

OBSERVATOIRE DE PARIS

**ÉCOLE DOCTORALE
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE
D'ILE-DE-FRANCE**

**Doctorat
ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE**

Dynamique des Systèmes Gravitationnels

Josselin DESMARS

**PRÉCISION D'EXTRAPOLATION DES ÉPHÉMÉRIDES
DES OBJETS DU SYSTÈME SOLAIRE**

Application aux satellites de Saturne

Thèse dirigée par Jean-Eudes Arlot et Alain Vienne

Soutenue le 26 juin 2009 devant un jury composé de :

Jean-Eudes ARLOT (IMCCE - Obs. de Paris)	Directeur de thèse
Françoise GENOVA (CDS - Obs. de Strasbourg)	Examinatrice
Giovanni GRONCHI (Université de Pise)	Rapporteur
François MIGNARD (OCA - Obs. de la Côte d'Azur)	Président du jury
Jean-Michel POGGI (Université Paris Sud)	Examineur
Pascal ROSENBLATT (Obs. Royal de Belgique)	Rapporteur
Alain VIENNE (IMCCE - Université de Lille)	Directeur de thèse

à Lolo et à Padre,

Remerciements

Cette page est l'occasion pour moi de remercier des personnes qui, directement ou indirectement, ont contribué à rendre ce travail possible. Des personnes que l'on croise parfois tous les jours mais que l'on a peu souvent l'occasion de remercier.

Mes premiers remerciements vont donc tout naturellement à mes deux directeurs Alain Vienne et Jean-Eudes Arlot qui m'ont proposé ce sujet et encadré pendant cette thèse. Ils ont su se rendre disponibles et m'encourager tout au long de ces années. J'aimerais spécialement remercier Valéry Lainey pour ses précieux conseils et discussions, et Sylvain Arlot pour ses explications et son expertise mathématique.

Je tiens également à remercier Giovanni Gronchi et Pascal Rosenblatt d'avoir accepté de juger ce travail ainsi que Françoise Génova, François Mignard et Jean-Michel Poggi d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes collègues et camarades de l'IMCCE. Je pense notamment aux étudiants et assimilés (Laurène, Lucie, David, Julien, Pierre, Alrick et Yohann) pour leur bonne humeur et leur convivialité. Merci aussi à Gwénaél pour son aide. Je tiens à remercier aussi les spécialistes de l'informatique (anciens et nouveaux), Julien, Alain et Stéphane qui m'ont parfois sauvé de quelques situations informatiques périlleuses. Enfin, je remercie tout le personnel de l'IMCCE que je n'ai pas déjà cité, avec lequel j'ai pris un réel plaisir à travailler.

J'ai également une pensée pour tous mes anciens camarades du Master : Ariane, Arielle, Christophe, Clément, Gwénaél, Julie, Jordi, Kévin, Magali et Virginie.

Je voudrais également remercier cette personne anonyme qui, par un soir d'octobre 2004 m'a malencontreusement et bien involontairement cassé le coude. C'est suite à cet épisode que je me suis engagé dans cette voie. Je lui dois finalement beaucoup de choses et au moins ma reconnaissance.

Enfin, je ne peux oublier de remercier mes amis, ma famille et tout particulièrement Fanny. À leur manière, par leur soutien et leur encouragement, ils m'ont permis de mener à bien ce travail.

Résumé

La précision globale des éphémérides est déterminée à la fois par la précision du modèle dynamique (précision interne) et par la qualité (précision et distribution) des observations utilisées pour l'ajustement du modèle (précision externe). La précision interne est bien estimée et de bonne qualité. En revanche, la précision externe est mal connue et tend à dégrader la qualité globale de l'éphéméride.

L'un des moyens d'estimer la précision d'une éphéméride est la comparaison aux observations (O-C) qui n'est toutefois valable que pendant une période d'observations. En dehors de ces périodes, l'estimation de la précision reste difficile.

L'objectif de ce travail est donc de mettre en lumière des méthodes statistiques qui permettent d'estimer la précision d'une éphéméride au cours du temps. Notre étude porte en particulier sur deux des huit satellites principaux de Saturne mais le cas d'un astéroïde est également étudié. Nous montrons que l'une des méthodes, le *bootstrap*, possède une implémentation simple et permet cette estimation en utilisant des hypothèses minimales sur la distribution des erreurs d'observations.

La détermination de cette précision permet de mieux appréhender la manière d'utiliser les observations pour ajuster des théories. L'impact de la mission Gaia sur la précision des éphémérides peut également être mesurée.

Un catalogue d'observations des satellites de Saturne, dont l'utilisation ne s'est pas limitée à l'ajustement du modèle, a été compilé. La longue période couverte par cette base de données autorise ainsi une mesure des forces de marées de Saturne, à travers la détection de l'accélération séculaire de la longitude moyenne de certains satellites.

Mots-clés : Astrométrie, Ephémérides, Observations, Satellites de Saturne, méthodes statistiques.

Abstract

Accuracy of predicted positions of solar system objects *Application to Saturnian satellites*

The accuracy of the predicted orbital positions depends on the quality of the theoretical model (internal error) and of the observations used to fit the model (external error). The internal error is often well known and generally good. However, the external error is generally unknown and is the main cause of the global error.

The accuracy of an ephemeris can be estimated by comparison with observations (O-C) but just during the observational period. Outside the observational period, particularly in the future, the estimation of the accuracy remains difficult.

The main purpose is to highlight statistical methods in order to estimate the accuracy of an ephemeris at any time. We deal particularly with two of the eight major Saturnian satellites but the case of an asteroid is also studied. We show that one of the methods, the *bootstrap resampling*, is easy to implement and allows this estimation with minimal assumptions on the distribution of observation errors.

The determination of this accuracy helps to better understand how to use observations to fit models. Thus, the impact of Gaia mission on ephemerides can also be measured.

Among the tools used for this study, a catalogue of observations of Saturnian satellites has been compiled not only to fit model. The large period covered by this database allows the detection of secular acceleration of the mean longitude of some satellites caused by tidal forces. The measure of this acceleration can be related to the value of these tidal forces.

Key words : Astrometry, Ephemerides, Observations, Saturn satellites, statistical methods.

Table des matières

Introduction	8
I Les éphémérides	12
1 Le système de Saturne	14
1.1 Saturne ♄	14
1.2 Les anneaux	15
1.3 Les satellites principaux	15
1.4 Les satellites proches	16
1.5 Les satellites coorbitaux des satellites principaux	17
1.6 Les satellites lointains	18
1.7 Les autres satellites	20
2 Les modèles dynamiques	22
2.1 Introduction et historique	22
2.2 TASS	23
2.2.1 Caractéristiques du modèle	23
2.2.2 La construction du modèle	23
2.3 L'intégrateur numérique	24
2.3.1 Principe de l'intégrateur	24
2.3.2 Ajustement à TASS	25
2.4 Comparaison des deux modèles	27
3 Les observations : le catalogue COSS08	28
3.1 Introduction	28
3.2 Les observations	29
3.2.1 Les observations de Strugnell et Taylor	30
3.2.2 Les observations de Harper et Taylor	30
3.2.3 Les observations du NSDC	31
3.2.4 Les observations récentes	32
3.2.5 Les instruments et catalogues d'objets	33
3.2.6 Les différents types de coordonnées	37
3.3 Le catalogue	38
3.3.1 Format du catalogue	38
3.3.2 Distribution des observations	41
3.3.3 Statistiques des observations	42

4	L'ajustement aux observations	46
4.1	Corrections pour l'ajustement aux observations	46
4.1.1	Passage dans les coordonnées de l'observation	47
4.1.2	Échelle de temps	47
4.1.3	Temps lumière	47
4.1.4	Correction de l'aberration	49
4.1.5	Correction de la réfraction	50
4.1.6	Correction de la phase	51
4.2	Équations aux variations et ajustement	54
4.2.1	Équations aux variations	55
4.2.2	Méthode des moindres carrés	56
4.2.3	Principe général de l'ajustement	57
5	Détection d'accélération dans le mouvement des satellites	60
5.1	Introduction	60
5.2	Estimation du signal	62
5.3	Ajustement aux observations	62
5.4	Conclusion	64
II	Propagation des erreurs dans les éphémérides	66
6	Le problème des erreurs pour les éphémérides	68
6.1	Les différents types d'erreurs des éphémérides	68
6.1.1	La précision interne	68
6.1.2	La précision externe	68
6.1.3	La précision de représentation	69
6.2	Le cas des astéroïdes	69
6.2.1	Détermination d'une orbite	70
6.2.2	Les régions de possibles mouvements	70
7	Méthodes d'estimation de la précision	74
7.1	Méthode de Monte-Carlo à partir de la matrice de covariance (MCCM)	74
7.2	Méthode de Monte-Carlo appliquée aux observations (MCO)	76
7.3	Le rééchantillonnage d'observations : le Bootstrap	77
7.4	Quid des autres méthodes de rééchantillonnage	78
8	Validation des méthodes	80
8.1	Observations simulées	80
8.1.1	Simulation d'observations	81
8.1.2	Mesure pour la comparaison des orbites	81
8.1.3	Mesure de la région de possibles mouvements	82
8.2	Comparaison des méthodes	85
8.2.1	Comparaison simulations-MCCM	85
8.2.2	Comparaison simulations-MCO	87
8.2.3	Comparaison simulations-bootstrap	88
8.2.4	Conclusion	91
8.3	Nombre d'échantillons nécessaires	92
8.4	Discussion sur le bootstrap par blocs	94
8.5	Résultats avec l'intégrateur numérique	97
8.6	Conclusion	97

III Applications	102
9 Application aux éphémérides des satellites de Saturne	104
9.1 Comparaison après ajustement sur deux périodes	104
9.2 Comparaison avec les résidus d'observations	108
9.2.1 Sur une période ancienne : 1874-1900	108
9.2.2 Sur une période récente : 1980-2007	108
9.3 Estimation de la précision des éphémérides obtenues avec TASS	111
10 Application aux observations attendues de la mission spatiale Gaia	116
10.1 Présentation de la mission Gaia	116
10.1.1 Introduction	116
10.1.2 Les performances de Gaia	117
10.1.3 Les instruments de Gaia	117
10.1.4 L'orbite et la rotation du satellite	119
10.2 Gaia et les satellites naturels des planètes	121
10.2.1 Introduction	121
10.2.2 Les satellites naturels observables par Gaia	121
10.3 Apport de la mission Gaia à la précision des éphémérides	124
10.3.1 Les observations Gaia	124
10.3.2 Le catalogue Gaia	124
10.3.3 Apport des observations et du catalogue Gaia	125
11 Application à l'astéroïde (4179) Toutatis	128
11.1 Présentation de (4179) Toutatis	128
11.2 Modèle dynamique et observations	130
11.2.1 Modèle dynamique	130
11.2.2 Observations	130
11.3 Précision des éphémérides de Toutatis	131
11.3.1 Précision en distance	131
11.3.2 Précision d'une rencontre proche	136
11.4 Conclusion	137
Conclusion et Perspectives	140
Annexes	145
A Changement de coordonnées et équations aux variations	146
A.1 Le changement de coordonnées et équations aux variations	146
A.1.1 Changement de repère	147
A.1.2 Le changement de coordonnées et équations aux variations	147
A.1.3 Les transformations de coordonnées	148
A.2 Premier cas particulier : observation d'une seule coordonnée de type 3 (s, p)	149
A.2.1 Changement de repère	149
A.2.2 Équations aux variations pour les coordonnées p, s	151
A.3 Second cas particulier : observation d'une seule coordonnée de type 1 ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$) ou 2 ($\Delta\alpha, \Delta\delta$)	152
A.4 Troisième cas particulier : observation d'une seule coordonnée de type 0 (α, δ)	152

B Propriétés du bootstrap	154
B.1 Propriété de probabilité	154
B.2 Propriété de combinatoire	155
Notations	158
Bibliographie	160

Introduction

Éphémérides : N.f. *Tables astronomiques donnant pour chaque jour de l'année la position des astres.*

Derrière cette définition se cache un pan entier de l'astronomie et de son histoire. En effet, faire des éphémérides, c'est connaître à l'avance la position des astres. En tournant son regard vers le ciel, l'homme a pu observer qu'un certain nombre d'objets ne restent pas fixes comme les étoiles. Ces astres errants, les planètes ⁽¹⁾, ont longtemps servi de fil conducteur aux découvertes astronomiques.

Observant une certaine régularité dans leur mouvement, les savants ont cherché à comprendre leur déplacement. Les premières explications du mouvement des planètes sont dues aux savants grecs (Ptolémée, Hipparque) qui introduisent l'épicycle pour expliquer notamment la rétrogradation des planètes sur la sphère céleste. Ce système, basé sur la théorie géocentrique, s'est affiné avec le temps en composant des épicycles entre elles à mesure que l'on gagnait en précision. Les épicycles de plus en plus complexes permettaient de prédire la position des planètes, c'est pourquoi ce système a perduré jusqu'à la révolution copernicienne. Au XVI^e siècle, Copernic défend la thèse que les planètes se déplacent sur des orbites circulaires non pas autour de la Terre mais autour du Soleil. Ce nouveau système permet d'expliquer alors les rétrogradations mais reste encore imprécis pour prédire les positions futures. En s'appuyant sur les observations de Tycho Brahé, Képler découvre que les planètes ne décrivent pas des cercles mais des ellipses autour du Soleil. Par la suite, il découvre deux autres lois mathématiques qui régissent le mouvement des planètes. Jusque là, seules des théories cinématiques expliquent le mouvement des planètes. Grâce aux lois de Képler, Isaac Newton découvre ensuite la loi d'attraction universelle qui expliquent la trajectoire des planètes. L'avènement de la mécanique céleste arrive avec les travaux de Laplace qui conjugue mécanique et gravitation pour établir des théories dynamiques du mouvement des planètes. La découverte de la planète Neptune par le calcul, en étudiant les perturbations de l'orbite d'Uranus, consacre enfin la mécanique céleste.

La découverte des satellites naturels a également contribué à l'essor de l'astronomie. Ainsi les quatre satellites principaux de Jupiter (Io, Europe, Ganymède et Callisto) découverts par Galilée en 1610 ont apporté un contre exemple au système géocentrique, venant renforcer le système héliocentrique encore naissant. En 1676, l'astronome danois Rømer (ou Roëmer) observe un décalage entre la prévision et l'observation effective des éclipses des satellites galiléens suivant la période de l'année. Il explique ce décalage par la finitude de la vitesse de la lumière et en calcule une première valeur. Ensuite la découverte et l'observation d'autres satellites notamment autour de Saturne et la modélisation de leur mouvement permettent d'importants développements de la mécanique céleste.

Compte tenu de la précision des observations de l'époque, les théories du mouvement semblaient pleinement définir et prévoir le mouvement des objets du système solaire. Pourtant à mesure du développement de l'astrométrie et de l'amélioration de la précision des observations, on s'aperçut que la théorie ne s'ajustait pas aux observations. Les modèles dynamiques doivent être améliorés en conséquence en étant ajustés aux observations. Aujourd'hui encore, l'étude du mouvement des corps du système solaire présente de nombreux enjeux : d'une part d'un point de vue astrométrique, dans le but de faire des observations de plus en plus précises et d'autre part dynamique, en prenant en compte dans les modèles des perturbations jusque là négligées mais mesurables grâce à l'astrométrie de haute précision. Une meilleure connaissance de la structure interne des satellites est désormais accessible

¹Le terme planète vient du grec *planêtês* signifiant « errants ».

grâce à la détection d'une accélération séculaire de leur moyen mouvement. Cette détection est, elle-même rendu possible grâce aux observations de plus en plus précises.

