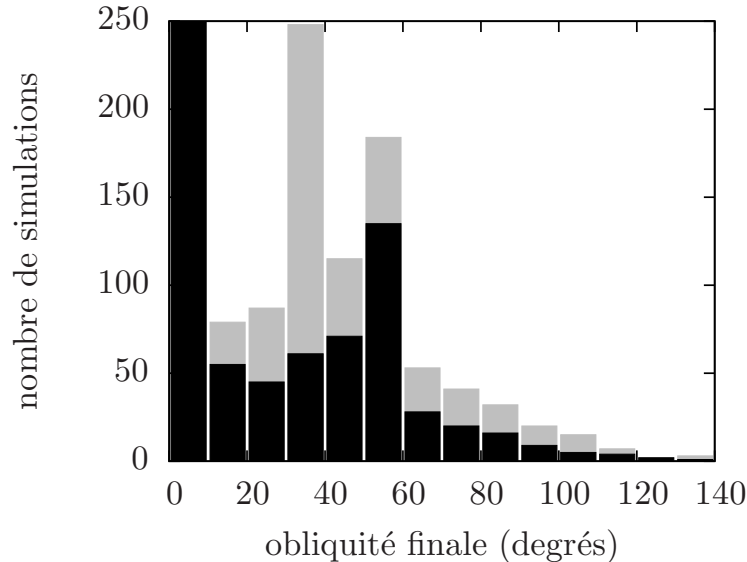


FIGURE 4.8 – Distribution des obliquités finales d’Uranus. C’est le résultat de 1 700 intégrations de l’axe d’Uranus avec un satellite: 100 pour chacune des 17 migrations sélectionnées. En noir, les cas où le satellite est éjecté; au dessus, en gris, les cas où le satellite continue à orbiter autour d’Uranus après 2 millions d’années (la fin des intégrations avec un satellite). La première barre de l’histogramme a été tronquée pour une meilleure visualisation, elle monte à 644 (noir) + 8 (gris). Parmi les simulations avec ejection du satellite, l’obliquité finale monte au delà de 60 deg (resp. 90 deg) dans 220 cas (resp. 37 cas).

l’obliquité finale reste inférieure à 70 deg, et pour un satellite de masse $m = 10^{-4}M_U$, elle ne dépasse pas 45 deg.

Enfin, nous avons intégré l’évolution de l’axe d’Uranus et d’un satellite supplémentaire de masse $m = 0.01M_U$ dans les 17 simulations sélectionnées. Les calculs de l’évolution de l’axe d’Uranus prennent en compte le couple gravitationnel exercé par le soleil, par le satellite et par toutes les autres planètes. Pour chacune des 17 migrations planétaires, nous avons effectué 100 intégrations en variant le demi-grand axe initial du satellite de 15 mètres à chaque fois. La distribution des obliquités finales est donnée figure 4.8. Dans 644 cas, l’obliquité n’excède pas 10 deg car le satellite est éjecté à la première rencontre proche, avant que l’inclinaison n’ait le temps de monter. Mais dans le cas où le satellite survit à la première rencontre proche, alors l’obliquité peut atteindre des valeurs élevées. Parmi les intégrations dans lesquelles le satellite est éjecté avant la fin de la migration, l’obliquité finale monte au dessus de 60 deg dans 220 cas et au dessus de 90 deg dans 37 cas.

4.3.3 Détail du basculement

Etudions plus en détail le basculement de l’axe d’Uranus obtenu dans la figure 4.7. L’évolution régulière de l’obliquité durant le basculement (Fig. 4.9b) suggère que cela est dû à une résonance. Dans la suite, nous allons montrer qu’il s’agit effectivement d’une résonance spin-orbite 1 : 1 entre la précession de l’axe d’Uranus et la précession du nœud de son orbite. L’obliquité ϵ est mesurée par rapport au plan invariant perpendiculaire au moment cinétique orbital total à la fin du de la simulation (10 millions d’années). Traditionnellement, elle est définie par rapport au plan de l’orbite, mais comme l’inclinaison est sujette à de fortes variations, il est préférable d’utiliser le plan invariant pour éviter des évolutions artificielles de l’axe. A la fin de la simulation de référence, l’inclinaison orbitale d’Uranus est très faible (0.0024 deg) et la différence entre les deux définitions est suffisamment faible pour être

négligée. Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un repère tel que le plan x - y coïncide avec le plan invariant. On note \mathbf{w} l'axe d'Uranus, et \mathbf{n} la normale de son orbite. L'obliquité ϵ est donc définie par $\cos \epsilon = \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}$. Soit ϕ_α et ϕ_ν les angles mesurés positivement entre la direction de référence \mathbf{i} et les projections de \mathbf{w} et \mathbf{n} sur le plan invariant respectivement. L'évolution de $\psi = \phi_\alpha - \phi_\nu - \pi$ n'est pas monotone, elle présente des plateaux lors du basculement (Fig. 4.9a, phases *II* et *IV + V*). Cela confirme la résonance 1 : 1 entre la précession de l'axe d'Uranus et la régression du nœud ascendant de son orbite.

Pour avoir une compréhension complète du basculement, nous rappelons les équations du mouvement qui nous permettront de décrire l'évolution spatiale de l'axe présentée Fig. 4.9d. Soit α la constante de précession d'Uranus incluant l'effet du satellite, et ν la fréquence de régression du nœud de l'orbite. Dans le repère tournant autour de \mathbf{k} à la fréquence ν , le hamiltonien décrivant l'évolution de l'axe \mathbf{w} s'écrit

$$H = -\frac{\alpha}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2 - \nu(\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}). \quad (4.39)$$

Dans ce repère, \mathbf{k} est constant alors que \mathbf{n} varie à cause de l'évolution de l'inclinaison. On a

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin i \\ 0 \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

avec $x = \sin \epsilon \cos \psi$, $y = \sin \epsilon \sin \psi$ et $z = \cos \epsilon$. On peut passer de ces variables à celles de Ward & Hamilton (2004) par une rotation d'angle i autour du deuxième axe. Les équations du mouvement associée au hamiltonien (4.39) sont données par (e.g. Boué & Laskar, 2006)

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \nabla_{\mathbf{w}} H \wedge \mathbf{w} \quad (4.41)$$

ce qui donne

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})\mathbf{n} \wedge \mathbf{w} - \nu\mathbf{k} \wedge \mathbf{w} \quad (4.42)$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_x y, \\ \dot{y} = -\omega_z x - \omega_x z, \\ \dot{z} = \omega_x y, \end{cases} \quad (4.43)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_z &= \alpha \cos i (z \cos i - x \sin i) + \nu, \\ \omega_x &= \alpha \sin i (z \cos i - x \sin i). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ces équations sont une combinaison de deux rotations. La première est une rotation autour du troisième axe à la vitesse angulaire ω_z . La seconde est une rotation autour du premier axe à la vitesse angulaire ω_x . Maintenant décrivons l'évolution de l'axe d'Uranus exposée Fig. 4.9.

- Pendant la phase *I*, de $t = 0$ à $t = 289 \times 10^3$ ans, l'inclinaison i et l'obliquité ϵ restent faibles, les trois axes \mathbf{w} , \mathbf{n} et \mathbf{k} sont pratiquement alignés, il n'y a pas d'évolution.
- Lors de la phase *II*, la variable ψ reste proche de $-\pi/2$ (Fig. 4.9a), il y a donc une résonance spin-orbite 1 : 1. Dans ce cas, la vitesse angulaire ω_z dans (4.43) est négligeable et il ne reste que la rotation autour de l'axe \mathbf{i}

$$\begin{cases} \dot{x} \approx 0, \\ \dot{y} \approx -\omega_x z, \\ \dot{z} \approx \omega_x y. \end{cases} \quad (4.45)$$

Alors que l'axe \mathbf{w} décrit un arc de cercle dans le plan y - z (Fig. 4.9d), la troisième composante z décroît, et donc l'obliquité augmente (Fig. 4.9b).

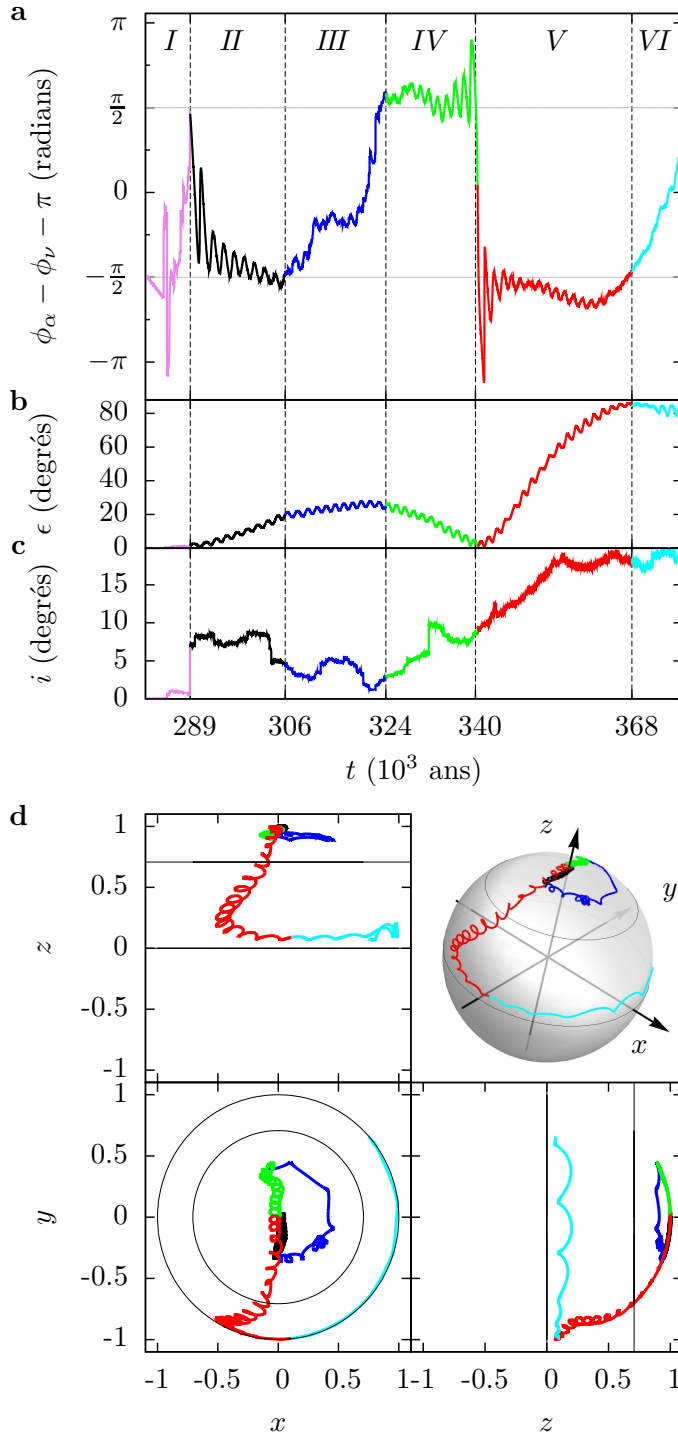


FIGURE 4.9 – Détail du basculement d’Uranus. **a**, Evolution de l’angle résonant $\psi = \phi_\alpha - \phi_\nu - \pi$ où ϕ_α et ϕ_ν sont les angles mesurés positivement depuis une direction de référence jusqu’à la projection de l’axe d’Uranus \boldsymbol{w} et du pôle orbital \boldsymbol{n} sur le plan x - y respectivement. **b**, Evolution de l’obliquité d’Uranus mesurée par rapport au plan invariant. **c**, Evolution de l’inclinaison orbitale d’Uranus. **d**, Evolution de l’axe de rotation d’Uranus. Les coordonnées sont $x = \sin \epsilon \cos \psi$, $y = \sin \epsilon \sin \psi$, et $z = \cos \epsilon$. Les cercles fins noirs dans le plan x - y , qui correspondent aux lignes noires dans les plans x - z et y - z , représentent les endroits où l’obliquité vaut 45 deg (cercle intérieur) et 90 deg (cercle extérieur). Le basculement d’Uranus est caractérisé par trois phases de résonance notées *II* et *IV* + *V* séparant des évolutions non-résonantes *I*, *III* et *VI*.

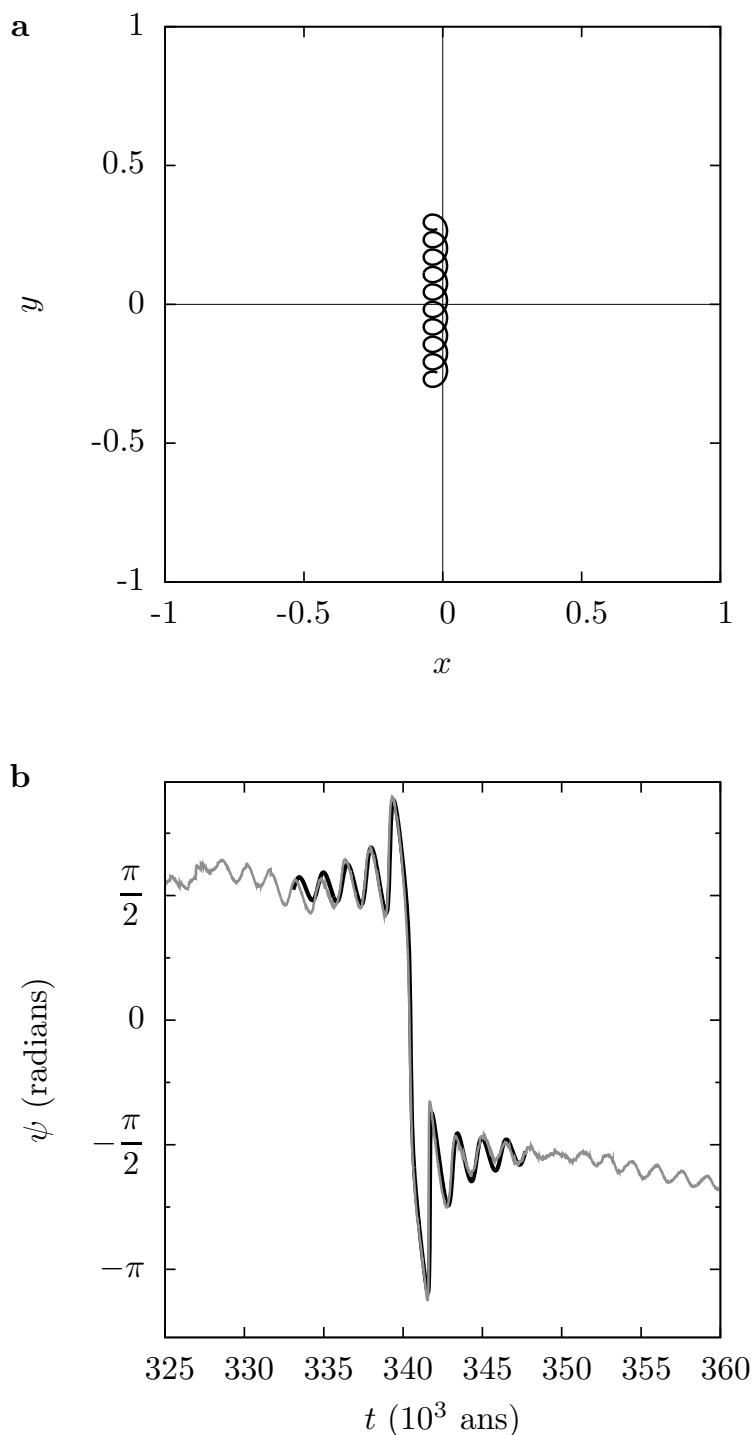


FIGURE 4.10 – Transition entre la phase *IV* et la phase *V*. **a**, Modèle simple de l'évolution de l'axe de rotation avec $x = A(\cos \omega(t - t_0) - 1) + x_0$, et $y = -A \sin \omega(t - t_0) - B(t - t_0) + y_0$. Nous avons utilisé $A = 0.042$, $B = 41 \times 10^{-6}/\text{an}$, $\omega = 4.2 \times 10^{-3} \text{rad/an}$, $t_0 = 340.4 \times 10^3 \text{ ans}$, $x_0 = 0.0155$ et $y_0 = 0.013$. **b**, Evolution de l'argument de la projection de l'axe sur le plan x - y . La courbe grise est le résultat de l'intégration numérique et la noire correspond au modèle simple.

- Durant la phase *III*, l'angle ψ évolue (Fig. 4.9a). Cela signifie que la résonance est rompue, la vitesse angulaire ω_z devient alors importante. D'un autre côté, l'inclinaison décroît (Fig. 4.9c). La vitesse angulaire $\omega_x \propto \sin i$ décroît donc. Par conséquent, c'est la rotation dans le plan $x-y$ qui domine (Fig. 4.9d)

$$\begin{cases} \dot{x} \approx \omega_z y, \\ \dot{y} \approx -\omega_z x, \\ \dot{z} \approx 0, \end{cases} \quad (4.46)$$

et l'obliquité ϵ reste pratiquement constante (Fig. 4.9b).

- Dans la phase *IV*, l'angle ψ est stabilisé une nouvelle fois. L'axe de rotation est donc à nouveau capturé en résonance et les équations du mouvement sont identiques aux équations (4.45). L'axe décrit alors un arc de cercle dans le plan $y-z$ (Fig. 4.9d). Cette fois, les conditions initiales sont $y > 0$ et $z < 1$ ($\psi \approx \pi/2$), et l'axe pivote vers $y = 0$ et $z = 1$. Comme z augmente, l'obliquité décroît (Fig. 4.9b). L'inclinaison orbitale i est similaire dans les phases *II* et *IV* (fig. 4.9c), il en est donc de même pour la vitesse angulaire ω_x .
- Lorsque l'axe de rotation traverse le plan $x-z$, l'angle ψ effectue un bond de $\pi/2$ à $-\pi/2$ (fig. 4.10) et le système entre dans la phase *V* (Fig. 4.9a). L'évolution est similaire à celle de la phase *II*. L'axe décrit un arc de cercle dans le plan $y-z$ du côté $y < 0$ (Fig. 4.9d). L'obliquité croît (Fig. 4.9b). Cependant l'inclinaison est plus forte que dans la phase *II* (18 deg, voir Fig. 4.9c), la vitesse angulaire ω_x est donc plus grande et l'obliquité évolue plus rapidement (Fig. 4.9b).
- Lors de la phase *VI*, la résonance est à nouveau brisée (Fig. 4.9a), la vitesse angulaire ω_x devient négligeable par rapport à ω_z . L'axe de rotation décrit un arc de cercle dans le plan $x-y$ (Fig. 4.9d), et l'obliquité reste constante (Fig. 4.9b).

A la suite du basculement, le satellite est éjecté. La constante de précession chute d'un facteur proche de 1 000, ce qui implique $\omega_z \approx \nu$ et $\omega_x \approx 0$. Les équations du mouvement (4.43) montrent donc que l'axe de rotation précesse autour du troisième axe à la fréquence ν . L'obliquité reste constante comme le montre la figure 4.7d.

4.3.4 Conclusion

Nous avons montré que l'obliquité actuelle d'Uranus est compatible avec les modèles de formation planétaire prédisant une obliquité initiale proche de zéro, et cela sans l'aide de collision géante. De plus, nous confirmons la nécessité des rencontres proches utilisées dans le modèle de Nice pour recouvrer les excentricités actuelles de Jupiter et Saturne. En outre, nous résolvons le problème du satellite manquant autour d'Uranus (Mosqueira & Estrada, 2003b). Bien que les théories de formation des satellites ne soient probablement pas dans leur forme définitive, nous reconnaissons que le satellite que nous avons introduit puisse être trop massif au regard de ces modèles de formation (Canup & Ward, 2006). Néanmoins, la masse nécessaire du satellite permettant le basculement dépend de façon importante de l'évolution des paramètres orbitaux de la planète (voir section 4.1). Il est possible qu'un satellite de masse $0.001M_U$ soit suffisant si l'inclinaison d'Uranus est restée plus longtemps élevée (Fig. 4.11). Plusieurs études récentes suggèrent en effet que le temps caractéristique de la migration était plus grand que celui qui a été utilisé dans cette étude (Murray-Clay & Chiang, 2005; Boué et al., 2009; Lykawka et al., 2009). Les paramètres impliqués dans la formation du système solaire sont aujourd'hui encore trop nombreux pour pouvoir dériver une estimation précise de la probabilité d'occurrence de ce scénario. Cependant, avec ce satellite additionnel, nous sommes en mesure de proposer un scénario compatible avec la migration planétaire telle qu'elle est décrite par le modèle de Nice. Suivant les progrès qui seront effectués dans les théories de formation des satellites et les possibles variations dans les modèles de migration, les éléments donnés ici apporteront peut être de fortes contraintes additionnelles sur les échelles de temps de la migration.

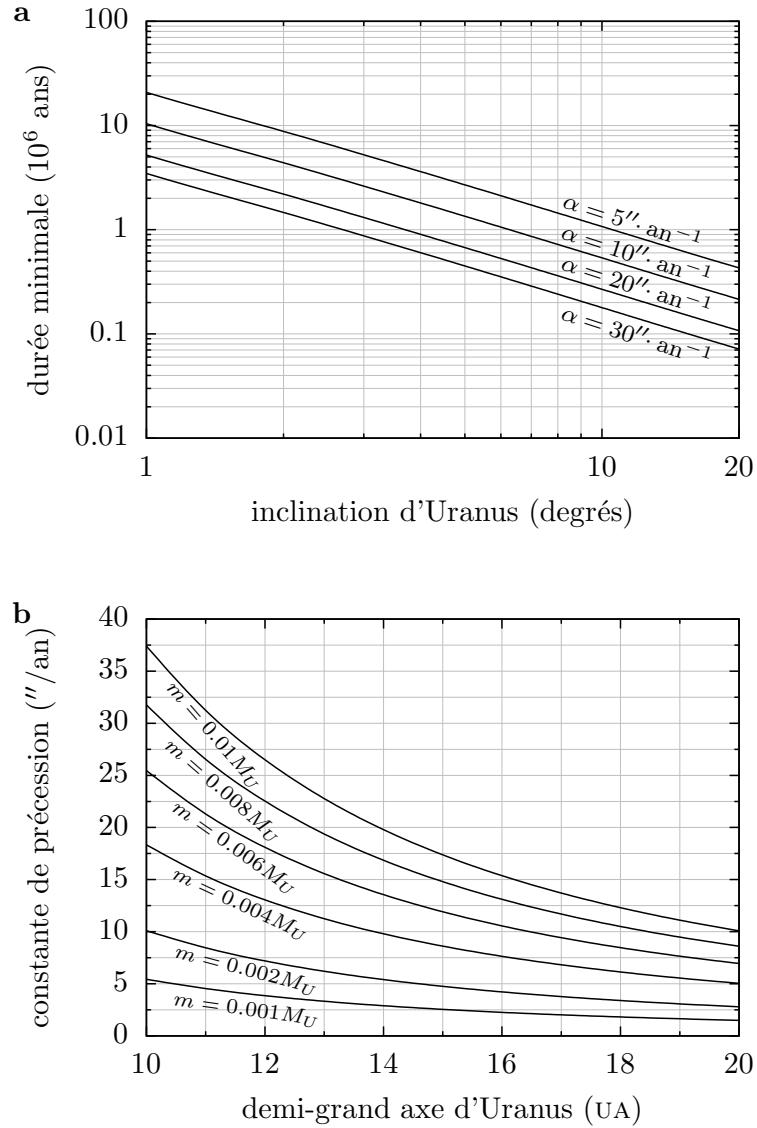


FIGURE 4.11 – Contraintes sur la migration et sur la masse du satellite. **a**, Borne inférieure de la durée nécessaire pour basculer Uranus de 97 deg en fonction de l'inclinaison de son orbite pour différentes constantes de précession (Boué et al., 2009). **b**, Constante de précession d'Uranus en fonction de son demi-grand axe pour différentes masses de satellite en orbite circulaire (Boué & Laskar, 2006). Dans le cas où l'orbite d'Uranus est excentrique, le demi-grand axe a_U doit être remplacé par $a_U \sqrt{1 - e_U^2}$. Par exemple, si durant la phase de migration l'inclinaison d'Uranus reste au dessus de 10 deg pendant au moins 1 milliard d'années, alors une constante de précession égale à $5''/\text{an}$ peut être suffisant pour basculer Uranus (**a**). Une telle constante de précession peut être atteinte avec un satellite de masse $0.001M_U$ si $a_U \sqrt{1 - e_U^2}$ est inférieur à 10 UA durant la période de forte inclinaison (**b**).

A COLLISIONLESS SCENARIO FOR URANUS TILTING

GWENAËL BOUÉ AND JACQUES LASKAR

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France; boue@imcce.fr
Received 2009 December 1; accepted 2010 February 4; published 2010 March 2

ABSTRACT

The origin of the high inclination of Uranus' spin-axis (Uranus' obliquity) is one of the great unanswered questions about the solar system. Giant planets are believed to form with nearly zero obliquity, and it has been shown that the present behavior of Uranus' spin is essentially stable. Several attempts were made in order to solve this problem. Here we report numerical simulations showing that Uranus' axis can be tilted during the planetary migration, without the need of a giant impact, provided that the planet had an additional satellite and a temporary large inclination. This might have happened during the giant planet instability phase described in the Nice model. In our scenario, the satellite is ejected after the tilt by a close encounter at the end of the migration. This model can both explain Uranus' large obliquity and bring new constraints on the planet orbital evolution.

Key words: celestial mechanics – planets and satellites: general

Online-only material: color figure

1. INTRODUCTION

Today, Uranus' obliquity (97°) is essentially stable. This is due to the regularity of its orbital motion and to the slow precession motion of Uranus' axis compared to the secular frequencies of the solar system (Laskar & Robutel 1993). It is sometimes believed that a great collision with an Earth-sized protoplanet could be the reason of Uranus' large obliquity. But this straightforward scenario hardly explains the presence of regular satellites orbiting Uranus in its equatorial plane (Korycansky et al. 1990). However, the presence of satellites around a planet can increase its precession rate by a large amount depending on their mass and orbital parameters (Tremaine 1991; Goldreich 1966; Ward 1975; Boué & Laskar 2006). For example, with a satellite of mass $m = 0.01 M_U$, where M_U is the mass of Uranus, the increase can reach a factor of 1000 (Figure 1). The maximal effect is obtained for a satellite located at about 50 Uranian radii, which is actually in the region where a satellite has been predicted by some formation models (Mosqueira & Estrada 2003a, 2003b; Estrada & Mosqueira 2006). For comparison, the most distant regular satellite of Uranus is Oberon, whose mass is $3.45 \times 10^{-5} M_U$ and distance from Uranus' barycenter is 23 Uranian radii (Laskar & Jacobson 1987). The interactions between spin-axes and secular motions of the planets are also strengthened when orbital inclinations are high. Such conditions could be met during the planetary migration. Indeed, in the Nice scenario (Tsiganis et al. 2005), Jupiter and/or Saturn should have undergone close encounters with the ice giants to reach their present eccentricities (Morbidelli et al. 2009). These close encounters can raise the inclinations. Moreover, the additional satellite can be ejected during one of these encounters. We therefore propose that Uranus had an additional satellite and its spin-axis was tilted during the planetary migration.

2. NUMERICAL EXPERIMENT

The construction of such a scenario for Uranus tilting can be described in four steps.

First, we simulated the Nice model (Tsiganis et al. 2005). We integrated 10,000 migrations of the giant planets over 10 Myr.

For these simulations,

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{\delta a}{\tau} \exp(-t/\tau) \\ de/dt &= -e/(2\tau_e) \\ di/dt &= -i/(2\tau_i),\end{aligned}$$

with $\tau = 2$ Myr and $\tau_e = \tau_i = \tau/10$ as in Lee et al. (2007). a , e , and i are respectively the semimajor axis, the eccentricity, and the inclination of the giant planets; t is the time and δa is the difference between the initial semimajor axis of a planet and its current one. The initial semimajor axis of Jupiter was set to 5.45 AU. The initial semimajor axes of the other planets were obtained randomly with a uniform distribution. The initial semimajor axis of Saturn was varied in the range 8.38–8.48 AU. The initial order of the ice giants was modified compared to the current solar system: the initial semimajor axis of Neptune was varied in the range 9.9–12 AU and the initial semimajor axis of Uranus was varied in the range 13.4–17.1 AU. The terrestrial planets are not taken into account in this study.

Then, out of the 5142 simulations that survived without ejection or planet collision, we selected those where the planet final order is the same as in the solar system. We obtained 1995 different integrations. As the tilt requires high inclination, we kept only the simulations where Uranus' inclination increases beyond a given threshold. We set this threshold to 17° which limits the number of simulations to 31. Among these simulations, we rejected those where the closest encounter between Uranus and any other planet is closer than 50 Uranian radii. With our criterion, we finally selected 17 simulations. One of them is displayed in Figures 2(a) and (b). We call it the reference simulation.

In a third step, we computed the maximal effect of an additional satellite on Uranus' obliquity in any orbital evolution with the same semimajor axis, eccentricity, and inclination as in the reference simulation, regardless of the conjugated angles. For that, we used the expression of the effective precession constant as a function of the satellite orbital parameters (Boué & Laskar 2006). Then, we computed the maximal tilt given Uranus orbital evolution (Boué et al. 2009). In the calculations, the satellite is at 50 Uranian radii in both circular and eccentric orbits.

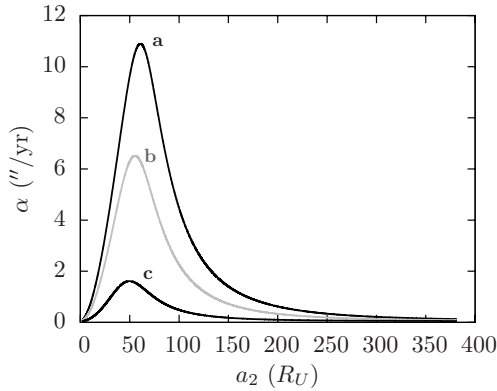


Figure 1. Uranus precession frequency in the presence of a heavy satellite. Uranus effective precession constant as a function of the distance of an additional satellite of mass $m = 0.01 M_U$ (a), $m = 0.005 M_U$ (b), and $m = 0.001 M_U$ (c), where M_U is the mass of Uranus (Boué & Laskar 2006). For this calculation, the semimajor axis and the eccentricity of Uranus are set to the current values, and the satellite is assumed to have a circular orbit. All inclinations as well as the obliquity are set to 0.

Figure 2(c) shows the maximal obliquity that has been reached in these simulations. The evolution shows clearly that the tilt can only occur when the inclination is high. In the present case, a satellite with $m = 0.01 M_U$ is still necessary for the obliquity to reach 97° .

Finally, we integrated the evolution of Uranus' spin-axis and the additional satellite in the 17 selected simulations. Calculations of the evolution of Uranus' spin-axis take into account the gravitational torques exerted by the Sun, by the additional satellite, and by all the other giant planets. For each of the 17 planet migrations, we performed 100 integrations varying the initial semimajor axis of the satellite by a small amount (15 m). The final obliquity distribution is given in Figure 3. In 644 cases, the obliquity does not exceed 10° because the satellite is ejected at the first encounter before the increase of the inclinations. But, if the satellite survives the first encounter, as in 62% of the cases, then the obliquity can reach large values. Among the integrations in which the satellite is ejected before the end of the migration, there is a final obliquity larger than 60° in 220 cases and an obliquity larger than 90° in 37 cases.

3. DYNAMICS OF THE TILT

Here we explain the evolution of Uranus' spin-axis during the tilt presented in Figure 2. The smooth evolution of the obliquity during the tilt (Figure 4(b)) suggests that it is due to a resonance. In the following, we show that the tilt actually occurs during a 1:1 spin-orbit resonance between the precession of Uranus' axis and the regression of the node of its orbit. The obliquity ϵ is measured relative to the invariant plane orthogonal to the total orbital angular momentum at the end of the simulation (10 Myr). Traditionally, it is defined relative to the orbital plane, but as the inclination rises to high values it is preferable to use the invariant plane in order to avoid artificial evolution of the spin-axis. At the end of the reference simulation, Uranus' orbital inclination is very small ($0^\circ 00' 24''$) and the difference between the two definitions is sufficiently small to be neglected. Let $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ be a base frame such that the x - y plane coincides with this invariant plane. We note \mathbf{w} , Uranus' spin-axis, and \mathbf{n} , the normal of its orbit. The obliquity ϵ is thus defined by $\cos \epsilon = \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}$. Let ϕ_α and ϕ_ν be the angles measured positively

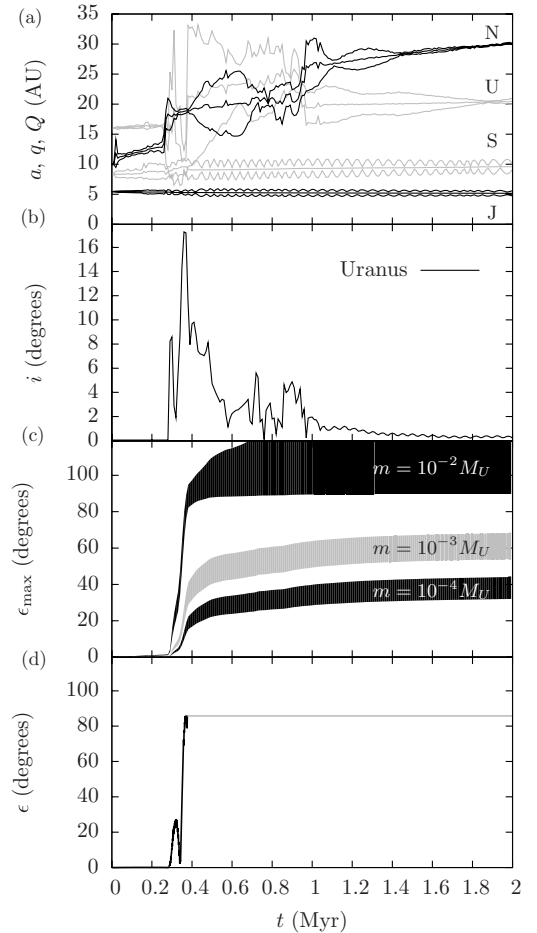


Figure 2. Comparison between orbital evolution and obliquity increase. (a, b) Example of orbital evolution of the giant planets during the planetary migration over 2 Myr. (a) Semimajor axis, minimum, and maximum heliocentric distances. (b) Uranus inclination. (c) Maximal tilt starting from zero obliquity for any orbital evolution with the same semimajor axis, eccentricity, and inclination as Uranus in panels (a) and (b). In this calculation (see Figure 5), the effect of an additional satellite at 50 Uranian radii is implicitly taken into account in the precession constant. We considered three different masses for the satellite: $10^{-4} M_U$, $10^{-3} M_U$, and $0.01 M_U$, where M_U is the mass of Uranus. For each mass, the satellite eccentricity is set to 0 (lower boundary) and 0.5 (upper boundary). (d) Results of a numerical integration with a satellite of mass $m = 0.01 M_U$ (black curve). The satellite is ejected by a close encounter with Saturn at $t = 0.38$ Myr. Once the satellite is ejected, the obliquity remains constant (gray curve). In these plots, the obliquity is measured relative to the fixed plane orthogonal to the final total orbital angular momentum.

from the reference direction \mathbf{i} to the projections of \mathbf{w} and \mathbf{n} into the x - y plane, respectively. The evolution of $\psi = \phi_\alpha - \phi_\nu - \pi$ is not steady but describes plateaus during the tilt (Figure 4(a), phases II, and $IV+V$). This confirms the 1:1 resonance between the precession of Uranus' axis and the regression of the node of its orbit.

In order to have a full understanding of the tilt, we now give the equations of motion that will allow us to describe the spatial evolution of the spin-axis displayed in Figure 4(d). Let α be Uranus' precession constant including the effect of the satellites, and ν the regression frequency of Uranus' orbital node. In the frame rotating around \mathbf{k} with the regression frequency ν , the

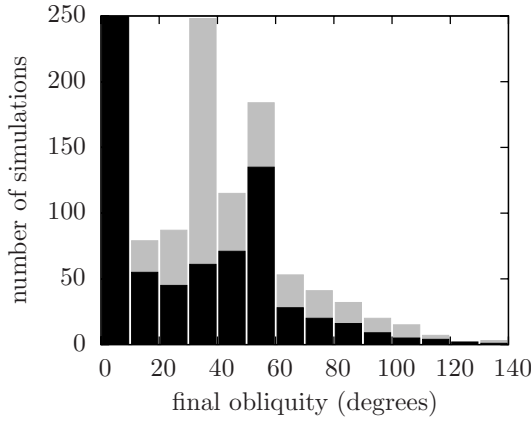


Figure 3. Distribution of Uranus final obliquity. This is the result of 1700 integrations of Uranus spin-axis with an additional satellite: 100 per each of the 17 selected migrations. In black, the cases where the satellite is ejected; in gray, the cases where the satellite still orbits Uranus after 2 Myr (the end of the integrations with a satellite). The first bin has been truncated for a better visualization, its value is 644 (black) + 8 (gray). Among the simulations with ejection of the satellite, there is a final obliquity larger than 60° (resp. 90°) in 220 cases (resp. 37 cases).

Hamiltonian describing the spin-axis evolution reads

$$H = -\frac{\alpha}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2 - \nu(\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}). \quad (1)$$

In this frame \mathbf{k} is constant, whereas \mathbf{n} varies due to the evolution of the inclination. We have

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin i \\ 0 \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

with $x = \sin \epsilon \cos \psi$, $y = \sin \epsilon \sin \psi$, and $z = \cos \epsilon$. One can go from these variables to Ward & Hamilton (2004) ones by a rotation of angle i around the second axis. The equations of motion associated with the Hamiltonian (1) are given by

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \nabla_{\mathbf{w}} H \times \mathbf{w}, \quad (3)$$

which gives

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})\mathbf{n} \times \mathbf{w} - \nu\mathbf{k} \times \mathbf{w} \quad (4)$$

or equivalently

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_z y \\ \dot{y} = -\omega_z x - \omega_x z \\ \dot{z} = \omega_x y, \end{cases} \quad (5)$$

with

$$\begin{aligned} \omega_z &= \alpha \cos i (z \cos i - x \sin i) + \nu, \\ \omega_x &= \alpha \sin i (z \cos i - x \sin i). \end{aligned} \quad (6)$$

These equations are a combination of two rotations. The first one is a rotation around the third axis with the angular velocity ω_z . The second is a rotation around the first axis with the angular velocity ω_x .

Now we describe the evolution of Uranus' spin-axis displayed in Figure 4.

During phase *I*, from $t = 0$ to $t = 289$ kyr, the inclination i and the obliquity ϵ are small, the three axes \mathbf{w} , \mathbf{n} , and \mathbf{k} are almost aligned, and there is no evolution.

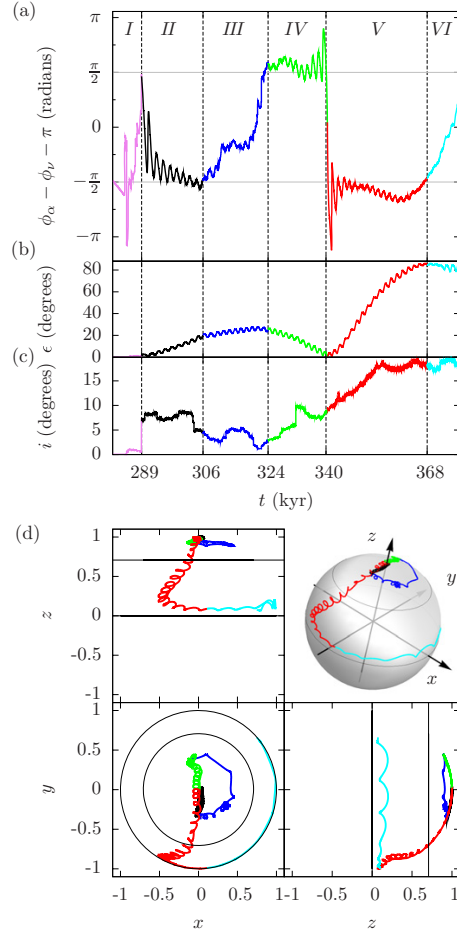


Figure 4. Details on Uranus tilting. (a) Evolution of the resonant angle $\psi = \phi_\alpha - \phi_\beta - \pi$, where ϕ_α and ϕ_β are angles measured positively from a reference direction to the projection of Uranus' spin-axis \mathbf{w} and Uranus' orbit pole \mathbf{n} into the x - y plane, respectively. (b) Evolution of Uranus' obliquity relative to the invariant plane. (c) Evolution of Uranus' orbital inclination. (d) Evolution of Uranus' spin-axis. The coordinates are $x = \sin \epsilon \cos \psi$, $y = \sin \epsilon \sin \psi$, and $z = \cos \epsilon$. The thin black circles in the x - y plane, that correspond to the thin black lines in the x - z plane and in the y - z plane, represent the locations where the obliquity is 45° (inner circle) and 90° (outer circle). Uranus tilting is characterized by three resonant phases labeled *II*, and *IV*+*V* separated by non-resonant evolutions labeled *I*, *III*, and *VI*. (A color version of this figure is available in the online journal.)

In phase *II*, the variable ψ remains close to $-\pi/2$ (Figure 4(a)), there is thus a 1:1 spin-orbit resonance. In that case, the angular velocity ω_z in Equations (5) and (6) is negligible and it remains only the rotation around the first axis

$$\begin{cases} \dot{x} \approx 0 \\ \dot{y} \approx -\omega_x z \\ \dot{z} \approx \omega_x y. \end{cases} \quad (7)$$

As the axis \mathbf{w} describes an arc of a circle in the y - z plane (Figure 4(d)), the third component z decreases, and thus the obliquity ϵ increases (Figure 4(b)).

In phase *III*, the angle ψ evolves (Figure 4(a)), hence the resonance is broken and the angular velocity ω_z becomes important. On the other side, the inclination decreases (Figure 4(c)). Thus, the angular velocity $\omega_x \propto \sin i$ decreases too. Hence, the

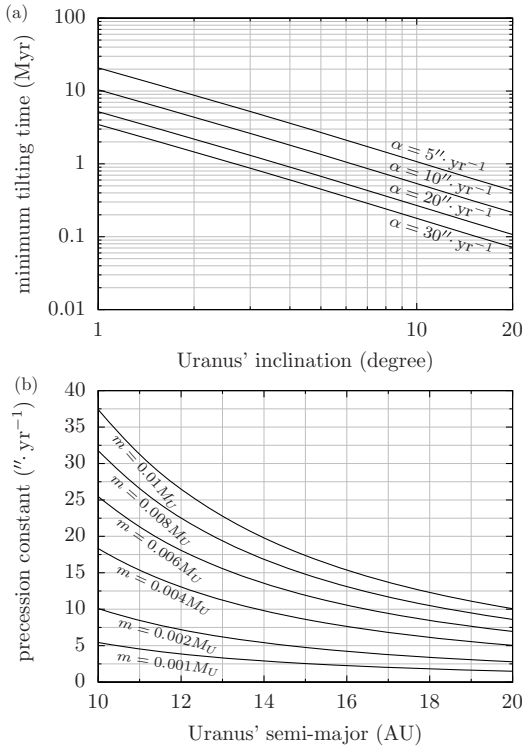


Figure 5. Constraints on the migration and on the mass of the satellite. (a) Lower boundary on the time required to tilt Uranus by 97° as a function of the inclination of its orbit for different precession constants (Boué et al. 2009). (b) Uranus' precession constant as a function of its semimajor axis for different masses of the satellite in circular orbit (Boué & Laskar 2006). In case of eccentric orbit of the planet, the semimajor axis a_U should be replaced by $a_U \sqrt{1 - e_U^2}$. For example, if during the planetary migration, Uranus' inclination remains above 10° at least 1 Myr, then the precession constant should be larger or equal to $5'' \text{ yr}^{-1}$ to tilt Uranus (a). Such a precession constant can be reached with a satellite of mass $m = 0.001 M_U$ if $a_U \sqrt{1 - e_U^2}$ is less than 10 AU during the period of large inclination (b).

rotation in the x - y plane dominates (Figure 4(d))

$$\begin{cases} \dot{x} \approx \omega_z y \\ \dot{y} \approx -\omega_z x \\ \dot{z} \approx 0, \end{cases} \quad (8)$$

and the obliquity ϵ is almost stationary (Figure 4(b)).

During phase *IV*, the angle ψ is stable for a second time. The spin-axis is thus once again captured in resonance and the equations of motion are Equations (7). The axis thus describes an arc of a circle in the y - z plane (Figure 4(d)). This time, it starts with $y > 0$ and $z < 1$ ($\psi \approx \pi/2$) and goes toward $y = 0$ and $z = 1$. As z increases, the obliquity decreases (Figure 4(b)). The orbital inclination i is similar in phase *II*, and *IV* (Figure 4(c)), so is the angular velocity ω_x .

When the spin-axis crosses the x - z plane, the angle ψ jumps from $\pi/2$ to $-\pi/2$ and the system enters in phase *V* (Figure 4(a)). The evolution is similar to the one of phase *II*. The spin-axis describes an arc of a circle in the y - z plane on the $y < 0$ side (Figure 4(d)). The obliquity increases (Figure 4(b)). However, as the inclination is higher than in phase *II* (18° , see Figure 4(c)), the angular velocity ω_x is larger and the obliquity evolves faster (Figure 4(b)).