Pour en revenir à la définition même des éphémérides, c'est-à-dire fournir la position d'un astre à un instant donnée, et à leur élaboration, il faut disposer d'un modèle dynamique représentant le mouvement de l'objet étudié. Concrètement, le modèle dynamique dépend d'un certain nombre de paramètres (qui sont en général les masses des objets ainsi que leurs conditions initiales à un instant donné). Ces paramètres peuvent être optimisés de manière à ce que les positions données par le modèle soient le plus proche possible des observations. C'est ce qu'on appelle l'ajustement. Le modèle ainsi ajusté permet de calculer pour une date quelconque la position de l'objet c'est-à-dire donner son éphéméride. La précision de cette éphéméride dépendra donc de la qualité du modèle mais également des observations qui ont permis de l'ajuster.

La précision ⁽²⁾ d'une éphéméride peut être estimée en comparant la position donnée par le modèle dynamique et celle donnée par l'observation (appelée O-C ou résidu). Actuellement, les meilleurs modèles dynamiques de satellites naturels donnent des résidus d'environ 0.02" (soit environ 60 km à la distance de Jupiter et 120 km à la distance de Saturne). Cette comparaison est seulement valable lorsqu'on dispose d'observations. En dehors des périodes d'observations, notamment dans le futur, la qualité d'une éphéméride reste difficilement estimable. Connaître cette précision dans le futur peut présenter des intérêts multiples. Par exemple pour l'envoi de sondes planétaires puisque que connaître la position et la précision de cette position à l'instant où la sonde atteindra l'objet peut permettre de réduire les manœuvres de correction de trajectoire et donc la consommation d'énergie de la sonde. Un autre exemple est de savoir si des observations d'excellente qualité suffisent à améliorer la qualité d'une éphéméride, et par exemple de savoir ce qu'on peut attendre d'une campagne d'observations comme des phénomènes mutuels, en terme de gain de précision sur l'éphéméride de satellites planétaires. Enfin, connaître la précision d'une éphéméride dans le futur peut servir pour retrouver un astéroïde après une longue période sans observations.

L'objectif de cette thèse est d'étudier des méthodes permettant d'estimer l'évolution de la précision d'une éphéméride au cours du temps. Nous concentrerons notre étude sur deux des satellites de Saturne à savoir Mimas et Titan, qui présentent des caractéristiques dynamiques suffisamment différentes pour valider nos méthodes.

Nous détaillerons dans la première partie la manière de faire des éphémérides. Nous présenterons d'abord les deux modèles dynamiques utilisés et les observations des satellites de Saturne. Nous avons en effet compilé environ 130 000 observations de ces satellites entre 1874 et 2007. Nous verrons qu'une telle base de données permet non seulement d'ajuster un modèle mais aussi de déterminer certains paramètres gravitationnels. Nous rappellerons également comment s'effectue l'ajustement du modèle sur des observations.

Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons spécifiquement à la précision des éphémérides. Dans un premier temps, nous ferons un tour d'horizon sur ce qui a déjà été réalisé, notamment pour les astéroïdes. Dans un second temps, nous présenterons en détail, puis nous comparerons différentes méthodes permettant d'estimer la précision des

²Dans le langage courant, les termes précision et exactitude sont généralement synonymes. Pourtant pour exprimer la qualité d'une mesure, il convient de distinguer ces deux termes. L'exactitude renseigne sur l'écart entre la mesure et la réalité alors que la précision renseignera uniquement sur la qualité d'une série de mesures. Ainsi, il est possible d'avoir une mesure précise mais inexacte ou une mesure exacte mais imprécise. Notre objectif est d'avoir une éphéméride précise et exacte, c'est-à-dire pas trop éloignée de la réalité. Pour éviter les lourdeurs, le terme *précision* sera à comprendre comme précision par rapport à la réalité (c'est-à-dire à la fois précision et exactitude).

éphémérides. Nous mettrons en évidence la préférence pour l'une de ces méthodes, le *bootstrap*, pour sa robustesse et son implémentation relativement simple.

Enfin, dans la troisième partie, nous appliquerons la méthode d'estimation de la précision des éphémérides à plusieurs cas concrets. Nous estimerons ainsi la précision des éphémérides des satellites de Saturne entre 1750 et 2150. Enfin, nous présenterons deux exemples d'application directe de cette méthode d'estimation. Nous verrons ainsi quel peut être l'apport de la mission Gaia (qui fournira des observations astrométriques d'une précision inégalée entre 0.1 et 1 mas) pour les éphémérides des satellites naturels et enfin, nous étudierons le cas de l'astéroïde Toutatis en estimant la précision de son éphéméride au cours du temps mais également la précision des rencontres proches avec la Terre afin d'apprécier le risque de collisions.

Première partie
Les éphémérides

Chapitre 1

Le système de Saturne

Sommaire

1.1	Saturne ♄	14
1.2	Les anneaux	15
1.3	Les satellites principaux	15
1.4	Les satellites proches	16
1.5	Les satellites coorbitaux des satellites principaux	17
1.6	Les satellites lointains	18
1.7	Les autres satellites	20

1.1 Saturne ♄

Connue et observée depuis l'Antiquité, la planète Saturne est la deuxième planète du système solaire par sa masse et sa taille. La planète doit son nom au dieu romain de l'Agriculture et du Temps. Saturne est une planète géante gazeuse d'un diamètre de 116 464 km (Jacobson *et al.*, 2006, [37]). Son atmosphère est essentiellement composée d'hydrogène ainsi que d'hélium et de méthane. Sa densité est la plus faible de celles des planètes gazeuses (0.7) et sa rotation est rapide (10h39m). Le tableau 1.1 rappelle les principales propriétés physiques et gravitationnelles de Saturne.

Tab. 1.1: Propriétés physiques et gravitationnelles de Saturne

caractéristique	valeur	référence
Masse (M_{\odot})	2.85886×10^{-4}	Jacobson <i>et al.</i> (2006, [37])
Demi-grand axe (UA)	9.554 909 1915	Simon <i>et al.</i> (1994, [68])
Excentricité	0.055 548 1426	Simon <i>et al.</i> (1994, [68])
Inclinaison ($^{\circ}$)	2.488 878 78	Simon <i>et al.</i> (1994, [68])
Rayon équatorial (km)	60 268	Seidemann <i>et al.</i> (2006, [66])
Rayon polaire (km)	54 364	Seidemann <i>et al.</i> (2006, [66])
J_2 ($\times 10^6$)	16290.71	Jacobson <i>et al.</i> (2006, [37])
J_4 ($\times 10^6$)	-935.83	Jacobson <i>et al.</i> (2006, [37])
J_6 ($\times 10^6$)	86.14	Jacobson <i>et al.</i> (2006, [37])

1.2 Les anneaux

La particularité de Saturne reste son spectaculaire système d'anneaux. Ces anneaux ont été observés une première fois par Galilée en 1610 mais le manque de résolution de son instrument ne lui permit pas de comprendre la véritable structure de ce qui l'appelait ces « anses ». C'est Christiaan Huygens qui, utilisant un instrument plus puissant, comprit que Saturne est entourée d'un anneau. En 1659, il publia ses résultats et expliqua la disparition régulière et temporaire des anneaux lorsque la Terre passe dans le plan des anneaux.

L'amélioration des instruments puis le survol des sondes Pioneer 11, Voyager 1 & 2, ainsi que l'arrivée de la sonde Cassini depuis 2004 ont permis de montrer la structure riche et complexe des anneaux. Aujourd'hui, on distingue 9 anneaux, les 7 plus importants étant notés de A à G. Les deux derniers, découverts récemment grâce à la sonde Cassini sont désignés provisoirement R/2004S1 et R/2004S2.

Tab. 1.2: Dimensions du système d'anneaux de Saturne

nom	distance à Saturne (km)
Anneau D	66 900 - 74 510
Anneau C	74 658 - 92 000
Division de Maxwell	87 500
Anneau B	92 000 - 117 580
Division de Cassini	117 580 - 122 170
Anneau A	122 170 - 136 775
Division d'Encke	133 589
Division de Keeler	136 530
R/2004S1	137 630
R/2004S2	138 900
Anneau F	140 180
Anneau G	170 000 - 175 000
Anneau E	181 000 - 483 000

Depuis l'arrivée de la sonde Cassini dans le voisinage de Saturne, le nombre de satellites découverts ne cesse d'augmenter. On en dénombre aujourd'hui 60 dont 53 ont reçu un nom. La plupart de ces satellites sont des petits morceaux de roches dont la taille est inférieure à une dizaine de kilomètres. On distingue quatre types de satellites : les satellites principaux, les satellites proches, les satellites coorbitaux des principaux et les satellites éloignés.

1.3 Les satellites principaux

Les satellites principaux de Saturne sont Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypérion et Japet. Ils doivent leur qualificatif « principaux » au fait qu'ils sont de taille importante (entre 133 et 2575 km de rayon) et qu'ils sont généralement traités ensemble dans les théories dynamiques. Le premier satellite saturnien, Titan, fut découvert en 1655 par Huygens. Puis Cassini découvrit Japet en 1671, Rhéa en 1672 et enfin Téthys et Dioné en 1684. Herschel découvrit Mimas et Encelade un siècle plus tard en 1789. Enfin, Hypérion fut découvert en 1848 par Bond et Lassell.

Ces satellites ont une magnitude comprise entre 8.3 pour Titan et 14.2 pour Hypérion. Ils sont donc observés depuis de nombreuses années (voir Chapitre 3) et leur mouvement est bien modélisé (voir Chapitre 2).

Tab. 1.3: Données sur les satellites principaux de Saturne.

numéro	satellites	découverte	a (km)	rayon (km)	masse (M_{\oplus})
I	Mimas	1789	185 600	198.2 ± 0.5	$6.597 \cdot 10^{-8}$
II	Encelade	1789	238 100	252.1 ± 0.2	$1.901 \cdot 10^{-7}$
III	Téthys	1684	294 700	533.0 ± 1.4	$1.086 \cdot 10^{-6}$
IV	Dione	1684	377 400	561.7 ± 0.9	$1.928 \cdot 10^{-6}$
V	Rhea	1672	527 100	764.3 ± 1.8	$4.058 \cdot 10^{-6}$
VI	Titan	1655	1 221 900	2575.5 ± 2.0	$2.367 \cdot 10^{-4}$
VII	Hypériorion	1848	1 464 100	133.0 ± 8.0	$9.826 \cdot 10^{-8}$
VIII	Japet	1671	3 560 800	735.6 ± 3.0	$3.177 \cdot 10^{-6}$

Note : Les valeurs des rayons proviennent de Seidelmann *et al.* (2006, [66]) et celles des masses de Jacobson *et al.* (2006, [37]).

1.4 Les satellites proches

Les satellites proches sont les satellites qui circulent à l'intérieur de l'orbite de Mimas. On en dénombre huit à savoir Pan, Daphnis, Atlas, Prométhée, Pandore, Épiméthée, Janus et Aegaeon⁽¹⁾. Ces satellites se déplacent à l'intérieur ou proches des anneaux. Leurs positionnements en font des objets difficilement observables. Janus a été observé la première fois en 1966 par Dollfus [13] lors du passage de la Terre dans le plan des anneaux⁽²⁾. Son orbite a longtemps été difficile à déterminer en raison de sa confusion avec Épiméthée lors des observations. La découverte fut officiellement validée par le passage de la sonde Voyager en 1980. À cette occasion, Prométhée, Pandore, Épiméthée et Pan furent découverts. Enfin, Daphnis et Aegaeon ont été découverts respectivement en 2005 et 2008 sur des images de la sonde Cassini. Ces satellites sont de petite taille (une centaine de km maximum) et sont en interaction avec les anneaux.

Tab. 1.4: Données sur les satellites proches de Saturne.

numéro	satellites	découverte	a (km)	rayon (km)
XVIII	Pan	1981	133 600	10 ± 3
XXXV	Daphnis	2005	136 500	7
XV	Atlas	1980	137 700	16 ± 4
XVI	Prométhée	1980	139 400	50.1 ± 3
	S/2004S4	2004	140 000	
	S/2004S6	2004	140 000	
	S/2004S3	2004	140 580	
XVII	Pandore	1980	141 700	41.9 ± 2
XI	Épiméthée	1980	151 400	59.5 ± 3
X	Janus	1980	151 500	88.8 ± 4
LIII	Aegaeon	2008	161 500	0.25

Note : Les valeurs des rayons (excepté Daphnis) sont issues de Seidelmann *et al.* (2006, [66]). Les autres valeurs sont de Sheppard (2008, [67]).

¹Trois autres "satellites", S/2004S3 S/2004S4 et S/2004S6, orbitant entre Prométhée et Pandore ont été découverts en 2004 mais leur existence n'est pas encore confirmée.

²Dans ce cas de figure, depuis la Terre, les anneaux sont vus par la tranche et deviennent quasiment invisibles, laissant apparaître les satellites orbitant à l'intérieur.

1.5 Les satellites coorbitaux des satellites principaux

Par définition, les satellites coorbitaux sont les satellites qui partagent l'orbite d'un corps plus massif C . Ces satellites sont également appelés lagrangiens car ils sont en équilibre autour de l'un des points de Lagrange de l'orbite de C . Ces points sont des points d'équilibre stable situés, dans un repère tournant à 60° en avant (pour L_4) et en arrière (pour L_5) de C .

Les satellites coorbitaux de Saturne sont Télésto et Calypso qui se situent respectivement aux points de Lagrange L_4 et L_5 de l'orbite de Téthys (Fig.1.1), et Hélène et Pollux (Polydeuces) qui se situent respectivement aux points de Lagrange L_4 et L_5 de l'orbite de Dioné (Fig.1.1). Ces satellites ont tous été découverts en 1980 grâce aux images de la sonde Voyager, excepté Pollux découvert sur des images de la sonde Cassini.

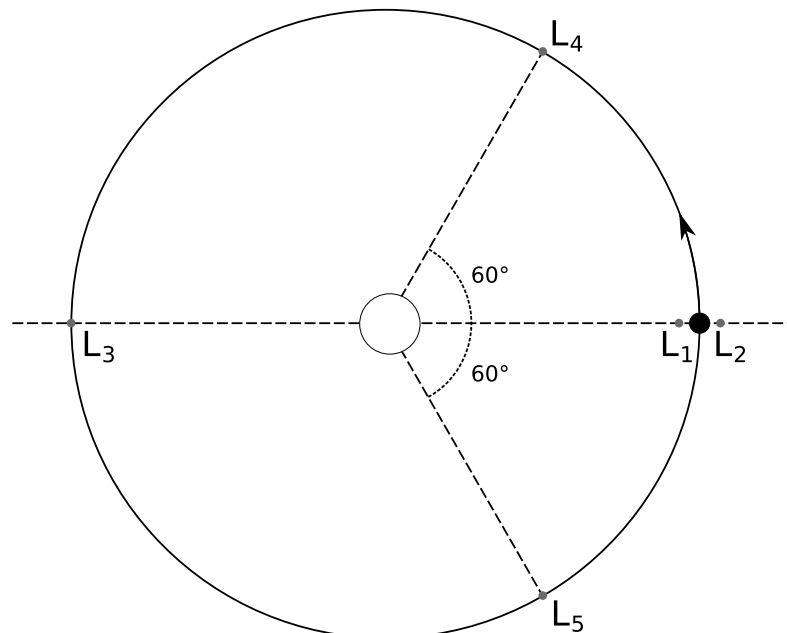


Fig. 1.1: Positions des différents points de Lagrange dans le repère tournant centré sur le corps central

Tab. 1.5: Données sur les satellites coorbitaux de Saturne.

numéro	satellites	découverte	a (km)	rayon (km)
XIII	Telesto	1980	294 700	11 ± 4
XIV	Calypso	1980	294 700	9.5 ± 4
XII	Helene	1980	377 400	16 ± 0.7
XXXIV	Polydeuces	2004	377 400	2

Note : Les valeurs des rayons (excepté Polydeuces) sont issues de Seidelmann *et al.* (2006, [66]). Les autres valeurs sont de Sheppard (2008, [67]).

1.6 Les satellites lointains

Les satellites lointains sont les satellites dont l'orbite se situe au delà de l'orbite de Japet. Le plus grand d'entre eux, Phœbé, a été découvert en 1898 par Pickering [58] et son orbite est rétrograde (son inclinaison étant d'environ 173°). Les autres satellites ont été découverts récemment grâce à la recherche systématique avec de l'imagerie à grand-champ. On compte actuellement 38 satellites lointains qui peuvent être regroupés en trois groupes :

- Les Nordiques (*norses* en anglais) sont les satellites ayant une orbite rétrograde (dont l'inclinaison est supérieure à 90°) comme Phœbé. Ils portent en général le nom de personnages de la mythologie nordique.
- Les Inuits sont les satellites dont l'inclinaison est comprise entre 40° et 50° . Leurs noms sont associés aux divinités inuites.
- Les Gaulois⁽³⁾ (*gallic* en anglais) sont les satellites dont l'inclinaison est inférieure à 40° .

Les Inuits et les Gaulois sont aussi appelés satellites directs (pour orbite dans le sens direct) par opposition aux satellites rétrogrades.

Huit autres satellites (S/2004S07, S/2004S12, S/2004S13, S/2004S17, S/2006S1, S/2006S3, S/2007S2, S/2007S3) n'ont pas encore reçu de nom. Tous ces corps ont une taille de quelques kilomètres. Leurs inclinaisons laissent penser qu'ils ont été capturés.

³On trouve aussi dans la littérature "Celts".

Tab. 1.6: Données sur les satellites lointains de Saturne.

numéro	satellites	découverte	a (km)	rayon (km)
XXIV	Kiviuq	2000	11 111 000	8
XXII	Ijiraq	2000	11 124 000	6
IX	Phoebe	1898	12 944 300	120
XX	Paaliaq	2000	15 200 000	11
XXVII	Skathi	2000	15 541 000	4
XXVI	Albiorix	2000	16 182 000	16
	S/2007S2	2007	16 560 000	3
XXXVII	Bebhionn	2004	17 119 000	3
XXVIII	Erriapo	2000	17 343 000	5
XXIX	Siarnaq	2000	17 531 000	20
XLVII	Skoll	2006	17 665 000	3
XXI	Tarvos	2000	17 983 000	7.5
LII	Tarqeq	2007	18 009 000	3.5
LI	Greip	2006	18 206 000	3
XLIV	Hyrrokkin	2004	18 437 000	4
	S/2004S13	2004	18 450 000	3
	S/2004S17	2004	18 600 000	2
XXV	Mundilfari	2000	18 685 000	3.5
L	Jarnsaxa	2006	18 811 000	3
	S/2006S1	2006	18 981 135	3
XXXI	Narvi	2003	19 007 000	3.5
XXXVIII	Bergelmir	2004	19 338 000	3
XXIII	Suttungr	2000	19 459 000	3.5
	S/2004S12	2004	19 650 000	2.5
	S/2004S07	2004	19 800 000	3
XLIII	Hati	2004	19 856 000	3
XXXIX	Bestla	2004	20 129 000	3.5
XL	Farbauti	2004	20 390 000	2.5
XXX	Thrymr	2000	20 474 000	3.5
	S/2007S3	2007	20 518 500	2.5
XXXVI	Aegir	2004	20 735 000	3
	S/2006S3	2006	21 132 000	3
XLV	Kari	2006	22 118 000	3.5
XLI	Fenrir	2004	22 453 000	2
XLVIII	Surtur	2006	22 707 000	3
XIX	Ymir	2000	23 040 000	9
XLVI	Loge	2006	23 065 000	3
XLII	Fornjot	2004	25 108 000	3

Note : Les valeurs sont issues de Sheppard (2008, [67]). Les dimensions sont déterminées par observations photométriques.

1.7 Les autres satellites

Trois autres satellites découverts récemment n'entrent dans aucune des catégories précédentes. Méthone, Anthée et Pallène se situent entre les orbites de Mimas et Encelade. Ce sont de très petits corps dont la taille n'excède pas quelques kilomètres.

Tab. 1.7: Données sur les autres satellites de Saturne.

numéro	satellites	découverte	a (km)	rayon (km)
XXXII	Methone	2004	194 000	1.5
XLIX	Anthe	2007	197 700	0.5
XXXIII	Pallene	2004	211 000	2

Note : Les valeurs sont issues du site de la NASA.

À noter que plusieurs découvertes de satellites ont été annoncées alors qu'en réalité, ces satellites n'existaient pas. Le cas le plus célèbre est sans doute celui du satellite Thémis, « découvert » en 1905 par W.H.Pickering [58] et annoncé comme le dixième satellite de Saturne. Le calcul de son orbite le plaçait entre Titan et Hypériorion mais son existence ne fut jamais confirmée.

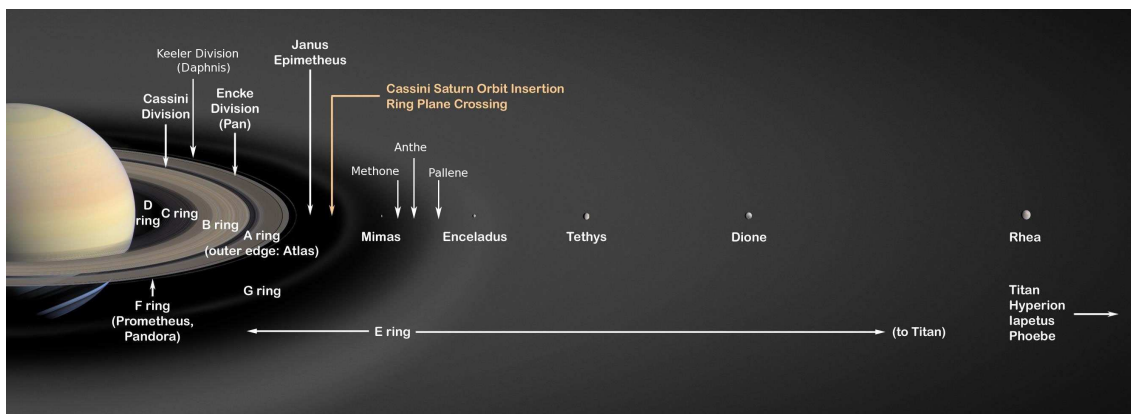


Fig. 1.2: Représentation du système interne de Saturne (source : NASA)

Chapitre 2

Les modèles dynamiques

Sommaire

2.1	Introduction et historique	22
2.2	TASS	23
2.2.1	Caractéristiques du modèle	23
2.2.2	La construction du modèle	23
2.3	L'intégrateur numérique	24
2.3.1	Principe de l'intégrateur	24
2.3.2	Ajustement à TASS	25
2.4	Comparaison des deux modèles	27

2.1 Introduction et historique

Dès les premières observations des satellites de Saturne, les astronomes ont cherché à représenter leur mouvement. Les premières théories s'intéressaient essentiellement aux principaux satellites de Mimas jusqu'à Titan. Pendant longtemps, les satellites ont été étudiés par couple en raison de l'existence de résonances ⁽¹⁾.

Les premières théories du mouvement des satellites de Saturne apparaissent à la fin du XIX^e siècle. Mais le premier couple étudié fut le couple Mimas-Téthys par H.Struve en 1898. Le couple Encelade-Dioné fut étudié dans les années 1930 par G.Struve. En 1955, Kozai [42] affine les modèles des précédents couples de satellites et s'intéresse également aux satellites Rhéa et Titan. En 1977, Sinclair [70] propose une théorie des satellites Téthys, Dioné, Rhéa, Titan et Japet. Rapaport (1977, [64]) améliore de nouveau ces théories en utilisant les observations les plus récentes. De même, Dourneau (1987, [14]), puis Taylor & Shen (1988, [76]) ont amélioré les différentes théories en ajustant les constantes du mouvement des satellites aux nouvelles observations. À chaque fois, les satellites sont traités par couple (pour Mimas-Téthys, Encelade-Dioné et Titan-Hypérion et même Titan-Rhéa). Ceci pose un problème d'unification car d'une part, les perturbations entre satellites autres que ceux du couple sont souvent négligées, et d'autre part, l'étude du mouvement est traitée dans un système de coordonnées propre au couple. Il en résulte une précision sur la position des satellites relativement modeste, 1 400 km comparée aux théories des satellites de Jupiter et Uranus dont la précision atteint une centaine de kilomètres.

¹On trouvera une présentation détaillée des anciennes théories dans Vienne (1991, [84]).

En 1995, la théorie TASS1.7 de Vienne & Duriez a donc été développée dans le but de traiter ensemble les satellites et de gagner en précision notamment dans la perspective de la mission Cassini.

2.2 TASS

Nous présentons ici rapidement le modèle TASS. Il s'agit d'une théorie semi-analytique puisque on donne, avant intégration, des valeurs numériques à certains paramètres. Pour tous les détails, il sera préférable de se reporter aux travaux de Vienne et Duriez ([18], [86], [87], [88], [19]).

2.2.1 Caractéristiques du modèle

La théorie TASS1.7 (Théorie Analytique des Satellites de Saturne) est en fait composé de TASS1.6 (Vienne & Duriez, 1995, [88]), théorie des sept principaux satellites de Saturne excepté Hypérion et de la théorie du mouvement d'Hypérion (Duriez & Vienne, 1997, [19]). La complexité du mouvement d'Hypérion et le fait que sa faible masse ne perturbe presque pas les autres satellites, ont amené à traiter le cas de ce satellite séparément.

TASS utilise une méthode analytique (théorie planétaire de Duriez 1979, [16]) où les satellites sont considérés ensemble en utilisant les variables elliptiques saturnocentriques. La théorie tient compte des principales caractéristiques du système saturnien :

- perturbations dues à l'aplatissement de Saturne (prise en compte de J_2 , J_4 et J_6)
- perturbations mutuelles amplifiées par plusieurs résonances (résonance 2 : 4 entre Mimas et Téthys, résonance 1 : 2 entre Encelade et Dioné, résonance 3 : 4 entre Titan et Hypérion et grande inégalité 1 : 5 entre Titan et Japet)
- perturbations solaires

Le modèle est construit de manière analytique en fonction des paramètres physiques et des constantes d'intégration. Il dépend au total de 61 paramètres :

- Masse des satellites $\{m_i\}$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$
- Coefficients d'aplatissement de Saturne J_2 , J_4 , J_6
- Inclinaison i_a et nœud Ω_a du plan équatorial de Saturne sur l'écliptique dans le système J2000
- 6 conditions initiales par satellite
- Masse de Saturne M_{Sat}

Les équations du mouvement et la manière dont elles sont intégrées sont présentées dans les travaux de Vienne & Duriez ([18], [86],[87])

2.2.2 La construction du modèle

La construction du modèle TASS se déroule en huit étapes :

1. Séparation analytique entre les termes critiques ou à longue période (termes séculaires, résonants et solaires) et les termes à courte période. Chaque variable x est ainsi partagée en $x_0 + \Delta x$, où x_0 est solution générale du système critique et Δx est solution particulière du système à courtes périodes.
2. Construction analytique du système critique à l'ordre 2 des masses et à l'ordre 3 en J_2 (avec une troncature éliminant les termes qui ne dépassent pas numériquement 1 km au bout de 100 ans).

3. Intégration analytique terme à terme de la partie à courtes périodes, construite jusqu'à l'ordre 2 des masses et l'ordre 3 en J_2 (avec une troncature éliminant tous les termes d'amplitude inférieure à 100 mètres). La solution à courte période obtenue est fonction explicite de la solution du système critique.
4. Intégration numérique du système critique. Les conditions initiales sont calculées pour J1980 avec la théorie de Dourneau (1987, [14])
5. Analyse en fréquence des séries temporelles données par les intégrations numériques.
6. Identification des fréquences obtenues sous forme de combinaisons linéaires entières des fréquences fondamentales (ce qui permet de représenter le résultat des intégrations numériques sous forme de sommes finies de termes périodiques à longues périodes).
7. Variation des conditions initiales de l'intégration numérique au voisinage des valeurs nominales. Chaque terme des séries (argument et amplitude) est paramétré par ces conditions initiales, par les masses de Saturne et des satellites, et par les coefficients d'aplatissement de la planète.
8. Report de la solution à longues périodes dans les expressions analytiques obtenues pour les termes à courtes périodes.

TASS a été ajusté sur une longue série d'observations issue du catalogue de Strugnell & Taylor (1990, [74]) ainsi que des observations de Pascu, réalisées à l'USNO entre 1974 et 1980 (non publiées) et des observations de Veillet & Dourneau (1992, [83]) faites entre 1979 et 1985 au Mauna Kea, au Pic du Midi et à l'ESO.

Les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés (voir section 4.2.2). La précision interne du modèle obtenue sur la position des satellites est de quelques dizaines de kilomètres sauf pour Hypérion et Japet où elle atteint 200 km (Vienne, 2001, [85]). TASS est une théorie semi-analytique puisque certains paramètres ont une valeur numérique avant intégration.

2.3 L'intégrateur numérique

L'intégrateur numérique (nommé NUMINT) utilisé dans ce travail est basé sur l'intégration des équations du mouvement par le programme NOE développé par Lainey *et al.* (2004, [46]) pour l'étude du mouvement des satellites galiléens. Ce programme est adaptable à tout système satellitaire. Il l'a notamment été pour l'étude des satellites de Mars (Lainey *et al.*, 2007, [44]). Pour notre étude, nous l'avons adapté aux satellites saturniens.

2.3.1 Principe de l'intégrateur

Les équations du mouvement des satellites ainsi que les dérivées partielles associées sont intégrées conjointement. Le détail de ces équations est présenté dans Lainey (2002, [43]). Les équations du mouvement tiennent compte des forces d'aplatissement de la planète (J_2, J_4, J_6) et des perturbations mutuelles des satellites. Elles peuvent également prendre en compte des perturbations généralement négligées dans les théories :

- le coefficient J_3
- les termes sectoriels de la planète c_{22} et s_{22}
- les coefficients J_2 de chaque satellite
- les coefficients c_{22} des satellites

Dans la pratique, les valeurs de ces paramètres ne sont pas encore déterminées. Par conséquent, ces perturbations ne sont pas prises en compte.

L'intégration numérique utilise l'intégrateur de Everhart (1985, [24]). Il s'appuie sur la méthode des polynômes de Gauss-Radau et il est d'ordre 15. Ses principales qualités sont sa robustesse et sa rapidité. Il permet également d'utiliser un pas variable pour l'intégration.

Les conditions initiales ont été choisies à la date du 1^{er} janvier 1980 à 0h00 (pour utiliser la même origine que TASS).

2.3.2 Ajustement à TASS

Pour obtenir deux modèles équivalents, nous avons ajusté NUMINT à TASS. L'ajustement a été réalisé en coordonnées cartésiennes et équatoriales grâce à la méthode des moindres carrés (voir section 4.2.2). L'échantillon de positions utilisé contient 1 000 points pour un pas d'échantillonnage de 73 jours couvrant ainsi 200 ans. La date des conditions initiales est prise cette fois le 1^{er} janvier 1950 à 0h pour que NUMINT soit ajusté entre 1850 et 2050 couvrant ainsi la période des observations utilisées par la suite (1874-2007).