In phase *VI*, the resonance is once again broken (Figure 4(a)), the angular velocity ω_x becomes negligible with respect to ω_z . The spin-axis describes an arc of a circle in the x - y plane (Figure 4(d)), and the obliquity remains constant (Figure 4(b)).

After the tilt, the satellite is ejected. The precession constant α decreases by a factor close to 1000, which gives $\omega_z \approx \nu$ and $\omega_x \approx 0$. The equations of motion (Equations (5)) thus show that the spin-axis precesses around the third axis at the angular velocity ν . The obliquity remains constant as one can see in Figure 2.

4. CONCLUSION

We have shown that the current obliquity of Uranus is compatible with planetary formation scenarios predicting small initial obliquities without the need of a large collision. Moreover, we confirm the necessity of the close encounters used in the Nice model to recover the present eccentricity of Jupiter and Saturn. Additionally, we solve the problem of the missing satellite around Uranus (Mosqueira & Estrada 2003a, 2003b). Although satellite formation theories are not at the stage that they can constrain the final mass of the satellites, we acknowledge that the satellite we have introduced may be too massive. Nevertheless, a less massive satellite of only $0.001 M_U$ can still be sufficient to tilt Uranus if the planetary migration timescale is larger than the one used here (see Figure 5). Several recent studies actually suggest such a longer migration timescale (Murray-Clay & Chiang 2005; Boué et al. 2009; Lykawka et al. 2009). The parameters involved in the formation of the solar system are still too numerous to be able to derive precise estimates of the probability of the present scenario to occur, but with this additional satellite, we are able to propose a scenario that fits with the present late migration scenario as given by the Nice model. Depending on the progress made in satellite formation theories and possible future variations in the migration scenarios, the elements given here could provide strong additional constraints on the migration timescales.

This work benefited from support from PNP-CNRS and CS from Paris Observatory. The authors thank Paris Observatory SIO, and GENCI-CINES, for providing the necessary computational resources for this work.

REFERENCES

- Boué, G., & Laskar, J. 2006, *Icarus*, **185**, 312
 Boué, G., Laskar, J., & Kuchynka, P. 2009, *ApJ*, **702**, L19
 Estrada, P. R., & Mosqueira, I. 2006, *Icarus*, **181**, 486
 Goldreich, P. 1966, *Rev. Geophys.*, **4**, 411
 Korycansky, D. G., Bodenheimer, P., Cassen, P., & Pollack, J. B. 1990, *Icarus*, **84**, 528
 Laskar, J., & Jacobson, R. A. 1987, *A&A*, **188**, 212
 Laskar, J., & Robutel, P. 1993, *Nature*, **361**, 608
 Lee, M. H., Peale, S. J., Pfahl, E., & Ward, W. R. 2007, *Icarus*, **190**, 103
 Lykawka, P. S., Horner, J., Jones, B. W., & Mukai, T. 2009, *MNRAS*, **398**, 1715
 Morbidelli, A., Brasser, R., Tsiganis, K., Gomes, R., & Levison, H. F. 2009, *A&A*, **507**, 1041
 Mosqueira, I., & Estrada, P. R. 2003a, *Icarus*, **163**, 198
 Mosqueira, I., & Estrada, P. R. 2003b, *Icarus*, **163**, 232
 Murray-Clay, R. A., & Chiang, E. I. 2005, *ApJ*, **619**, 623
 Tremaine, S. 1991, *Icarus*, **89**, 85
 Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005, *Nature*, **435**, 459
 Ward, W. R. 1975, *AJ*, **80**, 64
 Ward, W. R., & Hamilton, D. P. 2004, *AJ*, **128**, 2501

Chapitre 5

Mouvement des corps rigides et application

Ce chapitre regroupe les articles publiés dans des revues à comité de lecture durant ma thèse. Les deux articles “*Precession of a planet with a satellite*” (section 5.2, page 87) et “*Spin axis evolution of two interacting bodies*” (section 5.3, page 107) présentent le formalisme vectoriel et les outils pour l’étude des mouvements de rotation qui sont à la base de toute la partie consacrée au basculement d’Uranus rassemblée dans les 5 premiers chapitres. Les points clefs de ces deux articles sont résumés dans le compte-rendu d’une présentation donnée à Torun (Pologne) lors d’un congrès sur *les planètes extrasolaires dans les systèmes multiples* organisé par Krzysztof Goździewski (voir section 5.1, page 77).

L’article intitulé “*Speed limit on Neptune migration imposed by Saturn tilting*” (section 5.4, page 125), quant à lui, est une autre application des outils développés pour ma thèse.

Tout comme pour Uranus, mais dans une moindre mesure, les scénarios de formation des planètes (voir section 1.2) n’expliquent pas l’obliquité actuelle de Saturne (27 deg). Ward & Hamilton (Ward & Hamilton, 2004; Hamilton & Ward, 2004) ont montré qu’actuellement les fréquences de précession de l’axe de Saturne et du pôle de l’orbite de Neptune sont voisines. L’incertitude sur la vitesse de précession de l’axe de Saturne due à la mauvaise connaissance du moment d’inertie de la planète est telle que l’égalité entre les deux fréquences est possible. S’il est curieux que Saturne ait une obliquité aussi élevée que 27 deg, il est encore plus exceptionnel que les deux fréquences de précession soient si proches par hasard.

Ward & Hamilton proposent alors que la configuration actuelle du système Saturne – Neptune résulte d’une capture en résonance. Selon leur modèle, Saturne s’est formée avec une obliquité nulle et, soit l’une des fréquences de précession, soit les deux ont évolué et ont fait basculer Saturne. L’orientation de l’axe de Saturne fournit alors une contrainte sur la vitesse à laquelle ces fréquences ont varié. Or ces fréquences sont liées aux paramètres orbitaux des deux planètes et ceux-ci ont évolué durant la phase de migration dans le disque de planétésimaux (voir section 1.1.4).

En supposant que le basculement a eu lieu durant cette phase, il est alors possible de contraindre la vitesse de migration, en particulier celle de Neptune. Nous avons aussi testé les possibilités de basculement dans le cas où le moment d’inertie de Saturne est trop élevé pour qu’il y ait résonance aujourd’hui. Une telle valeur a été obtenue récemment par Helled et al. (2009). Nous avons montré que si le basculement s’est effectué durant la phase de migration telle qu’elle est décrite par le modèle de Nice (Tsiganis et al., 2005), alors les deux mouvements de précession doivent être en résonance aujourd’hui. Cela exclut la valeur du moment d’inertie obtenu par Helled et al. (2009). De plus, en considérant une évolution exponentielle des demi-grands axes, inclinaisons et excentricités, nous avons montré que le temps caractéristique de ces évolutions a dû être supérieur à environ 7 millions

d'années. Cette limite est atteinte dans le cas où l'inclinaison initiale de Neptune est élevée (supérieure à 10 deg). Dans le cas d'une inclinaison initiale plus basse, l'interaction spin-orbite avec Saturne est plus faible et la contrainte monte à plus de 80 millions d'années.

Extrasolar Planets in Multi-Body Systems: Theory and Observations
K. Goździewski, A. Niedzielski and J. Schneider (eds)
EAS Publications Series, **42** (2010) 345-353
www.eas.org

SPIN AXIS EVOLUTION OF INTERACTING BODIES

G. Boué¹ and J. Laskar¹

Abstract. We consider two different general problems: a three body problem with one solid body, and a two body problem with two interacting solids. This can be a Sun-planet-satellite problem and a binary system of non spherical bodies respectively. We demonstrate that after adequate averaging, these problems can be reduced to non-trivial integrable problems for which we provide the complete solutions. These results should be useful for the understanding of the evolution of planetary and satellites' spin axes over long time-scales, and thus for the search of dynamical constraints on the evolution of the Solar System.

1 Introduction

We highlight the equivalence of two apparently different problems treated in (Boué & Laskar 2006, 2009) (hereafter BL06 and BL09). We call them respectively the lunar problem and the solid-solid problem. The lunar problem is the study of a three body system composed of a central star, a planet orbiting the star, and a satellite. In this system, the planet is described as a rigid body and our main focus is the evolution of its spin axis. We also look at the motion of the orbital plane of the satellite and of the planet. In the solid-solid problem, we analyze the evolution of the spin axis of two rigid bodies orbiting each other and the motion of their orbital plane.

The precession of a planet with a satellite has been studied since d'Alembert and Lagrange in the case of the Earth-Moon system. Many improvements have been made since then (*e.g.* Goldreich 1965, 1966; Ward 1975; Tremaine 1991; Kinoshita 1993). However, only the asymptotic solutions corresponding to a far or a close satellite were known. In BL06, the secular evolution of such systems was solved in all cases.

The solid-body–solid-body interaction is a complex problem. Analytical studies focus mainly on the expansion of the gravitational potential (Borderies 1978;

¹ CNRS, UMR 8028, INSU, Observatoire de Paris, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

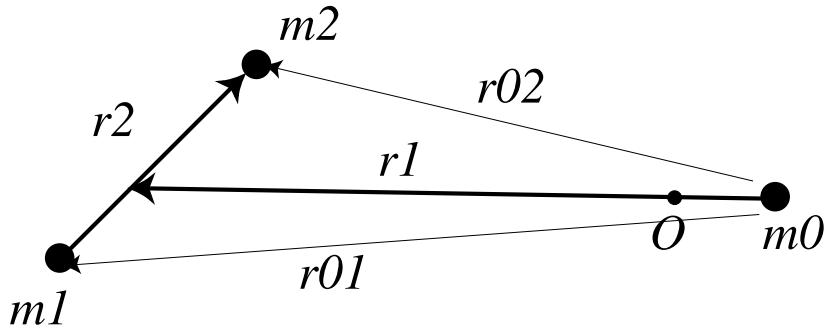


Fig. 1. Jacobi coordinates in the lunar problem. O is the barycenter of the full system, \mathbf{r}_1 is the position vector of the planet-satellite barycenter relative to the star m_0 , and \mathbf{r}_2 is the position vector of the satellite barycenter relative to the planet barycenter.

Paul 1988; Tricarico 2008). A few others give only stationary solutions in the case of two triaxial bodies (Maciejewski 1995) or in the simpler case where the central body is spherical (Abul'naga & Barkin 1979; Wang *et al.* 1991). General motions were studied numerically on a typical binary asteroid system, called 1999 KW4, (Fahnestock & Scheeres 2008). In BL09, the long term evolution is solved in the same manner as in BL06.

2 Two Different Problems

The two systems have different numbers of bodies. Thus, their evolution is described by different sets of variables. That is why it is necessary to study the two problems separately. Nevertheless, the chosen coordinates are similar. In both cases, we use a vectorial approach that makes the equations easy to manipulate (see Milankovich 1939).

2.1 The Lunar Problem

In the lunar problem, we analyze a three body system with a central star, an axisymmetric oblate planet and a satellite, whose masses are respectively m_0 , m_1 and m_2 . The moments of inertia of the rigid planet are A at its equator and $C \geq A$ along the figure axis. In this system, we represent the position of the bodies with Jacobi coordinates (see Fig. 1) and the planet orientation by its figure axis \mathbf{K} and its angular momentum \mathbf{G} . We do not use the gyroscopic approximation. We thus allow the two vectors to be unmerged.

2.2 The Solid-Solid Problem

In this system, the two bodies are triaxial with respective moments of inertia $A_1 \leq B_1 \leq C_1$ and $A_2 \leq B_2 \leq C_2$ and respective masses m_1 and m_2 . The separation between their barycenters is given by the position vector \mathbf{r} , and their orientations by the vectors of their principal bases $(\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1)$ and $(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2)$,

where their tensors of inertia are diagonal, and their angular momenta \mathbf{G}_1 and \mathbf{G}_2 .

3 Similarities

3.1 Averaging

The evolution of these two systems is assumed to be regular and not resonant. Both problems have *a priori* 9 degrees of freedom: 3 per orbit, and 3 per rigid body. In the lunar problem, there is the orbit of the satellite around the planet, the orbit of the planet-satellite barycenter around the central star, and the rigid planet. In the solid-solid problem, there is the relative orbit, and the two bodies. However, because of total angular momentum conservation, the motions are combinations of only 8 fundamental modes with their respective fundamental frequencies.

These modes can have very different periods. The proper rotation of the rigid bodies and the mean motions are very fast compared to the slow evolution of the angular momentum of the orbital planes and the rigid bodies. As we are only interested in the secular motion of the angular momenta, we average the equations of motion over the angles where motion is fast. The precession of the periapses has a long period. We could have set the eccentricity to zero to simplify the problems, but we prefer to average over the longitude of the periapses. We thus keep the problem more general with non-zero eccentricity.

3.2 Averaged Equations

In this section, we skip the calculations of the full Hamiltonians (before averaging) that are specific to each problem. Details can be found in BL06 and BL09. After averaging, the remaining variables are the angular momenta. In the lunar problem, these are the angular momentum of the two orbits \mathbf{G}_1 and \mathbf{G}_2 and of the planet \mathbf{G} . In the solid-solid case, these are the angular momentum of the orbit \mathbf{G} and of the two bodies \mathbf{G}_1 and \mathbf{G}_2 .

The equations of motion of these vectors are similar to one another:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{G}} &= \nabla_{\mathbf{G}} H_s \times \mathbf{G}, \\ \dot{\mathbf{G}}_1 &= \nabla_{\mathbf{G}_1} H_s \times \mathbf{G}_1, \\ \dot{\mathbf{G}}_2 &= \nabla_{\mathbf{G}_2} H_s \times \mathbf{G}_2,\end{aligned}$$

where H_s is the secular Hamiltonian of the system (see *e.g.* Borisov & Mamaev 2005). We thus have $\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_1 \cdot \dot{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_2 \cdot \dot{\mathbf{G}}_2 = 0$ which means that the norms $\gamma = \|\mathbf{G}\|$, $\beta = \|\mathbf{G}_1\|$ and $\alpha = \|\mathbf{G}_2\|$ are constant. It is thus possible to follow the evolution directly in terms of the unit vectors along these angular momenta $\mathbf{w} = \mathbf{G}/\|\mathbf{G}\|$, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{G}_1/\|\mathbf{G}_1\|$ and $\mathbf{w}_2 = \mathbf{G}_2/\|\mathbf{G}_2\|$. We have

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{\gamma} \nabla_{\mathbf{w}} H_s \wedge \mathbf{w}, \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \frac{1}{\beta} \nabla_{\mathbf{w}_1} H_s \wedge \mathbf{w}_1, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = \frac{1}{\alpha} \nabla_{\mathbf{w}_2} H_s \wedge \mathbf{w}_2. \quad (3.3)$$

3.3 Secular Hamiltonians

Not only are the evolution equations of the vectors identical to one another, but also, the secular Hamiltonians of the two systems have the same form. Indeed, let $x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1$, $y = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2$ and $z = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$, the two secular Hamiltonians then read

$$H_s = -\frac{1}{2}\mathbf{a}x^2 - \frac{1}{2}\mathbf{b}y^2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}z^2 + \mathfrak{d}xyz - \frac{1}{4}\mathbf{e}x^4 - \frac{1}{4}\mathbf{f}y^4 - \frac{1}{2}\mathbf{g}x^2y^2, \quad (3.4)$$

where the coefficients \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathfrak{d} , \mathbf{e} , \mathbf{f} and \mathbf{g} are explicit functions of the physical and orbital parameters. The only difference between the two systems is that the coefficients \mathfrak{d} , \mathbf{e} , \mathbf{f} and \mathbf{g} vanish in the lunar problem.

4 A common Resolution

Since the Hamiltonians and the equations of motion of the two problems are equivalent, the methods of solution and the solutions themselves are also identical. Here we recall the method we have employed in our two papers.

4.1 First Integrals

In the secular problem, the variables are the three unit vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 along the angular momenta of the orbits and of the solid bodies. We thus have 9 unknowns. As these are unit vectors, we have three first integrals corresponding to their norms. We have three other first integrals coming from total angular momentum conservation and a final first integral given by total energy conservation. We thus have 9 unknowns and only 7 first integrals. We need one more first integral to solve the equations trivially.

4.2 Reduced Problem

As the secular Hamiltonian cannot be solved directly in a trivial manner, we consider the following reduced problem. Instead of looking at the motion of the vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 , we focus on the evolution of their dot products x , y , z . From the equations of motion (3.1–3.3), it is easy to get the equations describing the evolution of x , y , z in terms of x , y and z . Moreover, the reduced problem contains only 3 unknowns and 2 first integrals. Indeed, we still have total energy conservation (3.4), and total angular momentum conservation, giving

$$\gamma\beta x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z = K = \text{Cst.} \quad (4.1)$$

The reduced problem is thus integrable, the orbit of (x, y, z) lies at the intersection \mathcal{C} of the quartic $H_s = \text{Cst}$ and the plane $K = \text{Cst}$.

4.3 Cassini Berlingot

The point with coordinates (x, y, z) cannot describe the full intersection \mathcal{C} . Indeed, x , y and z are dot products of the unit vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 and cannot have

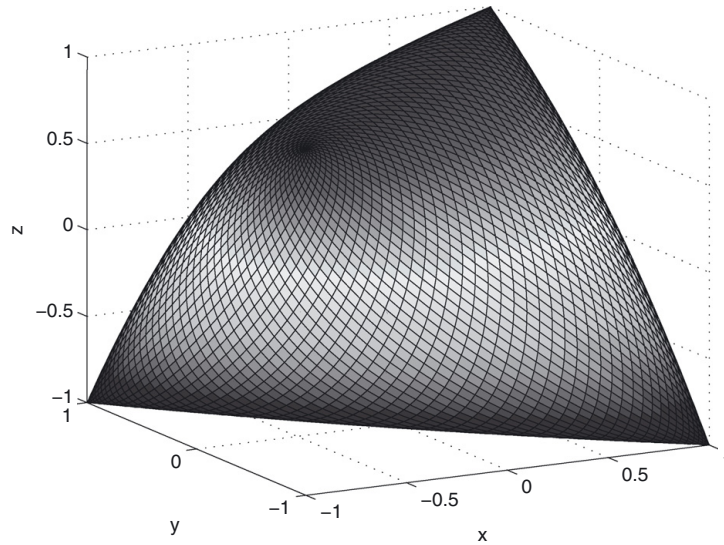


Fig. 2. The surface $v^2(x, y, z) = 0$. As $v^2 \geq 0$, the allowed space is the interior of the Cassini berlingot shaped volume.

absolute values greater than 1. Moreover, the square of the volume v defined by the three vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 is given by the Gram determinant

$$v^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{vmatrix} = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + xyz, \quad (4.2)$$

and this quantity is necessarily positive. The surface in (x, y, z) defined by $v^2 = 0$ is represented in Figure 2. We call this surface the Cassini berlingot after the name of a French hard candy with the same shape. We attributed this surface to Cassini because it contains the fixed points for which the volume defined by the three angular momenta vanishes. This means that the three vectors are in the same plane, as in the Cassini states (Colombo 1966; Peale 1969; Ward *et al.* 1975; BL06; BL09). Outside of the Cassini berlingot, we have $v^2(x, y, z) < 0$ which is impossible, thus the evolution of (x, y, z) is confined inside the Cassini berlingot.

4.4 Periodic Motion

In most astronomical problems, the orbit of (x, y, z) crosses the Cassini berlingot. In BL06 and BL09, we show that in this case, the point (x, y, z) moves periodically inside the Cassini berlingot and bounces on the surface. Such a trajectory is depicted in Figure 3. Let T be the period of $(x(t), y(t), z(t))$ and $\nu = 2\pi/T$ be its frequency.

4.5 Global Solution

Saying that x , y and z are T -periodic functions of time, it is possible to rewrite the equations of motion (3.1–3.3) in terms of the matrix $\mathcal{W} = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ in the

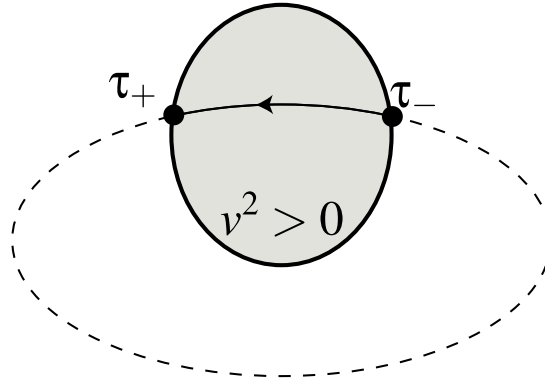


Fig. 3. The shaded area corresponds to the region where $v^2 > 0$, inside the Cassini berlingot. The orbit intersects the Cassini berlingot at the points τ_+ and τ_- . The system moves periodically between these two intersection points.

form of a linear system of first order with periodic coefficients. In BL06 and BL09, we show that the solution can be expressed in the form

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{R}(t)\tilde{\mathcal{W}}(t), \quad (4.3)$$

where $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ is periodic with period T , and $\mathcal{R}(t)$ is a uniform rotation around the total angular momentum.

The global solution has thus 2 frequencies, one corresponding to the uniform rotation that can be referred to as a global precession of the three vectors, which we designate as Ω , and the other corresponding to the periodic motion of (x, y, z) that can be referred to as a nutation motion.

Solutions expressed in terms of quadratures can be calculated, but the calculations are tedious. Nevertheless, they are presented in BL06. However, in both papers, we give specific analytical approximations that are well suited for astronomical problems.

5 Solutions

In order to check the reliability of our studies, we compare our analytical results with numerical integration of the full systems, *i.e.* without averaging. Here we show a few results for the two problems: the value of the precession rate in the lunar problem and the trajectories of the unit vectors in the solid-solid problem.

5.1 The Lunar Problem

We have seen that the secular evolution of this system contains only two fundamental frequencies. The precession frequency Ω and the nutation frequency ν . Figure 4 shows the evolution of the precession frequency as a function of the distance of the satellite in the case of the Earth-Moon system. This figure depicts

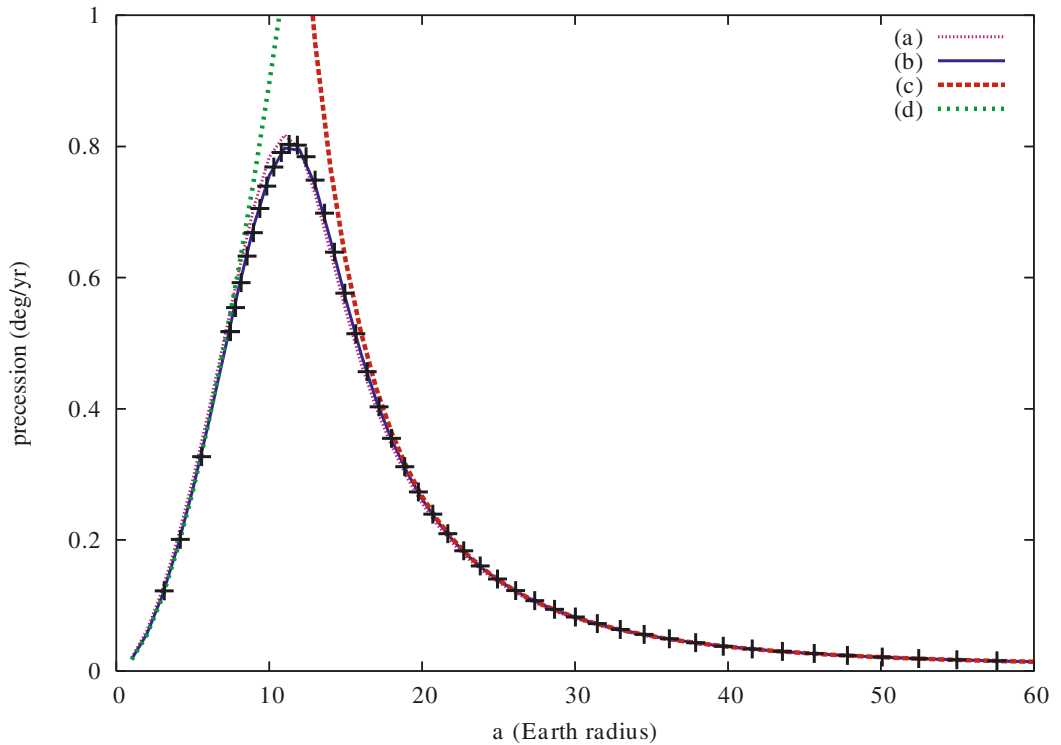


Fig. 4. Different precession frequency computations for the Earth-Moon system as a function of the distance of the Moon. Curves (c) and (d) show classical computations in the approximation of a far (respectively close) satellite. Curves (a) and (b) are computed with approximated analytical formulas either directly or after one iteration. The crosses correspond to numerical experiments with the complete Sun-Earth-Moon problem, without averaging.

the continuity of the precession rate between the two previously known asymptotic approximations and the good agreement between the numerical integration and our analytical approximation of the secular evolution.

5.2 The Solid-Solid Problem

For this system, we look at the trajectories of the unit vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 . We took orbital and physical parameters close to those of the typical binary asteroid system 1999 KW4. The output of the numerical integration as well as the analytical approximation are displayed in Figure 5. In panel (5.a), the results are presented in a fixed reference frame, whereas in all the other panels, the trajectories are given in a frame rotating with the precession frequency, in order to cancel the precession and emphasize the nutation motion. The numerical outputs occupy thick annuli because of the high frequencies appearing in the full system. However, after a low pass filter, the agreement between the numerical integration and the analytical approximation is very good.

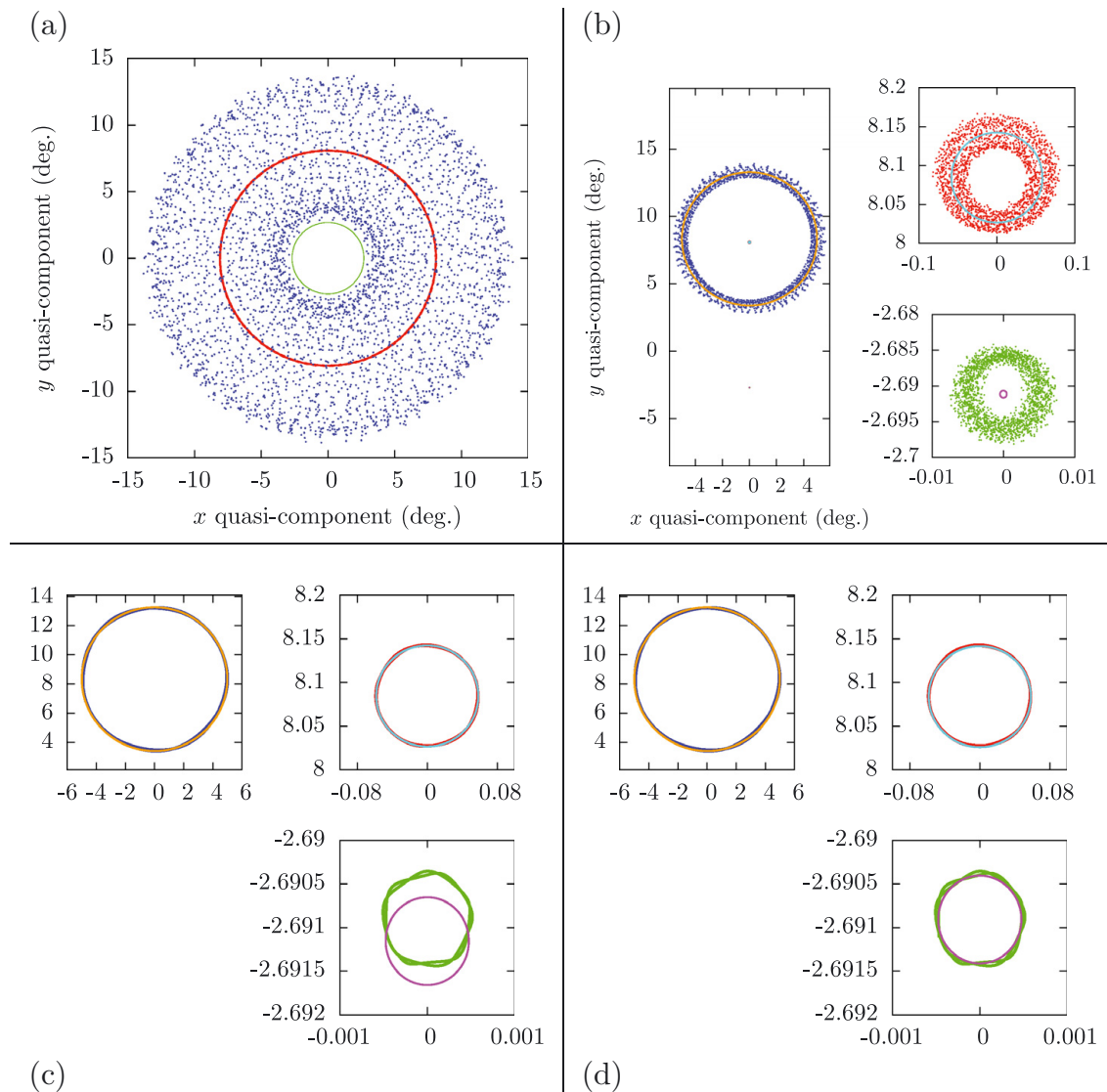


Fig. 5. Output of a numerical integration of the full solid-solid problem, showing a projection of the unit vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 , and \mathbf{w}_2 , respectively in red, green and blue, on the invariant plane. In panel (a), the representation is done in a fixed reference frame. In panel (b), it is done in a rotating frame with the precession frequency. We thus see the nutation motion only. Because of the small nutation amplitudes, the trajectories of \mathbf{w} and \mathbf{w}_1 are zoomed in the right small panels. The superposed curves are analytical approximations. The thickness of the annuli caused by nutation is due to the high frequencies. In panel (c), the numerical output is filtered with a low pass filter. In panel (d), a small correction of $3.6''$ on \mathbf{w}_1 was done on the initial conditions to match the numerical outputs with the analytical approximations.

6 Conclusion

The lunar problem and the solid-solid problem are *a priori* two distinct non-integrable problems. Nevertheless, we show here that after proper averaging, their

secular evolution can be treated with the same formalism and integrated exactly. This result can be extended to any three vector problem that corresponds to a system with three angular momenta. There are three kinds of such systems: the two systems presented here and the four-body problem made of point masses only.

References

- Abulnaga, M.Z., & Barkin, I.V., 1979, *Astron. Z.*, 56, 881
Borderies, N., 1978, *Celest. Mech.*, 18, 295
Borisov, A.V., & Mamaev, I.S., 2005, *Din. Tverdogo Tela*, R&C Dynamics, Moscow (in Russian)
Boué, G., & Laskar, J., 2006, *Icarus*, 185, 312
Boué, G., & Laskar, J., 2009, *Icarus*, 201, 750
Colombo, G., 1966, *Astron. J.*, 71, 891
Fahnestock, E.G., & Scheeres, D.J., 2008, *Icarus*, 194, 410
Goldreich, P., 1965, *Astron. J.*, 70, 5
Goldreich, P., 1966, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 4, 411
Kinoshita, H., 1993, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 57, 359
Maciejewski, A.J., 1995, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 63, 1
Milankovich, M., 1939, *Bull. Serb. Acad. Math. Nat. A*, number 6
Paul, M.K., 1988, *Celest. Mech.*, 44, 49
Peale, S.J., 1969, *Astron. J.*, 74, 483
Tremaine, S., 1991, *Icarus*, 89, 85
Tricarico, P., 2008, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 100, 319
Wang, L.-S., Krishnaprasad, P.S., & Maddocks, J.H., 1991, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 50, 349
Ward, W.R., 1975, *Astron. J.*, 80, 64

Available online at www.sciencedirect.com

ICARUS

Icarus 185 (2006) 312–330

www.elsevier.com/locate/icarus

Precession of a planet with a satellite

G. Boué, J. Laskar *

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

Received 14 June 2006

Available online 29 September 2006

Abstract

The contribution of a satellite in the precession motion of the axis of an oblate planet has been previously studied in the approximation of a distant satellite, or in the approximation of a very close satellite. Here we study the general problem for an arbitrary semimajor axis for the satellite, without performing the usual gyroscopic approximation. We present precessional equations valid in a very general setting, and we demonstrate that this problem, after the classical expansion of the satellite potential, and averaging over the fast angles, is indeed integrable. We provide here the complete solution of this problem by quadrature, as well as some explicit approximate solutions. We also demonstrate that after averaging over the nutation motion, the pole of the spin axis, the pole of the satellite orbit, and the pole of the planet orbit remain coplanar with the total angular momentum and precess uniformly around the total angular momentum.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

Keywords: Celestial mechanics; Planetary dynamics; Rotational dynamics; Satellites, dynamics; Moon

1. Introduction

We are considering here a relatively simple system composed of a central star, a planet orbiting the star, and a satellite orbiting the planet. We increase the complexity of the problem by considering that our planet is a solid non-spherical body. The most obvious system of this kind is the Sun–Earth–Moon system, but some triple star systems will fit in our study as well. We focus here on the precessional motion of the spin axis of the planet, and in a lesser degree on the precessional motion of the orbital plane of the satellite and of the planet.

The computation of the precession of the spin axis of a planet in presence of a distant satellite is well known (see Murray, 1983). In this approximation, the precession torque, and thus the precession frequency, increases as $1/r^3$ when the distance r of the satellite to the planet decreases. It is thus clear that these formulas are no longer valid for a close satellite.

The understanding of the contribution of a close satellite was first motivated by the study of the martian satellites, Phobos and Deimos. Goldreich (1965) investigated first the interaction of a close satellite with a precessing planet, and demonstrated

that a close satellite will follow the planet with a nearly constant inclination to the equator. This work was followed by the contributions of Kinoshita (1993) who analyzed the motion of the uranian satellites under the secular change of the obliquity of the planet, and Efroimsky (2004) who consider non-uniform precessions.

In his beautiful study of the lunar orbit, Goldreich (1966) extended his work to the Sun–Earth–Moon system, but assumed that the planet orbit is fixed and circular orbits for both satellite and planet. This work was extended by Touma and Wisdom (1994a) using a non-averaged Hamiltonian, and equations of motion expressed in the mobile frame linked to the planet.

Explicit analytical expressions for the contribution of a close satellite to the precessional motion of a planet were derived by Ward (1975), using the equations of Goldreich (1966), with zero eccentricities, zero inclinations, and the gyroscopic approximation (i.e., one assumes that the axis of rotation is the axis of figure of the planet). These computations were improved by Tremaine (1991) who considered the inclinations, and corrected the mass factors of Goldreich (1966).

In Section 2, we consider the general problem with an oblate planet and a satellite. Contrarily to many of the previous study, we do not make the gyroscopic approximation, thus allowing for an axis of figure different from the axis of rotation. Nev-

* Corresponding author.

E-mail address: laskar@imcce.fr (J. Laskar).

ertheless, in the present work, we simplify the equations of motion by averaging over the rotational motion of the planet, providing some precession (and nutation) equations that can be used in a very general setting.

In a second stage (Section 3), we derive the secular equations that are obtained by averaging over the orbital motion of the satellite and the planet, and over the argument of perihelion of the satellite. We obtain a set of secular equations that describe in a closed way, the evolution of the spin of the planet, the orbital plane of the planet, and the orbital plane of the satellite in a very general setting.

We then demonstrate that, quite surprisingly, this differential system of order 9 with 7 integrals is integrable, and can be decomposed as a relative periodic motion (the nutation) and a general precessional motion. The two periods can be derived by quadratures. We obtain thus some general formulas (although not explicit) that provide the precession formulas for the axis of the planet, in all cases, for a distant or a close satellite, but also in the intermediate regime where none of the previous approximations is valid (Section 4). In this section, we also demonstrate that after averaging over the nutation motion, the pole of the spin axis, the pole of the satellite orbit, and the pole of the planet orbit remain coplanar with the total angular momentum (Section 4.3). This is in some sense a generalization of the Cassini Laws.

After some discussion of numerical examples (Section 5), in Section 6, we proceed to an additional approximation that allows to obtain a completely explicit solution of this problem, for arbitrary values of the eccentricities, inclination, and semi-major axis of the planet and satellite, whenever the averaging is possible. We can then compare this approximation with our rigorous expression, and with the results of non-averaged numerical integrations in different settings. In particular, we use as a test model a lunar motion where the Moon distance to the Earth is varied from the surface of the Earth to some limit distance where, due to the solar perturbation, the Moon escapes, and no longer remains a satellite of the Earth. We make also comparison of our results with the classical computation in the case of a distant satellite, and the previous expressions of Ward (1975) and Tremaine (1991), for close satellites (Section 7).

2. Fundamental equations

We are considering here a three-body problem with a central star, an oblate planet, and a satellite orbiting the planet, with respective barycentric coordinates \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 and masses m_0, m_1, m_2 . The full Hamiltonian of this problem can be expressed as

$$\mathcal{H} = H_N + H_E + H_I, \quad (1)$$

where H_N is the Hamiltonian of three mass points, H_E describes the free rigid body motion and H_I contains the gravitational interaction between the bulge and the other two mass points. In such a satellite problem, the orbital Hamiltonian is

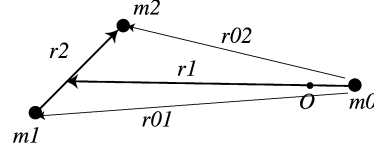


Fig. 1. Jacobi coordinates.

naturally expressed in Jacobi coordinates,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \delta & \delta \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where $\delta = m_2/(m_1 + m_2)$. With this choice, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0$ is the barycentric position vector of the Sun, \mathbf{r}_1 the position vector of the planet-satellite barycenter relative to the Sun, and \mathbf{r}_2 the position vector of the satellite relative to the planet (Fig. 1). The symplectic structure is preserved using the conjugate momentum

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_0 \\ \tilde{\mathbf{r}}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \delta & 1 - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where $\tilde{\mathbf{u}}_i = m_i \dot{\mathbf{u}}_i$ ($i = 0, 2$) are the barycentric momentum. In these coordinates, the Newtonian interaction is

$$H_N(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2\beta_2} - \frac{\mu_2 \beta_2}{r_2} - \frac{\mathcal{G}m_0 m_1}{r_{01}} - \frac{\mathcal{G}m_0 m_2}{r_{02}}, \quad (4)$$

where $\mu_2 = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$, $\beta_1 = M_{12}m_0/(M_{12} + m_0)$, $\beta_2 = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ are the reduced masses with $M_{12} = m_1 + m_2$, and r_{01}, r_{02} are the modulus of the position vectors $\mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}$ from the Sun to the planet and satellite, expressed as

$$\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_{02} = \mathbf{r}_1 + (1 - \delta)\mathbf{r}_2. \quad (5)$$

The Hamiltonian of the free motion of a rigid body is

$$H_E = \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathcal{I}^{-1} \mathbf{G}, \quad (6)$$

where \mathbf{G} is the angular momentum of the rigid body and \mathcal{I} its inertia tensor. Let $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ be the principal frame where \mathcal{I} is diagonal [$\mathcal{I} = \text{diag}(A, B, C)$]. For sake of clarity, we present here the case of an axisymmetric planet ($A = B$). The general case can be treated in the same way providing some additional averaging, and will be outlined in Section 2.6. In the present case, we have then,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/A & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{pmatrix}_{(_, _, \mathbf{K})} \\ &= \frac{1}{A} Id + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \mathbf{K}^t \mathbf{K} \end{aligned} \quad (7)$$

which gives

$$H_E = \frac{\mathbf{G}^2}{2A} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{G})^2}{2}, \quad (8)$$

where A and C are the moments of inertia of the planet.

The interaction between the bulge and the other two mass points is expanded in terms of Legendre polynomials as

$$H_I = -\frac{\mathcal{G}(C-A)m_0}{2r_{01}^3} \left[1 - 3 \left(\frac{\mathbf{r}_{01} \cdot \mathbf{K}}{r_{01}} \right)^2 \right] - \frac{\mathcal{G}(C-A)m_2}{2r_2^3} \left[1 - 3 \left(\frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{K}}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

2.1. Equations of motion

The Hamiltonian is written in terms of non-canonical coordinates $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{K}, \mathbf{G})$. The equations of motion are

$$\dot{y} = \{\mathcal{H}, y\} = -B(y)\nabla_y \mathcal{H},$$

where y is any kind of coordinate and $B(y)$ the matrix of Poisson brackets $\{y_i, y_j\}$.¹ For the components of \mathbf{r}_k and $\tilde{\mathbf{r}}_k$, the standard symplectic structure holds, $\{r_{ki}, \tilde{r}_{kj}\} = -\delta_{ij}$. For (\mathbf{K}, \mathbf{G}) , the Euler–Poisson structure holds, $\{K_i, K_j\} = 0$, $\{K_i, G_j\} = -\varepsilon_{ijk}K_k$ and $\{G_i, G_j\} = -\varepsilon_{ijk}G_k$ (Borisov and Mamaev, 2005; see also Dullin, 2004).² All other fundamental Poisson brackets are identically equal to zero. $B(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{K}, \mathbf{G})$ is then

$$B(y) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|cc} 0 & -I & 0 \\ \hline I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & K_2 \\ -K_2 & K_1 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 0 & -K_3 & K_2 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_2 \\ 0 & 0 & K_3 & 0 & -K_1 \\ -K_2 & K_1 & 0 & G_3 & 0 & -G_1 \\ & & & -G_2 & G_1 & 0 \end{array} & \end{pmatrix}. \quad (10)$$

And the equations of motion are

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathcal{H}, & \dot{\mathbf{K}} &= \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \wedge \mathbf{K}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{H}, & \dot{\mathbf{G}} &= \nabla_{\mathbf{K}} \mathcal{H} \wedge \mathbf{K} + \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \wedge \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (11)$$

Now, the advantage of taking \mathbf{K} and \mathbf{G} as coordinates to define the orientation of the rigid body is obvious: the study can be done in a heliocentric frame and equations in \mathbf{K} and \mathbf{G} look like equations of precession.

2.2. First simplification

We have assumed that the rigid body is axisymmetric. This is why \mathbf{I} and \mathbf{J} do not appear in the equations of motion (11). Because of this symmetry, the rotational angle of the planet l (see Fig. 2) will not appear as well in the Hamiltonian. It is easy to verify that $\mathbf{G} \cdot \mathbf{K}$ is constant and thus any function $h(\mathbf{G} \cdot \mathbf{K})$ in the Hamiltonian will not contribute to the equations of motion (11).

¹ With position (q_i) and associated momentum (p_i) , we define the Poisson bracket as $\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$.

² The Levi-Civita symbol ε_{ijk} is zero if two indices i, j, k are equal, and is the signature of the permutation (i, j, k) otherwise.

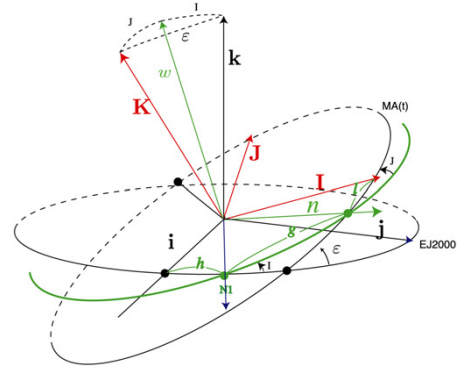


Fig. 2. Definition of Andoyer's coordinates. (i, j, k) is a fixed reference frame, and (I, J, K) the reference frame of the principal axis of inertia of the solid body. The Andoyer action variables are $(G, H = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}, L = \mathbf{G} \cdot \mathbf{K})$ with the associated angles (g, h, l) (Andoyer, 1923).