Seules les positions et les vitesses des satellites sont ajustées. Les masses utilisées, les angles d'orientation du pôle de Saturne pour NUMINT proviennent de Jacobson *et al.* (2006, [37]) et sont rappelées dans le tableau 1.3 pour les masses et le tableau 2.1 pour le reste. Pour l'intégrateur numérique, nous avons utilisé les données les plus récentes.

Tab. 2.1: Orientation du pôle et valeurs des paramètres gravitationnels utilisés dans NUMINT

paramètre	valeur
Orientation du pôle α_P (deg)	40.5909
δ_P (deg)	83.53848
J2 ($\times 10^6$)	16290.71
J4 ($\times 10^6$)	-935.83
J6 ($\times 10^6$)	86.14

Note : Les valeurs sont issues de Jacobson *et al.* (2006, [37]).

La comparaison en distance entre TASS et NUMINT est représentée sur les figures 2.1. Les différences obtenues s'expliquent par le fait que les paramètres de TASS et de NUMINT ne sont pas rigoureusement les mêmes notamment pour les masses. Néanmoins, la différence est généralement inférieure à 500 km sur les 200 ans (sauf pour Japet où la différence peut atteindre 1 000 km), ce qui vu de la Terre représente environ 80 mas.

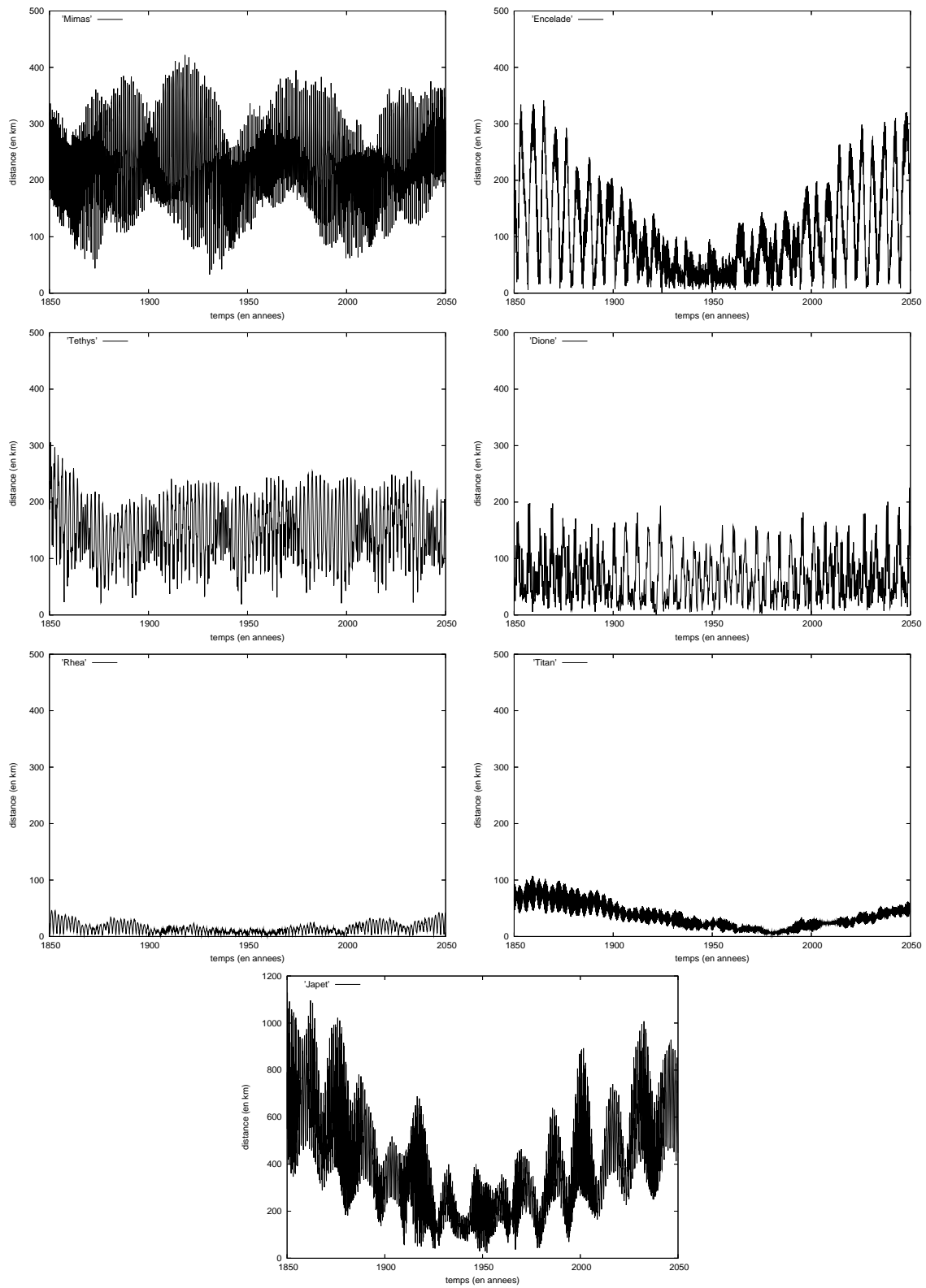


Fig. 2.1: Différence en distance entre TASS et NUMINT après ajustement pour chacun des satellites

2.4 Comparaison des deux modèles

Le modèle analytique (TASS) et le modèle numérique (NUMINT) possèdent chacun leurs avantages et leurs inconvénients. La principale qualité de TASS est sa rapidité de calcul pour l'ajustement. Comme nous le verrons dans la section 4.2.1, les dérivées partielles de TASS sont figées une fois pour toutes. Le principal avantage est que ces équations ne sont pas calculées à chaque étape de l'ajustement. Par conséquent, l'ajustement de TASS est relativement rapide autorisant ainsi l'utilisation de méthodes statistiques. Cependant, la perte de précision reste son principal défaut puisque le calcul des dérivées partielles à chaque itération, comme c'est le cas pour NUMINT, permet de converger rapidement vers les solutions optimales. C'est notamment le cas pour Mimas dont le mouvement est très sensible aux conditions initiales.

Au final pour les différents tests que nous effectuerons, nous utiliserons le modèle TASS pour sa rapidité. On donnera, à titre de comparaison, quelques résultats obtenus avec le modèle numérique.

Chapitre 3

Les observations : le catalogue COSS08

Sommaire

3.1	Introduction	28
3.2	Les observations	29
3.2.1	Les observations de Strugnell et Taylor	30
3.2.2	Les observations de Harper et Taylor	30
3.2.3	Les observations du NSDC	31
3.2.4	Les observations récentes	32
3.2.5	Les instruments et catalogues d'objets	33
3.2.6	Les différents types de coordonnées	37
3.3	Le catalogue	38
3.3.1	Format du catalogue	38
3.3.2	Distribution des observations	41
3.3.3	Statistiques des observations	42

Après l'élaboration d'un modèle dynamique, l'étape suivante est de comparer les positions données par le modèle aux observations. Pour les satellites de Saturne, il existe une quantité importante d'observations s'étalant sur plus d'un siècle. Celles-ci ont été compilées dans le catalogue COSS08 (Desmars *et al.*, 2009, [12]). Ce chapitre s'inspire directement de ce papier.

3.1 Introduction

Depuis leurs découvertes, les satellites de Saturne ont été et sont plus ou moins régulièrement observés. La première compilation d'observations a été réalisée en 1975 par Pierce [59] dans laquelle sont compilées des observations allant de 1792 à 1972. En 1990, Strugnell et Taylor [74] (noté ST90 par la suite) ont regroupé un ensemble de 51 000 observations ⁽¹⁾ des principaux satellites de Saturne (Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypériorion et Japet) s'étalant de 1874 à 1989. En 1994, Harper et Taylor [32] (noté HT94) ont étendu cet ensemble à 67 000 observations en ajoutant d'anciennes observations allant de 1894 à 1922.

Depuis 1989, de nouvelles observations ont été publiées. Un nouveau catalogue ajoutant les observations depuis 1989 et aussi d'anciennes ignorées dans les précédents catalogues

¹La manière de compter les observations est détaillé dans la section 3.3.2.

a été élaboré. Ce nouveau catalogue nommé COSS08 (pour Catalogue d'Observations des Satellites de Saturne) regroupe 130 000 observations s'étalant de 1874 à 2007. L'intérêt d'un tel catalogue est de regrouper un ensemble d'observations sous un format unique et cohérent. Pour cela, le format du catalogue ST90 a été utilisé comme base à laquelle ont été ajoutés de nouveaux paramètres.

3.2 Les observations

Historiquement, les observations des satellites de Saturne étaient d'abord visuelles. Ensuite, avec l'avènement de la photographie, les observations pouvaient être conservées sur plaques photographiques. De nos jours, les observations de ces satellites se font en grande partie grâce aux caméras CCD et plus rarement grâce aux instruments spatiaux. À la manière de HT94, on peut classer les observations des satellites de Saturne en sept différents types :

- *Mesure du temps de l'élongation, de l'opposition ou de la conjonction du satellite* : Ces observations étaient réalisées à la fin du XVIII^e et au XIX^e siècles. Elles consistent à mesurer le temps de l'élongation, de l'opposition ou de la conjonction d'un satellite. La mesure de ces temps était très approximative ce qui rend ces observations quasi-inexploitables. Elles ne sont donc pas incluses dans le catalogue.
- *Mesures visuelles micrométriques* : ces observations consistent à mesurer visuellement à l'aide d'un fil micrométrique placé sur l'instrument la position d'un satellite par rapport à un autre objet (satellite, planète). Concrètement, il fallait placer le satellite à la croisée du réticule et lire la mesure sur des cercles gradués. Ce type d'observations était souvent réalisé avant 1950. Ces instruments furent les premiers suffisamment précis pour donner des mesures exploitables.
- *Mesures astrométriques sur plaques photographiques* : L'invention des plaques photographiques a permis de conserver l'observation, la mesure pouvant alors être réalisée après. Des méthodes de réductions astrométriques permettent de déterminer les coordonnées des satellites présents sur la plaque photographique. La plupart des observations après 1950 sont de ce type. La précision des observations peut encore être actuellement améliorée à mesure des évolutions des techniques de réduction.
- *Mesures sur instrument méridien* : ces observations sont réalisées sur des instruments dits méridiens, c'est-à-dire mobiles uniquement suivant la hauteur. La position apparente (ascension droite et déclinaison) peut être déterminée grâce à la mesure de l'instant du transit de l'objet au méridien et de sa déclinaison au même instant. Ce type d'instruments a longtemps été utilisé pour établir des catalogues stellaires précis.
- *Mesure sur images CCD* : Ces observations s'apparentent à celles sur plaques photographiques. Ici la caméra CCD (Charge-Coupled Device) est utilisée pour enregistrer l'observation. La sensibilité des caméras CCD autorise des poses plus courtes et donc une multiplication de celles-ci. Les images ainsi obtenues sont de plus facilement analysables et mesurables mais le champ observé est aussi plus petit que sur une plaque photographique. Les observations les plus récentes sont de ce type.
- *Photométrie des phénomènes mutuels* : Tous les 15 ans environ, la Terre et le Soleil passent dans le plan des anneaux de Saturne. À cette occasion, on peut observer des occultations ou éclipses de satellites entre eux. Ces phénomènes sont appelés des phénomènes mutuels. L'analyse des courbes de lumière permet de déterminer l'instant du minimum de lumière et la chute en flux du phénomène. Ces deux mesures permettent ensuite d'obtenir des positions astrométriques très précises (quelques dizaines de mas). Les premiers phénomènes mutuels observés en 1979/80 ont été

réduits par Aksnes *et al.* (1984, [3]).

- *Observations du Télescope Spatial Hubble* Les observations du HST sont les seules observations spatiales du catalogue ⁽²⁾. Ces observations sont issues de French *et al.* (2006, [26]) et sont d’une bonne précision.

Les premières observations de COSS08 datent de 1874 comme pour ST90. Les observations antérieures à 1874 sont des observations de mesure du temps de l’élongation, de l’opposition ou de la conjonction d’un satellite. Ces mesures étaient habituellement réalisées à la minute près donc peu précises. Cependant de telles observations même peu précises peuvent être utiles pour détecter une accélération séculaire dans les longitudes moyennes des satellites, induites par des effets de marées (voir chapitre 5). Malgré tout, ces observations restent avant tout des phénomènes (comme pour les phénomènes mutuels) c’est-à-dire que la mesure effectuée est une mesure de temps et que cette mesure doit ensuite être réduite en une mesure de position astrométrique. Inclure ces observations dans le catalogue nécessite un travail minutieux de collecte de données dans des papiers anciens mais également l’élaboration d’une méthode de réduction spécifique à ces observations. Pour ces raisons, le catalogue COSS08 débute en 1874 avec les observations de l’United States Naval Observatory (U.S.N.O.) [79] et se termine en 2007 par des observations de Flagstaff [80].

Comme pour ST90, chaque groupe d’observations possède un code de référence (voir 3.3.1), lié en général à la publication mais aussi parfois à l’instrument utilisé. Ainsi une même publication peut avoir plusieurs codes de référence si au moins deux instruments ont été utilisés.

En réalité, COSS08 est la compilation de quatre sources différentes. Les deux premières sont les catalogues ST90 et HT94. La plus grande partie des observations ajoutées provient de la base Natural Satellites Data Center (NSDC) [23]. Enfin, des observations publiées récemment complètent le catalogue.

3.2.1 Les observations de Strugnell et Taylor

Le catalogue ST90 est composé d’environ 51 000 observations (sur 3 500 nuits) des huit principaux satellites de Saturne. Les observations qui s’étendent de 1874 à 1989 sont compilées dans un seul et unique format.

Depuis la publication de ce catalogue, plusieurs observations ont été réduites à nouveau et republiées. Dans COSS08, nous avons donc remplacé les anciennes positions par les nouvelles. C’est le cas par exemple des observations de Tolbin (avec le code 30 dans ST90) qui ont été re-réduites par Tolbin (1991, [77]). De même pour les observations avec le code 33 dans ST90 re-réduites par Tolbin (1991, [78]). Ces observations ont donc été remplacées par les nouvelles avec les codes respectifs 510 et 511 (voir Tab.3.1).

Les observations des phénomènes mutuels des satellites de Saturne publiées par Aksnes *et al.* (1984, [3]) présentaient un décalage en longitude. Dans un article suivant, Aksnes *et al.* (1986, [2]) expliquent l’origine de ce décalage et proposent d’appliquer aux observations une correction sur les temps d’observations. Ces corrections ont été prises en compte dans COSS08.

3.2.2 Les observations de Harper et Taylor

Le catalogue étendu de HT94 comporte 15 000 observations supplémentaires. Ces observations ont été réalisées aux observatoires de Lick, de Yerkes et de Leander McCormick

²Les observations des sondes Voyager et Cassini n’étant pas encore disponibles

entre 1894 et 1922. Ces observations sont essentiellement des observations micrométriques.

3.2.3 Les observations du NSDC

Le centre de données des satellites naturels (NSDC ³) regroupe des observations des satellites naturels de toutes les planètes excepté la Lune. Sur le site du NSDC (⁴), chaque groupe d'observations est donné dans son format de publication. Un fichier donne les principales informations sur les observations comme l'échelle de temps utilisée, le système de référence, le repère de référence, le type d'observations, l'instrument et parfois le catalogue d'étoiles utilisé et les corrections (aberration, réfraction, effets de phase) prises en compte pour la réduction.