The complete Hamiltonian can then be expressed on the form

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}_b(\mathbf{r}, K, \mathbf{G}) \quad (12)$$

with

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) = H_N - \frac{\mathcal{G}(C-A)}{2} \left(\frac{m_0}{r_{01}^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) \quad (13)$$

and

$$\mathcal{H}_b(\mathbf{r}, K, \mathbf{G}) = \frac{G^2}{2A} + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{K})^2 + (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{K})^2, \quad (14)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \left[\frac{3\mathcal{G}(C-A)m_0}{2r_{01}^5} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{r}_{01}, \\ \mathbf{u}_2 &= \left[\frac{3\mathcal{G}(C-A)m_2}{2r_2^5} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

As a consequence, $\nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H}$ and \mathbf{G} are collinear and the equation of motion for (\mathbf{K}, \mathbf{G}) in (11) simplifies to

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{G}/A \wedge \mathbf{K}, \\ \dot{\mathbf{G}} &= 2(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{K})\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{K} + 2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{K})\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (16)$$

2.3. Averaging

The vector \mathbf{K} precesses around the unit vector $\mathbf{w} = \mathbf{G}/G$ with nearly the rotation rate of the planet G/A . The unit vector $\mathbf{n} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{K} / \|\mathbf{w} \wedge \mathbf{K}\|$, is thus rotating in the orthogonal plane to \mathbf{w} (Fig. 2). We want now to average over this fast motion. If we use Andoyer variables (G, H, L, g, h, l) (Fig. 2), in Eq. (16), \mathbf{K} do not depend on l and we have

$$\mathbf{K}(G, H, L, g, h) = (\cos J)\mathbf{w} + (\sin J)\mathbf{n} \wedge \mathbf{w} \quad (17)$$

with

$$\cos J = L/G. \quad (18)$$

In the fixed reference frame (i, j, k) , the coordinates of \mathbf{w} are

$$\mathbf{w}_{(i,j,k)} = \begin{pmatrix} \sin I \sin h \\ -\sin I \cos h \\ \cos I \end{pmatrix} \quad (19)$$

with $\cos I = H/G$. Moreover, only \mathbf{n} depends on the fast angle g with an averaged value

$$\langle \mathbf{n} \rangle_g = \mathbf{0}. \quad (20)$$

In order to average \mathcal{H}_b over g , we write in matrix form, for $i = 1, 2$,

$$(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{K})^2 = {}^t \mathbf{u}_i \mathbf{K}^t \mathbf{K} \mathbf{u}_i. \quad (21)$$

All terms of degree 1 in \mathbf{n} will average to $\mathbf{0}$. Using (17), and after a circular permutation in the triple product, we have

$$\langle (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{K})^2 \rangle_g = (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w})^2 \cos^2 J + \langle (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}_i))^2 \rangle_g \sin^2 J. \quad (22)$$

We thus need to compute the average $\langle \mathbf{n}^t \mathbf{n} \rangle_g$. In the intermediary basis $(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'')$, we have

$$\mathbf{n}_{(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}'')} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos g \\ \sin g \end{pmatrix} \quad (23)$$

and thus

$$\langle \mathbf{n}^t \mathbf{n} \rangle_g = \frac{1}{2} (\text{Id} - \mathbf{w}^t \mathbf{w}). \quad (24)$$

The $\mathbf{w}^t \mathbf{w}$ part will cancel and remains only

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{K})^2 \rangle_g &= (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w})^2 \cos^2 J + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{w})^2 \sin^2 J \\ &= \frac{\mathbf{u}_i^2}{2} \sin^2 J + (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w})^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right). \end{aligned} \quad (25)$$

The averaged Hamiltonian $\langle \mathcal{H}_b \rangle_g$ is thus

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_b \rangle_g &= \frac{G^2}{2A} + \sum_{i=1,2} \frac{\mathbf{u}_i^2}{2} \sin^2 J \\ &\quad + (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w})^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right). \end{aligned} \quad (26)$$

As $\langle \mathcal{H}_b \rangle_g$ does not depend on g and l , G and L are constant, and so is J , as $\cos J = L/G$. As in Section 2.1, we have $\{w_i, w_j\} = -\epsilon_{ijk} w_k / G$, and the equations in \mathbf{w} become thus

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{G} \nabla_{\mathbf{w}} \langle \mathcal{H} \rangle_g \wedge \mathbf{w}, \quad (27)$$

that is

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{2 - 3 \sin^2 J}{G} ((\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{w} + (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{w}). \quad (28)$$

Remark. We have not proceeded here to the gyroscopic approximation that consists to assume that the axis of figure (\mathbf{K}) is the same as the angular momentum axis (\mathbf{w}), but we have simply averaged the Hamiltonian over the fast rotation angle g . Although for a fast rotating (and non-rigid) planet, the angle J is small ($J = 10^{-7}$ radians for the Earth), we prefer the present

formulation that is less confusing. One should nevertheless notice that if the terms of order $\sin^2 J$ are neglected, the rotational Hamiltonian \mathcal{H}_b (26) becomes

$$\mathcal{H}_1 = \frac{G^2}{2A} + (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w})^2 + (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w})^2 \quad (29)$$

which corresponds to the gyroscopic approximation. It should be noted that usually, in the gyroscopic approximation, one merely replaces \mathbf{K} by \mathbf{w} , which corresponds to neglect terms in $O(\sin J)$. Here, by using the averaged equations, we show that we obtain in fact a better approximation, as $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_b + O(\sin^2 J)$.

2.4. Hamiltonian in $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{w})$

We can now gather the parts of the Hamiltonian that will drive the evolution of the orbital variables $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ and spin axis (\mathbf{w}). From now on, we will call spin axis the axis of the rotational angular momentum of the planet, with unit vector \mathbf{w} . We have

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{w}) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_{01} \quad (30)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{\tilde{\mathbf{r}}_1^2}{2\beta_1} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_2^2}{2\beta_2} - \frac{\mu_1 \beta_1}{r_1} - \frac{\mu_2 \beta_2}{r_2}, \\ \mathcal{U}_1 &= \frac{\mu_1 \beta_1}{r_1} - \frac{G m_0 m_1}{r_{01}} - \frac{G m_0 m_2}{r_{02}}, \\ \mathcal{U}_2 &= -C_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2^3} - 3 \frac{(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{w})^2}{r_2^5} \right), \\ \mathcal{U}_{01} &= -C_1 m_0 \left(\frac{1}{r_{01}^3} - 3 \frac{(\mathbf{r}_{01} \cdot \mathbf{w})^2}{r_{01}^5} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

with

$$C_1 = \frac{G(C-A)}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right). \quad (32)$$

2.5. Averaging over the orbital motion

The unperturbed part \mathcal{H}_0 is the Hamiltonian of two distinct Keplerian problems and

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\mu_1 \beta_1}{2a_1} - \frac{\mu_2 \beta_2}{2a_2}, \quad (33)$$

while $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_{01}$ is a perturbation of this Keplerian problem. We will now average the Hamiltonian over the mean anomalies of the orbital motion of the planet and the satellite, using the relations detailed in Appendix A. We will use also the orthonormal basis $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}'_1, \mathbf{w}''_1)$ and $(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}''_2)$, where \mathbf{w}'_i is in the direction of the perihelion of the orbit defined by \mathbf{r}_i , and \mathbf{w}_i is the unit vector in the direction of the orbital angular momentum $\mathbf{G}_i = \beta_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i$. By averaging over the mean anomaly M_2 of the satellite motion, we have

$$\langle \mathcal{U}_2 \rangle_{M_2} = \frac{C_1 m_2}{2a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}} (1 - 3(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2)^2). \quad (34)$$

316

G. Boué, J. Laskar / *Icarus* 185 (2006) 312–330

In the expansion of \mathcal{U}_{01} in terms of $\rho = r_2/r_1$ and δ , we will neglect all terms of order higher than ρ^2 . We will thus neglect terms of order $\delta\rho^2, \delta^2\rho^2, \dots$. We have thus

$$\frac{1}{r_{01}^3} \approx \frac{1}{r_1^3} \left(1 + 3\delta \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^2} \right) \quad (35)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{r}_{01} \cdot \mathbf{w})^2}{r_{01}^5} &\approx \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w})^2}{r_1^5} - 2\delta \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w})(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{w})}{r_1^5} \\ &\quad + 5\delta \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w})^2}{r_1^7}. \end{aligned} \quad (36)$$

In the computation of $\langle \mathcal{U}_{01} \rangle_{M_1, M_2}$ (see Appendix A), all the terms of order δ are in fact of order at least $e_1 e_2 \delta \rho$. These terms are usually very small, but in order to allow for large eccentricities, we will average over the argument of perihelion of the satellite ω_2 . If we notice that

$$\langle \mathbf{r}_2 \rangle_{M_2, \omega_2} = 0 \quad (37)$$

then we see that all terms in δ disappear from $\langle \mathcal{U}_{01} \rangle_{M_1, M_2, \omega_2}$ and we are then left with

$$\langle \mathcal{U}_{01} \rangle_{M_1, M_2, \omega_2} \approx \frac{C_1 m_0}{2a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} (1 - 3(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1)^2). \quad (38)$$

After expanding up to second order in ρ , we have

$$\mathcal{U}_1 \approx \frac{\mathcal{G} m_0 \beta_2}{2} \left(\frac{r_2^2}{r_1^3} - 3 \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2}{r_1^5} \right). \quad (39)$$

Averaging over M_2 leads to

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}_1 \rangle_{M_2} &= -\frac{\mathcal{G} m_0 \beta_2 a_2^2}{4 r_1^3} \left(1 - 3 \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}_2)^2}{r_1^2} \right. \\ &\quad \left. - 3e_2^2 \left[1 + \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}_2'')^2}{r_1^2} - 4 \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}_2')^2}{r_1^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (40)$$

and after averaging over M_1

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}_1 \rangle_{M_1, M_2} &= \frac{\mathcal{G} m_0 \beta_2}{8} \frac{a_2^2}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} (1 - 3(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2)^2 \\ &\quad - 3e_2^2 (1 + (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2'')^2 - 4(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2')^2)). \end{aligned} \quad (41)$$

We will also average over the argument of perihelion ω_2 of the satellite. We have

$$\langle (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2')^2 \rangle_{\omega_2} = \langle (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2'')^2 \rangle_{\omega_2} = \frac{1}{2} (1 - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2)^2) \quad (42)$$

and thus

$$\langle \mathcal{U}_1 \rangle_{M_1, M_2, \omega_2} = \frac{\mathcal{G} m_0 \beta_2 a_2^2 (1 + \frac{3}{2} e_2^2)}{8 a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} (1 - 3(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2)^2). \quad (43)$$

With these approximations, in the averaged Hamiltonian, the semimajor axis of the planet and satellite are constant, as well as their eccentricity, while their orbital plane will precess and change its inclination. If we do not consider the constant terms in the averaged Hamiltonian, we are left with a Hamiltonian \mathcal{H}_s

that will describe the evolution of $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$

$$\mathcal{H}_s = -\frac{a}{2} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1)^2 - \frac{b}{2} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2)^2 - \frac{c}{2} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2)^2 \quad (44)$$

with

$$\begin{aligned} a &= \frac{3C_1 m_0}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}}, \\ b &= \frac{3C_1 m_2}{a_2^3 (1 - e_2^2)^{3/2}}, \\ c &= \frac{3\mathcal{G} m_0 \beta_2 a_2^2}{4a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} e_2^2 \right). \end{aligned} \quad (45)$$

2.6. Non-axisymmetric case ($A \neq B$)

For sake of simplicity, we have presented above the case of an axisymmetric planet ($A = B$). In fact, the general case can be treated in the same way if we average also over the Andoyer rotational angle l . Indeed, for any unit vector \mathbf{u} , the potential generated at $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ by the solid body is

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\mathcal{G}}{2r^3} [(B + C - 2A) + 3(A - B)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{J})^2 \\ &\quad - 3(C - A)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K})^2], \end{aligned} \quad (46)$$

with the average over l , g

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u} \cdot \mathbf{J})^2 \rangle_{g, l} &= \frac{\mathbf{u}^2}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 J}{2} \right) \\ &\quad + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2}{2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 J - 1 \right). \end{aligned} \quad (47)$$

It is then easy to show that the only change induced in the averaged equations (28) is to replace $(C - A)$ by $(C - A/2 - B/2)$ in the expression of \mathbf{u}_1 and \mathbf{u}_2 [Eq. (15)]. In the same way, the only change in the secular Hamiltonian \mathcal{H}_s (44) will be to replace C_1 (32) by

$$C_1' = \frac{\mathcal{G}(2C - A - B)}{4} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right), \quad (48)$$

and as well in the expressions of a, b, c (45).

3. Secular equations

The Hamiltonian (44) depends only on the unit vectors $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ of the rotational angular momentum of the planet \mathbf{G} , and of the orbital angular momentum $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ of the planet and of the satellite. The equations of motion can be derived easily as in Section 2.1, and we have

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} &= \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{G}, \\ \dot{\mathbf{G}}_1 &= \nabla_{\mathbf{G}_1} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{G}_1, \\ \dot{\mathbf{G}}_2 &= \nabla_{\mathbf{G}_2} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{G}_2. \end{aligned} \quad (49)$$

As $\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_1 \cdot \dot{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_2 \cdot \dot{\mathbf{G}}_2 = 0$, the norms γ, β, α of $\mathbf{G}, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ are constant ($\gamma = G$), and we obtain the equations in $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{\gamma} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{w},$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}}_1 &= \frac{1}{\beta} \nabla_{\mathbf{w}_1} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{w}_1, \\ \dot{\mathbf{w}}_2 &= \frac{1}{\alpha} \nabla_{\mathbf{w}_2} \mathcal{H}_s \wedge \mathbf{w}_2.\end{aligned}\quad (50)$$

That is

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= -\frac{\alpha}{\gamma} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w} - \frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{w}, \\ \dot{\mathbf{w}}_1 &= -\frac{c}{\beta} (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{w}_1 - \frac{\alpha}{\beta} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w} \wedge \mathbf{w}_1, \\ \dot{\mathbf{w}}_2 &= -\frac{b}{\alpha} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w} \wedge \mathbf{w}_2 - \frac{c}{\alpha} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2.\end{aligned}\quad (51)$$

These equations express the fact that each angular momentum is precessing in space around the other two. This system of equations is a priori of order 9 but we will show that it is in fact integrable.

3.1. Integrals

We have the integrals

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}\| &= 1, \quad \|\mathbf{w}_1\| = 1, \quad \|\mathbf{w}_2\| = 1, \\ -\alpha(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1)^2 - \beta(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2)^2 - c(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2)^2 &= 2\mathcal{H}_s, \\ \gamma\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}_1 + \alpha\mathbf{w}_2 &= \mathbf{W}_0 = Cte,\end{aligned}\quad (52)$$

where \mathbf{W}_0 is the total angular momentum of the system. We have 7 independent integrals in our system of order 9. We are thus missing one integral for a complete integration of the system.

3.2. Single planet case

When there is no satellite, Eqs. (51) simplifies to the system of order 6

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= -\frac{\alpha}{\gamma} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}, \\ \dot{\mathbf{w}}_1 &= -\frac{\alpha}{\beta} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \wedge \mathbf{w}_1.\end{aligned}\quad (53)$$

With the 5 independent integrals given by

$$\|\mathbf{w}\| = 1, \quad \|\mathbf{w}_1\| = 1, \quad \gamma\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}_1 = \mathbf{W}_0 = Cte. \quad (54)$$

As $x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1$ is constant, the system is trivially integrable. We have indeed

$$\dot{\mathbf{w}} = \Omega_0 \mathbf{w}_0 \wedge \mathbf{w}, \quad \dot{\mathbf{w}}_1 = \Omega_0 \mathbf{w}_0 \wedge \mathbf{w}_1, \quad (55)$$

where $\mathbf{w}_0 = \mathbf{W}_0 / \|\mathbf{W}_0\|$ is the unit vector in the direction of the total angular momentum \mathbf{W}_0 , and

$$\Omega_0 = -\frac{\alpha x}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} + 2\frac{\gamma}{\beta} x}. \quad (56)$$

Both vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 thus precess uniformly around the total angular momentum direction \mathbf{w}_0 with constant precession rate Ω_0 .

Remark. In the same way, the system (51) is also trivially integrable when the planet is reduced to a point mass.

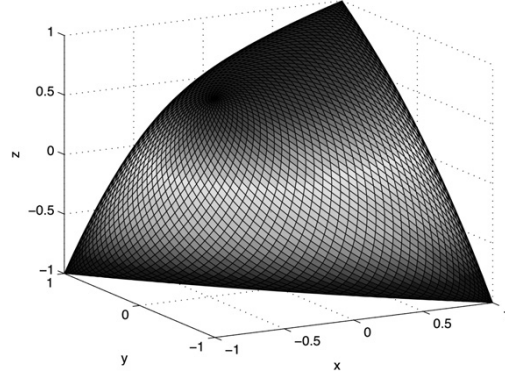


Fig. 3. The surface $v^2(x, y, z) = 0$. As $v^2 \geq 0$, the allowed space is the interior of this berlingot shaped volume.

3.3. Reduction

The general case (51) is more difficult, and in order to reduce the order of the differential system, we will consider the relative position of the vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 , and forget about their absolute position in space. More precisely, let

$$x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1, \quad y = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2, \quad z = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2, \quad (57)$$

and

$$v = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2). \quad (58)$$

The evolution of x, y, z, v is then given by the differential equations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\frac{c}{\beta} z - \frac{b}{\gamma} y\right) v, & \dot{y} &= \left(\frac{a}{\gamma} x - \frac{c}{\alpha} z\right) v, \\ \dot{z} &= \left(\frac{b}{\alpha} y - \frac{a}{\beta} x\right) v,\end{aligned}\quad (59)$$

where the expression of v is given by the Gram determinant

$$v^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{vmatrix} = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz. \quad (60)$$

We still have the two integrals

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + c z^2 = -2\mathcal{H}_s, \quad \gamma\beta x + \gamma\alpha y + \beta\alpha z = K, \quad (61)$$

the second being easily obtained as $2K = \mathbf{W}_0^2 - (\gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2)$. The motion in (x, y, z) is thus integrable, and limited to the interior of the berlingot³ shaped surface \mathcal{B} determined by $v^2(x, y, z) = 0$ (Fig. 3). We can also notice that

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\left(\frac{c}{\beta} z - \frac{b}{\gamma} y\right)(x - yz) - \left(\frac{a}{\gamma} x - \frac{c}{\alpha} z\right)(y - xz) \\ &\quad - \left(\frac{b}{\alpha} y - \frac{a}{\beta} x\right)(z - xy),\end{aligned}\quad (62)$$

so \dot{v} is a function of only (x, y, z) .

³ A berlingot is a famous tetrahedron hard candy with rounded edges.

3.3.1. Remark

It can be noticed that the line of initial condition with direction vector $(1/\alpha a, 1/\beta b, 1/\gamma c)$ is a line of fixed points for the differential system (59).

3.4. Integration

The motion in the (x, y, z) space evolves on elliptic curves, intersections of the ellipsoid of energy with the plane of angular momentum (61). Indeed, with a change of scale and a change of time, we can actually integrate this system. Indeed, let

$$X = \sqrt{a}x, \quad Y = \sqrt{b}y, \quad Z = \sqrt{c}z, \tag{63}$$

and

$$d\tau = v dt. \tag{64}$$

The system (59) can then be written as

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{65}$$

with

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\sqrt{bc}}{\alpha}, \frac{\sqrt{ca}}{\beta}, \frac{\sqrt{ab}}{\gamma} \right). \tag{66}$$

We have thus reduced the problem to a simple rotation around the fixed vector $\boldsymbol{\Omega}$, with angular velocity $\omega = \|\boldsymbol{\Omega}\|$.

Remark. In the new variables, with $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$, the integrals (61) are expressed as

$$V^2 = -2\mathcal{H}_s, \quad \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{abc}}{\gamma\beta\alpha} K. \tag{67}$$

The solution is expressed in terms of τ . If the volume $v = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ does not vanish, the relation with the usual time t is obtained through

$$t = \int_0^\tau \frac{d\tau}{v(\tau)}. \tag{68}$$

3.4.1. Remark

With $\mathbf{M} = (x, y, z)$, we have

$$\dot{v} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{M}}{d\tau} \cdot \nabla_{\mathbf{M}} v^2. \tag{69}$$

As $d\mathbf{M}/d\tau$ is a tangent vector to the trajectory, one can see that, for a point on the berlingot \mathcal{B} (i.e., $v = 0$), $\dot{v} = 0$ is equivalent to the tangency of the trajectory with the berlingot \mathcal{B} .

3.4.2. Special solutions

It is easy to see that the sphere $B_{(0, \sqrt{3}/2)}$ centered on the origin, with radius $\sqrt{3}/2$, is included in the interior of the berlingot \mathcal{B} . From the expression of the integral of energy (61), one can deduce that for any initial condition (x, y, z) inside a

sphere $B_{(0, \rho_0)}$, with

$$\rho_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{\min(a, b, c)}{a + b + c}}, \tag{70}$$

the motion will evolve on an ellipse in the (x, y, z) space, that remains included in $B_{(0, \sqrt{3}/2)}$. We have thus a lower bound for v^2 ($v^2 > v_0^2 > 0$, with $v_0 > 0$), and, with a positive orientation for our initial conditions $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, the volume v is bounded from below ($v > v_0 > 0$). The time t is a monotonic function of τ and τ goes to infinity as t goes to infinity. The motion in the (X, Y, Z) space is a circle described uniformly with τ with period T_τ . In the (x, y, z) space, the motion will thus be on an ellipse with the same period T_τ . The motion with respect to time will still be periodic, but with a period T given by

$$T = \int_0^{T_\tau} \frac{d\tau}{v(\tau)}. \tag{71}$$

Indeed,

$$\begin{aligned} t + T &= \int_0^\tau \frac{d\tau}{v(\tau)} + \int_0^{T_\tau} \frac{d\tau}{v(\tau)} = \int_0^\tau \frac{d\tau}{v(\tau)} + \int_\tau^{\tau+T_\tau} \frac{d\tau}{v(\tau)} \\ &= \int_0^{\tau+T_\tau} \frac{d\tau}{v(\tau)} \end{aligned} \tag{72}$$

and, as for y, z , we have $x(t + T) = x(\tau + T_\tau) = x(\tau) = x(t)$. These solutions, with non-vanishing volume will be called *special* solutions. Among them, we have the singular solution for which $x = y = z = 0$ at the origin. This solution is a fixed point in the (x, y, z) space, and we have for all time $v = 1$. In this solution, the three angular momentum vectors $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ remain orthogonal for all time, and all torques vanish.

One can also notice that for these *special* solutions, the average volume $v = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ is not zero. Indeed for the present choice of orientation,

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_\tau} d\tau = \frac{T_\tau}{T} > 0. \tag{73}$$

3.4.3. General solutions

In fact, in most cases of astronomical importance, the angular momentum vectors are far from orthogonal, and planar configuration will occur, with a cancellation of the volume v . We will call these solutions the *general* solutions. In such a solution, an orbit of the equations in τ , starting from inside \mathcal{B} , will intersect \mathcal{B} in positive time at τ_+ , and in negative time at τ_- (Fig. 4). Starting at $\tau = 0$ (and $t = 0$) and with a positive volume v (by convention), the orbit in τ is a uniform rotation in (X, Y, Z) , until the orbit reaches \mathcal{B} at time t_+

$$t_+ = \int_0^{\tau_+} \frac{d\tau}{|v(\tau)|}. \tag{74}$$

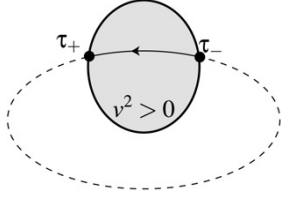


Fig. 4. The shaded area correspond to the region where $v^2 > 0$, inside the berlingot \mathcal{B} . The orbit in τ intersects the berlingot \mathcal{B} in τ_+ and τ_- .

As the volume $v = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ is a smooth function of t , if $\dot{v} \neq 0$, the volume becomes then negative, and

$$t = t_+ - \int_{\tau_+}^{\tau} \frac{d\tau}{|v(\tau)|}, \quad (75)$$

until the orbit bounces again on \mathcal{B} at τ_- at time

$$t_- = t_+ - \int_{\tau_+}^{\tau_-} \frac{d\tau}{|v(\tau)|}. \quad (76)$$

We will reach again the initial point at $t = T$ for $\tau = 0$ such that

$$T = t_- + \int_{\tau_-}^0 \frac{d\tau}{|v(\tau)|}. \quad (77)$$

The motion of (x, y, z) is periodic in t , with period T

$$T = 2 \int_{\tau_-}^{\tau_+} \frac{d\tau}{|v(\tau)|}. \quad (78)$$

An important question that arise is the convergence of the integral

$$t_+ = \int_0^{\tau_+} \frac{d\tau}{|v(\tau)|}. \quad (79)$$

In the vicinity of τ_+ , as $v(\tau_+) = 0$, we have

$$v^2(\tau) = 2v \frac{dv}{d\tau}(\xi)(\tau - \tau_+), \quad (80)$$

with $\xi \in]\tau, \tau_+[$, that is, as $d\tau = v dt$,

$$v^2(\tau) = 2 \frac{dv}{dt}(A)(\tau - \tau_+), \quad (81)$$

where $A(x, y, z)$ is a point in the vicinity of A_+ , different from A_+ (the intersection point of the orbit with \mathcal{B}). We have thus, in the vicinity of τ_+ ,

$$v^2(\tau) \approx 2\dot{v}(A_+)(\tau - \tau_+), \quad (82)$$

where $\dot{v}(A_+) \neq 0$. Thus $v(\tau) \approx \sqrt{2\dot{v}(A_+)(\tau - \tau_+)}$, and thus the above integral converges. The point A_+ is thus reached in finite time.

Remark. For a general solution, as after one period T , $\tau(t + T) = \tau(t)$, we have then

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{\tau(T) - \tau(0)}{T} = 0 \quad (83)$$

and thus, the average volume $v = (\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ over one period T is zero.

3.4.4. Tangency case and Cassini states

We have not yet consider the tangency case, when the orbit in (x, y, z) becomes tangent to the berlingot \mathcal{B} . At the tangency point P_0 , we have

$$v = 0, \quad \dot{v} = 0. \quad (84)$$

P_0 is thus a fixed point. We will call these critical orbits ‘Cassini states’ (Colombo, 1966; Peale, 1969; Ward, 1975), where the three vectors $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ remain in a plane that precess in time. On the other hand, an orbit starting with initial condition inside (strictly) \mathcal{B} will thus never reach the surface \mathcal{B} with $\dot{v} = 0$. Indeed, in the tangency case, we have $\dot{v}(A_+) = 0$, and thus

$$v^2(\tau) = O((\tau - \tau_+)^2) \quad (85)$$

and the integral is divergent. This is expected, as the tangency point is an equilibrium. It cannot be reached in finite time.

3.5. Relative solution

In the variables $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$, τ , the motion is a simple rotation around $\boldsymbol{\Omega}$ (66) with angular velocity $\omega = \|\boldsymbol{\Omega}\|$. We have thus

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\tau) = & \frac{\mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega} + \left(\mathbf{V}_0 - \frac{\mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega} \right) \cos \omega \tau \\ & + \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_0}{\omega} \sin \omega \tau \end{aligned} \quad (86)$$

from which we obtain easily (x, y, z) and v^2 . $x(\tau), y(\tau), z(\tau)$ are of degree 1 in $\cos(\omega\tau)$ and $\sin(\omega\tau)$. Thus $v^2(\tau)$ is a polynomial expression of total degree 3 in $\cos(\omega\tau), \sin(\omega\tau)$,

$$\begin{aligned} v^2(\tau) = & a_0 + a_1 \sin(\omega\tau) + a_2 \sin^2(\omega\tau) + a_3 \sin^3(\omega\tau) \\ & - \cos(\omega\tau)[b_0 + b_1 \sin(\omega\tau) + b_2 \sin^2(\omega\tau)]. \end{aligned} \quad (87)$$

The solutions of $v^2(\tau) = 0$ are obtained by the resolution of the polynomial equation of degree 6 in $\phi = \sin(\omega\tau)$

$$(a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2 + a_3\phi^3)^2 = (1 - \phi^2)[b_0 + b_1\phi + b_2\phi^2]^2. \quad (88)$$

For each real solution ϕ_0 of (88) in the interval $[-1, +1]$, $\tau_0^+ = \arcsin(\phi_0)/\omega$ or $\tau_0^- = (\pi - \arcsin(\phi_0))/\omega$ will be a solution of $v^2(\tau) = 0$. In the non-tangency case, τ_- will be the largest negative solution, while τ_+ is the smallest positive solution. The period T (and $\omega = 2\pi/T$) can then be computed through (78).

4. Global solution

We assume here that the vectors $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ are non-planar ($v \neq 0$). Let \mathcal{W} be the matrix $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ and V the Gram matrix of the basis $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Using the expression of the vector product in the basis $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ (see Appendix B), one can transform the system (51) as

$$\dot{\mathcal{W}} = \mathcal{W}\mathcal{B}, \tag{90}$$

where

$$\mathcal{B} = vV^{-1}\mathcal{A} \tag{91}$$

is a matrix depending only on (x, y, z) . Indeed

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{cz}{\beta} & -\frac{cx}{\alpha} \\ -\frac{by}{\gamma} & 0 & \frac{by}{\alpha} \\ \frac{ax}{\gamma} & -\frac{ax}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

and

$$V^{-1} = \frac{1}{v^2} \begin{pmatrix} 1-z^2 & yz-x & xz-y \\ yz-x & 1-y^2 & xy-z \\ xz-y & xy-z & 1-x^2 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

As (x, y, z) are periodic functions of period T , the system (90) is a linear differential system with periodic coefficients of period T . If $\mathcal{W}(t)$ is a solution of (90), then $\mathcal{W}(t+T)$ is also a solution. Following Floquet theory, one can deduce that

$$\mathcal{R}_T(t) = \mathcal{W}(t+T)\mathcal{W}(t)^{-1} \tag{94}$$

is constant with t . Indeed we have then

$$\mathcal{W}(t+T) = \mathcal{R}_T(t)\mathcal{W}(t) \tag{95}$$

and

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}}(t+T) &= \mathcal{W}(t+T)\mathcal{B}(t) = \mathcal{R}_T(t)\mathcal{W}(t)\mathcal{B}(t) \\ &= \dot{\mathcal{R}}_T(t)\mathcal{W}(t) + \mathcal{R}_T(t)\dot{\mathcal{W}}(t) \\ &= \dot{\mathcal{R}}_T(t)\mathcal{W}(t) + \mathcal{R}_T(t)\mathcal{W}(t)\mathcal{B}(t). \end{aligned} \tag{96}$$

Thus $\dot{\mathcal{R}}_T(t) = 0$. \mathcal{R}_T is thus a constant matrix. As the Gram matrix V of the vectors $(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t))$ is conserved over one period T , the norm is conserved by \mathcal{R}_T (see Appendix B), and \mathcal{R} is an isometry of \mathbb{R}^3 . Moreover, this isometry is positive, as the volume v is conserved over a full period T (see Section 3.4). The invariance of the total angular momentum \mathbf{W}_0 (52) also implies that the vector (γ, β, α) is invariant by \mathcal{R}_T . \mathcal{R}_T is thus a rotation matrix of axis \mathbf{W}_0 and angle θ_T . Let us denote $\mathcal{R}(t)$ the rotation of axis \mathbf{W}_0 and angle $t\theta_T/T$ (i.e., $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}_T$). Let

$$\tilde{\mathcal{W}}(t) = \mathcal{R}^{-1}(t)\mathcal{W}(t). \tag{97}$$

Proposition 1. $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ is periodic with period T .

Indeed, as for all $t, t', \mathcal{R}(t+t') = \mathcal{R}(t)\mathcal{R}(t')$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}(t+T) &= \mathcal{R}^{-1}(t+T)\mathcal{W}(t+T) \\ &= \mathcal{R}^{-1}(t)\mathcal{R}^{-1}(T)\mathcal{W}(t+T) \\ &= \mathcal{R}^{-1}(t)\mathcal{W}(t) = \tilde{\mathcal{W}}(t). \end{aligned} \tag{98}$$

The complete solution $\mathcal{W}(t)$ can thus be expressed on the form

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{R}(t)\tilde{\mathcal{W}}(t), \tag{99}$$

where $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ is periodic with period T , and $\mathcal{R}(t)$ a rotation of axis \mathbf{W}_0 and angle $t\theta_T/T$. The motion has thus two periods: the (usually) short period T and the precession period

$$T' = \frac{2\pi}{\theta_T}T. \tag{100}$$

Remark. As $\mathcal{R}(t)$ is a rotation, we have $\det(\tilde{\mathcal{W}}(t)) = \det(\mathcal{W}(t))$, and thus, from (83), for a general solution,

$$\int_0^T \det(\tilde{\mathcal{W}}(t)) dt = 0. \tag{101}$$

The three unit vectors $\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2$, defined as the column vectors of $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ have thus an averaged volume equal to zero over one period T . As these vectors describe loops of period T , this result can be interpreted by stating that the origin and center of the three loops generated by $\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_1$, and $\tilde{\mathbf{w}}_2$ are nearly coplanar. We have indeed demonstrated that the averaged value $\langle (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2) \rangle$ is null, and not that the determinant of the averaged vectors $\langle (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2) \rangle$ is null, which is the condition stating that the centers of the loops generated by $\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2$ are coplanar with the origin. We will see in Section 4.3 that this is indeed the case.

4.1. Complete solution

Once the form of the general solution (99) is obtained, we have an elementary way to compute the precession period T' . Indeed, one can first compute the short period T through the quadratures of Section 3.4, and then numerically integrate the full system of Eq. (51) over a full period T . The angle θ_T is then the angle of the rotation

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{W}(t+T)\mathcal{W}(t)^{-1} \tag{102}$$

and the precession period is obtained through (100). As the solution $\mathcal{W}(t)$ is known over the interval of length T , $[t_0, t_0+T]$, the T -periodic function $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ is also known over the full period $[t_0, t_0+T]$, and the solution for all time is obtained through (99), as for all integer n ,

$$\mathcal{W}(t+nT) = \mathcal{R}(t+nT)\tilde{\mathcal{W}}(t). \tag{103}$$

4.2. Computation of the precession period by quadratures

In the previous section, we have seen that the precession period can be obtained by numerical integration of the full Eqs. (51), but we will derive also here some formulas for the direct computation of the precession period. Let $W_0 = \|\mathbf{W}_0\|$ and $\mathbf{w}_0 = \mathbf{W}_0/W_0$ be a unit vector along the total angular momentum \mathbf{W}_0 . With

$$p = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_0, \quad (104)$$

the projection \mathbf{S} of \mathbf{w} on the plane orthogonal to \mathbf{w}_0 will be

$$\mathbf{S} = \mathbf{w} - p\mathbf{w}_0. \quad (105)$$

Assuming $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}_0$, we will have $p < 1$. With $S = \|\mathbf{S}\|$, and $s = \mathbf{S}/S$, we have

$$\mathbf{S} = Ss, \quad \dot{\mathbf{S}} = \dot{S}s + \dot{\theta}(\mathbf{w}_0 \wedge s) \quad (106)$$

and

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{w}} - \dot{p}\mathbf{w}_0, \quad \dot{\mathbf{S}}^2 = \dot{\mathbf{w}}^2 - \dot{p}^2, \quad (107)$$

we have

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}} = S\dot{S} = -p\dot{p} \quad (108)$$

and

$$S = \sqrt{1 - p^2}, \quad \dot{S} = -\frac{p\dot{p}}{\sqrt{1 - p^2}}. \quad (109)$$

As

$$\dot{\mathbf{S}}^2 = \dot{S}^2 + \dot{\theta}^2(\mathbf{w}_0 \wedge s)^2 = \dot{S}^2 + \dot{\theta}^2(1 - p^2), \quad (110)$$

we have

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{\mathbf{w}}^2 - \dot{p}^2/(1 - p^2)}{1 - p^2}. \quad (111)$$

With (52), one has

$$p = \frac{1}{W_0}(\gamma + \beta x + \alpha y) \quad (112)$$

and thus

$$\dot{p} = \frac{v}{W_0} \left(\frac{\alpha\alpha}{\gamma}x - \frac{\beta\beta}{\gamma}y \right). \quad (113)$$

We have also from (51)

$$\dot{\mathbf{w}}^2 = \frac{1}{\gamma^2}(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + 2\alpha\beta xy - (\alpha x^2 + \beta y^2)^2). \quad (114)$$

With these expressions, Eq. (111) can be written on the form

$$\dot{\theta}^2 = \Theta(x, y, z). \quad (115)$$

The sign of $\dot{\theta}$ ($\varepsilon_{\dot{\theta}}$) can be determined through (106). Indeed $\dot{\theta}$ is a function of $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, but its sign can only change when $\dot{\theta} = 0$, that is from (111), when

$$\dot{\mathbf{w}}^2(1 - p^2) = \dot{p}^2. \quad (116)$$

This equation is a polynomial equation in (x, y, z) , of valuation 2 and total degree 6 in (x, y, z) , and total degree 2 in z . It determines an algebraic surface \mathcal{S} of the (x, y, z) space and thus

θ is obtained by quadrature

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \varepsilon_{\dot{\theta}} \sqrt{\Theta(x, y, z)} dt. \quad (117)$$

The computation of θ_T is obtained by the integration of the above expression over a full period T . As in the discussion of Section 3.4, one has to be careful for the change of signs of $\dot{\theta}$.

4.3. Symmetry in the loop

It is now possible to prove a more precise result on the periodic loops generated by $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ in the precessing frame.

Proposition 2. *In the frame rotating uniformly with the precession period, the three vectors $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ describe periodic loops $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ that are all symmetric with respect to the same plane \mathcal{S} containing \mathbf{w}_0 .*

Consequence. Let us call $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ the averages of $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ over the nutation angle. $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ are respectively the poles of the spin axis, the pole of the planet orbit, and the pole of satellite orbit. Due to the symmetry of the orbits, the three poles $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ remain in the symmetry plane \mathcal{S} containing \mathbf{w}_0 , and precessing uniformly around \mathbf{w}_0 . Each vector $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ nutates around its pole, respectively $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Proof. We will consider uniquely \mathbf{w} , the other cases being similar. We consider here a general solution (Section 3.4.3). We choose here the origin of time in τ_+ which corresponds to a spin vector \mathbf{w}_+ . At $t = -T/2$, the orbit in the (x, y, z) space is in τ_- , corresponding to $\mathbf{w} = \mathbf{w}_-$. In the (x, y, z) space, the orbit describes an elliptic arc (τ_-, τ_+) over the time interval $[-T/2, 0]$, and the same arc in the reverse way (τ_+, τ_-) over $[0, T/2]$ (Fig. 4). Moreover, as the motion is a pure rotation in the scaled (X, Y, Z) coordinates (Section 3.4), over the interval $[-T/2, T/2]$, the orbit of $\mathbf{M} = (x, y, z)$ is even, that is $\mathbf{M}(-t) = \mathbf{M}(t)$.

Next, we can remark that as the differential system (51) is polynomial, the solutions $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are analytical in time t , and so will be the coordinate angle $\theta(t)$ of \mathbf{w} . On the other hand, we have the following lemma.

Lemma. *Let $f(t)$ be an analytic function over an interval $[-A, A]$, such that $f^2 = g$, where $g(t)$ is even over $[-A, A]$ ($A > 0$). Then $f(t)$ is either odd or even. If $f(0) \neq 0$, $f(t)$ is even.*

The proof is easily obtained with analytic continuation. Moreover, we have (115)

$$\dot{\theta}^2(t) = \Theta(x, y, z), \quad (118)$$

thus $\dot{\theta}(t)$ is odd or even. If $\dot{\theta}(t)$ is even on $[-T/2, T/2]$, for all $h \in [0, T/2]$, we have thus $\theta(h) - \theta(0) = \theta(0) - \theta(-h)$. As the cosine p of the angle from \mathbf{w} to \mathbf{w}_0 (104) depends only on x, y (112), we have $p(h) = p(-h)$, and $\mathbf{w}(h)$ and $\mathbf{w}(-h)$ are symmetrical with respect to the $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_+)$ plane. It will still be

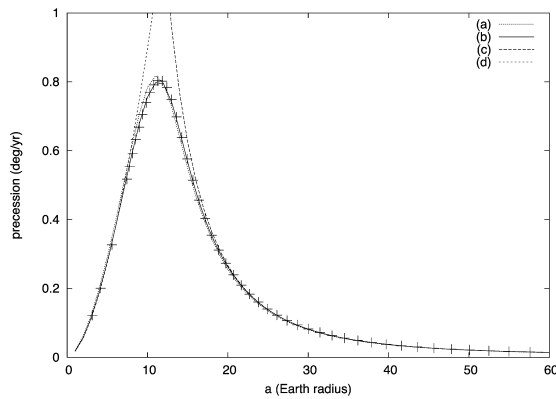


Fig. 5. Different precession frequency computations. (c) is the classical computation in the approximation of a far satellite, while (d) correspond to the close satellite approximation (Tremaine, 1991). These formulas are no longer valid for a close (respectively far) satellite, or in the intermediary region (between 10 and 20 R_E for the Earth–Moon system). (a) and (b) are computed with the formula (129) of the present paper, using either the raw initial conditions of the integration (a), or the averaging obtained after a first iteration (b) [Eq. (135)]. The crosses correspond to numerical experiments with the complete Sun–Earth–Moon problem, without averaging.

the same in the rotating frame with the precession period. In this rotating frame, the periodic loop generated by \mathbf{w} is thus symmetric with respect to the plane $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_+)$.

Moreover, at $t = 0$ (τ_+), the volume v is null, and thus $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are coplanar. In the rotating frame, all three orbits generated by $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are thus symmetrical with respect to the same plane $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_+)$.

The only case when $\dot{\theta}(t)$ is odd, occurs when $\dot{\theta}(0) = 0$. As $v(0) = 0$, we have $\dot{p}(0) = 0$ (113) and $\dot{\mathbf{w}}(0) = 0$ (111). In the same way, we will have $\dot{\mathbf{w}}_1(0) = \dot{\mathbf{w}}_2(0) = 0$, and the vector field (51) vanished at $t = 0$. The three vectors $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are thus stationary and coplanar. \square

This is a special Cassini state (Section 3.4.4) where the precession frequency is zero.

5. Description of the solutions

In order to better visualize the solutions, we have plotted in Fig. 6 the projections of the three vectors $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ in the plane (i, j) . More precisely, as we know the general form of the solution [Eq. (99)], we have plotted this projection in a framework in rotation with the computed precession period T' . According to [Eq. (99)], we thus obtain the projection of $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ in the fixed reference plane (i, j) . We thus expect to obtain for each vector $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, a periodic smooth curve. In all our examples, the curves described by $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ are in fact very close to circles. It should be noted that in Fig. 6, we have plotted the output of the non averaged equations [Eq. (31)]. This is intentional as this allows to check at the same time the relevance of the averaging made in Section 2.5. This explains why instead of exactly thin loops, we have thick lines, which occurs for the contribution of the orbital short period terms.

In these examples, we have taken a fictitious Moon around the Earth. The Earth–Moon distance is then varied from a very close position (up to 2 Earth radius) to 100 Earth radius, close to the distance where the Moon is no longer a satellite of the Earth.

In all cases, the pole of the orbit of the planet \mathbf{w}_1 is very close to the origin, as \mathbf{w}_1 is very close to the constant angular momentum vector \mathbf{w}_0 . The vectors \mathbf{w} and \mathbf{w}_2 describe circles with varying center position and radius.

5.1. Far solutions

When the Moon is far from the Earth (as it is at present), in the precessing rotating frame, \mathbf{w} is nearly fixed and \mathbf{w}_2 is circulating around the pole of the orbit, that is around the origin (Fig. 6f). In this case, the obliquity of the planet and the inclination of the Moon on the ecliptic are nearly constant. The orbit of the Moon is precessing uniformly around the pole of the ecliptic with the fast period T (18.6 years for the present Moon). In fact there is still a small variation of the obliquity, with the same period T , but with a very small amplitude (about 9 arcsec for the present Moon). This motion is the principal term in the nutation that was discovered observationally by Bradley in 1748 and computed by d'Alembert in 1749 [see the introduction of Chapront-Touzé and Souchay of d'Alembert complete work (D'Alembert, 1749) for a detailed account of these discoveries].

5.2. Intermediate solutions

When the Moon is closer (Fig. 6e), the amplitude of the nutation of the Earth axis becomes much larger. The precession of the plane of the orbit of the Moon is no longer centered around the pole of the ecliptic, and the inclination of the Moon with respect to the ecliptic is not constant. But as the pole of the Moon orbit still describes a circle, the inclination remains constant with respect to a plane orthogonal to the center of this circle. This plane is often called the Laplace plane of the satellite. It should be noted that the pole of the Laplace plane with this definition will precess around the total angular momentum with the slow precession period.

5.3. Close solutions

When the Moon is very close to the planet (Figs. 6a and 6b), The satellite precession and the planet nutation are both roughly around the same pole, and the inclination of the satellite on the planet equator is nearly constant [Fig. 7(c3)].

5.4. General case

In the general case (Fig. 6), the planet nutation occurs around the nutation pole, the satellite orbit precesses around the Laplacian pole that is different from the nutation pole and from the ecliptic pole, but all three poles precess slowly with the same frequency around the total angular momentum.

In the solution of the averaged equations (51), for any distance of the satellite from the planet, the general motion of the

Precession of a planet with a satellite

323

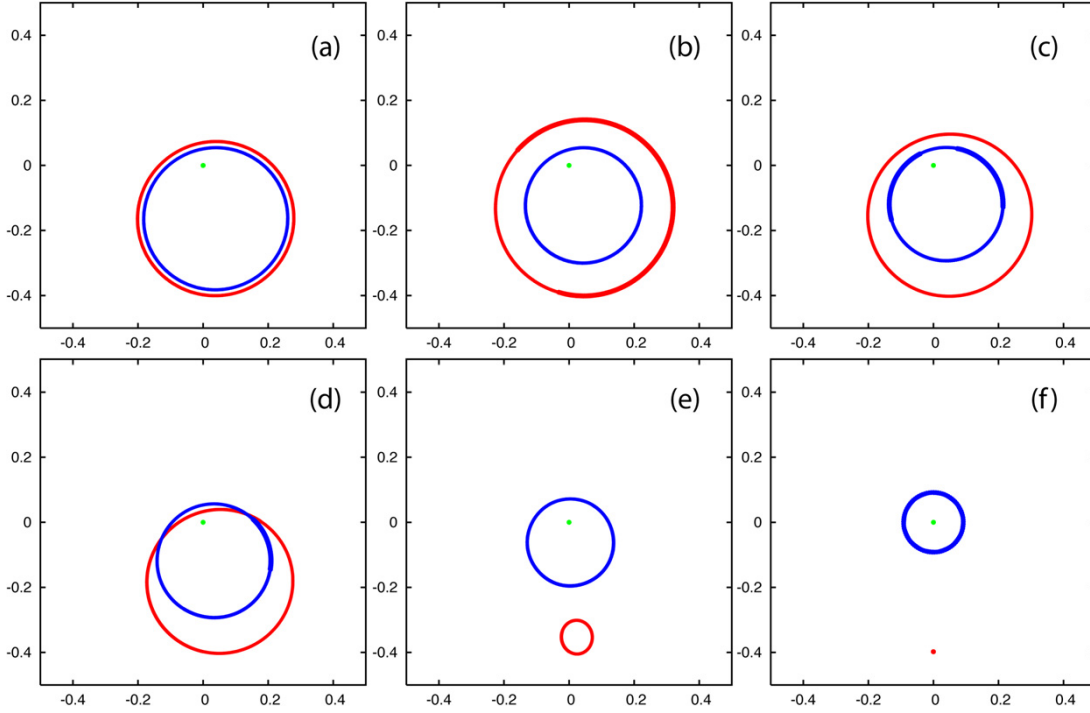


Fig. 6. Precession for different Earth–Moon distances, starting with $3 R_E$ (a); $7 R_E$ (b); $9 R_E$ (c); $10 R_E$ (d); $14 R_E$ (e); $60.1 R_E$ (f). The last one corresponding to the actual Earth–Moon distance (expressed in Earth radius). The projection of the poles \mathbf{w} (red), \mathbf{w}_1 (green), \mathbf{w}_2 (blue) are plotted in the (i, j) plane in a rotating frame with the precession frequency Ω . Scales are in radians. The pole of the planet orbit (\mathbf{w}_1 , in green) almost coincide with the origin, while the pole of the planet \mathbf{w} and the pole of the satellite orbit \mathbf{w}_2 describe a large variety of configurations, smoothly evolving from a configuration where the axis of the planet and the pole of the satellite are concentric (a), to the present configuration (f).

planet orbit, of the satellite orbit, and of the planet rotation can be described as follows (with the notations of Section 4.3).

The planet orbit precesses around a planetary pole \mathcal{P}_1 (usually with very small amplitude). The satellite orbit precesses around a satellite pole \mathcal{P}_2 [that can be called the Laplacian pole (see Burns, 1986)]. The axis of rotation of the planet nutates around the rotational pole \mathcal{P} , all with the same period T , usually called the period of precession of the satellite, but here we will reserve the name precession for the long period, and we will call this short period the nutation period. This motion is periodic (each axis described a closed loop with period T). In addition, all three poles $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ precess uniformly with the same period (that we will call the precession period) around the total angular momentum of the system \mathbf{W}_0 .

6. Analytical approximation

In Section 4, we have obtained the complete solution of the averaged equations (51), but although these solutions can be computed by quadrature, they are not explicit. Nevertheless, the rigorous expression (99) allows us to give a general description of the solutions, valid in all cases. In the present section, we will make some additional approximations in order to provide an explicit form of the solutions. More precisely, as we realize that the periodic loops generated by $\mathcal{W}(t)$ in (99) are very close to circular uniform motion, we will search for approximate solutions expressed on the form of a composition of

periodic terms. For simplicity, we will assume here that x, y, z are positive. Other cases, as for Neptune–Triton ($y < 0, z < 0$), can be treated in the same way.

6.1. Equations

As the angular momentum of the system is essentially contained in the orbital motion of the planet, we will consider that

$$\mathbf{w}_1 \approx \mathbf{w}_0. \quad (119)$$

With a fixed reference frame (i, j, k) with $k = \mathbf{w}_0$, we will thus have

$$\mathbf{w}_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (120)$$

and as $x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1, z = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$, let the coordinates of \mathbf{w} and \mathbf{w}_2 in this basis be

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ z \end{pmatrix}. \quad (121)$$

As we are considering now the projections of \mathbf{w}, \mathbf{w}_2 in the (i, j) plane, we will use complex coordinates in this plane. Let

$$\mathfrak{z} = \xi + i\eta, \quad \mathfrak{z}_2 = \xi_2 + i\eta_2, \quad (122)$$

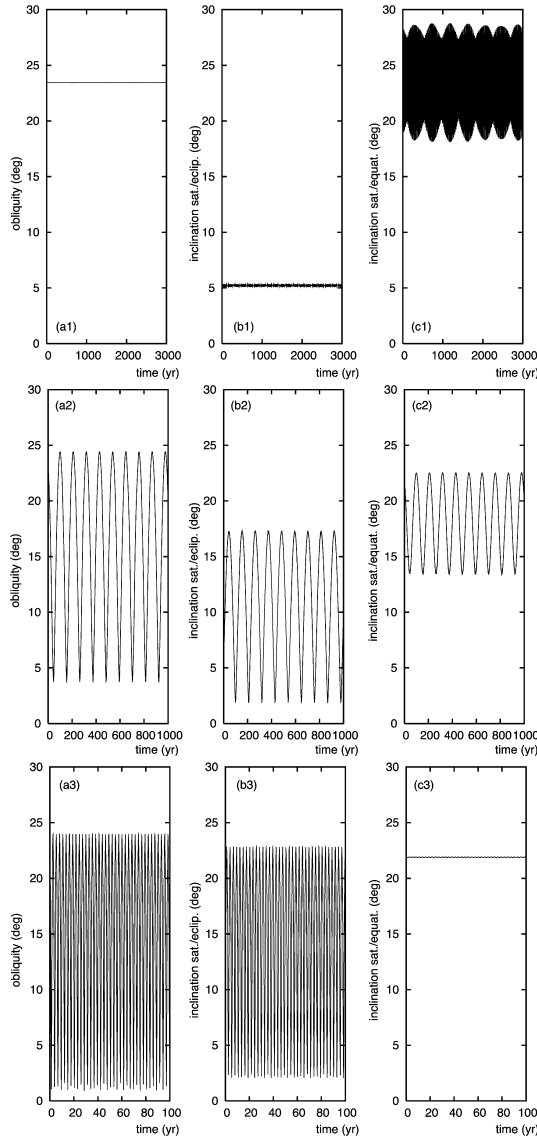


Fig. 7. Evolution of the obliquity of the Earth (a_1, a_2, a_3), inclination of the orbit of the Moon with respect to the ecliptic (b_1, b_2, b_3), and with respect to the equator (c_1, c_2, c_3), for different Earth–Moon semimajor axis. The solution (1) (a_1, b_1, c_1) correspond to the actual Earth–Moon system [Fig. 6(f)], while the Earth–Moon distance is about $10 R_E$ [Fig. 6(d)] in (a_2, b_2, c_2), and about $4 R_E$ in (a_3, b_3, c_3). This latter case is similar to [Fig. 6(a)].

with these notations, the secular equations (51) become

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_2 \end{pmatrix} = iM \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad (123)$$

with

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{ax}{\gamma} - \frac{by\tilde{z}}{\gamma} & \frac{bxy}{\gamma} \\ \frac{by\tilde{z}}{\alpha} & -\frac{cz}{\alpha} - \frac{bxy}{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

M is thus a real matrix with periodic coefficients of period T . As we are not searching for the exact solution of the problem, we will make here a crude approximation by averaging this matrix over the fast period T . We will even replace

the three varying quantities x, y, z by some averaged quantities $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$. The matrix M is then transformed into a real matrix \tilde{M} with constant coefficients

$$\tilde{M} = M(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (125)$$

and the solution of (123) becomes straightforward. Let T and D be the trace and determinant of \tilde{M} . The eigenvalues of \tilde{M} are given by the second degree equation

$$\lambda^2 - \lambda T + D = 0 \quad (126)$$

with, when $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ are positive (the other cases can be treated in the same way),

$$T = -\left(\frac{a\tilde{x}}{\gamma} + \frac{b\tilde{y}\tilde{z}}{\gamma} + \frac{c\tilde{z}}{\alpha} + \frac{b\tilde{x}\tilde{y}}{\alpha}\right) < 0 \quad (127)$$

and discriminant

$$\Delta = T^2 - 4D = \left(\frac{a\tilde{x}}{\gamma} + \frac{b\tilde{y}\tilde{z}}{\gamma} - \frac{c\tilde{z}}{\alpha} - \frac{b\tilde{x}\tilde{y}}{\alpha}\right)^2 + 4\frac{b^2\tilde{x}\tilde{y}^2\tilde{z}}{\gamma\alpha} > 0. \quad (128)$$

We have thus always two distinct eigenvalues Ω , and $\Omega + \nu$ (we consider here that Ω is the slow precession frequency and ν , the nutation frequency), with

$$\Omega = \frac{T + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \nu = -\sqrt{\Delta}. \quad (129)$$

After diagonalization, we obtain two eigenmodes

$$\mathfrak{z} = \mathbf{r}e^{i(\Omega t + \Phi)}, \quad \mathfrak{z}' = \mathbf{s}e^{i((\Omega + \nu)t + \Phi + \phi)}, \quad (130)$$

where $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Phi, \phi$ are real numbers. A basis of eigenvector is then ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$), with

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda' \end{pmatrix}, \quad (131)$$

and

$$\lambda = \frac{a\tilde{x} + b\tilde{y}\tilde{z} + \gamma\Omega}{b\tilde{x}\tilde{y}}, \quad \lambda' = \frac{a\tilde{x} + b\tilde{y}\tilde{z} + \gamma(\Omega + \nu)}{b\tilde{x}\tilde{y}}. \quad (132)$$

The solution in $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2$ becomes

$$\mathfrak{z} = \mathbf{e}^{i(\Omega t + \Phi)}(\mathbf{r} + \mathbf{s}\mathbf{e}^{i(\nu t + \phi)}), \quad \mathfrak{z}_2 = \mathbf{e}^{i(\Omega t + \Phi)}(\lambda\mathbf{r} + \lambda'\mathbf{s}\mathbf{e}^{i(\nu t + \phi)}), \quad (133)$$

where $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \lambda, \lambda'$ are real numbers. Moreover, it is easy to show that $\lambda > 0, \lambda' < 0$. This results from the diagonalization of a general 2×2 matrix (M_{ij}) with real coefficients and positive product of the antidiagonal terms ($M_{12}M_{21} > 0$). We should notice here that \mathfrak{z} and \mathfrak{z}_2 have the same phase Φ in the precession motion, and opposite phase ϕ and $\phi + \pi$ for the nutation motion. We obtain here thus an additional general result.

Proposition 3. *Within the present approximations (119), (125), the pole of precession of the axis and the pole of precession of the satellite orbit (the Laplace pole of the satellite) are always aligned with the total angular momentum, and on the same side of the total angular momentum.*

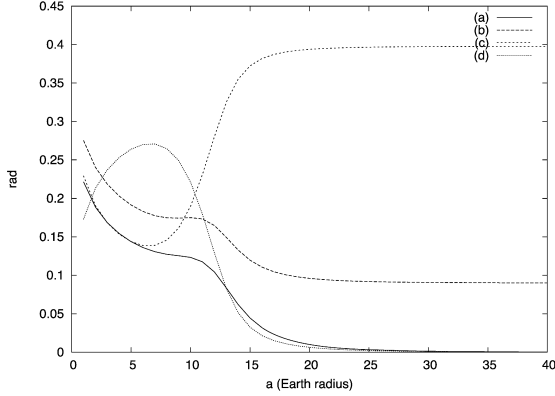


Fig. 8. The approximate analytical solutions for the evolution of the planet axis and satellite orbit are expressed with only two periodic terms (133). The values of the different involved radius are given here in term of the Earth–Moon distance (in Earth radius) with the correspondence: $\lambda\tau$ (a); $-\lambda's$ (b); τ (c); s (d).

6.2. Parameters of the solution

As we know the general form of the solution (133), we can compute now the averaged quantities \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} . From the definition of \mathfrak{z} , \mathfrak{z}_2 , we have

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 - |\mathfrak{z}|^2}, & z &= \sqrt{1 - |\mathfrak{z}_2|^2}, \\ y &= \frac{1}{2}(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}_2) + xz. \end{aligned} \quad (134)$$

As it would be unnecessary complicated to obtain explicit averaged values over the fast period ν in the complete expression of the frequencies (129), and in the sake of simplicity, here we will average under the radical (that is average x^2 , z^2 instead of x , z) over the fast frequency ν . One thus obtain

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sqrt{1 - \tau^2 - s^2}, \\ \bar{z} &= \sqrt{1 - \lambda^2\tau^2 - \lambda'^2s^2}, \\ \bar{y} &= \lambda\tau^2 + \lambda's^2 + \bar{x}\bar{z}. \end{aligned} \quad (135)$$

6.3. Initial conditions

With equations (129), (132), and (135), the solutions (133) depend only on the four real numbers τ , s , Φ , ϕ . At the origin of time ($t = 0$), we have

$$\mathfrak{z}_0 = e^{i\Phi}(\tau + se^{i\phi}), \quad \mathfrak{z}_{20} = e^{i\Phi}(\lambda\tau + \lambda'se^{i\phi}). \quad (136)$$

This system is solved easily as

$$\tau e^{i\Phi} = \frac{\lambda'\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_{20}}{\lambda' - \lambda}, \quad se^{i(\Phi+\phi)} = \frac{\lambda\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_{20}}{\lambda - \lambda'}. \quad (137)$$

The computation of λ , λ' requires to know the averaged values \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , but can easily be done by iteration, starting with the initial values, that is, for the first iteration

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(t=0), & \bar{y} &= y(t=0), \\ \bar{z} &= z(t=0). \end{aligned} \quad (138)$$

In all our computations, a single iteration after this first try with the initial conditions was sufficient.

Table 1

Precession rate for a single planet with no satellite given by Eq. (56)

Planet	Ω_0 ("/yr)
Earth	-15.948799
Mars	-7.581155
Jupiter	-0.908216
Saturn	-0.189667
Uranus	0.001102
Neptune	-0.001652

6.4. Numerical applications

The computation of the precession frequency in the Earth–Moon system was provided in Fig. 5. With the analytical approximation (128), we have also computed the evolution of the radius and location of the precession circles of Fig. 6 with respect to the Earth–Moon distance (Fig. 8). It should be stressed that this computation is made with a fictitious Moon with initial obliquity and precession equal to the present one. In particular, we have not attempted here to follow a realistic evolution of the Earth–Moon system under tidal evolution as in (Goldreich, 1966; Touma and Wisdom, 1994b).

We have applied the computation of the precession motion for a variety of examples in the Solar System (Tables 4 and 2). In each case, only the system Sun–planet–satellite is taken into account, without trying to take into account mutual perturbations, or accumulated effects of multiple satellites. These examples are used to compare the results of the numerical integration of the averaged equations (51) (Table 2) to the results obtained using either the exact solution of Section 4, the quadrature formulas of Section 4.2, or the approximate solutions computed with the explicit formulas of Section 6.

The numerical integrations are performed only over a few (about 20) nutation periods. The precession frequency is then determined by iteration with great accuracy, searching for a uniform rotating frame where the motion is periodic (see Section 4). The nutation frequency and amplitudes $\mathcal{A}(\tau)$, $\mathcal{A}(s)$, $\mathcal{A}(\lambda\tau)$, $\mathcal{A}(\lambda's)$ are then determined using frequency analysis (Laskar, 1990, 2005). The results are displayed in Table 2 together with the frequencies obtained by quadrature. We can verify that the quadrature formulas (Section 4.2) give virtually identical results as the numerical integration.

In Table 4 are displayed the results obtained with our analytical approximate formulas (129). It can be seen that these explicit formulas provide in a simple way both the frequencies and amplitude of the terms in most situations. We have not attempted (although it should be possible to do it following the lines of Section 6) to derive approximate formulas for Uranus satellites, when the obliquity of the planet is very large, and thus the projection on the plane of the orbit questionable.

Remark. It should be noted that although in our approximate formulas (129) the solutions are given with a single periodic term, the nutation motion in the rotating frame with precession frequency is not exactly a pure rotation but a more general periodic motion. It can thus be decomposed into several periodic terms with frequencies that are harmonics of the nutation fre-

Table 2
Numerical solution for various satellites

Satellite	$(\Omega_c - \Omega_0)/\Omega_0$	ν_c (deg/yr)	$(\Omega - \Omega_0)/\Omega_0$	ν (deg/yr)	$\mathcal{A}(\tau)$ (deg)	$\mathcal{A}(\mathfrak{s})$ ($''$)	$\mathcal{A}(\lambda\tau)$ (deg)	$\mathcal{A}(\lambda'\mathfrak{s})$ (deg)
Moon	2.18	-20.128	2.18	-20.128	23.438	7.447	2.25×10^{-3}	5.158
Phobos	3.17×10^{-5}	-158.851	3.16×10^{-5}	-158.851	25.191	3.24×10^{-3}	25.179	0.798
Deimos	1.98×10^{-4}	-6.599	1.98×10^{-4}	-6.599	25.191	1.02×10^{-2}	24.290	1.645
Io	5.43×10^{-2}	-47.372	5.42×10^{-2}	-47.373	3.128	0.198	3.127	0.036
Europa	7.45×10^{-2}	-9.301	7.45×10^{-2}	-9.301	3.127	1.697	3.121	0.462
Ganymede	5.77×10^{-1}	-1.854	5.77×10^{-1}	-1.854	3.127	2.653	3.064	0.188
Callisto	9.87×10^{-1}	-0.338	9.87×10^{-1}	-0.338	3.129	6.312	2.320	0.615
Mimas	1.78×10^{-5}	-360.483	1.78×10^{-5}	-360.483	26.728	7.76×10^{-3}	26.717	1.539
Enceladus	5.83×10^{-5}	-150.642	5.82×10^{-5}	-150.642	26.728	1.64×10^{-4}	26.728	0.015
Tethys	7.71×10^{-4}	-71.349	7.71×10^{-4}	-71.349	26.728	1.09×10^{-1}	26.723	1.035
Dione	2.17×10^{-3}	-30.014	2.17×10^{-3}	-30.013	26.728	3.34×10^{-3}	26.727	0.017
Rhea	9.36×10^{-3}	-9.328	9.36×10^{-3}	-9.328	26.728	0.164	26.719	0.315
Titan	2.88	-0.508	2.88	-0.508	26.732	12.512	26.113	0.276
Iapetus	4.31×10^{-2}	-0.075	4.31×10^{-2}	-0.075	26.729	1.286	3.481	12.051
Miranda	2.72×10^{-3}	18.967	2.72×10^{-3}	18.967	82.147	0.365	81.082	2.408
Ariel	1.23×10^{-1}	4.908	1.23×10^{-1}	4.908	82.147	0.162	82.146	0.043
Umbriel	2.07×10^{-1}	1.545	2.07×10^{-1}	1.545	82.147	0.345	82.143	0.089
Titania	1.67	0.275	1.67	0.275	82.147	1.269	82.120	0.085
Oberon	2.59	0.099	2.59	0.099	82.147	0.992	82.035	0.067
Triton	3.60	0.487	3.60	0.487	28.912	2016.063	24.273	29.561

Notes. In each case, the system Sun–planet–satellite is considered. Ω_0 is the planet precession rate in absence of satellite. Ω_c and ν_c are the precession and nutation frequencies computed by quadrature, while Ω and ν are the same quantities obtained numerically using frequency analysis (Laskar, 1990, 2005). $\mathcal{A}(\tau)$ and $\mathcal{A}(\mathfrak{s})$ are the precession and nutation amplitude for the axis of the planet, $\mathcal{A}(\lambda\tau)$ and $\mathcal{A}(\lambda'\mathfrak{s})$ are the same quantities for the satellite orbit. These quantities are obtained numerically through frequency analysis. $\mathcal{A}(\lambda\tau)$ is thus the inclination of the Laplace pole of the satellite with respect to the pole of the orbit of the planet.

Table 3
Quasiperiodic decomposition of the motion of the projection of the Earth spin axis (\mathfrak{z}) in the orthogonal plane to the total angular momentum \mathbf{W}_0 [$\mathfrak{z} = \sum a_i \exp i(\nu_i t + \phi_i)$]

ν_i		a_i
0.00000	0	0.397753940
-20.12804	ν	0.000036105
20.12804	$-\nu$	0.000003746
-40.25608	-2ν	0.000000390

Note. All frequencies ν_i given by frequency analysis are easily recognized as integer multiples of the main nutation frequency ν (column 2).

quency. The amplitude of these harmonics are usually small compared with the main periodic term. As an example, the quasiperiodic decomposition of the motion of the Earth spin axis in the Sun–Earth–Moon system is given in Table 3.

7. Comparison with previous work

The complete solutions we have derived here in Sections 4 and 6 are different from the previous approximations of Goldreich (1966), Ward (1975) or more recently of Tremaine, 1991). Nevertheless, starting from Eqs. (51), we can recover the already known approximations in a more general setting, as we consider non-zero inclinations, and the constants a, b, c are computed with non-zero eccentricity (45), without the gyroscopic approximation (32), and in the non-axisymmetric case (Section 2.6). In all the following approximations, \mathbf{w}_1 is still considered as constant as it is very close to the unit vector of the total angular momentum, \mathbf{w}_0 .

7.1. Far satellite

For a far satellite, we have $c \gg b$. We have then

$$\dot{\mathbf{w}}_2 \approx -\frac{c}{\alpha} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2. \tag{139}$$

Then $z = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$ is constant and \mathbf{w}_2 precesses uniformly around \mathbf{w}_1 (Fig. 6f) with angle ψ and frequency $\nu + \Omega = -cz/\alpha$. We have thus in a base with third vector \mathbf{w}_1

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} \cos \psi \\ \sqrt{1-z^2} \sin \psi \\ z \end{pmatrix}_{(-, -, \mathbf{w}_1)}. \tag{140}$$

For the axis of the planet, we have

$$\dot{\mathbf{w}} = -\frac{a}{\gamma} (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w} + \frac{b}{\gamma} \mathbf{w} \wedge {}^t \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}. \tag{141}$$

Averaging over ψ give then

$$\langle {}^t \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2 \rangle_\psi = \frac{1-z^2}{2} Id + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z^2\right) {}^t \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1. \tag{142}$$

The spin vector of the planet \mathbf{w} thus precesses around \mathbf{w}_1 with constant obliquity ($x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1$), and constant precession rate

$$\Omega = -\frac{\alpha x}{\gamma} \left[1 + \frac{b}{a} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z^2\right) \right]. \tag{143}$$

We recover here the classical formula, the only novelty here being the treatment of the gyroscopic approximation (32).

Table 4
Approximate solution for various satellites using the analytical formulas of Section 6.1

Satellite	$(\Omega_a - \Omega_0)/\Omega_0$	ν_a (deg/yr)	$\mathcal{A}(\tau)$ (deg)	$\mathcal{A}(\mathfrak{s})$ ($''$)	$\mathcal{A}(\lambda\tau)$ (deg)	$\mathcal{A}(\lambda'\mathfrak{s})$ (deg)
Moon	2.19	-20.128	23.438	8.220	2.25×10^{-3}	5.158
Phobos	3.16×10^{-5}	-143.761	25.191	3.22×10^{-3}	25.179	0.794
Deimos	1.98×10^{-4}	-6.036	25.191	9.68×10^{-3}	24.292	1.570
Io	5.42×10^{-2}	-47.302	3.128	0.196	3.127	0.036
Europa	7.44×10^{-2}	-9.288	3.127	1.697	3.121	0.462
Ganymede	5.77×10^{-1}	-1.851	3.127	2.655	3.064	0.189
Callisto	9.87×10^{-1}	-0.338	3.129	6.307	2.320	0.615
Mimas	1.17×10^{-5}	-321.974	26.728	7.88×10^{-3}	26.718	1.563
Enceladus	5.22×10^{-5}	-134.546	26.728	1.73×10^{-4}	26.728	0.016
Tethys	7.65×10^{-4}	-63.727	26.728	1.07×10^{-1}	26.723	1.019
Dione	2.16×10^{-3}	-26.807	26.728	3.19×10^{-3}	26.727	0.016
Rhea	9.36×10^{-3}	-8.333	26.728	0.169	26.719	0.323
Titan	2.88	-0.457	26.732	11.970	26.113	0.266
Iapetus	4.41×10^{-2}	-0.076	26.729	1.383	3.481	12.067
Triton	4.70	0.439	28.927	1932.238	24.990	28.221

Notes. In each case, the system Sun–planet–satellite is considered. Ω_0 is the planet precession rate in absence of satellite. Ω_a and ν_a are the precession and nutation frequencies computed with the approximate formulas (129). $\mathcal{A}(\tau)$ and $\mathcal{A}(\mathfrak{s})$ are the precession and nutation amplitude for the axis of the planet, $\mathcal{A}(\lambda\tau)$ and $\mathcal{A}(\lambda'\mathfrak{s})$ are the same quantities for the satellite orbit. $\mathcal{A}(\lambda\tau)$ is thus the inclination of the Laplace pole of the satellite with respect to the pole of the orbit of the planet.

7.2. Close satellite

The most advanced previous computation of the precession rate for a close satellite was obtained by Tremaine (1991), based on the equations of Goldreich (1966). In this case, $b \gg a$ and $b \gg c$. Following Tremaine, one can see easily from Eqs. (51) that the total angular momentum of the planet–satellite system $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + \mathbf{G}_2$ is nearly constant with norm $\tilde{G} = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\alpha y}$. We have then with this approximation, from (51)

$$\dot{\mathbf{w}} \approx -\frac{b}{\gamma\alpha} (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}) \tilde{\mathbf{G}} \wedge \mathbf{w} \quad (144)$$

and

$$\dot{\mathbf{w}}_2 \approx -\frac{b}{\gamma\alpha} (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}) \tilde{\mathbf{G}} \wedge \mathbf{w}_2, \quad (145)$$

$\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2$ is thus nearly constant, and the two vectors \mathbf{w} and \mathbf{w}_2 thus precess around $\tilde{\mathbf{G}}$ with the same nutation frequency

$$\nu = -\frac{by}{\gamma\alpha} \tilde{G} = -\frac{by}{\gamma\alpha} \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\alpha y}. \quad (146)$$

This corresponds to Figs. 6a and 6b, where \mathbf{w} and \mathbf{w}_2 precess on concentric circles with opposite nutation phases. The computation of the precession frequency can then be treated as previously in Section 7.1. Indeed, from (51), we have

$$\frac{d\tilde{\mathbf{G}}}{dt} = -a\mathbf{w}_1 \wedge {}^t\mathbf{w}\mathbf{w}\mathbf{w}_1 - c\mathbf{w}_1 \wedge {}^t\mathbf{w}_2\mathbf{w}_2\mathbf{w}_1. \quad (147)$$

If $\tilde{\mathbf{w}}$ is the unit vector of $\tilde{\mathbf{G}}$ and using the notations of Tremaine (1991)

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{w}} = (\gamma + \alpha y)/\tilde{G}, \\ \cos\theta_1 &= \mathbf{w}_1 \cdot \tilde{\mathbf{w}} = (\gamma x + \alpha z)/\tilde{G}, \\ \cos\theta_2 &= \mathbf{w}_2 \cdot \tilde{\mathbf{w}} = (\gamma y + \alpha)/\tilde{G}. \end{aligned} \quad (148)$$

We have $\tilde{\mathbf{G}} = \gamma \cos\theta + \alpha \cos\theta_2$, and we obtain after averaging over the nutation angle

$$\frac{d\tilde{\mathbf{w}}}{dt} = -\frac{\mathfrak{A}}{\tilde{G}} (\mathbf{w}_1 \cdot \tilde{\mathbf{w}}) \mathbf{w}_1 \wedge \tilde{\mathbf{w}} \quad (149)$$

with

$$\mathfrak{A} = a \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2\theta \right) + c \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2\theta_2 \right). \quad (150)$$

The angular momentum unit vector $\tilde{\mathbf{w}}$ thus precesses around \mathbf{w}_1 with precession frequency

$$\Omega = -\frac{\mathfrak{A} \cos\theta_1}{\tilde{G}}. \quad (151)$$

7.3. Comparison with our analytical expressions

With the expression of \mathbf{T} (127) and Δ (128), we have obtained in Section 6.1 the approximate expressions for the precession (Ω) and nutation (ν) frequencies [Eq. (129)]. These formulas are valid for any value of the planet–satellite distance. In the above approximations of close or far satellite, these expressions will simplify as follow.

7.3.1. Close satellite

In the case of a close satellite, we have $b \gg a$ and $b \gg c$. Neglecting terms in a, c in front of b in (129), we obtain

$$\Omega \approx -\frac{a\alpha^2 + c\gamma^2}{\alpha z + \gamma x}, \quad \nu \approx -\frac{by}{\gamma\alpha} (\alpha z + \gamma x). \quad (152)$$

That is, with $\alpha z + \gamma x = \tilde{G} \cos\theta_1$,

$$\nu \approx -\frac{by}{\gamma\alpha} \tilde{G} \cos\theta_1. \quad (153)$$

This formula thus differs from (146) by the factor $\cos\theta_1$. In the same way, if as stated in Section 6.1, one replace the variables

x and z by their averaged value over the nutation angle in the expression of Ω , that is

$$\tilde{x} = \cos \theta_1 \cos \theta, \quad \tilde{z} = \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (154)$$

we obtain

$$\Omega = -\frac{\mathcal{A}' \cos \theta_1}{\tilde{G}} \quad (155)$$

with

$$\mathcal{A}' = a \cos^2 \theta + c \cos^2 \theta_2. \quad (156)$$

Here again, we have a slight difference from formula (151) that remains very small for small values of the angles θ and θ_2 . This is due to the approximations that were performed in Section 6.1, where we have averaged the matrix M . Doing this, we have exchanged the order of operation and averaging. This was necessary in order to obtain some simple expressions, valid for all values of the satellite–planet distance. As an example, if one average x^2 over the nutation angle, one obtains

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) \cos^2 \theta_1 \quad (157)$$

while

$$\langle x \rangle^2 = \cos^2 \theta \cos^2 \theta_1. \quad (158)$$

It should be noted that these two quantities become very close when either θ or θ_1 is small. Indeed

$$\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1. \quad (159)$$

7.3.2. Far satellite

In the case of a far satellite, we have $c \gg a$ and $c \gg b$. We then obtain from (129),

$$\Omega \approx -\frac{ax}{y} \left(1 + \frac{b}{a} \frac{yz}{x} \right) \quad (160)$$

and from Section 7.1

$$\nu = -\frac{cz}{\alpha} - \Omega. \quad (161)$$

In the case of a far satellite, x , z will be nearly constant, and the average value of y over the nutation angle will be

$$\langle y \rangle = xz. \quad (162)$$

The precession frequency then becomes

$$\Omega \approx -\frac{ax}{y} \left(1 + \frac{b}{a} z^2 \right), \quad (163)$$

that is here again, very close, but different from the classical formula (143).

8. Conclusions

In this work, we have obtained a very general framework for the evolution of the spin axis of a planet with a satellite. The equations have been derived with minimal approximations. In particular, we do not require the planet to be axisymmetric

(Section 2.6). We do not perform neither the usual gyroscopic approximation, but we average over the rotational period of the planet (Section 2). The precession equations (28) that we obtain are rigorously derived, and can be used for precise solutions of the evolution of the axis of the planets (Laskar et al., 2004a, 2004b). In this case, Eqs. (28) can be immediately generalized to the perturbation of multiple bodies.

For fast satellites, or for the analysis of the system evolution over very long time, averaging over the orbital motion is required (Section 2.5). As we also average the equations over the argument of perihelion of the satellite, the averaging is performed without expansion in term of the elliptical elements, and can thus be used for large values of the eccentricity of the planet or satellite (45). Although these secular equations (51) can be developed for a large number of interacting bodies, we have concentrated in the present work on the case of a single planet orbiting the Sun with a single satellite (it can be noted that although here we choose a non-spherical planet, the same study applies to a non-spherical satellite). It is then remarkable that the system of Eqs. (51) representing the evolution of the spin axis of the planet, the orbital plane of the planet and the satellite plane is integrable, although the explicit integration is not trivial (Section 3).

We believe that this integrable system should be used to clarify the terminology for satellite motions. In particular, we have demonstrated that there are only two frequencies in this system: a slow frequency Ω that we called the precession frequency and a fast frequency ν that we called the nutation frequency. In the frame precessing uniformly with the precession frequency Ω , the nutation motion is periodic. Moreover, if we denote \mathcal{P} , \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 the averages of \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 over the nutation angle, then, for a general solution (Section 3.4.3), the planet orbit nutates around \mathcal{P}_1 , the satellite orbit nutates around \mathcal{P}_2 and the axis of rotation of the planet (or more precisely its angular momentum), nutates around the rotational pole \mathcal{P} , all with the same nutation frequency ν . Additionally, all three poles \mathcal{P} , \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 are coplanar with the total angular momentum \mathbf{W}_0 and precess uniformly around \mathbf{W}_0 with the precession frequency Ω (Section 4.3, Proposition 2). Finally, in the rotating frame with Ω , the plane \mathbf{W}_0 , \mathcal{P} , \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 is a symmetry plane for the periodic orbits of \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 .

We have provided here a quadrature procedure that allows to compute exactly (up to numerical accuracy) the precession and nutation frequency of the secular system (51) for all values of the planet satellite distance. Alternatively, the rigorous treatment of Section 4 shows that these frequencies can also be obtained numerically by the numerical integration of the system (51) over a single cycle of the nutation period, the nutation period being computed through the quadrature procedure of Section 3.4.

We have unified the computation of the precession frequency of a planet, with some approximate formulas (Section 6) that can be used in a large variety of cases, and for all values of the planet satellite distance. In particular, these formulas are valid in the intermediate region, when none of the previously known formulas for far or close satellites (Goldreich, 1966; Tremaine, 1991) are valid. Our formulas provide also the am-

plitude of the nutation and precession terms with good accuracy (Table 4). Nevertheless, in the asymptotic case of a very far or very close satellite, our formula differs slightly from the known formulas, as we had to average over the nutation frequency in the computation process. We thus expect that the formula of Tremaine (1991) remains more precise in this asymptotic case. One should note that the theoretical results of Section 4 probably allow a more explicit derivation of this formula than in the original paper of Tremaine (1991). Using our formalism, it was also simple to improve the formula of Goldreich and Tremaine as our derivation does not assume the gyroscopic approximation, is valid for non-axisymmetric planet, and takes into account the contribution of the satellite eccentricity.

More important than the precise computation of the contribution of the precession frequency due to a satellite, we think that the full description of all cases of interactions provided by Section 4 and Fig. 6 will be of special interest for the understanding of the satellites orbits and planet spin evolution over long time intervals.

Acknowledgments

Authors are in alphabetic order. The authors thank A. Albouy, A. Chenciner, and D. Sauzin for discussions. This work was supported by PNP-CNRS.

Appendix A. Averaged quantities

For completeness, we gather here the formulae that are useful for the averaging over the orbital mean motions. Depending on the case, one will use either the eccentric anomaly (E) or true anomaly (ν) as an intermediate variables. We recall first the basic formulae

$$dM = \frac{r}{a} dE = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} d\nu,$$

$$\mathcal{X} = a(\cos E - e) = r \cos \nu,$$

$$\mathcal{Y} = a\sqrt{1-e^2} \sin E = r \sin \nu,$$

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

where \mathcal{X} and \mathcal{Y} are the coordinates of a point on a Keplerian orbit in the reference frame $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ with \mathbf{i} in the direction of periape, and (\mathbf{i}, \mathbf{j}) the orbital plane. We have then

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{X}^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 (\cos E - e)^2 (1 - e \cos E) dE \\ &= a^2 \left(\frac{1}{2} + 2e^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Y}^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - e) \sin^2 E (1 - e \cos E) dE \\ &= a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{e^2}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{X}\mathcal{Y} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{1-e} \sin E (\cos E - e) (1 - e \cos E) dE \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\mathbf{r}^t \rangle &= \langle \mathcal{X}^2 \rangle \mathbf{i}\mathbf{i}^t + \langle \mathcal{Y}^2 \rangle \mathbf{j}\mathbf{j}^t + \langle \mathcal{X}\mathcal{Y} \rangle (\mathbf{i}\mathbf{j}^t + \mathbf{j}\mathbf{i}^t) \\ &= \frac{1}{2} a^2 (\mathbf{Id} - \mathbf{k}\mathbf{k}^t) + e^2 a^2 (2\mathbf{i}\mathbf{i}^t - \frac{1}{2} \mathbf{j}\mathbf{j}^t), \end{aligned}$$

$$\langle r^2 \rangle = \langle \mathcal{X}^2 \rangle + \langle \mathcal{Y}^2 \rangle = a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{pmatrix}_{(i,j,k)} a(1 - e \cos E) dE \\ &= -\frac{3}{2} e a \mathbf{i}, \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e \cos \nu}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} d\nu = \frac{1}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}},$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}^t}{r^5} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 \nu & \cos \nu \sin \nu & 0 \\ \cos \nu \sin \nu & \sin^2 \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1 + e \cos \nu}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}} d\nu \\ &= \frac{1}{2a^3 (1 - e^2)^{3/2}} (\mathbf{Id} - \mathbf{k}\mathbf{k}^t), \end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^5} \right\rangle = -\frac{e}{a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \mathbf{i},$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2 \mathbf{r}}{r^7} \right\rangle &= -\frac{e}{4a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \\ &\quad \times [(3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})^2) \mathbf{i} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j}]. \end{aligned}$$

Appendix B. Linear algebra

Let E be a vector space of dimension 3 over \mathbb{R} . Let $\mathcal{B}_0 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ be an orthonormal basis of E , and $\mathcal{B} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ a general basis of E . Let \mathbf{u}, \mathbf{v} be two vectors with coordinates

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

in \mathcal{B} . Let M be the matrix of the coordinates of $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ in the basis \mathcal{B}_0 . Let $G = {}^t M M$ be the Gram matrix of the scalar products $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle$. Then

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = {}^t X G Y$$

and

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} |_{\mathcal{B}} = \det(M) G^{-1} X \times Y,$$

where

$$X \times Y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ y_1 x_3 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

In particular,

$$\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 = \det(M) G^{-1} \mathbf{f}_3,$$

$$f_2 \wedge f_3 = \det(M)G^{-1}f_1,$$

$$f_3 \wedge f_1 = \det(M)G^{-1}f_2.$$

Appendix C. Approximations in 3D

We give here a more detailed version of Section 6.1. Let us consider a reference frame with the total angular momentum unit vector w_0 as third axis, and with coordinates

$$w = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix},$$

we have

$$\zeta = \frac{\gamma + \beta x + \alpha y}{W_0}, \quad \zeta_1 = \frac{\gamma x + \beta + \alpha z}{W_0},$$

$$\zeta_2 = \frac{\gamma y + \beta z + \alpha}{W_0}.$$

Considering the projections on the plane orthogonal to w_0 ,

$$\delta = \xi + i\eta, \quad \delta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \delta_2 = \xi_2 + i\eta_2,$$

we have

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = iM \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

with

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha x}{\gamma} \zeta_1 - \frac{\beta y}{\gamma} \zeta_2 & \frac{\alpha x}{\gamma} \zeta & \frac{\beta y}{\gamma} \zeta \\ \frac{\alpha x}{\beta} \zeta_1 & -\frac{\alpha x}{\beta} \zeta - \frac{\beta z}{\beta} \zeta_2 & \frac{\beta z}{\beta} \zeta_1 \\ \frac{\beta y}{\alpha} \zeta_2 & \frac{\beta z}{\alpha} \zeta_2 & -\frac{\beta y}{\alpha} \zeta - \frac{\beta z}{\alpha} \zeta_1 \end{pmatrix}.$$

It is easy to verify that $(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$ is an eigenvector with eigenvalue 0. The two other eigenvalues are the roots of the second degree equation

$$\lambda^2 - \mathbf{T}\lambda + \mathbf{P} = 0,$$

where \mathbf{T} is the trace of M and

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\zeta}{\alpha\beta} + \frac{\zeta_1}{\alpha\gamma} + \frac{\zeta_2}{\beta\gamma} \right) (\alpha\beta x y \zeta + \alpha\beta x z \zeta_1 + \beta\gamma y z \zeta_2).$$

The precession and nutation frequencies are then

$$\Omega = \frac{\mathbf{T} + \sqrt{\mathbf{T}^2 - 4\mathbf{P}}}{2}, \quad \nu = -\sqrt{\mathbf{T}^2 - 4\mathbf{P}}$$

and the eigenmodes

$$ue^{i\psi}, \quad \tau e^{i(\Omega t + \Phi)}, \quad \mathfrak{s} e^{i[(\Omega + \nu)t + \Phi + \phi]},$$

with eigenvectors

$$e_0 = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix},$$

where $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ are real numbers. The solutions are then

$$\delta = \zeta ue^{i\psi} + e^{i(\Omega t + \Phi)} (\tau + \mathfrak{s} e^{i(\nu t + \phi)}),$$

$$\delta_1 = \zeta_1 ue^{i\psi} + e^{i(\Omega t + \Phi)} (\lambda\tau + \lambda' \mathfrak{s} e^{i(\nu t + \phi)}),$$

$$\delta_2 = \zeta_2 ue^{i\psi} + e^{i(\Omega t + \Phi)} (\mu\tau + \mu' \mathfrak{s} e^{i(\nu t + \phi)}).$$

Moreover, $\gamma\delta + \beta\delta_1 + \alpha\delta_2 = 0$, as it is the projection of w_0 on a plane orthogonal to w_0 . This implies that its constant term $(\gamma\zeta + \beta\zeta_1 + \alpha\zeta_2)ue^{i\psi}$ is also null, and as $\gamma\zeta + \beta\zeta_1 + \alpha\zeta_2 = W_0$, we have necessarily $u = 0$. The solutions are thus

$$\delta = e^{i(\Omega t + \Phi)} (\tau + \mathfrak{s} e^{i(\nu t + \phi)}),$$

$$\delta_1 = e^{i(\Omega t + \Phi)} (\lambda\tau + \lambda' \mathfrak{s} e^{i(\nu t + \phi)}),$$

$$\delta_2 = e^{i(\Omega t + \Phi)} (\mu\tau + \mu' \mathfrak{s} e^{i(\nu t + \phi)}).$$

In this approximation, the three axis (w, w_1, w_2) describe circular motion with nutation frequency ν around the three poles (P, P_1, P_2) that precess uniformly with precession frequency Ω around the total angular momentum w_0 . As in the general Proposition 2 (Section 4.3), the three poles (P, P_1, P_2) remains always coplanar with w_0 .

References

Andoyer, H., 1923. *Cours de Mécanique Céleste*, vol. 1. Gauthier–Villars, Paris.

Borisov, A.V., Mamaev, I.S., 2005. *Dinamika Tverdogo Tela*. R&C Dynamics, Moscow (in Russian).

Burns, J.A., 1986. Evolution of satellites orbits. In: Burns, J.A., Matthews, M.S. (Eds.), *Satellites*. Univ. of Arizona Press, Tucson, pp. 117–158.

Colombo, G., 1966. Cassini’s second and third laws. *Astron. J.* 71, 891–896.

D’Alembert, 1749. *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l’axe de la Terre, dans le système newtonien*. Chapront-Touzé, M., Souchay, J. (Eds.), *Complete Works*, Serie I, vol. 7. CNRS Editions, Paris. In press.

Dullin, H.R., 2004. Poisson integrator for symmetric rigid bodies. *Reg. Chaot. Dynam.* 9, 255–264.

Efroimsky, M., 2004. Long-term evolution of orbits about a precessing oblate planet. 1. The case of uniform precession. *Celest. Mech.* 91, 75–108.

Goldreich, P., 1965. Inclination of satellite orbits about an oblate precessing planet. *Astron. J.* 70, 5–9.

Goldreich, P., 1966. History of the lunar orbit. *Rev. Geophys.* 4, 411–439.

Kinoshita, H., 1993. Motion of the orbital plane of a satellite due to a secular change of the obliquity of its mother planet. *Celest. Mech.* 57, 359–368.

Laskar, J., 1990. The chaotic motion of the Solar System: A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus* 88, 266–291.

Laskar, J., 2005. Frequency map analysis and quasiperiodic decompositions. In: Benest, D., Froeschlé, C., Lega, E. (Eds.), *Hamiltonian Systems and Fourier Analysis*. Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, pp. 99–129.

Laskar, J., Robutel, P., Joutel, F., Gastineau, M., Correia, A.C.M., Levrard, B., 2004a. A long term numerical solution for the insolation quantities of the Earth. *Astron. Astrophys.* 428, 261–285.

Laskar, J., Correia, A., Gastineau, M., Joutel, F., Levrard, B., Robutel, P., 2004b. Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars. *Icarus* 170, 343–364.

Murray, C.A., 1983. *Vectorial Astrometry*. Adam Hilger Ltd., Bristol.

Peale, S.J., 1969. Generalized Cassini’s laws. *Astron. J.* 74, 483–489.

Touma, J., Wisdom, J., 1994a. Lie–Poisson integrators for rigid body dynamics in the Solar System. *Astron. J.* 107, 1189–1202.

Touma, J., Wisdom, J., 1994b. Evolution of the Earth–Moon system. *Astron. J.* 108, 1943–1961.

Tremaine, S., 1991. On the origin of the obliquities of the outer planets. *Icarus* 89, 85–92.

Ward, W.R., 1975. Tidal friction and generalized Cassini’s laws in the Solar System. *Astron. J.* 80, 64–70.