Pour respecter la nomenclature des fichiers du NSDC, la règle pour le code de référence est la suivante : les observations du fichier nommé sm00XX sont notées dans le catalogue COSS08 sous le code de référence 5XX. Par exemple, les observations publiées dans Debehogne (1979, [11]) se situent dans le fichier sm0004 sur le site du NSDC. Par conséquent, les observations seront référencées avec le code 504 dans COSS08. Les observations de Noyelles *et al.* (2003, [54]) qui sont une compilation de phénomènes mutuels, sont les seules à échapper à cette règle. En effet, nous avons préféré garder la distinction entre les observations acceptables (code 421) et les meilleures observations (code 420) réalisée dans cet article.

Avec l'utilisation des caméras CCD, la plupart des observations sont données en format brut. C'est-à-dire que les positions des satellites sont données en coordonnées intersatellites et en pixels (x, y) . Ces mesures doivent donc être transformées dans des coordonnées classiques (X, Y) (en arcsecondes) grâce à un facteur d'échelle (ρ) et une rotation d'angle (θ). La formule de transformation est la suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les paramètres ρ et θ sont déterminés par la méthode des moindres carrés en comparant la position (X, Y) des étoiles du champ donnée par les catalogues d'étoiles et la position (x, y) de ces mêmes étoiles mesurée sur l'image. On trouvera plus de détails par exemple dans Harper *et al.* (1997, [30]).

Pour les observations de Harper *et al.* (1997, [30]) (1999, [29]), Vienne *et al.* (2001, [90]), Peng *et al.* (2002, [56]) et Veiga *et al.* (2003, [82]) plusieurs satellites sont observables sur les clichés et leurs coordonnées sont alors données par rapport à une origine arbitraire, le centre de la plaque. Pour exprimer la position des satellites entre eux, nous devons faire des choix entre satellite de référence et satellite observé. De manière un peu arbitraire, nous avons choisi l'ordre suivant pour le choix du satellite de référence : Rhéa, Titan, Dioné, Téthys, Encelade, Mimas, Hypérion, Japet. Ainsi, si sur un même cliché, on a Encelade, Dioné, Titan et Japet alors nous aurons 3 observations Japet-Titan, Encelade-Titan, Dioné-Titan (⁵).

Ce choix prend en compte le fait que les orbites des satellites comme Rhéa et Titan sont mieux connus que les autres et aussi que certains satellites comme Mimas, Hyperion ou Japet sont moins observés que les autres. De même le choix pour les derniers satellites n'a que peu d'importance car il n'existe aucun cas de figure dans ces observations, où seuls

³Natural Satellites Data Center, voir Emelianov & Arlot [23].

⁴disponible à l'adresse : <http://www.imcce.fr/nsdc>.

⁵En notant sous la forme satellite observé-satellite référence.

sont observés Hypérion et Japet.

Comme nous l'avons déjà rappelé pour les observations de ST90, certaines observations ont été re-réduites depuis cette publication. Parmi celles-ci, il y a les observations réalisées à Nikolaev qui ont été réduites de nouveau par Voronenko *et al.* (1991, [93]) et apparaissent désormais sous la référence 537. Il en est de même pour les observations publiées dans Voronenko & Gorel (1988, [92]) du fichier sm0006 sur le site du NSDC. De cette manière, les observations de Nikolaev parues dans ST90 et dans Voronenko & Gorel ont été remplacées par celle de Voronenko *et al.* (1991, [93]) avec la référence 537 dans COSS08.

Parmi les données publiées sur le NSDC, plusieurs sont redondantes. C'est le cas des observations de Izmailov *et al.* (1998, [34]) (fichier sm0015) et celles de Kisseleva & Izmailov (2000, [39]) (sm0030). Nous avons décidé de garder uniquement les observations de Kisseleva & Izmailov (référence 530) car elles ont vraisemblablement été re-réduites par rapport à celles de Izmailov.

De même, les observations de Kisseleva & Chanturiya (2000, [38]) sont données en coordonnées absolues dans le fichier sm0025 et par rapport à Titan dans sm0026. Dans ce cas, nous avons choisi de privilégier les observations données en absolues car elles permettent d'avoir une observation supplémentaire (l'observation de Titan) qui n'apparaît pas dans les observations en intersatellites. Par exemple, si Encelade, Rhéa et Titan sont observés en même temps, il y aura deux observations pour sm0026 (Encelade-Titan et Rhéa-Titan) alors qu'il y en aura trois pour sm0025. Seules les observations en coordonnées absolues ont été conservées avec le code de référence 525 dans COSS08.

Pour les fichiers sm0027 (coordonnées absolues) et sm0028 (coordonnées intersatellites relatives à Titan) qui concernent uniquement les observations d'Hypérion, nous avons également choisi de garder celles en coordonnées absolues. De plus, les dates d'observations de sm0027 sont les mêmes que pour le fichier sm0025, c'est pourquoi, nous avons alloué le code de référence 525.

Les observations de Kiseleva *et al.* (1996, [41]) (sm0013 et sm0014) et celles de Kiseleva & Kalinitchenko (2000, [40]) (sm0029) sont plus problématiques. Plusieurs observations sont redondantes mais pas toutes. De manière générale, quand les observations apparaissent plusieurs fois, nous avons choisi les observations données par rapport à la planète. Elles donnent en effet une observation en plus que celles données par rapport à un satellite de référence. Par contre, si un seul satellite est observé pour une date, nous avons privilégié l'observation donnée par rapport à un satellite de référence et non celle donnée par rapport à la planète car l'erreur induite par la position du satellite de référence est moindre que celle induite par la position de la planète.

Enfin, quelques observations de Vienne *et al.* (2001, [90]) sont également redondantes. Dans ce cas précis, l'image CCD sur laquelle se trouvent le plus grand nombre de satellites a été privilégiée. Si, pour deux images CCD, nous avons le même nombre de satellites, le choix se portait sur celle qui donnait les meilleurs résidus. De même pour les observations de Vass (1997, [81]).

3.2.4 Les observations récentes

Les observations récentes représentent environ 9 900 nouvelles données. Elles ont été publiées récemment et ont été réalisées entre 1994 et 2007.

Les observations de Qiao *et al.* (1999, [62]; 2004, [63]) présentent respectivement 451 et 1 167 mesures de positions astrométriques de satellites saturniens. Elles ont été réalisées à l'aide d'une caméra CCD fixée sur le télescope de 1.56 m de la Station Sheshan en Chine.

Les observations de l'U.S.N.O de la station de Flagstaff [80] s'étalent de 2000 à 2007 et sont régulièrement mises à jour. La dernière mise à jour prise en compte dans COSS08 date du 18 avril 2007. Les premières observations de 2000 à mars 2001 ont également été publiées par Stone (2001, [73]). Par conséquent, ces observations ont été exclues au profit de celles de Stone pour éviter les redondances. Toutes les données de la Station de Flagstaff sont disponibles sur le site web du FASTT Planetary Satellite Observations ⁽⁶⁾.

French *et al.* (2006, [26]) ont publié des positions astrométriques très précises issues d'observations du Hubble Space Telescope. Ces observations ont été réalisées entre 1996 et 2005. Deux types d'instruments ont été utilisés pour ces observations, à savoir, Planetary Camera (code 605) et Wild Field (code 606 pour WF2, 607 pour WF3 et 608 pour WF4).

Rapaport *et al.* (2002, [65]) ont utilisé l'instrument méridien de l'observatoire de Bordeaux pour obtenir des positions de Dioné, Rhéa, Titan, Hypérion et Japet. Ces observations ont eu lieu entre 1995 et 2001. Le même instrument a été utilisé pour les observations de Dourneau *et al.* (2007, [15]). 216 observations de Titan, Hypérion et Japet ont été réalisées entre 1999 et 2007 ⁽⁷⁾. Quelques unes de ces observations avaient été publiées dans Rapaport *et al.* (2002, [65]). Elles ont donc été exclues de notre catalogue.

3.2.5 Les instruments et catalogues d'objets

Dans le tableau 3.1, nous avons indiqué pour chaque référence, l'instrument utilisé. En règle générale, il s'agit de réfracteurs (lunettes) de différents diamètres. Néanmoins, on trouve également des réflecteurs (télescopes), des instruments méridiens ou des astrographes.

Pour les observations du NSDC et pour les observations récentes, nous avons indiqué également, lorsque c'était possible, le catalogue d'étoiles (comme PPM, ACT, AST, Tycho,...) utilisé pour la réduction (voir Tab.3.2).

Plusieurs méthodes de réduction astrométrique sans catalogue d'étoiles de référence ont été développées (voir par exemple Vienne *et al.*, 2001, [89]). Dans ce cas, la calibration (facteur d'échelle et rotation, voir section 3.2.3) s'effectue à l'aide de satellites de référence pour lesquels un modèle dynamique précis est disponible. Par exemple, les observations de Veiga *et al.* (2003, [82]) ont été réduites en calibrant l'image à l'aide de la position des satellites Téthys(S3), Dioné(S4), Rhéa(S5) et Titan(S6) données par le modèle TASS1.7. Dans ce cas, le catalogue d'objets de référence est noté comme S3-S4-S5-S6 TASS1.7 dans le tableau 3.2.

Qiao *et al.* (1999, [62]) ont utilisé plusieurs modèles dynamiques pour la calibration. Ainsi, dans le tableau 3.2, HT93 signifie Harper & Taylor (1993, [31]), TS88 signifie Taylor & Shen (1988, [76]) et D87 signifie Dourneau (1987, [14]). French *et al.* (2006, [26]) ont utilisé les anneaux de Saturne (la division d'Encke) pour la calibration. Enfin, la calibration des observations de Veillet & Dourneau a été réalisée en utilisant les satellites S2-S3-S4-S5-S6 avec la théorie de Dourneau (1987, [14]).

⁶<http://www.nofs.navy.mil/data/plansat.html>.

⁷Données disponibles à l'adresse : <ftp://ftp.imcce.fr/pub/misc/bordeaux/1995-2007/>

Tab. 3.1: Référence, observatoire et instrument des observations.

Note : Les deux premières colonnes donnent le code de la référence et la référence elle-même. La troisième donne l'observatoire. Quand plus de deux observatoires sont indiqués dans la publication, nous avons indiqué *Variable*. La dernière colonne correspond au télescope utilisé. L'intégralité des références bibliographiques peut être trouvée dans Desmars *et al.* (2009, [12]).

code	référence	observatoire	instrument
<i>Références de Strugnell & Taylor (ST90)</i>			
1	USNO (1877-1887)	USNO Washington (before 1893)	Telescope - refrac., D = 26 inch
2	USNO (1887,1889-1893)	USNO Washington (before 1893)	Telescope - refrac., D = 26 inch
3	USNO (1911)	USNO Washington (since 1893)	Telescope - refrac., D = 26 inch
4	USNO (1929)	USNO Washington (since 1893)	Telescope - refrac., D = 26 inch
5	USNO (1954)	USNO Washington (since 1893)	Telescope - refrac., D = 26 inch
6	Struve(1933)	Berlin-Babelsberg	Telescope - 65-cm refrac.
7	Struve(1933)	Johannesburg	Telescope - 65-cm refrac.
8	Struve(1933)	Yerkes Observatory	Telescope - 40-inch refrac.
9	Struve(1898)	Pulkovo	Telescopes : 30-inch refrac.
10	Alden & O'Connell(1928)	Yale-Columbia Station	Telescope : 26-inch photographic refrac.
11	Alden(1929)	Yale-Columbia Station	Telescope : 26-inch photographic refrac.
12	Soulie (1968)	Bordeaux-Floirac	Telescopes : 30 cm refrac.
13	Chernykh & Chernykh(1971)	Crimea-Simeis	Telescope - astrograph, D = 40 cm
14	Soulie (1972)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 13-inch photographic refrac.
15	Soulie (1975)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 33-cm refrac.
16	Peters (1973)	Table Mountain Observatory	Telescope : 24-inch reflac.
17	Soulie (1975)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 38-cm refrac.
18	Kisseleva et al.(1977)	Pulkovo	Telescope : 26-inch refrac.
19	Kisseleva et al.(1977)	Pulkovo	Telescope : normal astrograph
20	Kisseleva et al.(1977)	Pulkovo	Telescopes : AKD(double short-focus astrograph)
21	Abbot et al.(1975)	McDonald Observatory	Telescopes : 2.1 m reflac., 76 cm reflac. Meas.machine : Mann measures
22	Abbot et al.(1975)	McDonald Observatory	Telescopes : 2.1 m reflac., 76 cm reflac. Meas.machine : PDS measures
23	Kisseleva et al.(1975)	Pulkovo	Telescope : normal astrograph.
24	Soulie (1978)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 33-cm refrac.
25	Sinclair(1974,1977)	Herstmonceux	Telescope : 13-inch refrac.
26	Sinclair(1974,1977)	Herstmonceux	Telescope : 26-inch refrac.
27	Mulholland et al. (1976)	McDonald Observatory	Telescope : 76-cm reflac.
28	Soulie (1978)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 38-cm refrac.
29	Gorel (1977)	Nikolaev	Telescope : Zone astrograph
31	Pascu (1982) Not Published	USNO Washington (since 1893)	Telescope - 26 inch refrac.
32	Levitskaya (1979)	Ordubad	Telescope : lunar-planet telescope, D=700 mm, F=10313 mm
34	Mulholland & Shelus(1980)	McDonald Observatory	Telescope - reflac., D = 2.1 m
35	Soulie et al. (1981)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 33 cm refrac.
37	Seitzer & Ianna (1980)	Leander McCormick Observatory	Telescope : 67- refrac.
38	Chugunov (1981)	Engelhardt Observatory	Telescope : 16-inch astrograph
39	Taylor & Sinclair (1985)	Herstmonceux	Telescope : 26-inch refrac.
40	Seitzer et al. (1979)	Leander McCormick Observatory	Telescope : 67 cm -refrac.
41	Chugunov & Nefed'ev (1980)	Engelhardt Observatory	Telescope : 16-inch astrograph
42	Aksnes et al. (1984)	Variable	Telescope : 26" refrac.
43	Rohde et al. (1982)	Leander McCormick Observatory	Telescope : 67- refrac.
45	Kitkin&Chugunov (1980)	Engelhardt Observatory	Telescope : 16"astrograph
46	Dourneau et al. (1989)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 38 cm refrac.
47	Veillet & Dourneau (1992)	Pic du Midi	Telescope : 1 m reflac.
48	Veillet & Dourneau (1992)	ESO, La Silla	Telescope : 1.5 m reflac.
49	Veillet & Dourneau (1992)	Mauna Kea	Telescope : 3.6 m reflac.
50	Debehogne (1981,1982)	ESO, La Silla	Telescope : 40-cm refrac.
51	Kitkin&Chugunov (1982)	Engelhardt Observatory	Telescope : 16"astrograph
52	Dourneau et al. (1986)	ESO, La Silla	Telescope : 1.5 m reflac.
53	Dourneau et al. (1985)	Bordeaux-Floirac	Telescope : 38 cm reflac.
54	Bowell (1982)	Lowell Observatory	Telescope : 13-inch refrac.
55	Debehogne (1984)	ESO, La Silla	Telescope : 40-cm equatorial
56	Kitkin (1985)	Engelhardt Observatory	Telescope : 16"astrograph
57	Kitkin (1985)	Engelhardt Observatory	Telescope : Zeiss astrograph
58	Kisseleva et al.(1987)	Abastuman	Telescope : Zeiss Double Astrograph
59	Rapaport (pers communi)	Bordeaux-Floirac	Telescope : Meridian circle
60	CMC La Palma No4 (1989)	La Palma	Telescope : Carlsberg automatic meridian circle
61	Shen (pers communi)	Yunnan Observatory	Telescope : 1 m refrac.
<i>Références de Harper & Taylor (HT94)</i>			
101	Barnard (1913)	Yerkes Observatory	40-inch refrac.
102	Barnard (1915)	Yerkes Observatory	40-inch refrac.
103	Barnard (1916)	Yerkes Observatory	40-inch refrac.
104	Barnard (1918)	Yerkes Observatory	40-inch refrac.
105	Barnard (1927)	Yerkes Observatory	40-inch refrac.
131	Hussey (1902)	Lick Observatory	12-inch & 36-inch refrac.s
132	Hussey (1903)	Lick Observatory	12-inch & 36-inch refrac.s
133	Hussey (1905)	Lick Observatory	36-inch refrac.
144	Lovett (1898a)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
145	Morgan (1898)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
147	Stone (1898a)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
148	Stone (1898b)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
149	Stone (1898c)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
150	Stone (1898d)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
200	Barnard (1908)	Yerkes Observatory	40-inch, 24-inch, 10-inch refrac.s
202	Aitken (1909)	Lick Observatory	36-inch refrac.
203	Aitken (1905)	Lick Observatory	36-inch refrac.
206	Barnard (1910)	Yerkes Observatory	40-inch refrac. (supposition)
211	Eastwood (1900)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
222	Lovett (1895)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
223	Lovett (1896)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
224	Lovett (1898b)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.