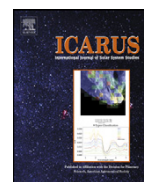


ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Icarus

www.elsevier.com/locate/icarus



Spin axis evolution of two interacting bodies

Gwenaél Boué*, Jacques Laskar

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 12 December 2008
Revised 3 February 2009
Accepted 4 February 2009
Available online 10 February 2009

Keywords:

Celestial mechanics
Asteroids, dynamics
Asteroids, rotation
Rotational dynamics
Satellites of asteroids

ABSTRACT

We consider the solid–solid interactions in the two body problem. The relative equilibria have been previously studied analytically and general motions were numerically analyzed using some expansion of the gravitational potential up to the second order, but only when there are no direct interactions between the orientation of the bodies. Here we expand the potential up to the fourth order and we show that the secular problem obtained after averaging over fast angles, as for the precession model of Boué and Laskar [Boué, G., Laskar, J., 2006. *Icarus* 185, 312–330], is integrable, but not trivially. We describe the general features of the motions and we provide explicit analytical approximations for the solutions. We demonstrate that the general solution of the secular system can be decomposed as a uniform precession around the total angular momentum and a periodic symmetric orbit in the precessing frame. More generally, we show that for a general n -body system of rigid bodies in gravitational interaction, the regular quasiperiodic solutions can be decomposed into a uniform precession around the total angular momentum, and a quasiperiodic motion with one frequency less in the precessing frame.

© 2009 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

We consider here two rigid bodies orbiting each other. The main purpose of this work is to determine the long term evolution of their spin orientation and to a lower extent, the orientation of the orbital plane. Examples of such systems are binary asteroids or a planet with a massive satellite.

If the two bodies are spherical, then the translational and the rotational motions are independent (e.g. Duboshin, 1958). In that case, the orbit is purely Keplerian and the proper rotation of the bodies are uniform. General problems with triaxial bodies are more complicated, and usually non-integrable. Even formal expansions of the gravitational potential or the proof of their convergence can be an issue (Borderies, 1978; Paul, 1988; Tricarico, 2008). In some cases, especially for slow rotations close to low order spin–orbit resonances, the spin evolution of rigid bodies of irregular shape can be strongly chaotic (Wisdom et al., 1984; Wisdom, 1987), but we will not consider this situation in the present paper where we focus on regular and quasiperiodic motions.

Stationary solutions of spin evolution are known in the case of a triaxial satellite orbiting a central spherical planet (Abul'naga and Barkin, 1979). In their paper, Abul'naga and Barkin used canonical coordinates, based on the Euler angles, to set the orientation of the satellite. On the contrary, in 1991, Wang et al. also studied relative equilibria but with a vectorial approach that enabled them to ana-

lyze easily the stability of those solutions. For a review of different formalisms that can be used in rigid body problems, see Borisov and Mamaev (2005).

The vectorial approach turned out to be also powerful for the study of relative equilibria of two triaxial bodies orbiting each other (Maciejewski, 1995). General motions of this problem were studied by Fahnestock and Scheeres (2008) in the case of the typical binary asteroid system called 1999 KW4. For that, the authors expanded the gravitational potential up to the second order only. In this approximation, there is no direct interaction between the orientation of the two bodies. Ashenberg gave in 2007 the expression of the gravitational potential expanded up to the fourth order but did not study the solutions.

In Boué and Laskar (2006) we gave a new method to study the long term evolution of solid body orientations in the case of a star–planet–satellite problem where only the planet is assumed to be rigid. This method used a similar vectorial approach as Wang et al. (1991), plus some averaging over the fast angles. We showed that the secular evolution of this system is integrable and provided the general solution.

In the present paper, we show that the problem of two triaxial bodies orbiting each other is very similar to the star–planet–satellite problem and thus can be treated in the same way.

In Section 2, we compute the Hamiltonian governing the evolution of two interacting rigid bodies. The gravitational potential is expanded up to the fourth order and averaged over fast angles. The resulting secular Hamiltonian is a function of three vectors only: the orbital angular momentum and the angular momenta of the two bodies.

* Corresponding author.

E-mail address: boue@imcce.fr (G. Boué).

In a next step (Section 3), we show that the secular problem is integrable but not trivially (i.e. it cannot be reduced to a scalar first order differential equation that can be integrated by quadrature). The general solution is the product of a uniform rotation of the three vectors (global precession around the total angular momentum) by a periodic motion (nutation). We prove also that in a frame rotating with the precession frequency, the nutation loops described by the three vectors are all symmetric with respect to a same plane containing the total angular momentum. We then derive analytical approximations of the two frequencies of the secular problem with their amplitudes. These formulas need averaged quantities that can be computed recursively. However we found that the first iteration already gives satisfactory results.

In Section 5, we consider the general case of a n -body system of rigid bodies in gravitational interaction, and we demonstrate that the regular quasiperiodic solutions of these systems can, in a similar way, be decomposed into a uniform precession, and a quasiperiodic motion in the precessing frame.

Finally, we compare our results with those of [Fahnestock and Scheeres \(2008\)](#) on the typical binary asteroid system 1999 KW4. We show that their analytical expression of the precession frequency corresponds to the simple case of a point mass orbiting an oblate body treated in [Boué and Laskar \(2006\)](#). We then integrate numerically from the full Hamiltonian, an example of a doubly asynchronous system where the [Fahnestock and Scheeres \(2008\)](#) expression of the precession frequency does not apply. We compare the results with the output of the averaged Hamiltonian and with our numerical approximation and show that they are in good agreement.

2. Fundamental equations

We are considering a two rigid body problem in which the interaction is purely gravitational with no dissipative effects. Let m_1 and m_2 be the masses of the two solids. Hereafter the mass m_2 is called the satellite or the secondary and the mass m_1 the primary. It should be stressed that this notation does not imply any constraint on the ratio of the masses which can even be equal to one.

The configuration of the system is described by the position vector \mathbf{r} of the satellite barycenter relative to the primary barycenter and their orientation expressed in an invariant reference frame. The orientations are given by the coordinates of the principal axes $(\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1)$ and $(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2)$ in which the two inertia tensors, respectively \mathcal{I}_1 and \mathcal{I}_2 , of the primary and of the secondary are diagonal [$\mathcal{I}_1 = \text{diag}(A_1, B_1, C_1)$ and $\mathcal{I}_2 = \text{diag}(A_2, B_2, C_2)$].

The Hamiltonian of this problem can be split into

$$\mathcal{H} = H_T + H_E + H_I, \quad (1)$$

where H_T is the Hamiltonian of the free translation of the reduced point mass $\beta = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, H_E describes the free rigid rotation of the two bodies and H_I contains the gravitational interaction.

The Hamiltonian of the free point mass is

$$H_T = \frac{\tilde{\mathbf{r}}^2}{2\beta}, \quad (2)$$

where $\tilde{\mathbf{r}} = \beta \dot{\mathbf{r}}$ is the conjugate momentum of \mathbf{r} .

Let \mathbf{G}_1 and \mathbf{G}_2 be respectively the angular momentum of the primary and of the satellite. The Hamiltonian of the free rotation is

$$H_E = \frac{{}^t \mathbf{G}_1 \mathcal{I}_1^{-1} \mathbf{G}_1}{2} + \frac{{}^t \mathbf{G}_2 \mathcal{I}_2^{-1} \mathbf{G}_2}{2}, \quad (3)$$

where the superscript t in ${}^t \mathbf{x}$ or ${}^t A$ denotes the transpose of any vector \mathbf{x} or matrix A . It can be expressed in terms of the principal bases of the two bodies as follows

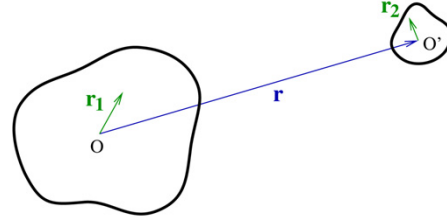


Fig. 1. Coordinates definition.

$$H_E = \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{I}_1)^2}{2A_1} + \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{J}_1)^2}{2B_1} + \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{K}_1)^2}{2C_1} + \frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{I}_2)^2}{2A_2} + \frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{J}_2)^2}{2B_2} + \frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{K}_2)^2}{2C_2}. \quad (4)$$

The interaction between the two solid bodies is the following double integral

$$H_I = - \iint \frac{G dm_1 dm_2}{\|\mathbf{r} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}, \quad (5)$$

where \mathbf{r}_1 and \mathbf{r}_2 are respectively computed relative to the primary and satellite barycenters (cf. Fig. 1) and describe the two volumes. This part of the Hamiltonian can be expanded in terms of Legendre polynomials and will be written as a function of $(\mathbf{r}, \mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2)$ in Section 2.3.

2.1. Equations of motion

The full Hamiltonian is written in the non-canonical coordinates $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2, \mathbf{G}_2)$. Thus, although the components $(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ keep the standard symplectic structure $(\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1, \mathbf{G}_1)$ on the one hand and $(\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2, \mathbf{G}_2)$ on the other hand possess the Euler-Poisson structure which leads to the following equations of motion ([Borisov and Mamaev, 2005](#))

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathcal{H}, & \dot{\tilde{\mathbf{r}}} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{H}, \\ \dot{\mathbf{G}} &= \nabla_{\mathbf{I}} \mathcal{H} \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{J}} \mathcal{H} \times \mathbf{J} + \nabla_{\mathbf{K}} \mathcal{H} \times \mathbf{K} + \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \times \mathbf{G}, \\ \dot{\mathbf{I}} &= \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \times \mathbf{I}, & \dot{\mathbf{J}} &= \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \times \mathbf{J}, & \dot{\mathbf{K}} &= \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \times \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (6)$$

We choose these non-canonical coordinates instead of symplectic ones because of the simplicity of the resulting equations which already resemble equations of precession.

2.2. First simplification

In the previous paragraphs, the Hamiltonian contains the three vectors of the principal frame $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ of each body. Nevertheless, only two vectors per solid are necessary insofar as the third can be expressed as the wedge product of the other two. We choose to keep \mathbf{I} and \mathbf{K} .

The Hamiltonian of the free rotation of the two rigid bodies can be rewritten as follows

$$H_E = \frac{\mathbf{G}_1^2}{2B_1} + \frac{\mathbf{G}_2^2}{2B_2} + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{I}_1)^2}{2} + \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{B_1} \right) \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{K}_1)^2}{2} + \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{B_2} \right) \frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{I}_2)^2}{2} + \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{B_2} \right) \frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{K}_2)^2}{2}. \quad (7)$$

2.3. Gravitational potential

The distance between the two bodies is assumed to be large in comparison to their size. Thus, in the expression of the gravitational potential (5), $\rho_1 = \|\mathbf{r}_1\|/\|\mathbf{r}\|$ and $\rho_2 = \|\mathbf{r}_2\|/\|\mathbf{r}\|$ are two small parameters. It can then be expanded in terms of Legendre polynomials (see Appendix A). As it is shown below (Eq. (13)), the expansion up to the second order does not contain any interaction due to the relative orientation of the bodies. We thus choose to expand the gravitational potential up to the fourth order. In the computation appear integrals such as $\int r_i^2 dm_i$ or $\int \mathbf{r}_i^f \mathbf{r}_i dm_i$, $i = 1, 2$ which can be expressed in terms of moments of inertia

$$\int r_i^2 dm_i = \frac{A_i + B_i + C_i}{2};$$

$$\int \mathbf{r}_i^f \mathbf{r}_i dm_i = \frac{A_i - B_i + C_i}{2} Id + (B_i - A_i) \mathbf{I}_i^f \mathbf{I}_i + (B_i - C_i) \mathbf{K}_i^f \mathbf{K}_i, \quad (8)$$

with Id being the identity matrix in \mathbb{R}^3 . But higher degree integrals such as $\int r_i^4 dm_i$ also appear. To compute these integrals, one needs more information about the bodies. However, moments of inertia are already hardly known, at least for satellites. It is thus not relevant to add new unconstrained parameters. But such integrals of inertia can be expressed as functions of A_i, B_i, C_i assuming that the bodies are homogeneous ellipsoids. Indeed, let (x_i, y_i, z_i) be the coordinates in the principal frame of a running point of the body i , and $I_{p,q,r;i} = \int x_i^p y_i^q z_i^r dm_i$ be its integrals of inertia. Because of the three symmetry planes of homogeneous ellipsoids, $I_{p,q,r;i}$ vanishes whenever one of p, q, r is odd. Thus all the third order integrals of inertia cancel, and the only non-zero fourth order integrals of inertia are (see Appendix B)

$$\int x_i^4 dm_i = \frac{15}{28m_i} (-A_i + B_i + C_i)^2;$$

$$\int y_i^4 dm_i = \frac{15}{28m_i} (A_i - B_i + C_i)^2;$$

$$\int z_i^4 dm_i = \frac{15}{28m_i} (A_i + B_i - C_i)^2;$$

$$\int y_i^2 z_i^2 dm_i = \frac{5}{28m_i} (A_i - B_i + C_i)(A_i + B_i - C_i);$$

$$\int z_i^2 x_i^2 dm_i = \frac{5}{28m_i} (A_i + B_i - C_i)(-A_i + B_i + C_i);$$

$$\int x_i^2 y_i^2 dm_i = \frac{5}{28m_i} (-A_i + B_i + C_i)(A_i - B_i + C_i). \quad (9)$$

In search of generality, we now forget the assumption of homogeneous ellipsoids. We only keep the symmetry plane hypothesis that cancels odd integrals. Setting

$$X_i = \int x_i^4 dm_i, \quad P_i = \int y_i^2 z_i^2 dm_i;$$

$$Y_i = \int y_i^4 dm_i, \quad Q_i = \int z_i^2 x_i^2 dm_i;$$

$$Z_i = \int z_i^4 dm_i, \quad R_i = \int x_i^2 y_i^2 dm_i \quad (10)$$

the integrals appearing in the expansion of the gravitational potential become

$$\int r_i^4 dm_i = X_i + Y_i + Z_i + 2P_i + 2Q_i + 2R_i;$$

$$\int (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_i)^4 dm_i = Y_i \mathbf{s}^4 + (X_i + Y_i - 6R_i)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{I}_i)^4$$

$$+ (Z_i + Y_i - 6P_i)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{K}_i)^4$$

$$+ 2\mathbf{s}^2 [(3R_i - Y_i)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{I}_i)^2 + (3P_i - Y_i)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{K}_i)^2]$$

$$+ 2[Y_i - 3(P_i - Q_i + R_i)](\mathbf{s} \cdot \mathbf{I}_i)^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{K}_i)^2;$$

$$\int r_i^2 \mathbf{r}_i^f \mathbf{r}_i dm_i = (Y_i + R_i + P_i) Id + (X_i - Y_i + Q_i - P_i) \mathbf{I}_i^f \mathbf{I}_i$$

$$+ (Z_i - Y_i + Q_i - R_i) \mathbf{K}_i^f \mathbf{K}_i, \quad (11)$$

where \mathbf{s} is any vector and $i = 1, 2$.

With these results, the expansion of the potential gives the zeroth order term

$$H_1^{(0)} = -\frac{\mu\beta}{r}, \quad (12)$$

where $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$. This is the well-known gravitational interaction between two point masses. The second order terms expression is classical and given by

$$H_1^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}}{r^3} [m_1(A_2 - 2B_2 + C_2) + m_2(A_1 - 2B_1 + C_1)]$$

$$- \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_1}{r^3} [(B_2 - A_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_2)^2 + (B_2 - C_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2]$$

$$- \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_2}{r^3} [(B_1 - A_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_1)^2 + (B_1 - C_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2], \quad (13)$$

where $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ is the direction vector of \mathbf{r} . As mentioned before, this expression does not contain body–body interactions but only spin-orbit ones such as $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2$ or $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2$. The fourth order terms expression is given in (14). In contrast to the second order terms, among the fourth order terms there are direct interactions between the two orientations such as $(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2)^2$. A similar expression was published recently in Ashenberg (2007). Although more terms are present in Ashenberg’s paper because we have made here the additional assumption of symmetry of the rigid bodies, we could compare our expression successfully with the one of Ashenberg, except for a difference in a coefficient that may come from a misprint in Ashenberg’s paper.¹

$$H_1^{(4)} = -\frac{3}{4} \frac{\mathcal{G}}{r^5} \left\{ (A_2 - 2B_2 + C_2)(A_1 - 2B_1 + C_1) \right.$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left[X_1 + \frac{8}{3} Y_1 + Z_1 - 8P_1 + 2Q_1 - 8R_1 \right]$$

$$+ \frac{1}{2} m_1 \left[X_2 + \frac{8}{3} Y_2 + Z_2 - 8P_2 + 2Q_2 - 8R_2 \right]$$

$$+ 2(B_1 - A_1)(B_2 - A_2)(\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2)^2$$

$$+ 2(B_1 - A_1)(B_2 - C_2)(\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{K}_2)^2$$

$$+ 2(B_1 - C_1)(B_2 - A_2)(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{I}_2)^2$$

$$+ 2(B_1 - C_1)(B_2 - C_2)(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2)^2$$

$$+ \left[5(A_2 - 2B_2 + C_2)(B_1 - A_1) \right.$$

$$\left. - m_2 \left(5X_1 + \frac{20}{3} Y_1 - 5P_1 + 5Q_1 - 35R_1 \right) \right] (\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_1)^2$$

$$+ \left[5(A_2 - 2B_2 + C_2)(B_1 - C_1) \right.$$

$$\left. - m_2 \left(5Z_1 + \frac{20}{3} Y_1 - 35P_1 + 5Q_1 - 5R_1 \right) \right] (\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2$$

$$+ \left[5(A_1 - 2B_1 + C_1)(B_2 - A_2) \right.$$

$$\left. - m_1 \left(5X_2 + \frac{20}{3} Y_2 - 5P_2 + 5Q_2 - 35R_2 \right) \right] (\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_2)^2$$

¹ In Ashenberg (2007), there is a misprint in the expression of $V_{BB}^{(4)}$, Eq. (20). The coefficient $-3\mathcal{G}/(4r^5)$ in Eq. (14) of the current paper corresponds to a coefficient $-G/(8R^5)$ in Ashenberg’s notations whereas it is written $-G/(5R^5)$ in Ashenberg (2007).

$$\begin{aligned}
& + \left[5(A_1 - 2B_1 + C_1)(B_2 - C_2) \right. \\
& - m_1 \left(5Z_2 + \frac{20}{3}Y_2 - 35P_2 + 5Q_2 - 5R_2 \right) \left. \right] (\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2 \\
& - 20[(B_1 - A_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_1)\mathbf{I}_1 + (B_1 - C_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)\mathbf{K}_1] \\
& \times [(B_2 - A_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_2)\mathbf{I}_2 + (B_2 - C_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)\mathbf{K}_2] \\
& + \frac{35}{6}m_2[(X_1 + Y_1 - 6R_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_1)^4 \\
& + (Z_1 + Y_1 - 6P_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^4 \\
& + 2(Y_1 - 3P_1 + 3Q_1 - 3R_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_1)^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2] \\
& + \frac{35}{6}m_1[(X_2 + Y_2 - 6R_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_2)^4 \\
& + (Z_2 + Y_2 - 6P_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^4 \\
& + 2(Y_2 - 3P_2 + 3Q_2 - 3R_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_2)^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2] \\
& + 35[(B_1 - A_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_1)^2 + (B_1 - C_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2] \\
& \times [(B_2 - A_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_2)^2 + (B_2 - C_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2] \left. \right\}. \quad (14)
\end{aligned}$$

The full Hamiltonian (7), (2), (12), (13) and (14) together with the equations of motion (cf. Section 2.1) enable the integration of the system. The evolution of this system contains fast motions like the rotation of each body around their axis or the orbital revolution. In comparison, the two spin axes as well as the orientation of the orbital plane undergo secular evolutions. In the following, fast motions are averaged in the purpose of studying the long term evolution only.

2.4. Averaging

In this section, we average the Hamiltonian independently over all fast angles: proper rotations and orbital motion. Although this method is strictly valid for non-resonant cases only, we will show (in Section 6) an application to a typical primary-asynchronous, secondary-synchronous binary asteroid system where the motion is regular. The method still gives very acceptable results. In the following, we forget the subscripts 1 and 2 whenever we consider any of the two bodies without distinction.

To average over proper rotations, Andoyer variables (G, H, L, g, h, l) as described in Fig. 2 are well suited. In a first step, the dependency of the full Hamiltonian on \mathbf{I}_1 and \mathbf{I}_2 is removed by averaging over l_1 and l_2 . We have

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \cos l \\ \sin l \\ 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{K})}, \quad (15)$$

where \mathbf{n} is defined in Fig. 2 and $\mathbf{n}' = \mathbf{K} \times \mathbf{n}$. The vectors \mathbf{n}, \mathbf{n}' and \mathbf{K} are independent of l , thus

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{I} \rangle_l &= \mathbf{0}; \\
\langle \mathbf{I}^t \mathbf{I} \rangle_l &= \frac{1}{2}(ld - \mathbf{K}^t \mathbf{K}); \\
\langle (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I})^4 \rangle_l &= \frac{3}{8}[s^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{K})^2]^2, \quad (16)
\end{aligned}$$

where \mathbf{s} is again any vector. After this averaging, the Hamiltonian of the free rotation becomes

$$\begin{aligned}
\langle H_E \rangle_{l_1, l_2} &= \frac{G_1^2}{2A_1'} + \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1'} \right) \frac{(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{K}_1)^2}{2} \\
& + \frac{G_2^2}{2A_2'} + \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{A_2'} \right) \frac{(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{K}_2)^2}{2}, \quad (17)
\end{aligned}$$

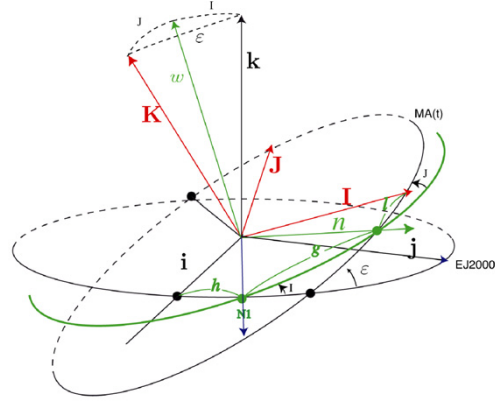


Fig. 2. Definition of Andoyer's coordinates. (i, j, k) is a fixed reference frame, and (I, J, K) the reference frame of the principal axis of inertia of the solid body. The Andoyer action variables are $(G, H = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}, L = \mathbf{G} \cdot \mathbf{K})$ with the associated angles $(g, h, l; \text{Andoyer, 1923})$.

where

$$\frac{1}{A'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right). \quad (18)$$

And the second and the fourth order terms of the interaction

$$\begin{aligned}
\langle H_I^{(2)} \rangle_{l_1, l_2} &= -\frac{\mathcal{G}C_1 m_2}{2r^3} [1 - 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2] \\
& - \frac{\mathcal{G}C_2 m_1}{2r^3} [1 - 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2], \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle H_I^{(4)} \rangle_{l_1, l_2} &= -\frac{3}{8} \frac{\mathcal{G}m_2 D_1}{r^5} \left[1 - 10(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2 + \frac{35}{3}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^4 \right] \\
& - \frac{3}{8} \frac{\mathcal{G}m_1 D_2}{r^5} \left[1 - 10(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2 + \frac{35}{3}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^4 \right] \\
& - \frac{3}{4} \frac{\mathcal{G}C_1 C_2}{r^5} [1 + 2(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2)^2 - 5(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2 \\
& - 5(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2 - 20(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)(\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2) \\
& + 35(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_1)^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{K}_2)^2], \quad (20)
\end{aligned}$$

where $\mathcal{C} = C - (A + B)/2$ and

$$\mathcal{D} = \frac{3}{8}(X + Y) + Z - 3(P + Q) + \frac{3}{4}R. \quad (21)$$

In a next step, the averaging over the angle g is performed. This corresponds to the averaging of \mathbf{K} around $\mathbf{w} = \mathbf{G}/G$ (cf. Fig. 2). Indeed, in the general case the angular momentum \mathbf{G} is not aligned with the axis of maximum inertia \mathbf{K} , which is implicitly assumed in the gyroscopic approximation. Instead, if there is an angle J between these two vectors then

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sin J \sin g \\ -\sin J \cos g \\ \cos J \end{pmatrix}_{(\mathbf{N}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{w})}, \quad (22)$$

where \mathbf{N}_1 is defined in Fig. 2 and $\mathbf{U}_1 = \mathbf{w} \times \mathbf{N}_1$. The vectors $\mathbf{N}_1, \mathbf{U}_1$ and \mathbf{w} are independent of g , so

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{K} \rangle_g &= (\cos J)\mathbf{w}; \\
\langle \mathbf{K}^t \mathbf{K} \rangle_g &= \frac{1}{2}(\sin^2 J)ld + \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 J \right) \mathbf{w}^t \mathbf{w}; \\
\langle (\mathbf{s} \cdot \mathbf{K})^4 \rangle_g &= \left(1 - 5\sin^2 J + \frac{35}{8}\sin^4 J \right) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w})^4 \\
& + 3\sin^2 J \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 J \right) \mathbf{s}^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w})^2 + \frac{3}{8}\sin^4 J \mathbf{s}^4, \quad (23)
\end{aligned}$$

754

G. Boué, J. Laskar / *Icarus* 201 (2009) 750–767

where \mathbf{s} is any vector. After averaging over g_1 and g_2 , the conjugated momenta G_1 and G_2 become constant. The averaged Euler Hamiltonian which depends only on G_1 and G_2

$$\langle H_E \rangle_{l,g} = \left(\frac{\cos^2 J_1}{C_1} + \frac{\sin^2 J_1}{A_1'} \right) \frac{\mathbf{G}_1^2}{2} + \left(\frac{\cos^2 J_2}{C_2} + \frac{\sin^2 J_2}{A_2'} \right) \frac{\mathbf{G}_2^2}{2} \quad (24)$$

is now a constant and can be ignored. In this expression, A' is still the harmonic mean of A and B (18). The only change in the interaction is the substitution of C and D in (19)–(20) by

$$C' = \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right) C, \quad (25)$$

$$D' = \left(1 - 5 \sin^2 J + \frac{35}{8} \sin^4 J \right) D$$

and $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ by $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$. For fast rotating non-rigid bodies, the angle J is assumed to be very small as a result of internal dissipation ($J \approx 10^{-7}$ radians for the Earth). In that case, the gyroscopic approximation $J = 0$ is a good approximation since the correction obtained after averaging over fast angles is in $O(\sin^2 J)$. Nevertheless, for slow rotating triaxial asteroids, the angle J may be large and the gyroscopic approximation may not be valid.

In a third step the Hamiltonian is averaged over the orbital motion. First over the mean anomaly M , and then over the longitude of periaipse ω . The first average is computed using the formulas of Appendix C and for the second one, we have similar equations as (16)

$$\langle \mathbf{I} \rangle_\omega = \mathbf{0};$$

$$\langle \mathbf{I}^t \mathbf{I} \rangle_\omega = \frac{1}{2} (I d - \mathbf{w}^t \mathbf{w});$$

$$\langle (\mathbf{s} \cdot \mathbf{I})^4 \rangle_\omega = \frac{3}{8} [\mathbf{s}^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{w})^2]^2, \quad (26)$$

where \mathbf{I} now denotes direction of the periaipse and \mathbf{w} the normal of the orbit. The resulting secular Hamiltonian $H_s = \langle \mathcal{H} \rangle_{l_1, l_2, g_1, g_2, M, \omega}$ is thus

$$H_s = \left(\frac{\cos^2 J_1}{C_1} + \frac{\sin^2 J_1}{A_1'} \right) \frac{\mathbf{G}_1^2}{2} + \left(\frac{\cos^2 J_2}{C_2} + \frac{\sin^2 J_2}{A_2'} \right) \frac{\mathbf{G}_2^2}{2}$$

$$- \frac{\mu\beta}{2a} + \frac{\mathcal{G}}{4a^3(1-e^2)^{3/2}} [m_2 C_1' (1-3x^2) + m_1 C_2' (1-3y^2)]$$

$$- \frac{9}{32} \frac{\mathcal{G}}{a^5(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right)$$

$$\times \left[C_1' C_2' (1-5x^2-5y^2+2z^2-20xyz+35x^2y^2) \right.$$

$$+ \frac{m_2 D_1'}{2} \left(1-10x^2 + \frac{35}{3} x^4 \right)$$

$$\left. + \frac{m_1 D_2'}{2} \left(1-10y^2 + \frac{35}{3} y^4 \right) \right], \quad (27)$$

where $x = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1)$, $y = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2)$ and $z = (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2)$. Let us write H_s in the more compact form

$$H_s = -\frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{2} y^2 - \frac{c}{2} z^2 + \partial xyz - \frac{e}{4} x^4 - \frac{f}{4} y^4 - \frac{g}{2} x^2 y^2 + \mathfrak{h}, \quad (28)$$

where

$$a = k_3 m_2 C_1' - \frac{5}{2} k_5 (C_1' C_2' + m_2 D_1'),$$

$$b = k_3 m_1 C_2' - \frac{5}{2} k_5 (C_1' C_2' + m_1 D_2'),$$

$$c = k_5 C_1' C_2',$$

$$\partial = 5k_5 C_1' C_2',$$

$$e = \frac{35}{6} k_5 m_2 D_1',$$

$$f = \frac{35}{6} k_5 m_1 D_2',$$

$$g = \frac{35}{2} k_5 C_1' C_2',$$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{6} k_3 (m_2 C_1' + m_1 C_2') - \frac{1}{8} k_5 (2C_1' C_2' + m_2 D_1' + m_1 D_2')$$

$$+ \langle H_E \rangle_{l,g} - \frac{\mu\beta}{2a} \quad (29)$$

with

$$k_3 = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}}{a^3(1-e^2)^{3/2}},$$

$$k_5 = \frac{9}{8} \frac{\mathcal{G}}{a^5(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right). \quad (30)$$

3. Secular equations

The secular Hamiltonian H_s (28) is similar to the one obtained in Boué and Laskar (2006) although its expression is slightly more complicated. The difference with Boué and Laskar (2006) is that the secular Hamiltonian is not anymore the equation of an ellipsoid in (x, y, z) . A few results in Boué and Laskar (2006) were proved for this special surface. We recall here the main steps of the derivation of the solutions adapted to the new surface defined by the current secular Hamiltonian.

The Hamiltonian H_s is only a function of the angular momenta $(\mathbf{G}, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$. The equations of motion of these quantities are

$$\dot{\mathbf{G}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_s \times \mathbf{G},$$

$$\dot{\mathbf{G}}_1 = \nabla_{\mathbf{G}_1} H_s \times \mathbf{G}_1,$$

$$\dot{\mathbf{G}}_2 = \nabla_{\mathbf{G}_2} H_s \times \mathbf{G}_2. \quad (31)$$

We thus have $\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_1 \cdot \dot{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{G}_2 \cdot \dot{\mathbf{G}}_2 = 0$ which means that the norms $\gamma = \|\mathbf{G}\|$, $\beta = \|\mathbf{G}_1\|$ and $\alpha = \|\mathbf{G}_2\|$ are constant. It is thus possible to write the general equations directly in terms of the unit vectors $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{\gamma} \nabla_{\mathbf{w}} H_s \times \mathbf{w},$$

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \frac{1}{\beta} \nabla_{\mathbf{w}_1} H_s \times \mathbf{w}_1,$$

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = \frac{1}{\alpha} \nabla_{\mathbf{w}_2} H_s \times \mathbf{w}_2. \quad (32)$$

From the expression of the secular Hamiltonian (28), we get

$$\dot{\mathbf{w}} = -\frac{p}{\gamma} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w} - \frac{q}{\gamma} \mathbf{w}_2 \times \mathbf{w},$$

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = -\frac{p}{\beta} \mathbf{w} \times \mathbf{w}_1 - \frac{s}{\beta} \mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_1,$$

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = -\frac{q}{\alpha} \mathbf{w} \times \mathbf{w}_2 - \frac{s}{\alpha} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2, \quad (33)$$

where

$$p = a x - \partial y z + e x^3 + g x y^2,$$

$$q = b y - \partial x z + f y^3 + g x^2 y,$$

$$s = c z - \partial x y. \quad (34)$$

The problem has 9 degrees of freedom, the coordinates of \mathbf{G} , \mathbf{G}_1 and \mathbf{G}_2 , and Eqs. (33)–(34) are non-linear. At first glance the resolution is difficult. There are 7 first integrals

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\| &= 1, \\ \|\mathbf{w}_1\| &= 1, \\ \|\mathbf{w}_2\| &= 1, \\ \alpha x^2 + by^2 + cz^2 - 2\delta xyz + \frac{\epsilon}{2}x^4 + \frac{f}{2}y^4 + gx^2y^2 &= -2H_s, \\ \gamma\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}_1 + \alpha\mathbf{w}_2 &= \mathbf{W}_0 \end{aligned} \quad (35)$$

where \mathbf{W}_0 is the total angular momentum. Thus one misses one constant of motion to integrate the problem by quadrature. The next section shows how to solve the relative motion of the three vectors that contains enough constants of motion.

3.1. Relative solution

In the previous section, we have shown that the number of first integrals is not large enough to solve the full problem. But the number of degrees of freedom can be decreased by considering only the relative distance between the vectors. These distances are given by the dot products $x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1$, $y = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2$ and $z = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2$. From Eqs. (33), one can derive the new equations of motion

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(-\frac{q}{\gamma} + \frac{s}{\beta}\right)v, \\ \dot{y} &= \left(-\frac{s}{\alpha} + \frac{p}{\gamma}\right)v, \\ \dot{z} &= \left(-\frac{p}{\beta} + \frac{q}{\alpha}\right)v, \end{aligned} \quad (36)$$

where $v = (\mathbf{w} \times \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{w}_2$ is the volume defined by the 3 vectors. It can be expressed in terms of x , y and z through the Gram determinant

$$v^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{vmatrix} = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz. \quad (37)$$

This restricted problem has only 3 degrees of freedom and 2 first integrals

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + by^2 + cz^2 - 2\delta xyz + \frac{\epsilon}{2}x^4 + \frac{f}{2}y^4 + gx^2y^2 &= -2H_s, \\ \gamma\beta x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z &= K, \end{aligned} \quad (38)$$

the second integral being simply derived from $2K = \|\mathbf{W}_0\|^2 - (\gamma^2 + \beta^2 + \alpha^2)$. The motion in (x, y, z) is thus integrable and the solution evolves in the intersection \mathcal{C} of the quartic $H_s = Cte$ and the plane $K = Cte$.² Moreover, the evolution is limited to the interior of the $v^2(x, y, z) = 0$ surface that will be henceforth called the Cassini berlingot³ as in Boué and Laskar (2006) (cf. Fig. 3). Outside this surface we would have $v^2 < 0$ which is not possible (see Boué and Laskar, 2006).

3.1.1. Shape of the quartic surface

The constraint $H_s = Cte$ defines a quartic surface \mathcal{Q} in (x, y, z) . Quartic surfaces can have very different shapes, nevertheless setting $z' = z - \frac{\delta}{c}xy$, one obtains

$$-2H_s = \alpha x^2 + by^2 + cz'^2 + \frac{\epsilon}{2}x^4 + \frac{f}{2}y^4 + \left(g - \frac{\delta^2}{c}\right)x^2y^2 \quad (39)$$

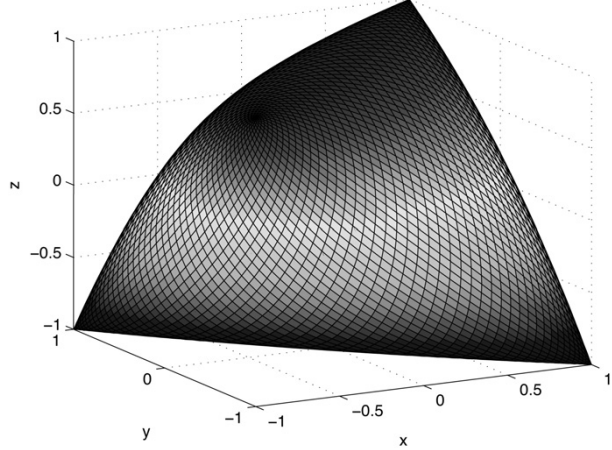


Fig. 3. The surface $v^2(x, y, z) = 0$. As $v^2 \geq 0$, the allowed space is the interior of this Cassini berlingot shaped volume.

which is a biquadratic. The new surface \mathcal{Q}' defined by (39) is thus symmetric in x , y and z' . In (x^2, y^2, z') the surface \mathcal{Q}' can be either an ellipsoid, a paraboloid or a hyperboloid depending on the sign of

$$\delta = \epsilon f - \left(g - \frac{\delta^2}{c}\right)^2. \quad (40)$$

If $\delta > 0$ then it is an ellipsoid and x , y , z' and thus z are bounded. In the other case, \mathcal{Q}' is either an elliptic paraboloid if $\delta = 0$ or a hyperboloid of one or two sheets depending on the value of H_s if $\delta < 0$. Thus, x , y , z are unbounded.

From the definition of the coefficients a – g (29), δ can be rewritten in the following form

$$\delta = \left(\frac{35}{6}\right)^2 k_5^2 m_1 m_2 \mathcal{D}'_1 \mathcal{D}'_2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 k_5^2 C_1'^2 C_2'^2. \quad (41)$$

Using the definition of the coefficients C' and \mathcal{D}' (25) and (21), we get

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\frac{15}{2}\right)^2 k_5^2 C_1'^2 C_2'^2 \\ &\times \left[\eta \left(1 - 5 \sin^2 J_1 + \frac{35}{8} \sin^4 J_1\right) \right. \\ &\times \left(1 - 5 \sin^2 J_2 + \frac{35}{8} \sin^4 J_2\right) \\ &\left. - \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J_1\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J_2\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (42)$$

where η is a positive parameter related to the shapes of the rigid bodies

$$\eta = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \frac{m_1 \mathcal{D}_1 m_2 \mathcal{D}_2}{C_1^2 C_2^2}. \quad (43)$$

Let us look to the range of the possible values of η in the case of homogeneous ellipsoids. We have the relation between \mathcal{D} and C given by Eqs. (9)

$$\mathcal{D} = \frac{15}{7m} \left[C^2 + \frac{1}{8}(B - A)^2 \right]. \quad (44)$$

The lowest value of η is thus obtained for $A = B$, i.e. for axisymmetric bodies. In that case, $\eta_{\min} = 25/9$. Conversely, the largest value of η is attained when $(B - A)^2$ is maximal, thus when $B = C$

² In the whole paper, Cte means any constant value.

³ A berlingot is a famous tetrahedron hard candy with rounded edges.

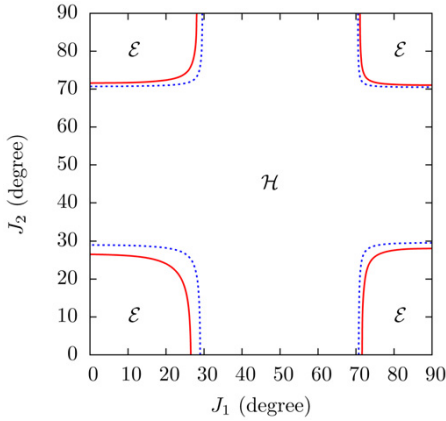


Fig. 4. Shape of the surface \mathcal{Q}' as a function of the angles J_1 and J_2 between the angular momentum and the axis of maximum inertia of each bodies. \mathcal{E} and \mathcal{H} stand for ellipsoid and hyperboloid respectively. The solid curve in red delineates the \mathcal{E} and the \mathcal{H} zones for $\eta = 25/9$. The dashed blue curve corresponds to $\eta = 25/4$. See text for details. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

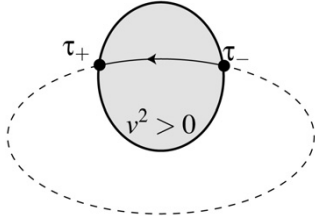


Fig. 5. The shaded area corresponds to the region where $v^2 > 0$, inside the Cassini berlingot \mathcal{B} . The orbit intersects the Cassini berlingot \mathcal{B} in $t = \tau_+$ and $t = \tau_-$.

and $A = 0$, that is, in the limiting case where the bodies are extremely thin rods. In this second case, $\eta_{\max} = 25/4$. So, for homogeneous ellipsoids, η is constrained between η_{\min} and η_{\max} .

Fig. 4 shows the domains where the surface \mathcal{Q}' is an ellipsoid (\mathcal{E}) or a hyperboloid (\mathcal{H}) as a function of the angles J_1 and J_2 . The two sets of curve correspond to $\eta = \eta_{\min}$ and $\eta = \eta_{\max}$. As δ is a function of $\sin^2 J_1$ and $\sin^2 J_2$, the figure can be extended up to 180 degrees applying axial symmetry around the axis $J_1 = 90$ degrees and $J_2 = 90$ degrees.

3.1.2. Description of the solutions

In Boué and Laskar (2006), we show that when the surface \mathcal{Q} is an ellipsoid then the evolution of (x, y, z) presents two kinds of solutions. We have called *special solutions* the solutions where \mathcal{C} is totally included in the Cassini berlingot \mathcal{B} . This means that the vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 are never collinear. This happens only when the three vectors are almost orthogonal. The second class of solutions are the *general solutions*, more frequent in astronomical problems, for which \mathcal{C} crosses the Cassini berlingot (Fig. 5). In that case $\mathbf{M} = (x, y, z)$ does periodic returns inside the Cassini berlingot up to its surface and the volume v defined by the three vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 is conserved over one period. In both cases, solutions are periodic.

There are also special cases that happen when the orbit of (x, y, z) is tangent to the Cassini berlingot. At the tangency there is indeed a fixed point. In that state, the three vectors remain in a plane that precesses in time. It is called a Cassini state (Colombo, 1966; Peale, 1969; Ward, 1975; Boué and Laskar, 2006). If an initial condition is chosen along such special orbits but strictly outside

the fixed point, then the system cannot reach the stationary point in finite time and it is the only case where x, y, z are not periodic.

Here, we have the same results except when the quartic \mathcal{Q} is unbounded. In that case, we cannot have special solutions.

3.2. Global solution

Knowing that x, y, z are periodic functions of time, it is possible to get general features of the global motion. For that, let us rewrite the secular equations (33) in a new form so as to obtain a linear differential system with periodic coefficients.

Let us assume as in Boué and Laskar (2006) that the vectors $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ are not coplanar ($v \neq 0$). Let \mathcal{W} be the matrix $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ and V the Gram matrix of the basis $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Using the expression of the wedge product in the basis $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ (see Appendix B of Boué and Laskar, 2006), the equations of motion (33) can be written in the following form

$$\dot{\mathcal{W}} = vV^{-1}\mathcal{W}\mathcal{A}. \tag{46}$$

Here we correct a mistake⁴ in the demonstration of the Proposition 1, given in Section 4 in Boué and Laskar (2006) (see the erratum, Boué and Laskar, 2008).

In (46), vV^{-1} and \mathcal{A} are matrices depending only on (x, y, z) that are periodic functions of period T . Indeed

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{\beta} & -\frac{s}{\alpha} \\ -\frac{q}{\gamma} & 0 & \frac{q}{\alpha} \\ \frac{p}{\gamma} & -\frac{p}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

and

$$V^{-1} = \frac{1}{v^2} \begin{pmatrix} 1 - z^2 & yz - x & xz - y \\ yz - x & 1 - y^2 & xy - z \\ xz - y & xy - z & 1 - x^2 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Thus, if $\mathcal{W}(t)$ is a solution of (46), then $\mathcal{W}(t + T)$ is also a solution. Let us denote

$$\mathcal{R}_T(t) = \mathcal{W}(t + T)\mathcal{W}(t)^{-1}. \tag{49}$$

We need to prove that $\mathcal{R}_T(t)$ is constant with t . As the Gram matrix V of the vectors $(\mathbf{w}(t), \mathbf{w}_1(t), \mathbf{w}_2(t))$ is T -periodic, the norm is conserved by linear transformation $\mathcal{R}_T(t)$ that send $\mathcal{W}(t)$ into $\mathcal{W}(t + T)$, and $\mathcal{R}_T(t)$ is thus an isometry of \mathbb{R}^3 . Moreover, this isometry is positive, as the volume v is conserved over a full period T (see Section 3.1.2). The invariance of the total angular momentum \mathbf{W}_0 (35) then implies that $\mathcal{R}_T(t)$ is a rotation matrix of axis \mathbf{W}_0 .

As $\mathcal{R}_T(t)$ is a rotation in \mathbb{R}^3 , we have for all $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$ in $\{\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i(t + T) \times \mathbf{w}_j(t + T) &= (\mathcal{R}_T(t)\mathbf{w}_i(t)) \times (\mathcal{R}_T(t)\mathbf{w}_j(t)) \\ &= \mathcal{R}_T(t)(\mathbf{w}_i(t) \times \mathbf{w}_j(t)). \end{aligned} \tag{50}$$

From the equations of motion (33), we can thus derive

$$\dot{\mathcal{W}}(t + T) = \mathcal{R}_T(t)\dot{\mathcal{W}}(t). \tag{51}$$

On the other hand, as $\mathcal{W}(t + T) = \mathcal{R}_T(t)\mathcal{W}(t)$ (49), we deduce that for all t ,

$$\dot{\mathcal{R}}_T(t)\mathcal{W}(t) = 0. \tag{52}$$

⁴ In Boué and Laskar (2006), we have incorrectly stated that the averaged differential system (51) could be written as $\dot{\mathcal{W}} = \mathcal{W}\mathcal{B}$ where $\mathcal{B} = vV^{-1}\mathcal{A}$ is a matrix depending only on (x, y, z) . In fact the correct expression is $\dot{\mathcal{W}} = vV^{-1}\mathcal{W}\mathcal{A}$. In Boué and Laskar (2006), the proof following Eq. (51) has to be modified. This is done in the present paper. The results remain identical.

$\mathcal{R}_T(t)$ is thus a constant matrix \mathcal{R}_T . Now, let us denote $\mathcal{R}(t)$ the rotation of axis \mathbf{W}_0 and angle $t\theta_T/T$ (i.e. $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}_T$). We have

Proposition 1. *The complete solution $\mathcal{W}(t)$ can be expressed on the form*

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{R}(t)\tilde{\mathcal{W}}(t), \quad (53)$$

where $\tilde{\mathcal{W}}(t)$ is periodic with period T , and $\mathcal{R}(t)$ a uniform rotation of axis \mathbf{W}_0 and angle $t\theta_T/T$. The motion has two periods: the (usually) short period T and the precession period

$$T' = \frac{2\pi}{\theta_T} T. \quad (54)$$

3.3. Properties of the solution

A more precise result on the periodic loops can be proved. But before, one needs to write the instantaneous precession speed as a function of (x, y, z) .

3.3.1. Instantaneous precession rate

Let us write the time derivative of the precession angle of \mathbf{w} as a function of (x, y, z) . The expressions for the other vectors can be obtained in the same way. The following approach is highly inspired by Boué and Laskar (2006). We set $W_0 = \|\mathbf{W}_0\|$ the norm of the total angular momentum and $\mathbf{w}_0 = \mathbf{W}_0/W_0$ its direction vector. With

$$\zeta = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_0, \quad (55)$$

the projection \mathbf{L} of \mathbf{w} on the plane orthogonal to \mathbf{w}_0 is

$$\mathbf{L} = \mathbf{w} - \zeta \mathbf{w}_0. \quad (56)$$

Assuming $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}_0$, we get $\zeta < 1$. With $L = \|\mathbf{L}\|$, the expression of \mathbf{L} gives

$$L = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{and} \quad \dot{L} = -\frac{\zeta \dot{\zeta}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (57)$$

Moreover, setting $\ell = \mathbf{L}/L$, we get

$$\mathbf{L} = L\ell \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{L}} = \dot{L}\ell + \dot{\theta}(\mathbf{w}_0 \times \mathbf{L}) \quad (58)$$

which yields to

$$\dot{\mathbf{L}}^2 = \dot{L}^2 + \dot{\theta}^2(\mathbf{w}_0 \times \mathbf{L})^2 = \dot{L}^2 + \dot{\theta}^2(1 - \zeta^2). \quad (59)$$

Now, from the expression of \mathbf{L} (56), we can also write

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{w}} - \dot{\zeta} \mathbf{w}_0 \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{L}}^2 = \dot{\mathbf{w}}^2 - \dot{\zeta}^2. \quad (60)$$

Finally, we have

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{\mathbf{w}}^2 - \dot{\zeta}^2/(1 - \zeta^2)}{1 - \zeta^2}. \quad (61)$$

This final expression is an explicit function of (x, y, z) . Indeed, from (35), one has

$$\zeta = \frac{1}{W_0}(\gamma + \beta x + \alpha y) \quad (62)$$

and thus

$$\dot{\zeta} = \frac{v}{W_0} \left(\frac{\alpha p}{\gamma} - \frac{\beta q}{\gamma} \right). \quad (63)$$

We have also from (33)

$$\dot{\mathbf{w}}^2 = \frac{1}{\gamma^2}(p^2 + q^2 + 2pqz - (px + qy)^2) \quad (64)$$

so (61) can be written on the form

$$\dot{\theta}^2 = \Theta(x, y, z). \quad (65)$$

The sign of $\dot{\theta}$ can be determined through (58). Indeed $\dot{\theta}$ is a function of $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$, but its sign can only change when $\dot{\theta} = 0$, that is from (61), when

$$\dot{\mathbf{w}}^2(1 - \zeta^2) = \dot{\zeta}^2. \quad (66)$$

Equation (65) thus gives the instantaneous precession rate of \mathbf{w} as a function of x, y, z . Same results can easily be obtained for the other two vectors \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 .

3.3.2. Symmetry of the nutation

It is now possible to prove a more precise result on the periodic loops generated by \mathbf{w}, \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 in the precessing frame. This is the same result as in Boué and Laskar (2006) that was given for a three body problem with only one rigid body.

Proposition 2. *In the frame rotating uniformly with the precession period, the three vectors $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ describe periodic loops $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ that are all symmetric with respect to the same plane \mathcal{S} containing \mathbf{w}_0 .*

Consequence. Let us call $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ the averages of $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ over the nutation angle. $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ are respectively the pole of the orbit, the pole of the spin of the primary and the pole of the spin of the secondary. Due to the symmetry of the loops, the three poles $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1$ and \mathcal{P}_2 remain in the symmetry plane \mathcal{S} containing \mathbf{w}_0 , and precessing uniformly around \mathbf{w}_0 . Each vector $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ nutates around its pole, respectively $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Proof. As in Boué and Laskar (2006), we will consider uniquely \mathbf{w} , the other cases being similar. We consider here a general solution, for which the orbit of (x, y, z) crosses the Cassini berlingot (Fig. 5). We choose the origin of time in τ_+ which corresponds to an orbital angular momentum \mathbf{w}_+ . Let σ be the arc length described by $\mathbf{M} = (x, y, z)$ computed from $\mathbf{M}_+ = \mathbf{M}(\tau_+)$. From (36) we have

$$\dot{\sigma} = v\sqrt{f(x, y, z)}, \quad (67)$$

where

$$f(x, y, z) = \left(\frac{q}{\gamma} - \frac{s}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{s}{\alpha} - \frac{p}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{p}{\beta} - \frac{q}{\alpha} \right)^2. \quad (68)$$

$f(x, y, z) = 0$ if and only if $\alpha p = \beta q = \gamma s$. This condition corresponds to a fixed point of the system. Else $f(x, y, z)$ is strictly positive.

Thus $\dot{\sigma}$ is a function of (x, y, z) and has the sign of v . For $t < 0$, the orbit in the (x, y, z) describes the arc (τ_-, τ_+) , thus σ decreases from σ_- down to $\sigma_+ = 0$, and $v < 0$. Conversely, for $t > 0$ the orbit describes the same arc in the reverse way (τ_+, τ_-) , hence $v > 0$. As x, y, z are functions of the arc length σ , we can write

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} -F(\sigma), & \text{if } t < 0, \\ +F(\sigma), & \text{if } t > 0, \end{cases} \quad (69)$$

where $F(\sigma) = |v|\sqrt{f(x, y, z)}$. We conclude that σ and thus $\mathbf{M} = (x, y, z)$ are even, that is $\mathbf{M}(-t) = \mathbf{M}(t)$.

The rest of the proof is identical to the one of Boué and Laskar (2006). We recall it for completeness. From (65)

$$\dot{\theta}^2(t) = \Theta(x, y, z), \quad (70)$$

we deduce that $\dot{\theta}^2(t)$ is even. Moreover, as the differential system (33) is polynomial, the solutions $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are analytical in time t , and so will be the coordinate angle $\theta(t)$ of \mathbf{w} . The lemma of Boué and Laskar (2006) thus implies that $\dot{\theta}(t)$ is odd or even. If $\dot{\theta}(t)$ is even on $[-T/2, T/2]$, for all $h \in [0, T/2]$, we have $\theta(h) - \theta(0) = \theta(0) - \theta(-h)$. As the cosine ζ of the angle from \mathbf{w} and \mathbf{w}_0 (55) depends only on x, y (62), we have $\zeta(h) = \zeta(-h)$, and $\mathbf{w}(h)$ and $\mathbf{w}(-h)$ are symmetrical with respect to the $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_+)$ plane. It will

still be the same in the rotating frame with the precession period. In this rotating frame, the periodic loop generated by \mathbf{w} is thus symmetric with respect to the plane $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_+)$.

Moreover, at $t = 0$ (τ_+), the volume v is null, and thus $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are coplanar. In the rotating frame, all three orbits generated by $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are thus symmetrical with respect to the same plane $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_+)$.

The only case where $\dot{\theta}(t)$ is odd, occurs when $\dot{\theta}(0) = 0$. As $v(0) = 0$, we have $\zeta(0) = 0$ (63) and $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ (61). In the same way, we have $\dot{\mathbf{w}}_1(0) = \dot{\mathbf{w}}_2(0) = \mathbf{0}$, and the vector field (33) vanishes at $t = 0$. The three vectors $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ are thus stationary and coplanar. □

This is a special Cassini state where the precession frequency is zero.

3.4. Computation of the two periods

The nutation period and the precession period are two key parameters of the problem since the global solution is the product of these two motions (53). Let us see how the values can be derived.

The three dot products $(x(t), y(t), z(t))$ are T -periodic where T is the nutation period. This period can thus be calculated from the expression of $(x(t), y(t), z(t))$. Given the two first integrals (35), it is possible to express $x(t), y(t)$, and $z(t)$ in the form of an integral as in Boué and Laskar (2006). Nevertheless the energy conservation only gives an implicit relation between those variables and the computation remains tedious. For this reason, we give here an algorithm that enables to compute the two frequencies in a simple way using the numerical integration of the secular equations (33). The method leads to an arbitrary high precision since it necessitates the integration over one nutation period only.

We assume that at $t_0 = 0$, the initial volume v (36) is not zero, and let x (for example) be the variable with the largest variation rate, $\dot{x}(t_0)$. Using the method of Hénon (1982), we search for the first time $t > t_0$ when $(x(t), \dot{x}(t)) = (x(t_0), \dot{x}(t_0))$. We integrate the system (33) until

$$\begin{cases} x_{n-1} < x_0 \\ x_n \geq x_0 \end{cases} \text{ if } \dot{x}(t_0) > 0, \tag{71}$$

or

$$\begin{cases} x_{n-1} > x_0 \\ x_n \leq x_0 \end{cases} \text{ if } \dot{x}(t_0) < 0. \tag{72}$$

We then change the time variable to x and integrate

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\dot{x}(x, y, z)}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{y}(x, y, z)}{\dot{x}(x, y, z)}, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\dot{z}(x, y, z)}{\dot{x}(x, y, z)}, \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{\epsilon \sqrt{\Theta(x, y, z)}}{\dot{x}(x, y, z)}, \end{aligned} \tag{73}$$

from x_n to x_0 . The latter equation comes from (65) and will provide the rotation angle of the vectors over one nutation period (knowing the initial angle $\theta(t_0)$). We thus have the nutation period $t = T$ and $\theta_T = \theta(T) - \theta(t_0)$. The precession period is simply given by

$$T' = \frac{2\pi}{\theta_T} T. \tag{74}$$

4. Analytical approximation

In this section we give an analytical approximation of the secular evolution. So far, only general features of the solutions have been obtained. Here analytical approximations of the two frequencies that appear in the problem as well as their amplitudes are computed. The two frequencies being the global precession and the nutation.

In an invariant frame where the third axis is aligned with the direction \mathbf{w}_0 of the total angular momentum, we can write

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \tag{75}$$

where

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\gamma + \beta x + \alpha y}{W_0}, & \zeta_1 &= \frac{\gamma x + \beta + \alpha z}{W_0}, \\ \zeta_2 &= \frac{\gamma y + \beta z + \alpha}{W_0}. \end{aligned} \tag{76}$$

The evolution of the projections on the complex plane orthogonal to \mathbf{w}_0

$$\delta = \xi + i\eta, \quad \delta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \delta_2 = \xi_2 + i\eta_2, \tag{77}$$

is obtained from the secular equations (33), and yields to

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = iM \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \tag{78}$$

where

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\gamma}\zeta_1 - \frac{q}{\gamma}\zeta_2 & \frac{p}{\gamma}\zeta & \frac{q}{\gamma}\zeta \\ \frac{p}{\beta}\zeta_1 & -\frac{p}{\beta}\zeta - \frac{s}{\beta}\zeta_2 & \frac{s}{\beta}\zeta_1 \\ \frac{q}{\alpha}\zeta_2 & \frac{s}{\alpha}\zeta_2 & -\frac{q}{\alpha}\zeta - \frac{s}{\alpha}\zeta_1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

and (p, q, s) are defined in (34). M is a real matrix with periodic coefficients. As it is not possible to obtain a simple analytical solution of this system, we make a crude approximation. Hereafter we replace the matrix M by the constant matrix \tilde{M} obtained by substituting (x, y, z) by their average

$$\tilde{M} = M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \tag{80}$$

The solution of (78) is thus straightforward. It is easy to verify that $(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$ is an eigenvector of \tilde{M} with eigenvalue 0. The other eigenvalues are then the solutions of

$$\lambda^2 - \mathbf{T}\lambda + \mathbf{P} = 0, \tag{81}$$

where \mathbf{T} is the trace of \tilde{M} and

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\zeta}{\alpha\beta} + \frac{\zeta_1}{\gamma\alpha} + \frac{\zeta_2}{\beta\gamma} \right) (pq\zeta + sp\zeta_1 + qs\zeta_2). \tag{82}$$

Let Ω and $\Omega + \nu$ be the other two eigenvalues such that

$$\Omega = \frac{\mathbf{T} + \sqrt{\mathbf{T}^2 - 4\mathbf{P}}}{2}, \quad \nu = -\sqrt{\mathbf{T}^2 - 4\mathbf{P}}. \tag{83}$$

The system possesses three eigenmodes

$$ue^{i\psi}, \quad \nu e^{i(\Omega t + \phi)}, \quad se^{i[(\Omega + \nu)t + \phi + \phi]}, \tag{84}$$

with eigenvectors

$$e_0 = \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}, \tag{85}$$

where λ, λ', μ and μ' are real numbers. The solutions are then

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= \zeta u e^{i\psi} + e^{i(\Omega t + \Phi)} (\tau + s e^{i(\nu t + \phi)}), \\ \mathfrak{z}_1 &= \zeta_1 u e^{i\psi} + e^{i(\Omega t + \Phi)} (\lambda \tau + \lambda' s e^{i(\nu t + \phi)}), \\ \mathfrak{z}_2 &= \zeta_2 u e^{i\psi} + e^{i(\Omega t + \Phi)} (\mu \tau + \mu' s e^{i(\nu t + \phi)}). \end{aligned} \quad (86)$$

Moreover, $\gamma \mathfrak{z} + \beta \mathfrak{z}_1 + \alpha \mathfrak{z}_2 = 0$ as it is the projection of \mathbf{W}_0 on a plane orthogonal to \mathbf{W}_0 . This implies that the constant term $(\gamma \zeta + \beta \zeta_1 + \alpha \zeta_2) u e^{i\psi}$ is also null. As $\gamma \zeta + \beta \zeta_1 + \alpha \zeta_2 = W_0$, we have necessarily $u = 0$. The solutions are thus

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= e^{i(\Omega t + \Phi)} (\tau + s e^{i(\nu t + \phi)}), \\ \mathfrak{z}_1 &= e^{i(\Omega t + \Phi)} (\lambda \tau + \lambda' s e^{i(\nu t + \phi)}), \\ \mathfrak{z}_2 &= e^{i(\Omega t + \Phi)} (\mu \tau + \mu' s e^{i(\nu t + \phi)}). \end{aligned} \quad (87)$$

In this approximation, the three axes $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ describe circular motions with nutation frequency ν around the three poles $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ that precess uniformly with precession frequency Ω around the total angular momentum \mathbf{W}_0 . As it was previously said, the three poles $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ remain always coplanar with \mathbf{W}_0 .

4.1. Initial conditions

The preceding section shows that the solutions (87) depend only on four real numbers τ, s, Φ and ϕ . At the origin of time ($t = 0$) we can choose two vectors, for instance

$$\mathfrak{z}_0 = e^{i\Phi} (\tau + s e^{i\phi}) \quad \text{and} \quad \mathfrak{z}_{10} = e^{i\Phi} (\lambda \tau + \lambda' s e^{i\phi}) \quad (88)$$

from which we derive

$$\tau e^{i\Phi} = \frac{\lambda' \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_{10}}{\lambda' - \lambda} \quad \text{and} \quad s e^{i\Phi} = \frac{\lambda \mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_{10}}{\lambda - \lambda'}. \quad (89)$$

The computation of λ and λ' requires the knowledge of the averaged values \bar{x}, \bar{y} and \bar{z} , but it can easily be done by iteration, starting with the initial values, that is, for the first iteration

$$\bar{x} = x(t = 0), \quad \bar{y} = y(t = 0), \quad \bar{z} = z(t = 0). \quad (90)$$

In our computations, we found that one iteration after this first try with the initial conditions was sufficient to obtain a satisfactory approximation for the frequency amplitudes and phases of the solution (see Tables 4, 7, 8).

4.2. Second order expansion

The whole previous study has been made with a Hamiltonian expanded up to the fourth degree in R/r ((2), (7), (12), (13) and (14))

$$\mathcal{H} = H_T + H_E + H_I^{(0)} + H_I^{(2)} + H_I^{(4)}. \quad (91)$$

When the body-body interactions are neglected, we can restrict the analysis to the second degree in R/r . The secular Hamiltonian then simplifies to

$$H_s = -\frac{a}{2} x^2 - \frac{b}{2} y^2 + \text{Cte}, \quad (92)$$

where

$$\underline{a} = k_3 m_2 C'_1 \quad \text{and} \quad \underline{b} = k_3 m_1 C'_2 \quad (93)$$

and with

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{3}{2} \frac{G}{a^3 (1 - e^2)^{3/2}}, \\ C'_1 &= \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J_1\right) \left(C_1 - \frac{A_1 + B_1}{2}\right), \\ C'_2 &= \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J_2\right) \left(C_2 - \frac{A_2 + B_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (94)$$

The secular equations (33) become

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= -\frac{ax}{\gamma} \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w} - \frac{by}{\gamma} \mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}, \\ \dot{\mathbf{w}}_1 &= -\frac{ax}{\beta} \mathbf{w} \times \mathbf{w}_1, \\ \dot{\mathbf{w}}_2 &= -\frac{by}{\alpha} \mathbf{w} \times \mathbf{w}_2, \end{aligned} \quad (95)$$

where γ, β and α are still the angular momentum of the orbit, of the rotation of the primary and of the rotation of the secondary respectively. In that case, the matrix M giving the evolution of the projection of the three vectors $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1$ and \mathfrak{z}_2 becomes

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} -\frac{ax}{\gamma} \zeta_1 - \frac{by}{\gamma} \zeta_2 & \frac{ax}{\gamma} \zeta & \frac{by}{\gamma} \zeta \\ \frac{ax}{\beta} \zeta_1 & -\frac{ax}{\beta} \zeta & 0 \\ \frac{by}{\alpha} \zeta_2 & 0 & -\frac{by}{\alpha} \zeta \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Now we use the same trick as in Eq. (80), that is we replace the matrix \underline{M} by the constant matrix $\underline{\tilde{M}}$

$$\underline{\tilde{M}} = \underline{M}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (97)$$

where (x, y, z) have been substituted by their average. The vector ${}^t(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$ is still an eigenvector for the eigenvalue 0. The characteristic equation is now

$$\lambda^2 - \underline{\mathbf{T}}\lambda + \underline{\mathbf{P}} = 0, \quad (98)$$

where

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= -\frac{ax}{\gamma} \zeta_1 - \frac{by}{\gamma} \zeta_2 - \frac{ax}{\beta} \zeta - \frac{by}{\alpha} \zeta, \\ \underline{\mathbf{P}} &= \underline{a} \underline{b} x y \zeta \left(\frac{\zeta}{\alpha \beta} + \frac{\zeta_1}{\gamma \alpha} + \frac{\zeta_2}{\beta \gamma} \right). \end{aligned} \quad (99)$$

These expressions give simpler formulas for the frequencies, although they still have the same form

$$\Omega = \frac{\underline{\mathbf{T}} + \sqrt{\underline{\mathbf{T}}^2 - 4\underline{\mathbf{P}}}}{2}, \quad \nu = -\sqrt{\underline{\mathbf{T}}^2 - 4\underline{\mathbf{P}}}. \quad (100)$$

5. Global precession of a n -body system

We have seen that the secular motion of a two solid body system can, as in Boué and Laskar (2006), be decomposed in a uniform precession of angular motion Ω , and a periodic motion of frequency ν . In fact, this can be extended to a very general system of n solid bodies in gravitational interaction. The following result, which is of very broad application, is a consequence of the general angular momentum reduction in case of regular, quasiperiodic, motion.

Proposition 3. *Let S be a system of $n + 1$ bodies of mass m_i ($i = 0, \dots, n$) in gravitational interaction, with n_s solid bodies among them ($n_s \leq n + 1$). Then, in a reference frame centered on one of the bodies, and for a regular quasiperiodic solution of S , there exist a constant precession rate Ω , such that any vector $Z \in \{\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{I}_j, \mathbf{J}_j, \mathbf{K}_j, \mathbf{G}_j; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_s\}$ has a temporal evolution that can be decomposed as*

$$Z(t) = \mathcal{R}_3(\Omega t) \tilde{Z}^{(v)}(t), \quad (101)$$

where $\mathcal{R}_3(\Omega t)$ is a uniform precession around the total angular momentum \mathbf{W}_0 with constant rate Ω , and where $\tilde{Z}^{(v)}(t)$ can be expressed in term of quasiperiodic series of $3(n + n_s) - 2$ frequencies (ν_k) . We will call Ω the global precession rate of the system S .

Proof. Let us consider a general system of $n + 1$ bodies of mass m_i ($i = 0, \dots, n$) in gravitational interaction, with n_s solid bodies among them ($n_s \leq n + 1$). This is a $3(n + 1 + n_s)$ degree of freedom (DOF) system. Due to the translation invariance of the system, it can be reduced to $N = 3(n + n_s)$ DOF using the coordinates centered on one of the bodies (the one of mass m_0 for example). This heliocentric reduction can be made in canonical form, preserving the Hamiltonian structure of the equations (see Laskar and Robutel, 1995).

The full Hamiltonian of the system, as expressed in (1) is then a function of the vectors $(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i, \mathbf{I}_j, \mathbf{J}_j, \mathbf{K}_j, \mathbf{G}_j)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n_s$, that depends uniquely of the scalar products of these vectors. Moreover, the total angular momentum \mathbf{W}_0 (35) is conserved.

This system, as for the usual reduction of the node, can be reduced to a system of $N - 2$ degrees of freedom. A first reduction to $N - 1$ DOF can be achieved by using a reference frame $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ such that \mathbf{k} is collinear with \mathbf{W}_0 and $\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}_0$ is positive. This partial reduction is based uniquely on the fixed direction of the angular momentum (Malige et al., 2002). With this reference frame, all quasiperiodic solutions of the system can be expressed in term of only $N - 1$ fundamental frequencies.

In this fixed $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ reference frame, we can use canonical coordinates that are well adapted for both the orbital and rotational motions. Namely, we shall use the Andoyer coordinates for the solid bodies (L, G, H, l, g, h) (Fig. 2), and the equivalent Delaunay coordinates for the orbital motions $(A = \beta\sqrt{\mu a}, \Gamma = A\sqrt{1 - e^2}, \Theta = \Gamma \cos i, M, \omega, \theta)$ where $(a, e, i, M, \omega, \theta)$ are the usual elliptical elements (semi-major axis, eccentricity, inclination of the orbit with respect to the (\mathbf{i}, \mathbf{j}) plane, mean anomaly, argument of periapse, longitude of the ascending node). For any given body of mass m_i , $i \neq 0$, $\beta_i = m_0 m_i / (m_0 + m_i)$ is the reduced mass, and $\mu_i = G(m_0 + m_i)$ the related gravitational constant. For any $X_i \in \{\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i; i = 1, \dots, n\}$, or $Y_j \in \{\mathbf{I}_j, \mathbf{J}_j, \mathbf{K}_j, \mathbf{G}_j; j = 1, \dots, n_s\}$, one can then write

$$\begin{aligned} X_i &= \mathcal{R}_3(\theta_i) X'_i(A_i, \Gamma_i, \Theta_i, M_i, \omega_i); \\ Y_j &= \mathcal{R}_3(h_j) Y'_j(L_j, G_j, H_j, l_j, g_j). \end{aligned} \quad (102)$$

Let us now select one angle among the θ_i, h_j (θ_1 for example) and perform the usual symplectic linear change of variable

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \theta_1; & \Theta'_1 &= \sum_i \Theta_i + \sum_j H_j, \\ \theta'_i &= \theta_i - \theta_1; & \Theta'_i &= \Theta_i \quad \text{for } i \neq 1, \\ h'_j &= h_j - \theta_1; & H'_j &= H_j. \end{aligned} \quad (103)$$

As the Hamiltonian (1) depends only on the scalar products of X_i and Y_j , it can be as well expressed in term of scalar products of

$$\tilde{X}_i = \mathcal{R}_3(-\theta_1) X_i; \quad \tilde{Y}_j = \mathcal{R}_3(-\theta_1) Y_j. \quad (104)$$

Expressed in term of the new variables (103), one can see that the coordinate θ'_1 is now ignorable with an associated constant action being the modulus of the total angular momentum ($\Theta'_1 = \|\mathbf{W}_0\|$). The number of DOF of the system, expressed in the new coordinates $(A_i, \Gamma_i, \Theta'_i, M_i, \omega_i, \theta'_i, L_j, G_j, H'_j, l_j, g_j, h'_j)$ is now $N - 2$, with one constant parameter, Θ'_1 . Let us now consider a quasiperiodic solution of the above $N - 2$ DOF system. All vectors \tilde{X}_i, \tilde{Y}_j will be expressed in term of quasiperiodic functions on $N - 2$ independent frequencies ν_k ($k = 1, \dots, N - 2$). Finally, θ'_1 evolution is given by

$$\frac{d\theta'_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Theta'_1}(A_i, \Gamma_i, \Theta'_i, M_i, \omega_i, \theta'_{i \neq 1}, L_j, G_j, H'_j, l_j, g_j, h'_j). \quad (105)$$

Thus $\theta'_1(t)$ is also a quasiperiodic expression depending on the $N - 2$ frequencies ν_k .

$$\frac{d\theta'_1}{dt} = \sum_{(k)} \alpha_{(k)} \exp(i\langle k, \nu \rangle t), \quad (106)$$

where (k) is a $(N - 2)$ multi index. Let $\Omega = \alpha_{(0)}$ be the constant term of this series. We have then

$$\frac{d\theta'_1}{dt} = \Omega + \sum_{(k) \neq (0)} \alpha_{(k)} \exp(i\langle k, \nu \rangle t) \quad (107)$$

and thus⁵

$$\theta'_1(t) = \Omega t + f_{(\nu)}(t), \quad (108)$$

where $f_{(\nu)}(t)$ is a $(N - 2)$ -periodic function with frequencies (ν_k) . The original vectors X_i, Y_j can then be expressed as

$$\begin{aligned} X_i &= \mathcal{R}_3(\theta_1) \tilde{X}_i = \mathcal{R}_3(\Omega t) \mathcal{R}_3(f_{(\nu)}(t)) \tilde{X}_i = \mathcal{R}_3(\Omega t) \tilde{X}_i^{(\nu)}, \\ Y_j &= \mathcal{R}_3(\theta_1) \tilde{Y}_j = \mathcal{R}_3(\Omega t) \mathcal{R}_3(f_{(\nu)}(t)) \tilde{Y}_j = \mathcal{R}_3(\Omega t) \tilde{Y}_j^{(\nu)}, \end{aligned} \quad (109)$$

where $\tilde{X}_i^{(\nu)}, \tilde{Y}_j^{(\nu)}$ can be expressed in term of $(N - 2)$ -periodic function with frequencies (ν_k) . This ends the proof of the proposition. \square

Consequence. A consequence of this result is that for a quasiperiodic solution of the general two body problem that we are considering here ($n = 1, n_s = 2$), the components of any vectors $\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{I}_j, \mathbf{J}_j, \mathbf{K}_j, \mathbf{G}_j$, should express as quasiperiodic functions of the precessing frequency Ω and of 7 frequencies $\nu_k, k = 1, \dots, 7$, the precession frequency Ω appearing in all terms with coefficient 1. This is actually what is observed on some examples in the next section (Tables 5 and 6). One should note that the same results hold for the three body problem studied in Boué and Laskar (2006) (with $n = 2, n_s = 1$).

It is also useful to remark that the value of Ω is independent of the ν_k , i.e. any commensurable relation between Ω and the ν_k has no effect on the dynamics of the system, in the sense that it will not affect the regularity of the solutions. On the other hand, in the case of a single ν_k frequency (as for the secular system), a rational ratio Ω/ν will lead to a periodic solution in the fixed reference frame $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. We prefer here to speak of geometric resonance instead of dynamical resonance, as there is no coupling between the two degrees of freedom of frequency Ω and ν .

6. Application

In this section we compare our rigorous results on the averaged system and our analytical approximations of the solutions of the same system with the integration of the full Hamiltonian (2), (7), (12), (13) and (14) on two different binary systems *I* and *II* (see Tables 1 and 2). The physical and orbital parameters of the system *II* are those of the binary Asteroid 1999 KW4 studied in Fahnstock and Scheeres (2008). We choose this system in order to compare our results with Fahnstock and Scheeres (2008). In this case, the rotation of the satellite is taken to be synchronous. As our analytical results were obtained assuming the satellite rotation asynchronous, we create a system *I* from the system *II* where

⁵ As the Hamiltonian \mathcal{H} (Eqs. (1), (2), (7), (12)–(14)) is analytical in the angles $(M_i, \omega_i, \theta'_i, l_j, g_j, h'_j)$, the convergence of $f_{(\nu)}(t) = \sum_{(k)} \frac{\alpha_{(k)}}{i\langle k, \nu \rangle} \exp(i\langle k, \nu \rangle t)$ is ensured if we assume that the frequencies (ν_k) satisfy a Diophantine condition of the form $|\langle k, \nu \rangle| > \kappa/|k|^\tau$, for $|k| = |k_1| + \dots + |k_{N-2}|, \kappa > 0, \tau > 0$. This will be the case for a KAM quasiperiodic solution (see Chierchia, 2008).

Table 1

Physical and orbital parameters of a fictitious doubly asynchronous binary system: m is the mass, A , B and C are the moments of inertia divided the mass, w is the rotation rate, h , l , g , J and l are the Andoyer angles of the two solid bodies as defined in Fig. 2.

	System I		Orbit
	Primary	Secondary	
m (10^{12} kg)	2.5	0.15	a (km) 2.75
A (km^2)	0.17	0.0165	λ (deg) 0.0
B (km^2)	0.18	0.017	e 0.035
C (km^2)	0.19	0.025	ω (deg) 0.0
w ($^\circ/\text{day}$)	3125.34	1500	i (deg) 0.0
h (deg)	100.82	-110.0	Ω (deg) 0.0
l (deg)	10.74	5.0	
g (deg)	112.03	-180.0	
J (deg)	3.0	5.0	
l (deg)	90.0	90.0	

Table 2

Physical and orbital parameters of the binary Asteroids 1999 KW4 given by Fahnestock and Scheeres (2008): m is the mass, A , B and C are the moments of inertia divided the mass, w is the rotation rate, h , l , g , J and l are the Andoyer angles of the two solid bodies as defined in Fig. 2.

	System II		Orbit
	Primary	Secondary	
m (10^{12} kg)	2.353	0.135	a (km) 2.5405
A (km^2)	0.1648	0.01608	λ (deg) 0.0
B (km^2)	0.1726	0.02374	e 0.0
C (km^2)	0.1959	0.02799	ω (deg) 0.0
w ($^\circ/\text{day}$)	3125.34	498.09	i (deg) 0.0
h (deg)	117.04	0.0	Ω (deg) 0.0
l (deg)	10.0	0.0	
g (deg)	0.0	0.0	
J (deg)	0.0	0.0	
l (deg)	-173.93	180.0	

the rotation of the secondary has been sped up by a factor 3. Since the orbit is circular and the initial rotation axes aligned with the axes of maximum inertia, the system II is highly degenerated. To get a more general system where all the fundamental frequencies will actually exist, we changed the initial Andoyer angles and the eccentricity. But then, because of its strong triaxiality, the evolution of the satellite orientation becomes chaotic (Wisdom, 1987). As here, we are concerned only by regular behaviors, we thus decreased the satellite triaxiality and increased the semi-major axis in order to obtain a generic example of regular solution.

6.1. Numerical experiments

6.1.1. Frequency analysis

The quasiperiodic decomposition of our numerical integrations was obtained using the frequency analysis developed by Laskar (Laskar, 1988, 2005). As our systems contain a large range of frequencies going from 0.07 to 109 rad day^{-1} , we decided to run twice each integration with two different output time steps $h = 0.1$ days and $h' = 0.1001$ days. These two time steps do not fulfilled the Nyquist condition for the largest frequency. Nevertheless, it is possible to recover the true value ν_0 of the frequency using the following trick (Laskar, 2005). For a real x , let denote $[x]$ the real such that

$$-\pi < [x] \leq \pi. \quad (110)$$

Let ν and ν' be respectively the frequencies measured on the integration with the time step h and h' . The true frequency is given by

$$\nu_0 = \nu + \frac{[k]}{h}, \quad (111)$$

Table 3

Fundamental frequencies of the two systems. Ω and ν are the precession and nutation frequencies respectively. ω and n correspond to the precession of the periastron and the mean motion. \hat{g}_1 and \hat{l}_1 on the one hand, and \hat{g}_2 and \hat{l}_2 on the other hand, are associated to the Andoyer angles. $\hat{\psi}_2$ and $\hat{\theta}_2$ are the horizontal and vertical libration frequencies in the resonant system II.

Frequency	Value (rad/day)	
	System I	System II
Ω	-0.0312	-0.0713
ν	-0.9788	-4.7488
$\hat{\omega}$	0.0681	-0.0902
n	8.0052	9.0503
\hat{g}_1	58.9763	63.3416
\hat{l}_1	-4.4062	-8.7218
\hat{g}_2	39.9703	-
\hat{l}_2	-13.9042	-
$\hat{\psi}_2$	-	7.5914
$\hat{\theta}_2$	-	4.1475

Table 4

Secular frequencies. Comparison between the integration of the full Hamiltonian, the integration of the averaged Hamiltonian and the analytical approximations.

System	Type	Ω (rad/day)	ν (rad/day)
Syst. I	Full	-0.0312	-0.9788
	Averaged	-0.0310	-1.1276
	Calculation	-0.0310	-1.1091
Syst. II	Full	-0.0713	-4.7488
	Averaged	-0.0710	-3.5982
	Calculation	-0.0710	-3.5629

where

$$k = \frac{h}{h' - h} ((\nu' - \nu)h' - [\nu'h' - \nu h]). \quad (112)$$

6.1.2. System I—Doubly asynchronous case

Full Hamiltonian We integrated the system I over a time span of 2000 days and performed a frequency analysis as described above. This system contains a priori 9 degrees of freedom. Three coordinates for the orientation of each body and three coordinates for the orbit. But there is a relation between all these coordinates given by the conservation of the total angular momentum. There are thus only 8 degrees of freedom. Hence the system contains 8 fundamental frequencies (cf. Table 3).

These frequencies can be divided into four main categories: (1) the secular frequencies containing the precession Ω and the nutation ν ; (2) the orbital frequencies with the periastron precession rate $\hat{\omega}$ and the mean motion n ; (3) the frequencies of the primary \hat{g}_1 and \hat{l}_1 associated respectively to the Andoyer angles g_1 and l_1 ; (4) the same frequencies for the secondary \hat{g}_2 and \hat{l}_2 .

Table 5 displays the frequency decomposition in the form $\sum A_j \exp(i(\nu_j t + \varphi_j))$ of the motion of \mathfrak{z} , \mathfrak{z}_1 and \mathfrak{z}_2 (77), the projections of \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 on the complex plane orthogonal to \mathbf{W}_0 . The second column shows that all the frequencies are combinations of the 8 fundamental frequencies.

Moreover, we verify our proposition saying that in a frame rotating uniformly with the precession rate Ω , the system loses one degree of freedom, see Section 5. Indeed, the frequency Ω appears in all the terms with the same order 1.

Averaged Hamiltonian In the frequency decomposition of the motion of \mathbf{w}_1 in Table 5, the nutation is only the 4th term. To check the validity of the averagings, we integrated the averaged Hamiltonian (28) on the same time span (2000 days) and we performed the same frequency analysis. Initial rotation rates, semi-major axis and eccentricity are average values computed on the numerical

Table 5

Frequency decomposition of the motion of the projections \mathbf{j} , \mathbf{j}_1 and \mathbf{j}_2 respectively of \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 on the plane orthogonal to the total angular momentum \mathbf{W}_0 . The integration was made using the full Hamiltonian with the initial conditions of the doubly asynchronous system I . Only the first 20 terms of the series $\sum A_j \exp(i v_j t + \varphi_j)$ are displayed for each vector. In order to simplify the reading, hats on the angles ω , g_1 , l_1 , g_2 and l_2 are omitted.

Var.	i	v_i (rad yr ⁻¹)	$A_i^{(f)}$ ($''$)	$\varphi_i^{(f)}$ (deg)	
w	1	Ω	-0.0312	29105.09	-169.37
	2	$\Omega + \nu$	-1.0100	209.11	-17.70
	3	$\Omega + 2\omega + 2n$	16.1156	55.87	-10.55
	4	$\Omega - \nu + 2\omega + 2n$	17.0943	12.29	-162.22
	5	$\Omega + 2\omega + 2n - g_2$	-23.8548	9.55	-158.86
	6	$\Omega + 2\omega + 2n - g_1$	-42.8607	6.70	57.27
	7	$\Omega + g_2$	39.9391	5.72	-21.06
	8	$\Omega - n$	-8.0365	5.22	-168.69
	9	$\Omega + n$	7.9740	5.21	9.94
	10	$\Omega + g_1$	58.9451	4.89	122.82
	11	$\Omega + 2\omega + 3n$	24.1208	4.00	-11.23
	12	$\Omega + 2\omega + 2n - 2l_1 - 2g_1$	-93.0245	3.39	-55.00
	13	$\Omega + 2l_1 + 2g_1$	109.1089	2.90	-124.92
	14	$\Omega + 2\omega + n$	8.1103	1.70	170.13
	15	$\Omega + 2\omega + 3n - g_2$	-15.8495	1.47	-159.55
	16	$\Omega + 2\omega + 2n - 2l_1 - g_1$	-34.0483	1.39	57.17
	17	$\Omega + \nu + n$	6.9953	1.08	161.62
	18	$\Omega + \nu - n$	-9.0152	1.04	-17.02
	19	$\Omega - \nu$	0.9476	0.95	-141.05
	20	$\Omega + 2l_1 + g_1$	50.1326	0.94	122.90
w₁	1	Ω	-0.0312	9687.25	10.63
	2	$\Omega + 2\omega + 2n$	16.1156	18.80	169.45
	3	$\Omega + 2\omega + 2n - g_1$	-42.8607	2.26	-122.72
	4	$\Omega + \nu$	-1.0100	1.86	162.30
	5	$\Omega - n$	-8.0365	1.73	11.31
	6	$\Omega + n$	7.9740	1.73	-170.06
	7	$\Omega + g_1$	58.9451	1.60	-57.20
	8	$\Omega + 2\omega + 3n$	24.1208	1.34	168.77
	9	$\Omega - 2\omega - 2n + 2l_1 + 2g_1$	92.9621	1.11	76.25
	10	$\Omega + 2l_1 + 2g_1$	109.1089	0.94	55.08
	11	$\Omega + 2\omega + n$	8.1103	0.58	-9.87
	12	$\Omega + 2\omega + 2n - 2l_1 - g_1$	-34.0483	0.47	-122.83
	13	$\Omega + 2l_1 + g_1$	50.1326	0.31	-57.10
	14	$\Omega + 2\omega + 3n - g_1$	-34.8555	0.30	-123.41
	15	$\Omega - 2\omega - 2n$	-16.1780	0.16	-148.19
	16	$\Omega - 2\omega - 3n + 2l_1 + 2g_1$	84.9569	0.13	76.94
	17	$\Omega - \nu + 2\omega + 2n$	17.0943	0.13	17.78
	18	$\Omega - n + g_1$	50.9398	0.08	-56.52
	19	$\Omega + 2\omega + 4n$	32.1260	0.07	168.08
	20	$\Omega + 2\omega + 3n - 2l_1 - g_1$	-26.0430	0.07	-123.51
w₂	1	Ω	-0.0312	30079.18	-169.37
	2	$\Omega + \nu$	-1.0100	17781.88	162.30
	3	$\Omega - \nu + 2\omega + 2n$	17.0943	1040.78	17.78
	4	$\Omega + 2\omega + 2n - g_2$	-23.8548	829.13	21.13
	5	$\Omega + g_2$	39.9391	495.19	158.94
	6	$\Omega + 2\omega + 3n - g_2$	-15.8495	126.95	20.45
	7	$\Omega - \nu$	0.9476	96.54	38.96
	8	$\Omega + \nu + n$	6.9953	90.98	-18.39
	9	$\Omega + \nu - n$	-9.0152	87.74	162.98
	10	$\Omega - \nu + 2\omega + 3n$	25.0996	74.38	17.10
	11	$\Omega - \nu + 2\omega + n$	9.0891	50.41	-161.54
	12	$\Omega + 2\omega + 2n$	16.1156	46.84	-10.55
	13	$\Omega - n + g_2$	31.9339	25.33	159.63
	14	$\Omega + 2\omega + 2n - 2l_2 - g_2$	3.9537	23.66	-161.23
	15	$\Omega + n + g_2$	47.9444	21.72	158.26
	16	$\Omega + 2\omega + 4n - g_2$	-7.8443	19.43	19.77
	17	$\Omega + 2n + 2l_1 - 2l_2$	34.9754	14.90	-57.53
	18	$\Omega - \nu + 2l_2 + 2g_2$	53.0797	10.87	-22.05
	19	$\Omega + 2l_2 + g_2$	12.1306	8.74	161.31
	20	$\Omega + 2\omega + 5n - g_2$	0.1610	7.16	-160.92

output of the full integration. Initial inclination, obliquities and ascending nodes were obtained from the amplitudes and the phases of the frequency analysis in Table 5.

Table 7 displays the comparison between the frequency decomposition of the output of the averaged Hamiltonian and of the full Hamiltonian (columns 3–8). For the comparison, only the secu-

Table 6

Same as Table 5 for the system II.

Var.	i	v_i (rad yr ⁻¹)	$A_i^{(f)}$ ($''$)	$\varphi_i^{(f)}$ (deg)	
w	1	Ω	-0.0713	27979.553	-153.15
	2	$\Omega + 2\omega + 2n$	17.8490	111.214	-26.81
	3	$\Omega + \nu$	-4.8201	4.421	-160.28
	4	$\Omega + 2\omega + 2n - 2l_1 - 2g_1$	-91.3906	3.320	-39.33
	5	$\Omega - n$	-9.1216	2.847	25.69
	6	$\Omega + 2l_1 + 2g_1$	109.1682	2.779	-140.63
	7	$\Omega + n$	8.9790	2.678	-151.99
	8	$\Omega + 2\omega + 3n$	26.8993	2.201	154.37
	9	$\Omega + \psi_2$	7.5201	1.295	-152.20
	10	$\Omega - \psi_2$	-7.6627	1.117	25.96
	11	$\Omega + 2\omega + n$	8.7986	1.066	-27.97
	12	$\Omega - \nu + 2\omega + 2n$	22.5978	0.942	-19.67
	13	$\Omega + 2\omega + 2n + \psi_2$	25.4404	0.828	155.16
	14	$\Omega - 2\omega - 2n$	-17.9916	0.490	-99.49
	15	$\Omega + \omega + n - \theta_2$	4.7413	0.376	-163.33
	16	$\Omega + 2\omega + 2n - \psi_2$	10.2575	0.280	-27.75
	17	$\Omega + \omega - \theta_2$	-4.3090	0.237	-164.49
	18	$\Omega - \nu + 2\omega - n$	-4.5532	0.170	156.75
	19	$\Omega - \nu + 2\omega$	4.4971	0.161	157.74
	20	$\Omega + \nu + n$	4.2302	0.143	20.77
w₁	1	Ω	-0.0713	8008.982	26.85
	2	$\Omega + 2\omega + 2n$	17.8490	32.172	153.19
	3	$\Omega - 2\omega - 2n + 2l_1 + 2g_1$	91.2480	0.939	93.03
	4	$\Omega - n$	-9.1216	0.796	-154.31
	5	$\Omega + n$	8.9790	0.794	28.01
	6	$\Omega + 2l_1 + 2g_1$	109.1682	0.780	39.37
	7	$\Omega + 2\omega + 3n$	26.8993	0.636	-25.64
	8	$\Omega - \psi_2$	-7.6627	0.325	-154.10
	9	$\Omega + \psi_2$	7.5201	0.324	27.80
	10	$\Omega + 2\omega + n$	8.7986	0.301	152.03
	11	$\Omega - 2\omega - 2n$	-17.9916	0.243	-99.49
	12	$\Omega + 2\omega + 2n + \psi_2$	25.4404	0.232	-25.86
	13	$\Omega + 2\omega + 2n - \psi_2$	10.2575	0.093	152.25
	14	$\Omega - 2\omega - 3n + 2l_1 + 2g_1$	82.1976	0.031	-88.11
	15	$\Omega + \nu$	-4.8201	0.030	19.72
	16	$\Omega + 4\omega + 4n - 2l_1 - 2g_1$	-73.4703	0.029	87.00
	17	$\Omega + 2\omega$	-0.2517	0.024	-29.13
	18	$\Omega + 2\omega + 2n - 2l_1 - 2g_1$	-91.3906	0.023	140.67
	19	$\Omega + n - \psi_2$	1.3876	0.020	-152.96
	20	$\Omega - n + \psi_2$	-1.5302	0.020	26.63
w₂	1	Ω	-0.0713	28848.685	-153.15
	2	$\Omega + \nu$	-4.8201	924.226	19.72
	3	$\Omega - \nu + 2\omega + 2n$	22.5978	196.275	160.33
	4	$\Omega + 2\omega + 2n$	17.8490	81.967	-26.85
	5	$\Omega + \omega + n - \theta_2$	4.7413	77.510	16.67
	6	$\Omega + \nu + n$	4.2302	55.301	-159.15
	7	$\Omega + \omega - \theta_2$	-4.3090	47.469	15.51
	8	$\Omega - \nu + 2\omega - n$	-4.5532	34.386	-23.16
	9	$\Omega - \nu + 2\omega$	4.4971	33.518	-22.15
	10	$\Omega + \nu - \psi_2$	-12.4116	30.128	18.77
	11	$\Omega + \omega + n + \theta_2$	13.0363	29.773	-16.63
	12	$\Omega - \psi_2$	-7.6627	29.524	-151.52
	13	$\Omega + \omega + \theta_2$	3.9860	26.699	162.21
	14	$\Omega + \nu - n$	-13.8705	26.395	-161.45
	15	$\Omega + \omega - n + \theta_2$	-5.0643	19.869	-18.95
	16	$\Omega + \nu + \psi_2$	2.7713	19.196	20.64
	17	$\Omega + \omega + n - \psi_2 + \theta_2$	5.4449	18.432	162.43
	18	$\Omega + \nu + 2n$	13.2805	13.450	22.33
	19	$\Omega - \nu + 2\omega + 2n - \psi_2$	15.0063	12.645	159.39
	20	$\Omega + \omega + n - \psi_2 - \theta_2$	-2.8501	12.132	-164.27

lar terms were extracted from the analysis of the full integration. The second column confirms our analytical result saying that the averaged motion contains only 2 fundamental frequencies: the precession Ω and the nutation ν ; and that in a frame rotating with the precession frequency, only the nutation remains. The columns 4, 5 and 7, 8 show the strong agreement between the secular approach and the full integration. Even low amplitude terms such as $\Omega + 2\nu$, albeit at the 57th position in the decomposition of \mathbf{w} in the full integration, are recovered with good amplitude and phase in the regular system.