Tab. 3.1: suite...

code	référence	observatoire	instrument
225	Lovett (1897)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
226	Lovett (1898c)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
227	Lyon (1899a)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
228	Lyon (1899b)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
232	Morgan (1897)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
233	Morgan (1900)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
235	Paddock (1905)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
240	Stone (1895a)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
241	Stone (1895b)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
242	Stone (1896a)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
243	Stone (1896b)	Leander McCormick Obs	26-inch refrac.
<i>Références du NSDC</i>			
420	Noyelles et al. (2003) best	Variable	
421	Noyelles et al. (2003) acc	Variable	
502	Kostinsky S. (1925)	Pulkovo	Normalastrograph
504	Debehogne H. (1979)	Uccle	Double astrograph, D = 40 cm
507	Kiseleva T.P. (1989)	Pulkovo	Double astrograph, F = 70 cm, D = 10 cm
509	Izhakevich E.M. (1991)	Golosseevo-Kiev	Double long-focus astrograph, D = 400 mm, F = 5500 mm and Double wide-field astrograph, D = 400 mm, F = 2000 mm
510	Tolbin S.B. (1991)	Pulkovo	Normal astrograph, D = 33 cm, F = 3.64 m
511	Tolbin S.B. (1991)	Pulkovo	
512	Tolbin S.B. (1991)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 62 cm
513	Kiseleva et al.(1996)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 62 cm
514	Kiseleva et al.(1996)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 62 cm
516	Kiseleva et al.(1998)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 62 cm
518	Vass G. (1997)	Bucharest	Astrograph, F = 6 m, D = 38 cm
519	Rapaport M., privat comm.	Bordeaux-Floirac	Automatic photoelectric meridian circle
520	Veiga et al. (1999)	Itajuba	1.6 m Ritchey-Chretien reflac.
521	Harper et al. (1997)	La Palma	1-metre Jacobus Kapteyn Telescope
522	Harper et al. (1999)	La Palma	1-metre Jacobus Kapteyn Telescope
523	Stone et al. (2000)	USNO, Flagstaff	Flagstaff Astrometric Transit Telescope (FASTT)
524	Stone et al. (2000)	USNO, Flagstaff	Flagstaff Astrometric Transit Telescope (FASTT)
525	KisselevaChanturiya(2000)	Abastuman	Double wide-field astrograph, D = 40 cm, F = 302.4 cm
529	Kisseleva & Kalin. (2000)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 62 cm
530	Kisseleva&Izmailov(2000)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 62 cm
531	Filippov et al. (Not published)	Golosseevo-Kiev	Double long focus astrograph, D=400 mm, F=5500 mm
532	Izakevich (Not published)	Golosseevo-Kiev	Double wide-field astrograph, D=400 mm, F=2000 mm
533	Belizon et al.(Not Published)	El Leoncito	San Fernando Automatic Meridian Circle, D = 18 cm
537	Voronenko et al. (1991)	Nikolaev	Zonal astrograph, D = 120 mm, F = 2044mm
538	Voronenko (Not published)	Nikolaev	Zonal astrograph, D = 120 mm, F = 2044mm
539	Vienne et al. (2001)	Itajuba	Ritchey-Chretien reflac., D=1.6 m, F=15.8 m
540	Kowalski (Comm. to NSDC)	Zephyrhills	Maksutov, D = 0.18 m
541	Peng,Vienne,Shen (2002)	Yunnan Observatory	reflac., D = 1 m.
542	Kiseleva (Not published)	Pulkovo	refrac., F = 10.4 m, D = 65 cm
543	Stone R.C.(2001)	USNO, Flagstaff	Flagstaff Astrometric Transit Telescope (FASTT)
545	Veiga et al. (2003)	Itajuba	1.6 m Ritchey-Chretien reflac., F=15.8 m.
546	Hatanaka Y. (1995)	Tokyo-Mitaka	refrac., D = 65 cm, F = 10 m
547	Abrahamian et al. (1993)	Byurakan	ZTA, D=2.6 m, F= 10 m
548	Walker et al. (1978)	USNO Washington (since 1893)	Astrograph, D=38 cm
552	Carlsberg	La Palma	Carlsberg Automatic Meridian Circle
<i>Références récentes</i>			
600	Rapaport(2002)	Bordeaux-Floirac	Bordeaux CCD meridian circle
601	Dourneau(1995-2007)	Bordeaux-Floirac	Bordeaux CCD meridian circle
602	USNO Flagstaff (1999-2006)	USNO, Flagstaff	Flagstaff Astrom. Transit Teles.
603	Qiao et al. (1999)	Zo-Se	1.56m reflac.
604	Qiao et al. (2004)	Zo-Se	1.56m reflac.
605	French(2006) HST PC	Hubble Space Telescope	HST Planetary Camera
606	French(2006) HST WF2	Hubble Space Telescope	HST Wide Field
607	French(2006) HST WF3	Hubble Space Telescope	HST Wide Field
608	French(2006) HST WF4	Hubble Space Telescope	HST Wide Field

Tab. 3.2: Catalogues d'objets de référence utilisés pour la réduction de certaines références (voir section 3.2.5).

code	référence	catalogue
47	Veillet & Dourneau (1992)	S2-S3-S4-S5-S6 D87
509	Izhakevich E.M. (1991)	Catalogue PPM
510	Tolbin S.B. (1991)	Catalogue FK5/FK4
512	Tolbin S.B. (1991)	Catalogue FK5/FK4
520	Veiga et al. (1999)	GSC corrected by PPM
521	Harper et al. (1997)	S3-S4-S5-S6 HT93
522	Harper et al. (1999)	S3-S4-S5-S6 HT93
523	Stone (2000)	Catalogue AST
524	Stone & Harris (2000)	Catalogue AST
525	Kisseleva & Chanturiya(2000)	Catalogue ACT
531	Filippov et al. (Not published)	Catalogue ACT
532	Izakevich (Not published)	Catalogue ACT
533	Belizon et al. (Not Published)	1976 IAU reference system
537	Voronenko et al.(1991)	Hipparcos/Tycho & ACTRC
538	Voronenko (Not published)	Hipparcos/Tycho & ACTRC
539	Vienne et al. (2001)	S3-S4-S5-S6 TASS1.7
543	Stone R.C.(2001)	Catalogue - Tycho-2 (ICRF)
545	Veiga et al. (2003)	S3-S4-S5-S6 TASS1.7
547	Abrahamian et al. (1993)	Catalogue FOCAT-S (FK5,J2000)
548	Walker et al. (1978)	Catalogue - SAO
552	Carlsberg	1976 IAU reference system
601	Dourneau et al. (2007)	Catalogue - Tycho-2 (ICRF)
602	USNO Flagstaff(2000-2007)	Catalogue - Tycho-2 (ICRF)
603	Qiao et al. (1999)	S3-S4-S5-S6 HT93,TASS1.7,TS88,D87
604	Qiao et al. (2004)	S3-S4-S5-S6 TASS1.7
605	French al (2006) HST PC	Anneaux
606	French al (2006) HST WF2	Anneaux
607	French al (2006) HST WF3	Anneaux
608	French al (2006) HST WF4	Anneaux

3.2.6 Les différents types de coordonnées

La plupart des observations antérieures à 1950 sont des observations visuelles réalisées avec un micromètre. Dans ce cas, les coordonnées utilisées sont l'angle de position noté p et la séparation notée s . L'angle de position correspond à l'angle entre la direction du pôle nord et la direction satellite observé et satellite de référence. Cet angle est compté positivement dans la direction de l'est et s'exprime en degrés. La séparation correspond à l'écart angulaire entre le satellite observé et l'objet de référence. Elle s'exprime en arcsecondes ⁽⁸⁾.

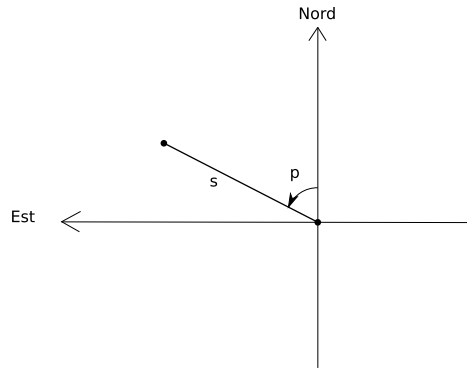


Fig. 3.1: Schéma explicatif des coordonnées (p, s) vues de l'intérieur de la sphère céleste. L'Est représente la direction de l'ascension droite croissante.

Les coordonnées absolues sont généralement utilisées lors d'observations sur plaques photographiques. On donne alors l'ascension droite (α) et la déclinaison (δ) pour chaque objet de l'image. Ce type de coordonnées présente l'inconvénient d'introduire l'erreur sur la position de la planète qui est peut être assez grande (environ $0.3''$ d'après [69]).

Les deux autres types de coordonnées qui apparaissent dans COSS08 sont sensiblement similaires. Il s'agit des coordonnées différentielles $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta)$ et $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$. Ce sont des coordonnées intersatellites qui sont généralement plus précises que les coordonnées absolues. Elles sont donc largement utilisées.

Le cas des coordonnées tangentielles est assez complexe. Lorsqu'on utilise une plaque photographique ou un CCD, la position des satellites est mesurée dans le plan tangent à la sphère céleste en un point C (α_C, δ_C) qui est généralement le centre de la plaque. Les déformations locales induisent une différence entre les coordonnées tangentielles (X, Y) et les coordonnées différentielles $(\Delta\alpha \cos \delta_C, \Delta\delta)$ d'un satellite par rapport au centre C . Si $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ sont petits, la relation entre les deux types de coordonnées peut s'écrire :

$$X = \Delta\alpha \cos \delta_C - \Delta\alpha \Delta\delta \sin \delta_C + \dots$$

$$Y = \Delta\delta + \frac{1}{2}(\Delta\alpha)^2 \sin \delta_C \cos \delta_C + \dots$$

Dans le passé, la précision des observations justifiait qu'on ne tienne pas compte de cette différence. Actuellement, beaucoup d'observateurs considèrent encore que $X = \Delta\alpha \cos \delta_C$ et que $Y = \Delta\delta$.

⁸On parle aussi de secondes de degrés ou de secondes d'arc.

En fait, Vienne *et al.* (2001, [89]) ont déterminé que la différence $(X - \Delta\alpha \cos \delta_C, Y - \Delta\delta)$ était de l'ordre de $s^2 \tan \delta_C$ (où s est l'angle de séparation). Ils ont alors estimé la valeur maximale à $0.3''$ dans les conditions extrêmes, c'est-à-dire quand $s = 400''$ et $\delta_C = 23^\circ$. Néanmoins, cette valeur est rarement atteinte puisque la différence atteint par exemple $0.022''$ pour les observations de Harper *et al.* (1997, [30]) et $0.004''$ pour celle de Vienne *et al.* (2001, [90]) car Saturne était à l'époque près de l'équateur. De plus, quand le champ est petit, cette différence devient négligeable.

Pour le tester, nous avons calculé les résidus en considérant que les observations en coordonnées différentielles (*typ=1*) étaient en coordonnées tangentielles. Il apparaît que certaines observations (par exemple Kiseleva *et al.* (1996, [41]), code 513) ont des meilleurs résidus si elles sont considérées comme étant en coordonnées tangentielles. Nous avons également vérifié que la différence est négligeable quand le champ est petit.

Normalement, la différence doit être prise en compte mais, parce que nous ne savons pas comment les observateurs ont fait leur réduction, nous ne pouvons que respecter le type de coordonnées qu'ils ont déclaré utiliser même s'ils se sont probablement trompés de type de coordonnées. De plus, l'utilisation des coordonnées tangentielles nécessite de donner la position du centre de la plaque qui est en général rarement disponible. Par conséquent, dans COSS08, il n'y a pas d'observations données en coordonnées tangentielles. Mais nous avertissons que certaines d'entre elles, données en coordonnées différentielles, sont probablement en coordonnées tangentielles.

3.3 Le catalogue

3.3.1 Format du catalogue

Les observations du catalogue sont classées dans l'ordre chronologique et écrites dans un format cohérent. Un exemple extrait du catalogue est donné dans le tableau 3.3 ⁽⁹⁾. Dans un code FORTRAN, chaque ligne du fichier est lue avec le format :

```
(i3,i5,i3,f11.7,f7.3,2i4,i2,a3,a1,i2,i1,2f14.7,2i2,2f8.3,4i2)
```

La description de chaque occurrence est la suivante :

- opp (i3) : numéro de l'opposition (1=1610, 257=1874, 385=2007)
- anp (i5) : année de l'observation
- moi (i3) : mois de l'observation
- utc (f11.7) : date UTC de l'observation en jours (non corrigée du temps lumière)
- dt (f7.3) : TT-UTC en secondes
- cob (i4) : code de l'observatoire (UAI) issu du Minor Planet Center
- crf (i4) : code de la référence (voir explications précédemment)
- typ (i2) : type de coordonnées (voir section 3.2.6)
 - 0 = α, δ
 - 1 = $\Delta\alpha \cos(\delta), \Delta\delta$
 - 2 = $\Delta\alpha, \Delta\delta$
 - 3 = p, s (position angle, séparation)
- csob (a3) : Satellite observé
- csrf (a1) : Satellite référence
 - * = coordonnées absolues
 - 0 = Saturne

⁹Le catalogue en entier est lui disponible sur le serveur ftp de l'IMCCE : ftp://ftp.imcce.fr/pub/NSDC/saturn/raw_data/position/ ou via le Centre de Données astronomiques de Strasbourg (CDS).