Table 7

Frequency analysis of the doubly asynchronous system *I*. Columns 3 to 5 correspond to the frequency analysis performed on the numerical integration of the averaged Hamiltonian (28), superscript (a). Columns 6 to 8 contain the secular terms of the frequency decompositions computed on the output of the full integration, superscript (f). Columns 9 to 11 are the results of the analytical approximations (83) and (89), superscript (c).

Var.		<i>i</i>	$A_i^{(a)}$ ($''$)	$\varphi_i^{(a)}$ (deg)	<i>i</i>	$A_i^{(f)}$ ($''$)	$\varphi_i^{(f)}$ (deg)	<i>i</i>	$A_i^{(c)}$ ($''$)	$\varphi_i^{(c)}$ (deg)
w	Ω	1	29104.12	-169.37	1	29105.09	-169.37	1	29108.16	-169.37
	$\Omega + \nu$	2	209.34	-17.37	2	209.11	-17.70	2	212.43	-17.10
	$\Omega - \nu$	3	0.95	-141.38	19	0.95	-141.05			
	$\Omega + 2\nu$	4	0.04	134.64	57	0.04	134.09			
w₁	Ω	1	9688.12	10.63	1	9687.25	10.63	1	9688.16	10.63
	$\Omega + \nu$	2	1.76	162.63	4	1.86	162.30	2	1.85	162.90
	$\Omega - \nu$	3	0.05	-141.38	23	0.05	-141.02			
w₂	Ω	1	30020.39	-169.37	1	30079.18	-169.37	1	29676.07	-169.37
	$\Omega + \nu$	2	17889.69	162.63	2	17781.88	162.30	2	18137.11	162.90
	$\Omega - \nu$	3	96.21	38.63	7	96.54	38.96			
	$\Omega + 2\nu$	4	3.29	-45.36	37	2.95	-46.02			
	$\Omega - 2\nu$	5	0.02	-113.38						

The two last columns of Table 7 give the complex amplitudes of the secular motion obtained with the analytical approximation of Section 4. As in this approximation, the nutation is assumed to be a uniform rotation, there are only two terms in the description of the secular motion. Nevertheless, we see that this approximation is also in good agreement with the integration of the full Hamiltonian and of the averaged Hamiltonian.

In Table 4 are given the values of the secular frequencies for systems *I* and *II*, obtained either from the integration of the full Hamiltonian, from the integration of the averaged Hamiltonian, or with the analytical approximations (83). The precession rates are in agreement within 0.3% and the nutation frequencies within 5%.

Fig. 6 represents the trajectories of the unit vectors on the plane orthogonal to the total angular momentum \mathbf{W}_0 . In the top panel, the frame is fixed, it thus corresponds to $\mathcal{W}(t)$, see Section 3.2. We see that the evolutions of \mathbf{w} in red and \mathbf{w}_1 in green are dominated by the precession: their orbits are quasi-circular, whereas the orbit of \mathbf{w}_2 in blue contains a large nutation as it can be checked in the frequency analysis Table 5. The bottom panel shows the same orbits but in a frame rotating with the precession rate Ω , it corresponds to $\tilde{\mathcal{W}}(t)$. It emphasizes the nutation loops. Zooms on the nutation of the orbit and of the primary are plotted on the bottom right. The solid curves are the output of the averaged Hamiltonian. The analytical approximations cannot be distinguished from the averaged output. These averaged solutions are good approximations of the motion of \mathbf{w} and \mathbf{w}_2 but the agreement does not seem to be as good for \mathbf{w}_1 . Indeed, Table 5 shows that high frequencies have larger amplitudes than the secular nutation.

Because of this amplitude issue for \mathbf{w}_1 in Fig. 6, we decided to filter our full integration with a low-pass filter to see if we could get back the averaged integration. In this scope, we reintegrated the full Hamiltonian over a time span of 20 days with an output time step of 30 min. We then filtered the output with a cutoff frequency equal to 4 rad/day. The filtered trajectories are displayed in Fig. 7. The nutation amplitude of \mathbf{w}_1 is now well retrieved. After a small change in the initial conditions that corresponds to a decrease of only 3.6'' of the initial obliquity of the primary in the averaged Hamiltonian, we get back the filtered full Hamiltonian (see Fig. 8).

6.1.3. System II—Asynchronous—synchronous case

For this second experiment, we took the same initial conditions as Fahnestock and Scheeres (2008) (Table 6). The primary has an asynchronous rotation whereas the secondary rotates synchronously. The difference between our study and study of Fahnestock and Scheeres (2008) is that we expanded the Hamiltonian up to the fourth order in R/r where R is the radius of one body and r the distance between them. We performed the

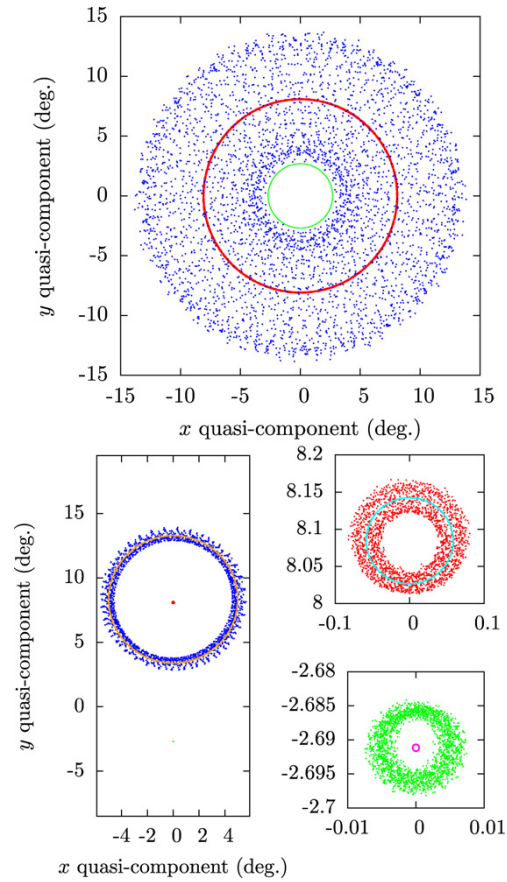


Fig. 6. Quasi-projection of the poles \mathbf{w} (red), \mathbf{w}_1 (green), \mathbf{w}_2 (blue) on the plane perpendicular to the total angular momentum \mathbf{W}_0 , in a fixed reference frame (top panel) and in a frame rotating with the precession period (bottom panels). The two little figures on the bottom right are zooms on the nutation motion of the orbit (top) and of the primary axis (bottom). The initial conditions and parameters are those of the system *I*. The vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 and \mathbf{w}_2 have been integrated with the full Hamiltonian. In the right panels, the output of the averaged Hamiltonian has been superposed: \mathbf{w} in cyan, \mathbf{w}_1 in pink and \mathbf{w}_2 in orange.

same frequency analysis as with system *I*. We get also 8 fundamental frequencies. Because the resonance, the frequencies associated to the secondary are not \hat{g}_2 and \hat{l}_2 anymore since they are in that case combinations of the other 6 fundamental frequencies. The two new frequencies correspond to the horizon-

764

G. Boué, J. Laskar / Icarus 201 (2009) 750–767

tal and vertical libration of the secondary: $\hat{\psi}_2$ and $\hat{\theta}_2$ respectively.

Table 6 presents the frequency analysis performed on this system. The result of Section 5 is still valid, in a frame rotating with the precession rate, the system loses one degree of freedom. We confirm that this result does not depend on the resonances in the reduced problem.

The averaged Hamiltonian and the analytical approximation were not specifically written for such a resonant case. Regardless of this fact, the results of the averaged Hamiltonian and of the analytical approximation applied to this system are summarized in

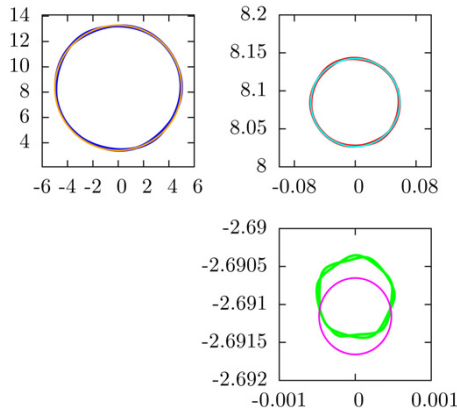


Fig. 7. Same as the top panel of Fig. 6. The output of the full Hamiltonian, integrated over 20 days with an output step of 30 min, has been filtered with a low-pass filter with a cutoff frequency equal to 4 rad/day.

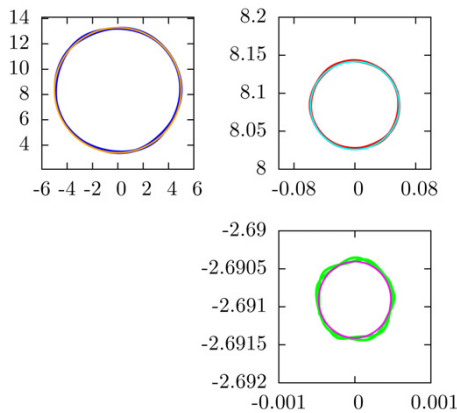


Fig. 8. Same as Fig. 7. The initial obliquity of the primary in the averaged Hamiltonian has been decreased by 3.6''.

Table 8 Same as Table 7 for the system II corresponding to the 1999 KW4 binary asteroids.

Var.		i	$A_i^{(a)}$ (")	$\varphi_i^{(a)}$ (deg)	i	$A_i^{(f)}$ (")	$\varphi_i^{(f)}$ (deg)	i	$A_i^{(c)}$ (")	$\varphi_i^{(c)}$ (deg)
\mathbf{w}	Ω	1	27916.13	-152.96	1	27979.55	-153.15	1	27916.04	-152.96
	$\Omega + \nu$	2	4.65	-152.96	3	4.42	-160.28	2	4.72	-152.96
	$\Omega - \nu$	3	0.02	27.04						
\mathbf{w}_1	Ω	1	7991.22	27.04	1	8008.98	26.85	1	7991.22	27.04
	$\Omega + \nu$	2	0.04	27.04	15	0.03	19.72	2	0.04	27.04
\mathbf{w}_2	Ω	1	28903.02	-152.96	1	28848.69	-153.15	1	28922.58	-152.96
	$\Omega + \nu$	2	987.12	27.04	2	924.23	18.39	2	1001.81	27.04
	$\Omega - \nu$	3	4.87	-152.96	53	1.48	-146.03			
	$\Omega + 2\nu$	4	0.01	27.04						

Table 8. It is remarkable that the first two amplitudes of each vector are in good agreement with the full integration. Nevertheless, the third amplitude of \mathbf{w}_2 is wrong by a factor 3. The values of these secular frequencies are given at the bottom of Table 4. The use of the averaged Hamiltonian or of the analytical approximations leads to an error on the precession rate equal to 1% and on the nutation rate equal to 24%.

6.2. Comparison with Fahnestock and Scheeres (2008)

6.2.1. Numerical results

Fahnestock and Scheeres (2008) expanded the Hamiltonian up to the second order in R/r . They find that motions of binary asteroids such as 1999 KW4 are combinations of four modes with their respective fundamental frequency. The first and fastest mode corresponds to the rotation of the primary around its axis. The second mode coincides with the orbital motion which has the same period as the rotation of the secondary around its axis. The third mode is said to be an excitation of the satellite's free precession dynamics and has a period of ≈ 188 h. The corresponding frequency would be ≈ 0.802 rad/day. The last mode is identified as the precession motion.

Our results generally agree with the analysis of Fahnestock and Scheeres. Nevertheless, several frequencies are missing in their analysis, probably because of the degeneracy of their initial conditions. As the initial eccentricity is close to 0, and the angular momenta along the axes of maximum inertia, the first terms in the frequency decompositions are combinations of $\hat{\omega} + n$ which corresponds to their orbital frequency, and of $\hat{g}_1 + \hat{l}_1$ which corresponds to their rotation of the primary, see Table 6. On the other hand, we do not find their third mode of frequency ≈ 0.802 rad/day.

6.2.2. Solid–point interaction

Fahnestock and Scheeres found also that the spin axis of the primary and the orbital plane precess at the same rate. They derived an analytical expression for this precession rate, see their Eq. (76). Their result corresponds in fact to the solution of the single planet case that is already described in Boué and Laskar (2006) and which does not require the more elaborated formalism developed here. Indeed, as they expanded the potential up to the second order only, they canceled the effect of the orientation of the secondary on the precession of the primary ($c = \vartheta = e = f = g = 0$). Moreover, as they fixed the orientation of the secondary with the orbit, the secondary does not influence the orbit ($y = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_2) = 1$). We recall here the derivation of this frequency as given in Boué and Laskar (2006). With the assumption of a point mass satellite, the Hamiltonian becomes

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2}x^2, \tag{113}$$

with $x = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1)$ and

$$\dot{\mathbf{w}} = -\frac{\alpha}{\gamma} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w},$$

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = -\frac{\alpha}{\beta} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w} \times \mathbf{w}_1. \quad (114)$$

This reduced problem has 5 independent integrals given by

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\| &= 1, \\ \|\mathbf{w}_1\| &= 1, \\ \gamma \mathbf{w} + \beta \mathbf{w}_1 &= \mathbf{W}_0. \end{aligned} \quad (115)$$

As $x = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1$ is constant, the system is trivially integrable. We have indeed

$$\dot{\mathbf{w}} = \Omega_0 \mathbf{w}_0 \times \mathbf{w}, \quad \dot{\mathbf{w}}_1 = \Omega_0 \mathbf{w}_0 \times \mathbf{w}_1; \quad (116)$$

where $\mathbf{w}_0 = \mathbf{W}_0 / \|\mathbf{W}_0\|$ is the unit vector in the direction of the total angular momentum \mathbf{W}_0 , and

$$\Omega_0 = -\frac{\alpha x}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} + 2\frac{\gamma}{\beta}x}. \quad (117)$$

Both vectors \mathbf{w} , \mathbf{w}_1 thus precess uniformly around the total angular momentum direction \mathbf{w}_0 with constant precession rate Ω_0 . The correspondence with the notations of Eq. (76) of [Fahnestock and Scheeres \(2008\)](#) is

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{a^{7/2}(1-e^2)^2} (I_1 - I_{eq}) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J_1\right), \\ x &= \cos(\delta + i), \\ \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\beta^2} + 2\frac{\gamma}{\beta}x} &= \frac{\sin(\delta + i)}{\sin i}. \end{aligned} \quad (118)$$

Remark. The factor $(1 - (3/2)\sin^2 J_1)$ is not in [Fahnestock and Scheeres \(2008\)](#) because [Fahnestock and Scheeres \(2008\)](#) assumes that the primary angular momentum is aligned with its figure axis ($J_1 = 0$). This is not the case in this paper where we do not require this simplification.

7. Conclusions

We have shown here that the general framework developed in [Boué and Laskar \(2006\)](#) applies as well to the problem of two rigid bodies orbiting each other. This formalism enables us to obtain the long term evolution of the spin axis of the two bodies as well as the evolution of the orientation of the orbital plane. The two bodies can be very general, with strong triaxiality, and their rotation vector is not necessary aligned with their axis of maximum inertia. The gravitational potential is expanded up to the fourth order so as to keep the direct interaction between the orientation of the two bodies, and as in [Boué and Laskar \(2006\)](#), the evolution of their spin axis is obtained after a suitable averaging.

We found that the secular evolution is composed of two periodic motions: a global precession of the three angular momenta and nutation loops. As in [Boué and Laskar \(2006\)](#), the nutation loops are symmetric with respect to a plane containing the total angular momentum and precessing with the global precession frequency. We gave analytical approximations of these frequencies.

We performed a frequency analysis ([Laskar, 1988, 2005](#)) on a numerical integration of the full Hamiltonian. We chose the typical binary asteroid system 1999 KW4 already analyzed in [Fahnestock and Scheeres \(2008\)](#). We retrieved the precession and the nutation motions predicted by the secular Hamiltonian and estimated by the analytical approximations. On a non-resonant system, derived from 1999 KW4, the secular solution, and the analytical results agree extremely well with the full solution. This is still the case

to a lesser extent with the more specific case of 1999 KW4, which is in 1:1 spin-orbit resonance. In a further work, we could consider in a more precise way the possible resonances. In that case, some of the averagings need to be done in a different way, probably leading to less symmetrical, more complex, expressions. The main goal reached by the present paper was to search, in this apparently difficult problem of two solid bodies in interaction, what was the most simple relevant underlying structure. One can now add possible additional effects, as tidal dissipation, and still consider the problem with the present setting. We thus expect that the results presented here will be helpful for the understanding of the general evolution of binary asteroids, or other problems of astronomical interest.

In the elaboration of this paper, we came across the very general result given in our [Proposition 3](#) which applies to any system of n massive bodies (point masses or not) in gravitational interaction. This property of the motion states that the general regular quasiperiodic motions with N independent frequencies can be decomposed into a uniform rotation around the total angular momentum, which we call the global precession, and in this rotation frame, a quasiperiodic motion with $N - 1$ frequencies, independent of the global precession frequency.

Acknowledgments

We thank Franck Marchis for discussions on binary asteroids observations, and Alain Albouy for his comments. The authors largely benefited from the interactions and discussions inside the Astronomy and Dynamical System group at IMCCE.

Appendix A. Gravitational interaction expansion

The gravitational interaction between two solid bodies is given by (5)

$$H_I = - \iint \frac{G dm_1 dm_2}{\|\mathbf{r} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}. \quad (119)$$

The expansion of this potential in Legendre polynomials leads to the following integrals

$$\begin{aligned} H_I^{(0)} &= -\frac{G}{r} \iint dm_1 dm_2, \\ H_I^{(1)} &= 0, \\ H_I^{(2)} &= -\frac{G}{2r^3} \iint [3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^2 + 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^2 - r_1^2 - r_2^2] dm_1 dm_2, \\ H_I^{(3)} &= -\frac{G}{2r^4} \iint [5(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^3 - 5(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^3 \\ &\quad - 3r_1^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1) + 3r_2^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)] dm_1 dm_2, \\ H_I^{(4)} &= -\frac{G}{8r^5} \iint [35(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^4 + 35(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^4 \\ &\quad - 120(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2) \\ &\quad - 12r_1^2(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + 210(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^2 \\ &\quad - 30r_2^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^2 - 30r_1^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^2 \\ &\quad - 30r_1^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1)^2 - 30r_2^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2)^2 \\ &\quad + 3r_1^4 + 3r_2^4 + 6r_1^2 r_2^2] dm_1 dm_2, \end{aligned} \quad (120)$$

where all linear terms in \mathbf{r}_1 or \mathbf{r}_2 have been omitted since these two vectors are expressed relative to the barycenter of the respective body and their integral vanishes. In Section 2.3, an additional hypothesis is made on the mass distribution of each body that simplifies the potential. They are supposed to be symmetrical relative to the planes perpendicular to the principal axes of inertia. As a consequence, the integral of any odd power of \mathbf{r}_1 or \mathbf{r}_2 cancels.

Appendix B. Inertia integral

Inertia integrals of homogeneous ellipsoids are computed in the following way. Let a, b, c be the three semi-axes of a homogeneous ellipsoid \mathcal{E} of density ρ . The total mass of the ellipsoid is

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho abc \tag{121}$$

and the second order inertia integrals are

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \rho x^2 dx dy dz &= \rho a^3 bc \int_{\mathcal{B}} X^2 dX dY dZ = \frac{1}{5} ma^2, \\ \int_{\mathcal{E}} \rho y^2 dx dy dz &= \rho ab^3 c \int_{\mathcal{B}} Y^2 dX dY dZ = \frac{1}{5} mb^2, \\ \int_{\mathcal{E}} \rho z^2 dx dy dz &= \rho abc^3 \int_{\mathcal{B}} Z^2 dX dY dZ = \frac{1}{5} mc^2, \end{aligned} \tag{122}$$

where $X = x/a, Y = y/b, Z = z/c$ and \mathcal{B} is the unit ball. From the definition of the moments of inertia

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathcal{E}} (y^2 + z^2) dm, \\ B &= \int_{\mathcal{E}} (z^2 + x^2) dm, \\ C &= \int_{\mathcal{E}} (x^2 + y^2) dm, \end{aligned} \tag{123}$$

we get relations between the semi-axes and the moments of inertia

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{5}{2m} (-A + B + C), \\ b^2 &= \frac{5}{2m} (A - B + C), \\ c^2 &= \frac{5}{2m} (A + B - C). \end{aligned} \tag{124}$$

General expressions of the inertia integrals are thus

$$\int_{\mathcal{E}} x^i y^j z^k dm = \frac{3}{4\pi} ma^i b^j c^k \int_{\mathcal{B}} X^i Y^j Z^k dX dY dZ, \tag{125}$$

with a, b, c given by (124).

Appendix C. Averaged quantities

In this appendix, we give general formulas for the averaging over the orbital mean motions. The integrals will be computed using the true anomaly (ν) as an intermediate variable. We recall first the basic formulas

$$\begin{aligned} dM &= \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} d\nu, \\ \mathcal{X} &= r \cos \nu, \\ \mathcal{Y} &= r \sin \nu, \\ r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \end{aligned} \tag{126}$$

where \mathcal{X} and \mathcal{Y} are the coordinates of a point on a Keplerian orbit in the reference frame $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ with \mathbf{i} and \mathbf{k} respectively in the direction of periapse and angular momentum.

C.1. Intermediate integrals

In the following, we handle integrals such as Wallis integrals. We recall their expression. Let

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n t dt \tag{127}$$

and

$$\begin{aligned} J_{n,m} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^m t \cos^n t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^n t \cos^m t dt. \end{aligned} \tag{128}$$

We have then

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd,} \\ \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} & \text{if } n = 2p, \quad p \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{129}$$

and for $p \geq 0, I_{2(p+1)}$ can be computed using the recurrence formula

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}. \tag{130}$$

The integrals $J_{n,m}$ are null whenever n or m is odd, else their values are a sum of integrals I_k

$$\begin{aligned} J_{2p,2q} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)^p \cos^{2q} t dt \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} I_{2q+2k} \\ &= \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} I_{2p+2k}. \end{aligned} \tag{131}$$

The last equality comes from $J_{n,m} = J_{m,n}$.

C.2. Computation of $\langle 1/r^n \rangle$ for $n \geq 2$

From these results, we can write

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{r^n} \right\rangle &= \frac{1}{a^n (1 - e^2)^{n-3/2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{n-2} d\nu \\ &= \frac{1}{a^n (1 - e^2)^{n-3/2}} \sum_{p=0}^{E(n/2-1)} \binom{n-2}{2p} I_{2p} e^{2p} \\ &= \frac{1}{a^n (1 - e^2)^{n-3/2}} \sum_{p=0}^{E(n/2-1)} \mathcal{A}_n(p) e^{2p}, \end{aligned} \tag{132}$$

where $E(x)$ returns the integer part of x and

$$\mathcal{A}_n(p) = \binom{n-2}{2p} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}. \tag{133}$$

The recurrence relation for $\mathcal{A}_n(p)$ is

$$\mathcal{A}_n(p+1) = \frac{(n-2p-2)(n-2p-3)}{(2p+2)^2} \mathcal{A}_n(p) \tag{134}$$

with $\mathcal{A}_n(0) = 1$.

C.3. Computation of $\langle \mathcal{X}^m \mathcal{Y}^n / r^l \rangle$ for $l \geq m + n + 2$

In averaging computations we meet integrals in the form

$$\left\langle \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1)^{k_1} \cdots (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_j)^{k_j}}{r^l} \right\rangle. \quad (135)$$

These integrals can be computed from

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathcal{X}^m \mathcal{Y}^n}{r^l} \right\rangle &= \frac{1}{a^h (1 - e^2)^{h-3/2}} \frac{1}{2\pi} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos^m \nu \sin^n \nu (1 + e \cos \nu)^{h-2} d\nu \\ &= \frac{1}{a^h (1 - e^2)^{h-3/2}} \sum_{k=0}^{h-2} \binom{h-2}{2k} J_{n,m+k} e^k, \end{aligned} \quad (136)$$

where $h = l - m - n$ and $J_{n,m}$ defined as previously. This integral is null whenever n is odd.

References

- Abul'naga, M.Z., Barkin, I.V., 1979. Regular motions of a body in the gravity field of a sphere. *Astron. Zh.* 56, 881–887.
- Andoyer, H., 1923. *Cours de Mécanique Céleste*, vol. 1. Gauthier-Villars, Paris.
- Ashenberg, J., 2007. Mutual gravitational potential and torque of solid bodies via inertia integrals. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 99, 149–159.
- Borderies, N., 1978. Mutual gravitational potential of N solid bodies. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 18, 295–307.
- Borisov, A.V., Mamaev, I.S., 2005. *Dynamics of the Rigid Body*. R&C Dynamics, Moscow (in Russian).
- Boué, G., Laskar, J., 2006. Precession of a planet with a satellite. *Icarus* 185, 312–330.
- Boué, G., Laskar, J., 2008. Erratum: Precession of planet with a satellite. hal.archives-ouvertes.fr:hal-00335321_v2.
- Chierchia, L., 2008. Kolmogorov's 1954 paper on nearly-integrable Hamiltonian systems. *Regul. Chaotic Dyn.* 13, 130–139.
- Colombo, G., 1966. Cassini's second and third laws. *Astron. J.* 71, 891–896.
- Duboshin, G.N., 1958. The differential equations of translational–rotational motion of mutually attracting rigid bodies. *Sov. Astron.* 2, 239.
- Fahnestock, E.G., Scheeres, D.J., 2008. Simulation and analysis of the dynamics of binary near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4. *Icarus* 194, 410–435.
- Hénon, M., 1982. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica* 5D, 412–414.
- Laskar, J., 1988. Secular evolution of the Solar System over 10 million years. *Astron. Astrophys.* 198, 341–362.
- Laskar, J., 2005. Frequency Map analysis and quasi periodic decompositions. In: Benest, D., Froeschler, C., Lega, E. (Eds.), *Hamiltonian Systems and Fourier Analysis*. Cambridge Scientific Publishers, Cambridge.
- Laskar, J., Robutel, P., 1995. Stability of the planetary three-body problem. I. Expansion of the planetary Hamiltonian. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 62, 193–217.
- Maciejewski, A.J., 1995. Reduction, relative equilibria and potential in the two rigid bodies problem. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 63, 1–28.
- Malige, F., Robutel, P., Laskar, J., 2002. Partial reduction in the N -body planetary problem using the angular momentum integral. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 84, 283–316.
- Paul, M.K., 1988. An expansion in power series of mutual potential for gravitating bodies with finite sizes. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 44, 49–59.
- Peale, S.J., 1969. Generalized Cassini's Laws. *Astron. J.* 74, 483–489.
- Tricarico, P., 2008. Figure–figure interaction between bodies having arbitrary shapes and mass distributions: A power series expansion approach. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 100, 319–330.
- Wang, L.-S., Krishnaprasad, P.S., Maddocks, J.H., 1991. Hamiltonian dynamics of a rigid body in a central gravitational field. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* 50, 349–386.
- Ward, W.R., 1975. Tidal friction and generalized Cassini's laws in the Solar System. *Astron. J.* 80, 64–70.
- Wisdom, J., Peale, S.J., Mignard, F., 1984. The chaotic rotation of Hyperion. *Icarus* 58, 137–152.
- Wisdom, J., 1987. Rotational dynamics of irregularly shaped natural satellites. *Astron. J.* 94, 1350–1360.

SPEED LIMIT ON NEPTUNE MIGRATION IMPOSED BY SATURN TILTING

GWENAËL BOUÉ, JACQUES LASKAR, AND PETR KUCHYNKA

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE-CNRS UMR8028, Observatoire de Paris, UPMC, 77 Av. Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France; boue@imcce.fr
Received 2009 April 3; accepted 2009 July 27; published 2009 August 11

ABSTRACT

In this Letter, we give new constraints on planet migration. They were obtained under the assumption that Saturn’s current obliquity is due to a capture in resonance with Neptune’s ascending node. If planet migration is too fast, then Saturn crosses the resonance without being captured and it keeps a small obliquity. This scenario thus gives a lower limit on the migration timescale τ . We found that this boundary depends strongly on Neptune’s initial inclination. For two different migration types, we found that τ should be at least greater than 7 Myr. This limit increases rapidly as Neptune’s initial inclination decreases from 10° to 1° . We also give an algorithm to know if Saturn can be tilted for any migration law.

Key words: celestial mechanics

1. INTRODUCTION

It is now well accepted that the solar system was more compact after the protoplanetary gas disk dissipated. Then planets migrated due to interactions with the primordial planetesimal belt. The Nice model (Gomes et al. 2005; Tsiganis et al. 2005; Morbidelli et al. 2005) gives a unified scenario of this planetary migration, but it is still not fully constrained. For example, the Nice model allowed two possible classes of late evolution (Nesvorný et al. 2007). In the first one, called “class MA,” Neptune is scattered to 22–25 AU and reaches its final orbit by slowly migrating over more than 5 AU. In the second class, labeled “DE,” Neptune is placed to its current orbital distance with large eccentricity ≈ 0.3 and then slowly circularizes. Besides, the Nice model does not constrain inclinations, and the timescale of this late evolution is uncertain. Nevertheless, constraints on the migration timescale were obtained from the distribution of the Kuiper belt on the one hand (Murray-Clay & Chiang 2005), and from the distribution of the main asteroid belt on the other (Minton & Malhotra 2009). They both assumed an MA migration type without long-term evolution of eccentricities and inclinations. The former obtained a migration timescale τ between 1 and 10 Myr, and the latter found $\tau \lesssim 0.5$ Myr.

In this Letter, we aim at giving new constraints based on Saturn tilting (Ward & Hamilton 2004; Hamilton & Ward 2004). According to Ward and Hamilton, Saturn’s large obliquity, $\epsilon = 26^\circ.73919$ (Helled et al. 2009), is due to a resonance capture between its spin axis and Neptune’s orbit. Given the large uncertainties on Saturn’s precession rate $-0'.75 \pm 0'.21 \text{ yr}^{-1}$ (Ward & Hamilton 2004), the more accurate regression of Neptune’s orbit plane $s_8 = -0'.692 \text{ yr}^{-1}$ (Laskar et al. 2004) is indeed included in the errorbars. Ward & Hamilton (2004) assume that today the two frequencies are equal. In their scenario, the norm of the frequency of Neptune’s ascending node was initially larger, and then it captured Saturn’s spin axis as it decreased due to Neptune’s migration and/or the dissipation of the planetesimal disk (Ward & Canup 2006). In their numerical model, they took a quasiperiodic model of the solar system and forced an exponential evolution of the frequency s_8 . Here, we show that Saturn can tilt in both migration classes, and that it gives a lower limit on the migration timescale. This limit depends on Neptune’s initial inclination.

A recent paper by Helled et al. (2009) seems to contradict Ward and Hamilton’s scenario. It gives a new estimate of

Saturn’s precession rate $-0'.7542 \pm 0'.0002 \text{ yr}^{-1}$ that is incompatible with a resonance with s_8 . We show that with this value, Saturn can still evolve to its current state but that it is very unlikely. We discuss this result in our conclusion.

2. SPIN AXIS EVOLUTION

Here we recall the equations of motion of a planet axis and give the current dynamical state of Saturn’s spin axis. The evolution of the spin axis \mathbf{w} of a planet in a fixed reference frame $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, where \mathbf{k} is the direction of the total orbital angular momentum, is given by

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})\mathbf{n} \times \mathbf{w} \quad (1)$$

where $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ is the normal to the orbit, and α is the precession constant. Without planetary perturbations, \mathbf{n} is fixed and the spin axis \mathbf{w} precesses uniformly around \mathbf{n} with constant obliquity $\cos \epsilon = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$. However, in a multiplanetary system, \mathbf{n} evolves due to secular interactions. The long-term evolution of \mathbf{n} can be approximated by a quasiperiodic expression

$$n_x + in_y = \sum_k I_k e^{i(v_k t + \varphi_k)}, \quad (2)$$

where the v_k (sorted with increasing amplitudes I_k) are combinations of the fundamental frequencies g_j, s_j (Laskar 1990). For Saturn, $v_2 = s_8 = -0'.692 \text{ yr}^{-1}$ and $I_2 = 0'.064$. As the other terms have only very weak effects on the behavior of Saturn’s spin axis (Hamilton & Ward 2004), one can retain this single term in the orbital precession, which makes the problem integrable (Colombo 1966; Henrard & Murigande 1987). The associated autonomous Hamiltonian, written in a moving reference frame related to the orbital plane, reads

$$H = -\frac{\alpha}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2 - \nu(\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}) \quad (3)$$

with now $\mathbf{k} = (I, 0, \sqrt{1 - I^2})$ and $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. The equation of motion, obtained from $d\mathbf{w}/dt = \nabla_{\mathbf{w}} H \times \mathbf{w}$, is

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})\mathbf{n} \times \mathbf{w} - \nu\mathbf{k} \times \mathbf{w}. \quad (4)$$

This system possesses four relative equilibria named Cassini states for which the three axes \mathbf{w} , \mathbf{n} , and \mathbf{k} are collinear, and

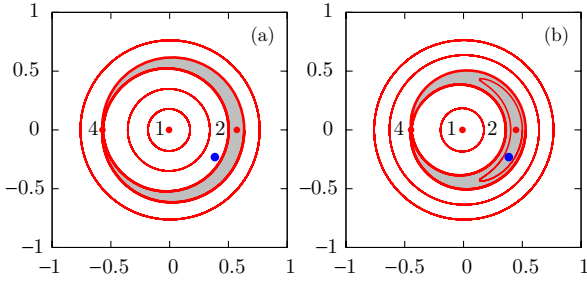


Figure 1. Projection of the spin axis \mathbf{w} (5) in the orbital frame (in abscissae $\sin \epsilon \cos \psi$, in ordinate $\sin \epsilon \sin \psi$). (a) Case I with $\alpha = 0'.845 \text{ yr}^{-1}$ (Helled et al. 2009). (b) Case II with $\alpha = 0'.775 \text{ yr}^{-1}$ (Ward & Hamilton 2004). Cassini state 3 corresponds to a retrograde rotation of Saturn and is not represented in these figures. The current position of Saturn's spin axis is represented by a large filled circle. The small filled circles are Cassini states and the curves are energy contours. The bold curve is the separatrix that delineates the libration area in gray.

a separatrix delineating three zones in the phase space (see Figure 1). Hereafter, we label the three zones after the Cassini state they contain. Saturn's spin axis coordinates in the orbital frame are

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sin \epsilon \cos \psi \\ \sin \epsilon \sin \psi \\ \cos \epsilon \end{pmatrix} \quad (5)$$

with $\epsilon = 26.73919$ (Helled et al. 2009) and $\psi = -31^\circ$ (Hamilton & Ward 2004). As $\psi \neq 0$, the system is not in a Cassini state. Given the coordinates of \mathbf{w} , if $-\alpha \cos \epsilon \in [-0.730, -0.666] \text{ yr}^{-1}$ (Ward & Hamilton 2004) then Saturn's spin axis is in resonance around Cassini state 2 with a libration amplitude larger than 31° (see Figure 1(b)), else it is in circulation around either Cassini state 1 (see Figure 1(a)) or Cassini state 3. Literature gives three different values of Saturn's precession rate. Two of them, $-0'.74 \pm 0'.7 \text{ yr}^{-1}$ (French et al. 1993) and $-0'.75 \pm 0'.21 \text{ yr}^{-1}$ (Ward & Hamilton 2004), are compatible with a libration in zone 2, whereas the third one, $-0'.7542 \pm 0'.0002 \text{ yr}^{-1}$ (Helled et al. 2009), constrains Saturn's axis to circulate in zone 1. In the following, we study these two cases. In Case I, we use the precession constant given by Helled et al. (2009), and in Case II we set α such that $-\alpha \cos \epsilon = s_8 = -0'.692 \text{ yr}^{-1}$. In our numerical integrations detailed below, we take into account the dependences of α in Saturn's semimajor axis and eccentricity.

3. ORBITAL EVOLUTION

We integrate the secular equations of motion derived from the Hamiltonian of Laskar & Robutel (1995) written up to degree 4 in inclinations and eccentricities. In order to fit to the present value of s_8 (Laskar et al. 2004), a small constant offset $\delta s_8 = -0'.00342 \text{ yr}^{-1}$ is added in the model. This offset was obtained by frequency analysis (Laskar 1990) of our analytical model (Table 1). For the class "MA," we consider only the last 3 AU migration of Neptune. When Neptune was closer to the Sun, the frequency s_8 was too large to have any effect on Saturn's axis. Migration is simulated by an additional force leading to the following exponential law,

$$a(t) = a_0 + \Delta a(1 - e^{-t/\tau}), \quad (6)$$

with $\Delta a = +0.1, -0.3, -1.3, -3 \text{ AU}$ respectively for Jupiter, Saturn, Uranus, and Neptune. It is scaled from Minton &

Table 1
Secular Frequencies Associated with the Precession of the Ascending Nodes

Frequency	Laskar et al. (2004)	Secular integration
s_5	-0.000	-0.000
s_6	-26.348	-26.569
s_7	-2.993	-2.996
s_8	-0.692	-0.689

Malhotra (2009) and it is in agreement with the full integration of Tsiganis et al. (2005). In the same way, for the class "DE" we apply an external force that gives a long-term exponential evolution of Neptune eccentricity starting at $e_0 = 0.3$ and finishing at its current value. For both classes, we did integrations with constant Neptune inclination, and others with an exponential damping with the same τ . For each value of τ , an integration in the past is done to obtain initial conditions for the orbital coordinates. Saturn's initial obliquity is then set to $\epsilon_0 = 1.5^\circ$.

We now look at the effect of the dissipation of the remaining primordial planetesimal belt. Following a suggestion of A. Morbidelli (2009, private communication), the mass m_K of the planetesimal belt in the class "MA" is estimated by energy conservation as follows. Initially, planetesimals are distributed following Morbidelli et al. (2004, Figure 1) and during Neptune migration, planetesimals move from their initial position to Uranus' orbit. This leads to $m_K = 1.7 \pm 0.1 M_\oplus$. During planet migration with a planetesimal disk, we force an exponential decrease of the planetesimal belt mass with the same timescale as the semimajor axis one. To first order, the averaged effect of a planetesimal of mass m_i and semimajor axis a_i on Neptune's nodal precession rate is

$$\delta s_8(m_i, a_i) = -\frac{n_N}{4} \left(\frac{m_i}{m_0}\right) \left(\frac{a_N}{a_i}\right)^2 b_{3/2}^{(1)}(a_N/a_i) \quad (7)$$

with n_N and a_N being, respectively, Neptune mean motion and semimajor axis, and m_0 the mass of the Sun. We model the planetesimal belt by a single annulus with semimajor axis a_K such that

$$\delta s_8(m_K, a_K) = \sum_i \delta s_8(m_i, a_i). \quad (8)$$

Using the mass distribution of Morbidelli et al. (2004), we found $a_K = 60 \pm 5 \text{ AU}$. We run numerical integrations with and without a 2 Earth mass primordial planetesimal belt and found that the constraints on the migration timescales were unchanged. In the following, we give only the results of our integrations without a planetesimal disk.

4. RESULTS

In Case I, Saturn's spin axis circulates around Cassini state 1 with a large obliquity (Figure 1(a)). To show whether it is compatible with the Ward & Hamilton (2004) scenario or not, we did several numerical integrations without long-term evolution of Neptune inclination and enumerated those ending in zone 1 with an obliquity larger than or equal to 26.73919° . We first considered the class MA of the Nice model and varied the migration timescale τ from 100 Myr to 600 Myr every 10 Myr. Then, for each value of τ , we searched the range of the initial precession angle ψ for which the final state corresponds to our criterion. We found only three values for τ satisfying the criterion: $\tau \in \{170, 180, 190\} \text{ Myr}$. In each case, the range of possible values for ψ is extremely small $\Delta\psi \lesssim 10^{-5} \text{ deg}$

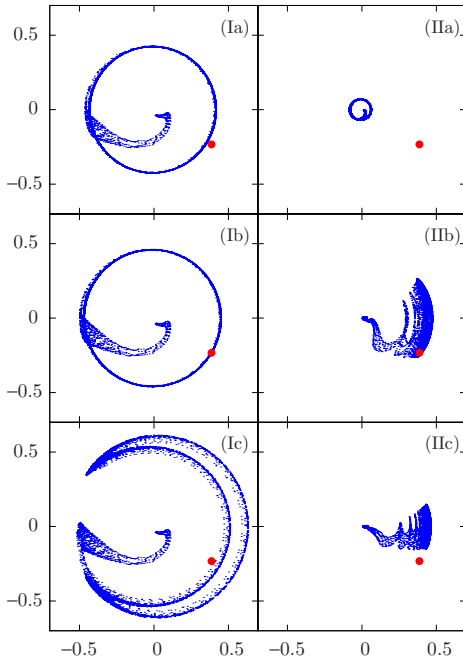


Figure 2. Results for the MA type migration. Projection of Saturn's spin axis on the invariant plane in a frame rotating at Neptune regression frequency (in abscisse $\sin \theta \cos(\phi - \Omega)$, in ordinate $\sin \theta \sin(\phi - \Omega)$) (see Equation (9)). The filled circle represents its current position. Subfigures Ia, Ib, and Ic, Case I with $\tau = 180$ Myr and $\psi = 108:674, 108:675\ 469, 108:675\ 475$. Subfigures IIa, IIb, and IIc, Case II with $\tau = 20, 200, 300$ Myr and $\psi = 0^\circ$.

(Figure 2, Ia, Ib, Ic). Thus assuming an equiprobable initial phase, the probability to find Saturn in its current state through this mechanism is less than 3×10^{-8} for any of the three selected τ . With a DE migration type, the widths of the initial longitude intervals $\Delta\psi$ are identical. The only changes are in the values of the migration timescale τ leading to the large obliquity circulation state: $\tau \in \{150, 260, 290, 310, 320\}$ Myr. We discuss the implications of these results in the conclusion.

In Case II, Saturn's spin axis is presently in resonance with Neptune's ascending node. In that case, planet migration must be slow enough for the capture to occur, but if it is too slow, then the evolution becomes adiabatic and the libration amplitude is too small (less than 31° ; Figure 2, IIc). This latter constraint disappears if the precapture obliquity is larger than $4:5$ (Ward & Hamilton 2004). We performed 2100 integrations for each of the two migration types MA and DE, τ going from 10 to 600 Myr every 10 Myr and ψ between 0° and 350° every 10° . The results are summarized in Figure 3, MA type in gray and DE type in black. Probabilities are now significant and reach 1 for a few timescales. We see clear lower limits, $\tau \geq 90$ Myr (resp. $\tau \geq 170$ Myr) for the MA (resp. DE) migration type. The difference in the results between the two Nice model classes comes mainly from the different dependence of the semimajor axis and the eccentricity on Neptune's regression frequency. In all these integrations, Neptune's inclination does not undergo long-term evolution. However, the amplitude I_2 of Saturn orbital quasiperiodic motion (2) is proportional to Neptune inclination. In Section 5, we show that the higher the inclination amplitude is, the faster a planet can be tilted. We thus studied the minimum timescale, for which Saturn's axis ends in zone 2 with a libration amplitude larger than 31° , as a function of Neptune's initial inclination (Figure 4, bold curves). In both migration classes,

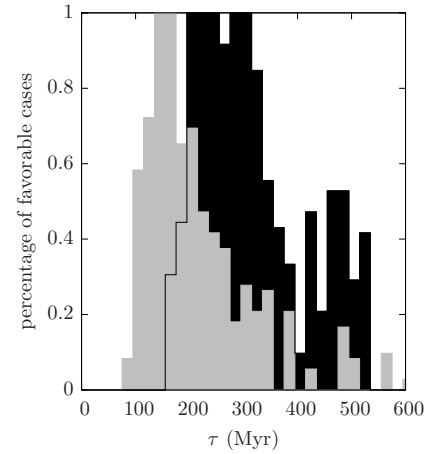


Figure 3. Probability that Saturn librates in zone 2 with an amplitude larger than 31° as a function of the migration timescale τ in Case II. MA migration type in gray and DE migration type in black.