- 1 = Mimas
- 2 = Encelade
- 3 = Téthys
- 4 = Dioné
- 5 = Rhéa
- 6 = Titan
- 7 = Hypérion
- 8 = Japet
- fg1 (i2) : flag de présence de la 1^{re} coordonnée (0=absente, 1=présente)
- fg2 (i1) : flag de présence de la 2^e coordonnée (0=absente, 1=présente)
- ob1 (f14.7) : 1^{re} coordonnée observée (0.0000000 quand la coordonnée est absente)
- ob2 (f14.7) : 2^e coordonnée observée ⁽¹⁰⁾
- rfs (i2) : système de référence
 - 0 = équateur et équinoxe moyens B1950
 - 1 = équateur et équinoxe vrais de la date
 - 2 = équateur et équinoxe moyens J2000
- rfr (i2) : repère de référence
 - 0 = topocentrique
 - 1 = géocentrique
 - 2 = héliocentrique
- oc1 (f8.3) : (O-C) résidu pour la 1^{re} coordonnée
- oc2 (f8.3) : (O-C) résidu pour la 2^e coordonnée
- refrac (i2) : correction de la réfraction
 - 0 = corrigée
 - 1 = supposée corrigée
 - 2 = supposée non corrigée
 - 3 = non corrigée
- aberr (i2) : correction de l'aberration
 - 0 = corrigée
 - 1 = supposée corrigée
 - 2 = supposée non corrigée
 - 3 = non corrigée
- phase (i2) : correction de la phase
 - 0 = corrigée
 - 1 = supposée corrigée
 - 2 = supposée non corrigée
 - 3 = non corrigée
- satref (i2) : (optionnel) satellite de référence utilisé dans le calcul de l'O-C lorsqu'un groupe d'observations est donné en coordonnées absolues ou par rapport à la planète à un même instant

Le repère de référence héliocentrique est uniquement utilisé pour les phénomènes mutuels et spécialement pour les éclipses. Les oppositions sont numérotées à partir de 1610, année des premières observations de satellites par Galilée. Ainsi, les observations de COSS08 débutent à l'opposition 257 (en 1874) jusqu'à l'opposition 385 (en 2007).

Les principales modifications par rapport à ST90 sont l'ajout des paramètres sur les différentes corrections (aberration, réfraction et effets de phase) et l'unification de l'échelle de temps.

¹⁰Les unités suivant le type sont : typ=0 :degrés, typ=1 : secondes de degrés, typ=2 : (secondes d'heure, secondes de degrés) , typ=3 : (degrés,secondes de degrés)

Tab. 3.3: Extrait du catalogue COSS08 avec les premières et dernières observations.

257	1874	7	15.2570840	-2.881	787	1	3	70	01	0.0000000	98.8830000	1	0	999.999	-1.021	2	2	2	
257	1874	7	15.2640290	-2.881	787	1	3	70	10	132.2000000	0.0000000	1	0	0.719	999.999	2	2	2	
257	1874	8	30.1202790	-2.971	787	1	3	50	10	287.6000000	0.0000000	1	0	-0.375	999.999	2	2	2	
257	1874	8	30.1237510	-2.971	787	1	3	30	10	299.0000000	0.0000000	1	0	-0.213	999.999	2	2	2	
257	1874	8	30.1279180	-2.971	787	1	3	20	10	268.3000000	0.0000000	1	0	0.317	999.999	2	2	2	
257	1874	8	30.1327790	-2.971	787	1	3	40	10	107.3000000	0.0000000	1	0	0.290	999.999	2	2	2	
257	1874	8	30.1369460	-2.971	787	1	3	60	10	185.4000000	0.0000000	1	0	0.254	999.999	2	2	2	
257	1874	8	30.1438900	-2.971	787	1	3	50	01	0.0000000	66.7010000	1	0	999.999	-1.493	2	2	2	
257	1874	8	30.1494460	-2.971	787	1	3	30	01	0.0000000	25.4770000	1	0	999.999	-0.947	2	2	2	
257	1874	8	30.1550010	-2.971	787	1	3	20	01	0.0000000	33.2860000	1	0	999.999	-0.840	2	2	2	
...	
385	2007	4	15.8272500	65.184	999	601	0	8*	11	140.7682387	16.6673253	2	0	0.005	0.048	1	1	2	
385	2007	4	15.8275220	65.184	999	601	0	7*	11	140.8665154	16.6499964	2	0	0.235	-0.280	1	1	2	
385	2007	4	15.8275930	65.184	999	601	0	6*	11	140.8923746	16.6512411	2	0	0.015	-0.066	1	1	2	
385	2007	4	18.1296759	65.184	689	602	0	4*	11	140.8983800	16.6686028	2	1	-0.093	-0.046	1	1	1	5
385	2007	4	18.1296759	65.184	689	602	0	5*	11	140.8896617	16.6663225	2	1	0.093	0.046	1	1	1	4
385	2007	4	18.1296759	65.184	689	602	0	7*	11	140.8891479	16.6496936	2	1	0.384	-0.173	1	1	1	5
385	2007	4	18.1296759	65.184	689	602	0	8*	11	140.7625637	16.6683714	2	1	-0.014	-0.055	1	1	1	5
385	2007	4	18.1312072	65.184	689	602	0	6*	11	140.9259692	16.6552381	2	1	-0.072	-0.225	1	1	1	

Les O-C sont calculées avec la théorie TASS1.7 (voir section 2.2) en accord avec les corrections de réfraction, d'aberration et des effets de phase. La position de Saturne est calculée à partir des éphémérides numériques DE414 du Jet Propulsion Laboratory (Standish, 2006, [71]). Les O-C sont ici purement indicatives. Elles servent à estimer la précision des observations par rapport à la théorie TASS. Dès que c'est possible, les résidus sont calculés en intersatellite. Cela signifie que si les satellites sont observés à un même instant et que leur position est donnée en coordonnées absolues ou par rapport à la planète, les O-C sont calculées en intersatellite par rapport à un satellite de référence. Dans ce cas, le satellite de référence est indiqué via le paramètre *satref*.

3.3.2 Distribution des observations

Pour compter les observations, nous avons suivi la même règle que ST90. En effet, nous avons compté une observation pour chaque coordonnée de chaque satellite observé ou chaque satellite de référence. Par exemple, si les deux coordonnées de l'observation Mimas-Titan sont données, alors on compte deux observations pour Mimas et deux autres pour Titan. Cependant si un satellite de référence apparaît plusieurs fois pour une même date d'observation, alors il est compté seulement une fois.

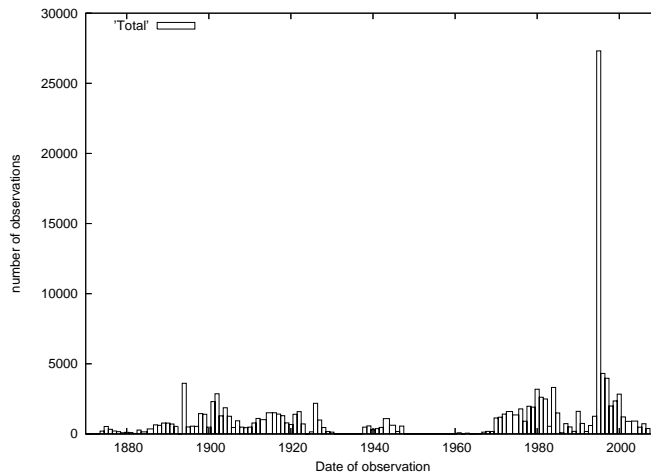


Fig. 3.2: Histogramme du nombre d'observations à chaque opposition

L'histogramme de la figure 3.2 représente le nombre d'observations par opposition entre 1874 et 2007. La distribution est clairement hétérogène. Pour certaines périodes (entre 1930 et 1938 et 1947 et 1961), aucune observation n'est disponible. De même, certaines années possèdent un nombre d'observations très important, comme en 1995 où on compte environ 28 000 observations. En fait, en 1995, des phénomènes mutuels des satellites de Saturne étaient observables. On a donc pu mesurer la position de ces satellites juste avant et après ces phénomènes grâce aux CCD à décharge rapide. Cependant, ces observations sont vraisemblablement dépendantes.

Nous avons tracé sur la figure 3.3, le nombre de nuits d'observations par opposition. Ceci permet de relativiser l'importance du nombre d'observations pour des années comme 1995. Le détail pour chaque satellite est visible sur la figure 3.4.

Le tableau 3.4 donne le nombre d'observations, le nombre de nuits d'observations et la période d'observations couverte pour chaque satellite. On observe des différences suivant les satellites puisque certains comme Mimas et Encelade, sont peu observés à cause de leur

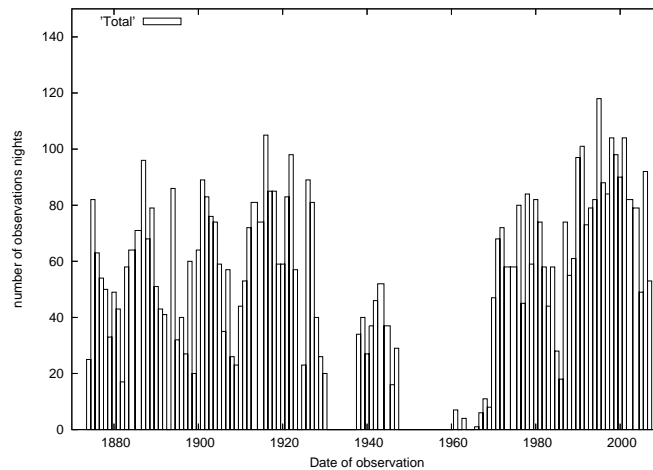


Fig. 3.3: Histogramme du nombre de nuits d'observations à chaque opposition

proximité avec la planète. Hypérion également à cause de sa faible magnitude qui a rendu son observation difficile par le passé. Enfin, Japet car son éloignement de la planète fait qu'il se situe généralement hors du champ sur les images CCD.

À l'opposé, d'autres satellites sont beaucoup observés comme Rhéa, Titan, Dioné et Téthys. Au total, on dénombre 130 898 observations sur 6 023 nuits.

Tab. 3.4: Nombre d'observations, de nuits d'observations et période couverte pour chaque satellite

satellite	nombre	nuits	période
Mimas	4410	714	1874-2005
Encelade	11529	1927	1874-2005
Téthys	24034	3275	1874-2007
Dioné	21501	3265	1874-2007
Rhéa	26920	3976	1874-2007
Titan	22788	4011	1874-2007
Hypérion	7321	1896	1874-2007
Japet	12395	2760	1874-2007

3.3.3 Statistiques des observations

Le tableau 3.5 présente les statistiques des O-C avec les dix références comportant le plus grand nombre d'observations. Les observations dont les O-C sont supérieures à 2'' ne sont pas prises en compte. Les moyennes (μ_α et μ_δ), les écarts-types (σ_α et σ_δ) et le nombre (N_α et N_δ) pour la première et la seconde coordonnées sont donnés pour chaque satellite.

Tab. 3.5: Statistiques pour les dix références aux plus grand nombre d'observations

reference	satellite	μ_α	σ_α	μ_δ	σ_δ	N_α	N_δ
Vienne et al. (2001) (539) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	-0.016	0.083	0.001	0.078	216	216
	S2	0.014	0.092	-0.006	0.067	861	861
	S3	0.004	0.080	0.003	0.065	2048	2048
	S4	-0.007	0.062	0.000	0.055	1570	1570
	S5	0.014	0.084	-0.002	0.063	4739	4739
	S6	0.007	0.106	0.009	0.087	1484	1484
	S7	-0.084	0.118	-0.038	0.121	322	322
	S8	-0.107	0.090	0.010	0.068	524	524
USNO Flagstaff 1999-2006 (602) (α, δ)	S1	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0
	S2	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0
	S3	-0.040	0.172	0.011	0.139	116	116
	S4	0.006	0.105	-0.011	0.130	203	203
	S5	0.016	0.090	0.004	0.117	364	364
	S6	0.068	0.115	-0.038	0.112	405	405
	S7	-0.005	0.259	0.050	0.321	300	300
	S8	-0.012	0.105	-0.010	0.137	353	353
Pascu (1982) Not published (31) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	-0.055	0.223	-0.017	0.157	57	57
	S2	-0.009	0.125	-0.022	0.157	110	110
	S3	-0.003	0.074	-0.003	0.099	140	140
	S4	-0.012	0.066	0.003	0.108	166	167
	S5	0.013	0.064	-0.023	0.079	209	209
	S6	-0.011	0.066	0.024	0.081	228	228
	S7	0.050	0.236	-0.075	0.171	11	11
	S8	-0.028	0.146	0.033	0.145	217	216
USNO (1929) (4) (p, s)	S1	-0.002	0.198	-0.083	0.221	122	121
	S2	-0.006	0.169	-0.080	0.167	129	127
	S3	-0.008	0.169	-0.002	0.185	487	483
	S4	0.006	0.159	-0.006	0.166	280	281
	S5	0.008	0.154	-0.031	0.198	694	690
	S6	-0.002	0.214	0.025	0.274	581	575
	S7	-0.010	0.380	0.128	0.468	89	88
	S8	-0.004	0.210	0.158	0.169	120	117
Harper et al. (1999) (522) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	0.172	0.234	-0.064	0.099	14	15
	S2	-0.081	0.600	-0.056	0.241	118	119
	S3	-0.017	0.093	-0.003	0.099	277	277
	S4	0.015	0.087	-0.005	0.112	219	219
	S5	-0.004	0.238	-0.012	0.188	1068	1068
	S6	0.065	0.146	-0.030	0.112	336	336
	S7	0.103	0.222	0.056	0.326	189	187
	S8	-0.148	0.123	0.118	0.107	189	189
Qiao et al. 2004 (604) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	0.040	0.255	0.062	0.136	44	44
	S2	-0.081	0.185	0.063	0.248	141	141
	S3	0.008	0.126	-0.002	0.154	236	236
	S4	-0.018	0.090	0.028	0.105	246	246
	S5	0.020	0.132	-0.003	0.148	862	862
	S6	0.002	0.099	-0.038	0.120	241	241
	S7	0.000	0.000	0.000	0.000	0	0
	S8	-0.090	0.075	-0.100	0.075	66	66
Harper et al. (1997) (521) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	-0.160	0.213	0.050	0.213	73	73
	S2	-0.022	0.109	-0.007	0.163	199	199
	S3	-0.011	0.079	-0.002	0.089	221	221
	S4	0.003	0.072	0.000	0.079	214	214
	S5	0.023	0.118	-0.006	0.129	852	852
	S6	-0.015	0.087	0.009	0.096	157	157
	S7	0.043	0.203	0.043	0.144	88	88
	S8	-0.066	0.072	-0.030	0.085	52	52
Struve(1898) (9) (p, s)	S1	0.030	0.181	0.012	0.163	119	105
	S2	-0.032	0.121	0.003	0.126	233	222
	S3	-0.005	0.124	0.034	0.131	549	532
	S4	-0.032	0.136	0.065	0.144	212	209
	S5	0.026	0.127	-0.073	0.143	490	475
	S6	-0.069	0.345	0.034	0.281	80	78
	S7	0.059	0.603	-0.038	0.336	232	234
	S8	-0.054	0.319	-0.027	0.209	22	22
Veillet & Dourneau 1.5 (48) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	-0.205	0.156	-0.047	0.105	10	10
	S2	-0.004	0.124	-0.025	0.120	57	57
	S3	-0.003	0.139	0.012	0.093	78	78
	S4	0.008	0.083	0.003	0.082	155	155
	S5	-0.010	0.125	-0.007	0.098	884	884
	S6	-0.004	0.092	0.021	0.076	199	199
	S7	0.006	0.168	0.008	0.089	197	197
	S8	0.051	0.116	0.003	0.126	196	196
Peng, Vienne, Shen (2002) (541) ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)	S1	-0.023	0.054	-0.017	0.044	54	54
	S2	-0.005	0.051	-0.021	0.054	136	136
	S3	0.000	0.034	-0.002	0.043	120	120
	S4	-0.004	0.037	-0.002	0.038	136	136
	S5	0.029	0.066	0.023	0.047	336	336
	S6	0.006	0.051	-0.003	0.061	548	548
	S7	-0.022	0.066	0.037	0.095	96	96
	S8	-0.083	0.073	-0.050	0.043	102	102