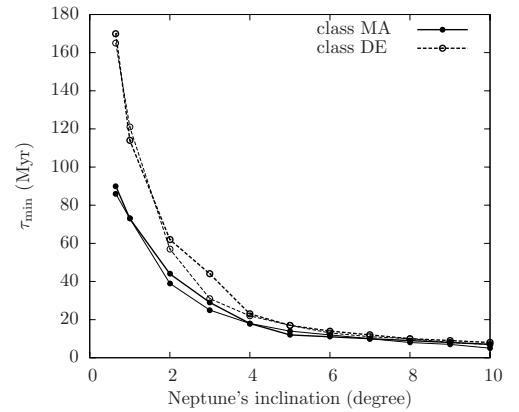


Figure 4. Minimal migration timescale as a function of Neptune's initial inclination for both migration types: MA (solid line) and DE (dashed line). Bold curves are results of numerical integrations. Thin curves were obtained by the algorithm described at the end of Section 5.

τ_{\min} decreases rapidly to ≈ 20 Myr when Neptune's initial inclination increases to 4° and then it decreases slowly down to ≈ 7 Myr when Neptune's inclination goes to 10° .

5. FASTEST TILTING

In this section, we compute analytically the minimal time required to tilt a planet as a function of its inclination $I(t)$. We give also an algorithm to check whether Saturn can be tilted or not for a given migration.

We call θ the inclination of a planet equator relative to the invariant plane. As Saturn current inclination is small relative to its obliquity ϵ , the two angles θ and ϵ are similar. Let Φ and Ω be the longitude of the ascending node of the equator and of the orbit in the invariant plane. We have

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \Phi \\ -\sin \theta \cos \Phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{(i,j,k)}$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin I \sin \Omega \\ -\sin I \cos \Omega \\ \cos I \end{pmatrix}_{(i,j,k)} \quad (9)$$

L22

BOUÉ, LASKAR, & KUCHYNKA

Vol. 702

and

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} &= \sin \theta \sin I \cos(\Phi - \Omega) + \cos \theta \cos I, \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{k} &= -\sin \theta \sin I \sin(\Phi - \Omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Thus, from (1),

$$\frac{d \cos \theta}{dt} = \alpha \sin \theta \cos \theta \sin I \cos I [1 + \gamma \cos(\Phi - \Omega)] \sin(\Phi - \Omega) \quad (11)$$

where $\gamma = \tan \theta \tan I$ can vary from 0 to infinity depending on the value of the obliquity. We now choose Ω that maximizes this time derivative as a function of I and θ . Doing so, we ensure that it is not possible to have a faster evolution of the equator inclination θ . This leads to

$$\cos(\Phi - \Omega) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\gamma^2}}{4\gamma}. \quad (12)$$

Substituting this expression in (11) gives the maximal speed Θ_{\max} such that $d\theta/dt \leq \Theta_{\max}$

$$\Theta_{\max} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{16} |\cos \theta \sin 2I| \frac{(\sqrt{1 + 8\gamma^2} + 3)^{3/2}}{(\sqrt{1 + 8\gamma^2} + 1)^{1/2}}. \quad (13)$$

After some calculus, it can be shown that Θ_{\max} is an increasing function of $\tan I$. Thus, if the only constraint on the orbit inclination amplitude is an upper limit $I_{\max} < \pi/2$, the fastest evolution is obtained for $I = I_{\max}$. In two asymptotic cases, the expressions of Θ_{\max} are simpler. For $I \ll |\pi/2 - \theta|$ or $\theta \ll |\pi/2 - I|$, we have $|\gamma| \ll 1$ and thus

$$\Theta_{\max} \approx \frac{\alpha}{2} |\cos \theta \sin 2I|. \quad (14)$$

In the other case, if $|\theta - \pi/2| \ll I$ or $|I - \pi/2| \ll \theta$, the parameter γ is arbitrarily large and (13) becomes

$$\Theta_{\max} \approx \frac{\alpha}{2} \sin \theta \sin^2 I. \quad (15)$$

Using the approximation for small angles $|\gamma| \ll 1$ (14), the minimum time t_{\min} required to bring θ from 0 to θ_{end} at constant inclination amplitude I is

$$t_{\min} = -\frac{2}{\alpha \sin 2I} \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{\text{end}}}{2} \right) \right|. \quad (16)$$

In Saturn's case, the amplitude of the mode responsible for the tilt is I_2 . Whenever Neptune's inclination is less than 10° , I_2 remains below $0^\circ.9$, $\gamma \leq 8 \times 10^{-3}$ and Expressions (14), (16) are valid. This minimum time t_{\min} decreases with the inclination amplitude I . For example, with $I = I_2 = 0.064^\circ$, Equation (16) gives $t_{\min} = 105$ Myr in Case I and $t_{\min} = 115$ Myr in Case 2.

From this study, it is possible to check whether Saturn's axis can be tilted or not for a given migration. Let θ_2 be the value of θ at the Cassini state 2. θ_2 and its time derivative $\Theta_2 = \dot{\theta}_2$ are functions of orbital parameters through $I(t)$, $\nu(t) = s_8(t)$ and $\alpha(t)$. During a tilt, θ oscillates around the increasing θ_2 and $\Theta = \dot{\theta}$ reads

$$\Theta = \Theta_2 + A\omega_{\text{lib}} \sin(\omega_{\text{lib}}t + \varphi) \quad (17)$$

where A and φ are, respectively, the libration amplitude and a phase, and ω_{lib} is the libration amplitude given by Hamilton & Ward (2004)

$$\omega_{\text{lib}} = \sqrt{-\alpha\nu \sin \theta \sin I}. \quad (18)$$

For a given migration, Saturn's axis can tilt if and only if there exist A and φ such that $\Theta \leq \Theta_{\max}$ (14 and 17) during all the evolution. Replacing θ by θ_2 in (14 and 18), one obtains a criterion that depends only on orbital parameters. We applied this criterion on the systems studied in Section 4. For each value of Neptune's initial inclination, we integrated once the system with a given τ . Then, we rescaled the derivatives Θ for different value of τ until the criterion is verified. The resulting values of τ_{\min} are displayed in Figure (4, thin curves).

6. CONCLUSIONS

First of all, we see that the Helled et al. (2009) precession constant is incompatible with the Ward & Hamilton (2004) scenario. This is a robust result. Helled et al. (2009) obtained Saturn's precession constant from an empirical model of its internal structure. They used Saturn mass, radius, and gravitational coefficients J_2 , J_4 , and J_6 to fit a density profile represented by a sixth-degree polynomial. From this density profile they derived the normalized axial moment of inertia γ directly related to the precession constant. Our results suggest, rather, considering γ as an additional independent parameter to better constrain Saturn's interior. If Saturn is actually in libration in zone 2 then $0.2257 < \gamma < 0.2438$ (Ward & Hamilton 2004).

Assuming the Hamilton & Ward (2004) precession constant, Saturn's spin axis is likely to evolve toward a libration in zone 2 whatever the migration class is as long as the timescale τ is sufficiently large. We found a strong dependence between the minimum timescale τ_{\min} and Neptune's inclination. Thus, an external constraint on the speed limit of Neptune migration may also constrain its inclination. For instance, the upper boundary obtained by Murray-Clay & Chiang (2005) is $\tau \leq 10$ Myr. In that case, our results show that under the hypothesis of Section 3, the initial inclination of Neptune's orbit must have been larger than 7° . On the other side, in all our studied cases, the minimum timescale must be at least greater than 7 Myr, whereas Minton & Malhotra (2009) found $\tau \lesssim 0.5$ Myr. This contradiction may be raised if one considers different evolution laws for the semimajor axes, eccentricities, and/or inclinations. In that scope, we have given in Section 5 an algorithm to know if Saturn can be tilted for any migration law.

REFERENCES

- Colombo, G. 1966, *AJ*, 71, 891
 French, R. G., et al. 1993, *Icarus*, 103, 163
 Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Morbidelli, A. 2005, *Nature*, 435, 466
 Hamilton, D. P., & Ward, W. R. 2004, *AJ*, 128, 2510
 Helled, R., Schubert, G., & Anderson, J. D. 2009, *Icarus*, 199, 368
 Henrard, J., & Murigande, C. 1987, *Celest. Mech.*, 40, 345
 Laskar, J. 1990, *Icarus*, 88, 266
 Laskar, J., & Robutel, P. 1995, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 62, 193
 Laskar, J., Robutel, P., Joutel, F., Gastineau, M., Correia, A. C. M., & Levrard, B. 2004, *A&A*, 428, 261
 Minton, D. A., & Malhotra, R. 2009, *Nature*, 457, 1109
 Morbidelli, A., Emel'yanenko, V. V., & Levison, H. F. 2004, *MNRAS*, 355, 935
 Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. 2005, *Nature*, 435, 462
 Murray-Clay, R. A., & Chiang, E. I. 2005, *ApJ*, 619, 623
 Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., & Morbidelli, A. 2007, *AJ*, 133, 1962
 Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005, *Nature*, 435, 459
 Ward, W. R., & Canup, R. M. 2006, *ApJ*, 640, L91
 Ward, W. R., & Hamilton, D. P. 2004, *AJ*, 128, 2510

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

La forte inclinaison de l'axe d'Uranus par rapport au pôle de son orbite est l'un des problèmes majeurs concernant le système solaire. Les modèles de formation prédisent que les planètes se forment avec une très faible obliquité et aucun des scénarios envisagés pour basculer la planète n'est parfaitement satisfaisant (voir chapitre 1). En particulier, la présence de satellites réguliers orbitant près du plan équatorial de la planète suggère que le basculement n'a pas eu lieu de façon quasi-instantanée comme sous l'effet d'une collision, mais qu'il a duré bien plus longtemps, au moins 1 million d'années selon Kinoshita (1993). Une étude plus poussée m'a cependant permis de montrer que la valeur obtenue par Kinoshita était de loin très surestimée. Une modélisation plus réaliste du basculement donne en effet une contrainte de 13,000 ans seulement (voir chapitre 2). Ces résultats ne font pas intervenir les effets de marée. Mais ces derniers ne permettent pas de ramener les satellites vers le plan de l'équateur. Cela est indépendant du facteur de dissipation dans Uranus (section 2.3).

Selon les modèles de formation des systèmes planétaires, une fois que les planètes sont formées, le disque de gaz dans lequel elles évoluaient est dissipé par le vent stellaire. Il ne reste alors plus que des planètes isolées entourées d'un disque de planétésimaux. Pour le système solaire, cette configuration a duré environ 600 millions d'années. Dans le chapitre 3, nous avons étudié la possibilité qu'Uranus ait basculé durant cette période. Nous avons tout d'abord vérifié que le disque de planétésimaux n'avait aucun effet significatif sur la vitesse de précession de l'axe d'Uranus. Dans un second temps, nous avons modélisé l'évolution séculaire d'un disque et calculé son effet sur la décomposition en fréquence du mouvement de précession de l'orbite d'Uranus. En particulier, nous avons trouvé que la partie basse fréquence du spectre, celle où des résonances avec l'axe d'Uranus sont susceptibles d'apparaître, dépend peu de la discrétisation du disque. Nous avons ensuite montré que les valeurs de l'obliquité, pour lesquels des résonances spin-orbites sont possibles, sont trop espacées les unes des autres pour que l'obliquité puisse diffuser et croître de façon importante.

L'étape suivante dans l'histoire du système solaire est décrite par le modèle de Nice. Jupiter et Saturne traversent des résonances de moyen mouvement, cela a pour effet de déstabiliser les orbites des planétésimaux et de faire migrer Uranus et Neptune vers l'extérieur. Dans le chapitre 4, nous détaillons le scénario que nous avons envisagé permettant de faire basculer Uranus durant cette période. Tout d'abord nous définissons les contraintes que doit suivre l'inclinaison de l'orbite pour que le basculement soit possible. Ensuite, nous montrons qu'il est possible que l'inclinaison d'Uranus ait augmenté significativement suite à des rencontres proches avec Jupiter où Saturne, de telles rencontres étant prédites par ailleurs pour expliquer les excentricités actuelles des planètes géantes. Enfin, nous montrons que sous l'hypothèse qu'Uranus ait eu un satellite supplémentaire dans le passé et que l'inclinaison d'Uranus ait été élevée durant la phase de migration, alors le basculement a pu se faire. Dans ce scénario, le satellite est éjecté par une rencontre proche à la fin du basculement. L'avantage de scénario est qu'il résout en même temps le problème du satellite manquant soulevé par un modèle de formation de satellites. Pour l'instant, le satellite utilisé est relativement massif comparé à ce que

donne les modèles de formation. Il serait donc intéressant de poursuivre l'étude et de déterminer les paramètres de la migration qui permettent le basculement avec un satellite moins massif. Une direction possible de recherche est suggérée par le travail que nous avons effectué sur l'origine de l'obliquité de Saturne (section 5.4) ainsi que par d'autres travaux indépendants. Ceux-ci prédisent en effet que la migration a été plus lente que ce que nous avons utilisé pour Uranus.

Ce travail s'appuie sur les résultats que nous avons obtenus sur le problème lunaire (section 5.2). Il s'agit de l'étude du mouvement de précession d'une planète avec un satellite. Nous avons notamment obtenu les solutions exactes du problème séculaire de ce système à trois corps. Auparavant, seuls les cas asymptotiques étaient connus. Pour cela, nous avons utilisé une technique de moyennisation qui nous a permis, en plus, de s'affranchir de l'approximation gyroscopique. Aussi, la résolution a été grandement simplifiée par l'utilisation d'une approche vectorielle. Enfin, les équations d'évolution n'ont été développées qu'en demi-grand axe, elles sont donc valables pour toute inclinaison et excentricité. L'avantage de la méthode qui a été suivie est qu'elle fournit des résultats généraux indépendants de la forme exacte du hamiltonien. En particulier, elle s'adapte directement au problème rotationnel de deux corps rigides en interaction (section 5.3). A partir de ce travail sur les systèmes binaires, et grâce à l'analyse en fréquence, il nous a été possible d'obtenir un résultat général sur le problème des n corps que nous avons énoncé sous la forme d'un théorème (voir la sous-section 5.3.5). Cette partie analytique peut encore être étendue de deux façons différentes. La première consiste à généraliser l'approche vectorielle des systèmes séculaires aux cas résonants, ce qui n'a pas été fait ici. Cela aurait des applications pour l'étude des systèmes d'astéroïdes binaires, la majorité d'entre eux étant en rotation synchrone. Cela fournirait aussi de précieux outils pour l'étude des systèmes multi-planétaires extrasolaires, dont un grand nombre est en résonance de moyen mouvement. La deuxième extension possible est la prise en compte de la non-rigidité des corps étudiés comme les déformations par effets de marée ou les modèles de structure interne multi-couche.

Bibliographie

- Abulnaga, M. Z., & Barkin, I. V. 1979, Regular motions of a body in the gravity field of a sphere, *AZh*, 56, 881
- Andoyer, H. 1923, *Cours de mecanique celeste*, vol. 1, ed. Andoyer, H.
- Ashenberg, J. 2007, Mutual gravitational potential and torque of solid bodies via inertia integrals, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 99, 149
- Benz, W., Cameron, A. G. W., & Melosh, H. J. 1989, The origin of the moon and the single impact hypothesis. III, *Icarus*, 81, 113
- Benz, W., Slattery, W. L., & Cameron, A. G. W. 1986, The origin of the moon and the single-impact hypothesis. I, *Icarus*, 66, 515
- Benz, W., Slattery, W. L., & Cameron, A. G. W. 1987, The origin of the moon and the single-impact hypothesis. II, *Icarus*, 71, 30
- Borderies, N. 1978, Mutual gravitational potential of N solid bodies, *Celestial Mechanics*, 18, 295
- Borisov, A., & Mamaev, I. 2005, *Dynamics of the Rigid Body*, ed. R&C Dynamics, Moscow (in Russian)
- Boué, G., & Laskar, J. 2006, Precession of a planet with a satellite, *Icarus*, 185, 312
- Boué, G., & Laskar, J. 2008, Erratum : Precession of a planet with a satellite, [hal.archives-ouvertes.fr :hal00335321_v2](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal00335321_v2)
- Boué, G., & Laskar, J. 2010, A collisionless scenario for Uranus tilting, *ApJL*, 712, L44
- Boué, G., Laskar, J., & Kuchynka, P. 2009, Speed Limit on Neptune Migration Imposed by Saturn Tilting, *ApJL*, 702, L19
- Breiter, S., Nesvorný, D., & Vokrouhlický, D. 2005, Efficient Lie-Poisson Integrator for Secular Spin Dynamics of Rigid Bodies, *AJ*, 130, 1267
- Brunini, A. 1995, A possible constraint to Uranus' great collision, *Planet. Space Sci.*, 43, 1019
- Brunini, A. 2006a, Origin of the obliquities of the giant planets in mutual interactions in the early Solar System, *Nature*, 440, 1163
- Brunini, A. 2006b, Retraction : Origin of the obliquities of the giant planets in mutual interactions in the early Solar System, *Nature*, 443, 1013
- Brunini, A., Parisi, M. G., & Tancredi, G. 2002, Constraints to Uranus' Great Collision III : The Origin of the Outer Satellites, *Icarus*, 159, 166
- Burns, J. A. 1986, in *Satellites*, ed. J. A. Burns & M. S. Matthews, 117–158
- Campbell, L., & Pickering, E. C. 1917, Variability of Uranus., *Harvard College Observatory Circular*, 200, 1
- Canup, R. M., & Ward, W. R. 2000, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 32, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 1105–+
- Canup, R. M., & Ward, W. R. 2006, A common mass scaling for satellite systems of gaseous planets, *Nature*, 441, 834

- Carpenter, R. L. 1964, Symposium on Radar and Radiometric Observations of Venus during the 1962 Conjunction : Study of Venus by CW radar, *AJ*, 69, 2
- Cartan, H. 1977, *Cours de calcul différentiel* (Hermann, Paris)
- Chierchia, L. 2008, Kolmogorov's 1954 paper on nearly-integrable Hamiltonian systems, *Regul. Chaotic Dyn.*, 13, 130
- Chirikov, B. V. 1979, A universal instability of many-dimensional oscillators systems, *Phys. Rep.*, 52, 263
- Colombo, G. 1966, Cassini's second and third laws, *AJ*, 71, 891
- Correia, A. C. M., & Laskar, J. 2001, The four final rotation states of Venus, *Nature*, 411, 767
- Counselman, III, C. C. 1973, Outcomes of Tidal Evolution, *ApJ*, 180, 307
- D'Alembert. 1749, *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre, dans le système newtonien* (Chapront-Touzé, M., Souchay, J. (Eds.), *Complete Works, Serie I*, vol. 7. CNRS Editions, Paris)
- Dermott, S. F. 1979, Tidal dissipation in the solid cores of the major planets, *Icarus*, 37, 310
- Desch, M. D., Connerney, J. E. P., & Kaiser, M. L. 1986, The rotation period of Uranus, *Nature*, 322, 42
- Dones, L., & Tremaine, S. 1993, On the origin of planetary spins, *Icarus*, 103, 67
- Duboshin, G. N. 1958, The Differential Equations of Translational - Rotational Motion of Mutually Attracting Rigid Bodies., *Soviet Astronomy*, 2, 239
- Dullin, H. 2004, Poisson integrator for symmetric rigid bodies, *Reg. Chaot. Dynam.*, 9, 255
- Efroimsky, M. 2005, Long-Term Evolution of Orbits About A Precessing Oblate Planet : 1. The Case of Uniform Precession, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91, 75
- Efroimsky, M., & Lainey, V. 2007, Physics of bodily tides in terrestrial planets and the appropriate scales of dynamical evolution, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 112, 12003
- Efroimsky, M., & Williams, J. G. 2009, Tidal torques : a critical review of some techniques, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104, 257
- Estrada, P. R., & Mosqueira, I. 2006, A gas-poor planetesimal capture model for the formation of giant planet satellite systems, *Icarus*, 181, 486
- Fahnestock, E. G., & Scheeres, D. J. 2008, Simulation and analysis of the dynamics of binary near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4, *Icarus*, 194, 410
- French, R. G., Nicholson, P. D., Cooke, M. L., Elliot, J. L., Matthews, K., Perkovic, O., Tollestrup, E., Harvey, P., Chanover, N. J., Clark, M. A., Dunham, E. W., Forrest, W., Harrington, J., Pipher, J., Brahic, A., Grenier, I., Roques, F., & Arndt, M. 1993, Geometry of the Saturn system from the 3 July 1989 occultation of 28 SGR and Voyager observations, *Icarus*, 103, 163
- Gerstenkorn, H. 1955, Über Gezeitenreibung beim Zweikörperproblem. Mit 4 Textabbildungen, *Zeitschrift für Astrophysik*, 36, 245
- Gladman, B. 1993, Dynamics of systems of two close planets, *Icarus*, 106, 247
- Goldreich, P. 1965a, An explanation of the frequent occurrence of commensurable mean motions in the solar system, *MNRAS*, 130, 159
- Goldreich, P. 1965b, Inclination of satellite orbits about an oblate precessing planet, *AJ*, 70, 5
- Goldreich, P. 1966, History of the Lunar Orbit, *Reviews of Geophysics*, 4, 411
- Goldreich, P., & Nicholson, P. D. 1977, Turbulent viscosity and Jupiter's tidal Q, *Icarus*, 30, 301
- Goldreich, P., & Tremaine, S. 1979, The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential, *ApJ*, 233, 857
- Goldstein, R. M. 1964, Symposium on Radar and Radiometric Observations of Venus during the 1962

- Conjunction : Venus characteristics by earth-based radar, *AJ*, 69, 12
- Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Morbidelli, A. 2005, Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets, *Nature*, 435, 466
- Goodman, J., & Lackner, C. 2009, Dynamical Tides in Rotating Planets and Stars, *ApJ*, 696, 2054
- Greenberg, R. 1974, Outcomes of tidal evolution for orbits with arbitrary inclination, *Icarus*, 23, 51
- Greenberg, R. 2009, Frequency Dependence of Tidal q , *ApJL*, 698, L42
- Greenberg, R., Carusi, A., & Valsecchi, G. B. 1988, Outcomes of planetary close encounters - A systematic comparison of methodologies, *Icarus*, 75, 1
- Hamilton, D. P., & Ward, W. R. 2004, Tilting Saturn. II. Numerical Model, *AJ*, 128, 2510
- Harris, A. W., & Ward, W. R. 1982, Dynamical constraints on the formation and evolution of planetary bodies, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 10, 61
- Helled, R., Schubert, G., & Anderson, J. D. 2009, Empirical models of pressure and density in Saturn's interior : Implications for the helium concentration, its depth dependence, and Saturn's precession rate, *Icarus*, 199, 368
- Henon, M. 1982, On the numerical computation of Poincaré maps, *Physica*, 5D, 412
- Henon, M., & Petit, J. 1986, Series expansion for encounter-type solutions of Hill's problem, *Celestial Mechanics*, 38, 67
- Henrard, J. 1982, Capture into resonance - an extension of the use of adiabatic invariants, *Celestial Mechanics*, 27, 3
- Henrard, J., & Murigande, C. 1987, Colombo's top, *Celestial Mechanics*, 40, 345
- Herschel, W. 1783, A Letter from William Herschel, Esq. F. R. S., *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I*, 73, 1
- Herschel, W. 1787, An Account of the Discovery of Two Satellites Revolving Round the Georgian Planet. By William Herschel, LLD. F. R. S., *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I*, 77, 125
- Herschel, W. 1788, On the Georgian Planet and Its Satellites. By William Herschel, LL.D. F. R. S., *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I*, 78, 364
- Kant, I. 1755, *Universal Natural History and Theory of the Heavens*
- Kaula, W. M. 1961, Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, *Geophysical Journal International*, 5, 104
- Kaula, W. M. 1964, Tidal Dissipation by Solid Friction and the Resulting Orbital Evolution, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661
- Kinoshita, H. 1977, Theory of the rotation of the rigid earth, *Celestial Mechanics*, 15, 277
- Kinoshita, H. 1993, Motion of the orbital plane of a satellite due to a secular change of the obliquity of its mother planet, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57, 359
- Koerberl, C. 2006, Impact Processes on the Early Earth, *Elements*, 2, 211
- Kokubo, E., & Ida, S. 2007, Formation of Terrestrial Planets from Protoplanets. II. Statistics of Planetary Spin, *ApJ*, 671, 2082
- Korycansky, D. G., Bodenheimer, P., Cassen, P., & Pollack, J. B. 1990, One-dimensional calculations of a large impact on Uranus, *Icarus*, 84, 528
- Kubo-Oka, T., & Nakazawa, K. 1995, Gradual increase in the obliquity of Uranus due to tidal interaction with a hypothetical retrograde satellite., *Icarus*, 114, 21
- Lainey, V., Arlot, J., Karatekin, Ö., & van Hoolst, T. 2009, Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations, *Nature*, 459, 957
- Laskar, J. 1988, Secular evolution of the solar system over 10 million years, *A&A*, 198, 341

- Laskar, J. 1990, The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, 88, 266
- Laskar, J. 2005a, Frequency Map analysis and quasi periodic decompositions (Cambridge Scientific Publishers, Cambridge)
- Laskar, J. 2005b, Note on the Generalized Hansen and Laplace Coefficients, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91, 351
- Laskar, J. 2008, Chaotic diffusion in the Solar System, *Icarus*, 196, 1
- Laskar, J., Correia, A. C. M., Gastineau, M., Joutel, F., Levrard, B., & Robutel, P. 2004a, Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars, *Icarus*, 170, 343
- Laskar, J., & Gastineau, M. 2009, Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth, *Nature*, 459, 817
- Laskar, J., & Jacobson, R. A. 1987, GUST86 - an analytical ephemeris of the Uranian satellites, *A&A*, 188, 212
- Laskar, J., & Robutel, P. 1993, The chaotic obliquity of the planets, *Nature*, 361, 608
- Laskar, J., & Robutel, P. 1995, Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62, 193
- Laskar, J., Robutel, P., Joutel, F., Gastineau, M., Correia, A. C. M., & Levrard, B. 2004b, A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth, *AA*, 428, 261
- Lee, M. H., Peale, S. J., Pfahl, E., & Ward, W. R. 2007, Evolution of the obliquities of the giant planets in encounters during migration, *Icarus*, 190, 103
- Lissauer, J. J., & Kary, D. M. 1991, The origin of the systematic component of planetary rotation. I - Planet on a circular orbit, *Icarus*, 94, 126
- Lowell, P. 1912, Spectroscopic discovery of the rotation period of Uranus, *The Observatory*, 35, 228
- Lubow, S. H., & Ogilvie, G. I. 2001, Secular Interactions between Inclined Planets and a Gaseous Disk, *ApJ*, 560, 997
- Lykawka, P. S., Horner, J., Jones, B. W., & Mukai, T. 2009, Origin and dynamical evolution of Neptune Trojans - I. Formation and planetary migration, *MNRAS*, 398, 1715
- MacDonald, G. J. F. 1964, Tidal Friction, *Reviews of Geophysics*, 2, 467
- Maciejewski, A. J. 1995, Reduction, Relative Equilibria and Potential in the Two Rigid Bodies Problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 63, 1
- Malige, F., Robutel, P., & Laskar, J. 2002, Partial Reduction in the N-Body Planetary Problem using the Angular Momentum Integral, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 84, 283
- Masset, F., & Snellgrove, M. 2001, Reversing type II migration : resonance trapping of a lighter giant protoplanet, *MNRAS*, 320, L55
- McCaughrean, M. J., & O'dell, C. R. 1996, Direct Imaging of Circumstellar Disks in the Orion Nebula, *AJ*, 111, 1977
- Meyer, M. R. 2009, in *IAU Symposium*, Vol. 258, *IAU Symposium*, ed. E. E. Mamajek, D. R. Soderblom, & R. F. G. Wyse, 111–122
- Mignard, F. 1979, The evolution of the lunar orbit revisited. I, *Moon and Planets*, 20, 301
- Minton, D. A., & Malhotra, R. 2009, A record of planet migration in the main asteroid belt, *Nature*, 457, 1109
- Morbidelli, A., Brasser, R., Tsiganis, K., Gomes, R., & Levison, H. F. 2009, Constructing the secular architecture of the solar system. I. The giant planets, *A&A*, 507, 1041
- Morbidelli, A., & Crida, A. 2007, The dynamics of Jupiter and Saturn in the gaseous protoplanetary disk, *Icarus*, 191, 158
- Morbidelli, A., Emel'yanenko, V. V., & Levison, H. F. 2004, Origin and orbital distribution of the

- trans-Neptunian scattered disc, *MNRAS*, 355, 935
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. 2005, Chaotic capture of Jupiter's Trojan asteroids in the early Solar System, *Nature*, 435, 462
- Morbidelli, A., Tsiganis, K., Crida, A., Levison, H. F., & Gomes, R. 2007, Dynamics of the Giant Planets of the Solar System in the Gaseous Protoplanetary Disk and Their Relationship to the Current Orbital Architecture, *AJ*, 134, 1790
- Mosqueira, I., & Estrada, P. R. 2003a, Formation of the regular satellites of giant planets in an extended gaseous nebula I : subnebula model and accretion of satellites, *Icarus*, 163, 198
- Mosqueira, I., & Estrada, P. R. 2003b, Formation of the regular satellites of giant planets in an extended gaseous nebula II : satellite migration and survival, *Icarus*, 163, 232
- Murray, C. A. 1983, *Vectorial astrometry*, ed. Murray, C. A.
- Murray-Clay, R. A., & Chiang, E. I. 2005, A Signature of Planetary Migration : The Origin of Asymmetric Capture in the 2 :1 Resonance, *ApJ*, 619, 623
- Neron de Surgy, O., & Laskar, J. 1997, On the long term evolution of the spin of the Earth., *A&A*, 318, 975
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., & Morbidelli, A. 2007, Capture of Irregular Satellites during Planetary Encounters, *AJ*, 133, 1962
- Ogilvie, G. I., & Lin, D. N. C. 2004, Tidal Dissipation in Rotating Giant Planets, *ApJ*, 610, 477
- Öpik, E. J. 1976, *Interplanetary encounters - Close-range gravitational interactions* (Kopal, Z. ; Cameron, A.G.W.)
- Paardekooper, S., Baruteau, C., Crida, A., & Kley, W. 2009, A torque formula for non-isothermal Type I planetary migration - I. Unsaturated horseshoe drag, *ArXiv e-prints*
- Parisi, M. G., & Brunini, A. 1997, Constraints to Uranus' Great Collision-II, *Planet. Space Sci.*, 45, 181
- Parisi, M. G., Carraro, G., Maris, M., & Brunini, A. 2008, Constraints to Uranus' great collision IV. The origin of Prospero, *AAP*, 482, 657
- Paul, M. K. 1988, An Expansion in Power Series of Mutual Potential for Gravitating Bodies with Finite Sizes, *Celestial Mechanics*, 44, 49
- Peale, S. J. 1969, Generalized Cassini's Laws, *AJ*, 74, 483
- Pollack, J. B., Hubickyj, O., Bodenheimer, P., Lissauer, J. J., Podolak, M., & Greenzweig, Y. 1996, Formation of the Giant Planets by Concurrent Accretion of Solids and Gas, *Icarus*, 124, 62
- Rutherford, E. 1911, The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom, *Philosophical Magazine*, Series 6, 21
- Safronov, V. S. 1966, Sizes of the largest bodies falling onto the planets during their formation, *Soviet Astronomy*, 9, 987
- Schlichting, H. E., & Sari, R. 2007, The Effect of Semicollisional Accretion on Planetary Spins, *ApJ*, 658, 593
- See, T. J. J. 1900, Preliminary Researches on the Diameters of the Planets Neptune and Uranus, *Astronomische Nachrichten*, 153, 289
- Singer, S. F. 1968, The origin of the Moon and geophysical consequences, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 15, 205
- Slattery, W. L., Benz, W., & Cameron, A. G. W. 1992, Giant impacts on a primitive Uranus, *Icarus*, 99, 167
- Slipher, V. M. 1912, Detection of the rotation of Uranus, *Lowell Observatory Bulletin*, 2, 19
- Tanaka, H., & Ward, W. R. 2004, Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves, *ApJ*, 602, 388

- Touma, J., & Wisdom, J. 1994a, Evolution of the Earth-Moon system, *AJ*, 108, 1943
- Touma, J., & Wisdom, J. 1994b, Lie-Poisson integrators for rigid body dynamics in the solar system, *AJ*, 107, 1189
- Touma, J. R., Tremaine, S., & Kazandjian, M. V. 2009, Gauss's method for secular dynamics, softened, *MNRAS*, 394, 1085
- Tremaine, S. 1991, On the origin of the obliquities of the outer planets, *Icarus*, 89, 85
- Tricarico, P. 2008, Figure figure interaction between bodies having arbitrary shapes and mass distributions : a power series expansion approach, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 100, 319
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005, Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System, *Nature*, 435, 459
- Wang, L., Krishnaprasad, P. S., & Maddocks, J. H. 1991, Hamiltonian dynamics of a rigid body in a central gravitational field, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 50, 349
- Ward, W. R. 1975, Tidal friction and generalized Cassini's laws in the solar system, *AJ*, 80, 64
- Ward, W. R., & Canup, R. M. 2006, The Obliquity of Jupiter, *ApJL*, 640, L91
- Ward, W. R., & Hamilton, D. P. 2004, Tilting Saturn. I. Analytic Model, *AJ*, 128, 2501
- Wisdom, J. 1987, Rotational dynamics of irregularly shaped natural satellites, *AJ*, 94, 1350
- Wisdom, J., Peale, S. J., & Mignard, F. 1984, The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus*, 58, 137
- Wu, Y. 2005, Origin of Tidal Dissipation in Jupiter. II. The Value of Q, *ApJ*, 635, 688

Index

α constante de précession de la planète	42
β masse réduite	25
γ inclinaison du plan de diffusion	57
$\Gamma(x)$ fonction gamma d'Euler	30
Γ couple	24
Γ_{sec} couple séculaire	25
δ durée du basculement de la planète divisée par la période de précession du satellite (δ_t/T_{prec}) ..	19
δ^c durée de basculement limite divisée par la période de précession du satellite ($\delta_t^c/T_{\text{prec}}$)	20
δ_a migration en demi-grand axe	62
δ_ℓ produit de la constante de précession du satellite par la durée du basculement de la planète ($\eta\delta_t$)	15
δ_ℓ^c produit de la durée limite de basculement de la planète par la constante de précession orbitale du satellite ($\eta\delta_t^c$)	20
δ_t durée du basculement de la planète	11
δ_t^c durée du basculement de la planète telle que $i_{\text{Sat}} = 2x_0$	16
Δ_b distance lissée	35
Δ'_b intermédiaire de calcul	36
Δ_r sphère d'influence	60
Δt déphasage temporel de marée	24
Δt_{impq} déphasage temporel de marée	23
$\Delta_{X'}$ largeur des îles de résonance	46
ϵ obliquité	42
ϵ_{impq} déphasage angulaire de marée	23
\hat{e} vitesse de basculement	12
\hat{e}_g vitesse de basculement gaussienne	18
\hat{e}_n vitesse de basculement sinusoïdale	18
\hat{e}_t vitesse de basculement triangulaire	18
ζ orientation de l'orbite ($\zeta = p + iq = \sin \frac{i}{2} e^{i\Omega}$)	33
ζ^* orientation de l'orbite dans un repère qui diagonalise \mathcal{M}	40
ζ_ν vecteur propre de Φ	35
η constante de précession orbitale du satellite	11
θ coordonnée polaire dans (r, θ) et (v, θ) . Dans le cas d'une orbite circulaire, θ correspond aussi à l'anomalie moyenne	25, 28, 57

$\hat{\theta}$ différence de longitude moyenne entre un élément du disque et la planète ($\theta' - \theta$)	28
Θ temps sidéral	23
Θ^* temps sidéral retardé	23
κ effet relatif du disque	31
κ_m effet relatif du disque maximal	31
λ longitude de \mathbf{R}	22
Λ_k moment cinétique orbital de la particule k ($\beta_k \sqrt{\mu_k a_k}$)	33
μ quantité définie pour une particule de masse élémentaire qui vaut $\mathcal{G}m_0$	33
μ_k quantité définie pour un corps k ($\mathcal{G}(m_0 + m_k)$)	33
μ_s quantité définie pour le satellite ($\mathcal{G}(m_0 + m_s)$)	25
ν fréquence de précession orbitale et valeur propre de Φ	35
ν_{lmpq}^* angle dans le potentiel de marée	23
ρ rapport de deux demi-grands axes (a_i/a_j)	28
ρ_b longueur de lissage normalisée (b/a_j)	37
ρ_m rapport de masses (m_2/m_1)	58
σ densité surfacique du disque	27
$\hat{\sigma}$ densité linéique du disque ($2\pi x\sigma(x)$)	33
τ temps caractéristique	18, 61
τ_e temps caractéristique d'amortissement de l'excentricité	62
τ_i temps caractéristique d'amortissement de l'inclinaison	62
φ angle de diffusion de Rutherford	57
φ_k phase des précessions orbitales	43
ϕ latitude de \mathbf{R}	22
ϕ_α angle de précession (ψ)	65
ϕ_ν longitude du nœud ascendant (Ω)	65
ϕ_k variable conjuguée de J_k	46
Φ opérateur intégral	35
χ angle définissant l'orientation du plan de diffusion	57
ψ angle de précession, variable conjuguée de $X = \text{Arccose}$	42
ω vitesse de rotation de la planète	28
ω_{lmpq}^* pulsation dans le calcul de l'effet de marée	24
ω_s^* argument du périhélie du satellite responsable de l'effet de marée	22
$\boldsymbol{\omega}$ vecteur vitesse de rotation de la planète	24
Ω_k longitude du corps k composant le disque	33
Ω_s^* longitude du satellite responsable de l'effet de marée	22
$\boldsymbol{\Omega}_{(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}$ vitesse de basculement de la planète	12
a_k demi-grand axe du corps k	33
a_s demi-grand axe du satellite	12
a_s^* demi-grand axe du satellite responsable de l'effet de marée	22
A moment d'inertie de la planète	27

A_k amplitude des précessions orbitales	43
\mathcal{A} fonction de $p \sin(i/2) \cos \Omega$ et $q = \sin(i/2) \sin \Omega$	43
b paramètre d'impact	58
$b_s^{(k)}(\rho)$ coefficient de Laplace	28
B moment d'inertie de la planète	27
$B_{3/2}^{(0)}(\rho)$ primitive de $b_{3/2}^{(0)}(\rho)$	29
B_n normalisation des basculements sinusoidaux	18
\mathcal{B} fonction de $p = \sin(i/2) \cos \Omega$ et $q = \sin(i/2) \sin \Omega$	43
c paramètre ($C\beta^3\mu^2/L^4$)	25
C moment d'inertie de la planète	25
\mathcal{C} fonction de $p = \sin(i/2) \cos \Omega$ et $q = \sin(i/2) \sin \Omega$	43
$C_3(\rho)$ fonction dans le hamiltonien séculaire reliée au potentiel de Newton	33
$C'_3(\rho)$ fonction dans le hamiltonien séculaire reliée au potentiel de Plummer	37
D discriminant	37
\mathcal{D} matrice diagonale	40
e_s excentricité du satellite	12
e_s^* excentricité du satellite responsable de la marée	22
$f(x)$ fonction quelconque	53
$f_x(x)$ fonction quelconque	34
$F(s, s+k, k+1, \rho^2)$ fonction hypergéométrique de Gauss	30
F_{lmp} fonction intervenant dans le potentiel de marée	23
G fonction génératrice	44
G_{lpq} fonction intervenant dans le potentiel de marée	23
\mathcal{G} constante de gravitation	22
$h(\epsilon, i_s)$ fonction de l'obliquité et de l'inclinaison orbitale de la planète ($\tan \epsilon \tan i_s$)	52
\mathcal{H} hamiltonien	13
i_k inclinaison du corps k appartenant au disque	33
i_{Ob} inclinaison d'Obéron	14
i_s inclinaison du satellite	14
i'_s inclinaison finale du satellite	15
i_s^* inclinaison du satellite responsable de la marée	22
i_{Sat} inclinaison de l'un quelconque des satellites d'Uranus	15
\mathbf{i} vecteur de la base fixe \mathcal{R}	11
I invariant adiabatique	17
Id matrice identité	25
I_k dispersion en inclinaison du ruban k	48
\mathbf{I} vecteur de la base mobile \mathcal{R}'	12
\mathbf{j} vecteur de la base fixe \mathcal{R}	11
J angle entre \mathbf{w} et l'axe de la planète	12

J_2 moment quadrupolaire de la planète	12
J_k variables conjuguées à ϕ_k	46
\mathbf{J} vecteur de la base mobile \mathcal{R}'	11
k_l nombre de Love	23
\mathbf{k} vecteur de la base fixe \mathcal{R}	11
\mathbf{K} vecteur de la base mobile \mathcal{R}'	12
ℓ tel que $d\ell = \eta z dt$ ou $d\ell = \alpha dt$	15, 51
L_3 troisième coordonnée de \mathbf{L}	34
\mathbf{L} moment cinétique total	25
\mathbf{L}_n moment cinétique orbital	25
\mathbf{L}_ω moment cinétique de la planète	25
m masse de la planète	22
m_0 masse du soleil	31
m_d masse du disque	28
m_s masse du satellite	24
m_s^* masse du satellite perturbateur	22
M_s anomalie moyenne du satellite perturbé	25
M_s^* anomalie moyenne du satellite perturbateur	22
\mathcal{M} matrice de Φ	35
n_τ durée du basculement gaussien en nombre de temps caractéristique (δ_t/τ)	18
n_s moyen mouvement du satellite	12
\mathbf{n} pôle de l'orbite	11
\mathcal{N} matrice dans calcul du disque	28
N_{ij} éléments de \mathcal{N}	29
\mathbf{N}_k pôle du ruban k	47
P matrice de passage	40
P_0 période à obliquité nulle	51
P_l polynome de Legendre	22
P_{lm} polynome associé de Legendre	23
$\text{Pr}\{ \}$ probabilité	15
Q facteur de qualité	21
Q_{lmpq} facteur de qualité	24
Q_n polynome apparaissant dans l'expression de $ Z_n(\delta_t) $	19
r coordonnée polaire ou demi-grand axe dans le cas d'une orbite circulaire	25, 28
r_b paramètre de lissage	36
r_d distance de la rencontre proche	56
r_k bord interne de l'anneau k	39
r_{k+1} bord externe de l'anneau k	39
r_m distance minimale d'approche	59
\mathbf{r} position de la planète	27

\mathbf{r}' position d'un élément du disque	27
\mathbf{r}_G position du barycentre	56
\mathbf{r}_s position du satellite perturbé	24
\mathbf{r}_s^* position du satellite perturbateur	22
R rayon de la planète	12
R_1 rayon interne du disque	27
R_2 rayon externe du disque	27
\mathcal{R} repère fixe ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$)	11
\mathcal{R}' repère mobile ($\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$)	12
$\mathcal{R}_1(\theta)$ matrice de rotation autour du 1 ^{er} axe	58
$\mathcal{R}_3(\theta)$ matrice de rotation autour du 3 ^{ème} axe	58
\mathbf{R} point de la surface de la planète	22
S angle entre \mathbf{R} et \mathbf{r}_s^*	22
\mathcal{S} surface du disque	27
t temps	11
T_{prec} période de précession orbitale du satellite	19
U potentiel gravitationnel	22
U_0 potentiel gravitationnel	22
U_{ij} potentiel gravitationnel	35
v_k module de la vitesse \mathbf{v}_k	57
v_m vitesse à la distance minimale d'approche	59
\mathbf{v} vitesse relative	57
\mathbf{v}' vitesse finale	58
\mathbf{v}_G vitesse du barycentre	56
\mathbf{v}_k vitesse du corps k	56
\mathbf{w} axe de la planète	11
W potentiel gravitationnel	22
W_l potentiel gravitationnel	22
x coordonnée cartésienne	13
x_0 vitesse de basculement de la planète divisée par la constante de précession orbitale du satellite ($x_0 = \dot{\epsilon}/\eta = T_{\text{prec}}/(4\delta_t)$)	13
X coordonnées de l'axe de la planète ($\cos \epsilon$), variable conjuguée de ψ	42
y coordonnée cartésienne	13
Y vecteur des ζ_k	39
Y^* vecteur des ζ_k^* dans le repère qui diagonalise \mathcal{M}	40
Y_0 conditions initiales	40
z coordonnée cartésienne	13
Z affixe de la projection de \mathbf{n} sur le plan équatorial ($x + iy$)	17
Z_g solution du basculement gaussien	18
Z_n solution du basculement sinusoïdal	18
Z_t solution du basculement triangulaire	18