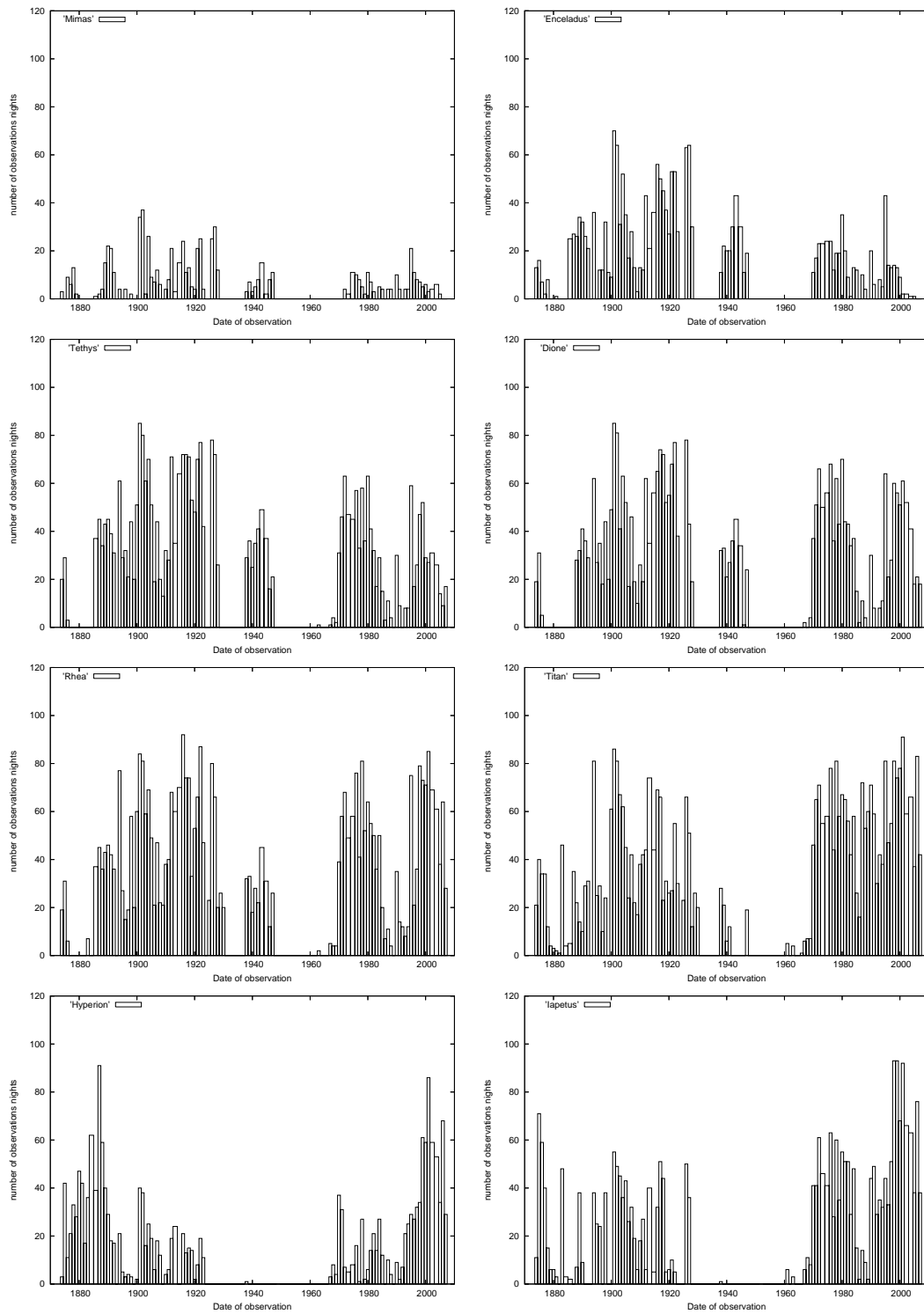


Fig. 3.4: Histogrammes des nombres de nuits d'observations pour chaque satellite à chaque opposition

Chapitre 4

L'ajustement aux observations

Sommaire

4.1	Corrections pour l'ajustement aux observations	46
4.1.1	Passage dans les coordonnées de l'observation	47
4.1.2	Échelle de temps	47
4.1.3	Temps lumière	47
4.1.4	Correction de l'aberration	49
4.1.5	Correction de la réfraction	50
4.1.6	Correction de la phase	51
4.2	Équations aux variations et ajustement	54
4.2.1	Équations aux variations	55
4.2.2	Méthode des moindres carrés	56
4.2.3	Principe général de l'ajustement	57

L'ajustement aux observations consiste à estimer les paramètres du modèle qui minimisent la différence entre les positions observées et les positions calculées (appelée communément O-C). Un certain nombre de corrections sont prises en compte pour effectuer cette comparaison. Ensuite, le calcul des équations aux variations permet d'exprimer la variation des positions en fonction des variations des conditions initiales ou des autres paramètres. Enfin, les conditions initiales optimales peuvent être déterminées par la méthode des moindres carrés.

4.1 Corrections pour l'ajustement aux observations

L'ajustement aux observations nécessite la prise en compte d'un certain nombre de phénomènes ou corrections afin de comparer les positions observées aux positions calculées. Ainsi, les positions observées et calculées doivent être exprimées dans les mêmes conditions, à savoir le même repère, la même échelle de temps, etc... Il est donc nécessaire de prendre en compte un certain nombre de corrections pour effectuer cette comparaison. Les corrections à appliquer aux positions calculées sont les suivantes :

- Passage dans les coordonnées de l'observation.
- Conversion des échelles de temps
- Calcul du temps de lumière.
- Correction de l'aberration (éventuellement).
- Correction de la réfraction (éventuellement).
- Correction de la phase (éventuellement).

4.1.1 Passage dans les coordonnées de l'observation

Les coordonnées utilisées pour les observations sont essentiellement de cinq types et dépendent de l'instrument utilisé.

- Les coordonnées absolues : ascension droite et déclinaison (α, δ) . Elles peuvent présenter le désavantage de faire intervenir la position de la planète qui en général est imprécise.
- Les coordonnées différentielles : $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta)$.
- Les coordonnées relatives : $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$.
- Les coordonnées tangentielles (X, Y) sont exprimées dans le plan tangent à la sphère céleste. La projection gnomonique permet de passer des coordonnées différentielles aux coordonnées tangentielles.
- Les coordonnées micrométriques (angle de position et séparation (p, s)) sont utilisées dans le cadre d'observation avec un micromètre ⁽¹⁾.

Les coordonnées dites intersatellites donnent les positions d'un objet par rapport à la planète ou un satellite. Elles évitent donc le problème lié aux coordonnées absolues, à savoir le biais introduit par la position de la planète.

Le passage d'un type de coordonnées à un autre est relativement aisé. On pourra donc privilégier un type de coordonnées dans la comparaison aux observations, sauf à quelques exceptions, lorsque seulement l'une des coordonnées est disponible (voir Annexe A).

4.1.2 Échelle de temps

La plupart des observations sont données dans l'échelle de temps UTC (Temps Universel Coordonné). Les modèles dynamiques calculent la position des objets dans le temps des éphémérides (TE) ou dans le temps terrestre (TT). Ces échelles de temps sont liées via le TAI (Temps Atomique International) :

$$\text{TE} = \text{TT} = \text{TAI} + 32.184\text{s}$$

et depuis le 1^{er} janvier 1972 :

$$\text{TAI} - \text{UTC} = n \text{ secondes (n est un entier)}$$

Avant 1972, on utilise le temps UT1 associé à la rotation de la Terre que l'on peut considérer comme une approximation du temps UTC. Les variations de la différence entre TE et UT1 (voir figure 4.1) peuvent être déterminées entre 700 av. J-C et 1980 par Stephenson et Morrison (1984, [72]).

4.1.3 Temps lumière

Le temps lumière est le temps mis par la lumière pour parcourir la distance objet-observateur. Le temps de l'observation est défini comme le temps où la lumière venant de l'objet est perçue par l'observateur. Pour connaître la position de l'objet au moment où la lumière en est partie, on soustrait le temps lumière au temps de l'observation. Le temps lumière τ est alors donné par :

$$\tau = \frac{|\overrightarrow{\text{OM}}(t - \tau) - \overrightarrow{\text{OG}}(t)|}{c} \quad (4.1)$$

¹Le micromètre est un instrument permettant de mesurer la position précise des astres par un système de cercles gradués.

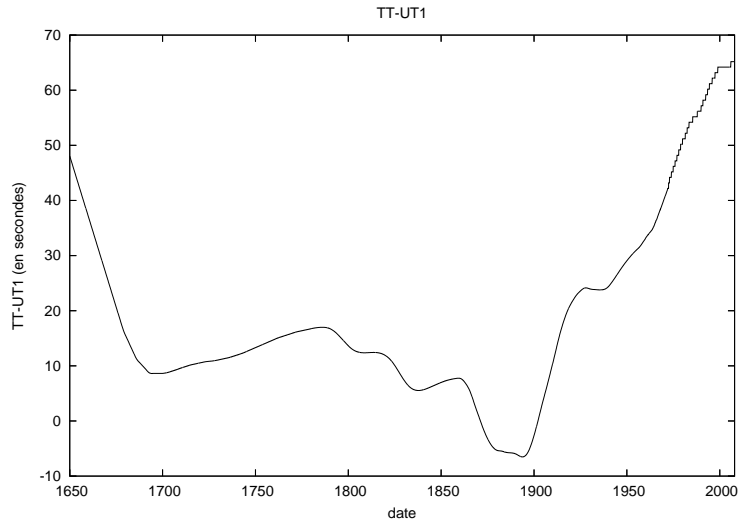


Fig. 4.1: Différence TAI-UT1 entre 1650 et 2008 d'après Stephenson et Morrison (1984, [72]).

où c est la vitesse de la lumière, $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ est le vecteur Soleil-Satellite et $\overrightarrow{\mathbf{OG}}$ le vecteur Soleil-Observateur.

Le calcul du temps lumière se fait de manière itérative. La première approximation de ce temps lumière est déterminée par le temps lumière Terre-Barycentre ⁽²⁾. Ce dernier peut être obtenu indépendamment du modèle grâce aux éphémérides planétaires numériques (notamment VSOP87 ou les éphémérides du JPL DE406 ou DE414). Dans ce cas, le temps lumière est donné par :

$$dt_{n+1} = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{OB}}(t - dt_n) - \overrightarrow{\mathbf{OT}}(t)|}{c}$$

$$dt_0 = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{OB}}(t) - \overrightarrow{\mathbf{OT}}(t)|}{c}$$

où $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ le vecteur Soleil-barycentre et $\overrightarrow{\mathbf{OT}}$ le vecteur Soleil-Terre. Nous atteignons la précision souhaitée (moins d'une seconde) après 3 itérations (soit dt_1, dt_2, dt_3).

Ce temps lumière est alors utilisé comme premier terme de la suite que l'on cherche à calculer. Concrètement, le temps lumière Objet-Observateur est donné par la suite :

$$\tau_{n+1} = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{OB}}(t - \tau_n) + \overrightarrow{\mathbf{BP}}(t - \tau_n) + \overrightarrow{\mathbf{PM}}(t - \tau_n) - \overrightarrow{\mathbf{OT}}(t) + \overrightarrow{\mathbf{GT}}(t)|}{c}$$

$$\tau_0 = dt_3$$

où $\overrightarrow{\mathbf{BP}}$ le vecteur Barycentre-Planète, $\overrightarrow{\mathbf{GT}}$ le vecteur Observateur-Terre et $\overrightarrow{\mathbf{PM}}$ le vecteur Planète-Satellite. Chaque satellite observé a ainsi son propre temps lumière.

La plupart des auteurs se contentent du temps de lumière Observateur-Planète ce qui revient à considérer tous les satellites à la même distance de l'observateur. En considérant le temps lumière Satellite-Planète $\tau \leq a/c$ où a est le demi-grand axe, on a une différence

²Le terme Barycentre désigne le barycentre du système planétaire.

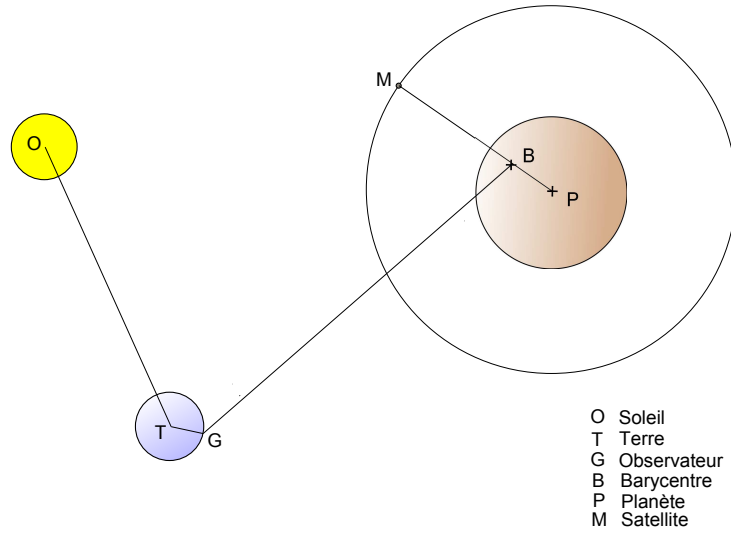


Fig. 4.2: Schéma explicatif du calcul du temps lumière

maximale pour Japet avec $\tau \sim 12$ s. En utilisant $n.a$ (n désignant le moyen mouvement) comme vitesse du satellite, on montre que la différence en positions est proportionnelle à \sqrt{a} . Vienne *et al.* (2001, [89]) estiment une différence en position de 39 km au maximum pour Japet. Ils soulignent également que cette différence est sous-estimée car elle ne tient pas compte de la vitesse de Saturne (~ 10 km/s). Dans ce cas, la différence en positions dépend de deux termes, l'un proportionnel à \sqrt{a} (effet dû au satellite) et l'autre proportionnel à a (effet dû à la planète). Avec ces considérations, la différence en positions peut atteindre 120 km pour Japet (soit environ 20 mas vu de la Terre).

L'intérêt du calcul préliminaire du temps de lumière est de minimiser le nombre d'itérations pour déterminer le temps de lumière observateur-satellite. En effet, comme le temps-lumière doit être calculé pour chaque satellite, le calcul préliminaire permet un gain d'itérations puisqu'on atteint ainsi la précision souhaitée (moins d'une seconde) après seulement une itération supplémentaire (c'est-à-dire qu'on calcule uniquement τ_1).

4.1.4 Correction de l'aberration

Le phénomène d'aberration est lié aussi à la finitude de la vitesse de la lumière et au fait que l'observateur est en mouvement par rapport aux étoiles. On doit la découverte de ce phénomène à James Bradley au XVIII^e siècle. La correction de l'aberration est détaillée dans Woolard (1966, [94]). Ici, nous nous attachons à montrer comment l'aberration peut être corrigée à partir d'approximations réalistes sur le mouvement de la Terre dans l'espace.

En effet, d'après Woolard (1966, [94]), en mécanique newtonienne, le vecteur vitesse des photons arrivant à l'observateur peut s'écrire :

$$\vec{c} = c \frac{\overrightarrow{OG}(t) - \overrightarrow{OM}(t - \tau)}{|\overrightarrow{OG}(t) - \overrightarrow{OM}(t - \tau)|}$$

et le vecteur vitesse dans un repère de directions fixes centré sur l'observateur peut s'écrire :

$$\vec{c}_r = \vec{c} - \vec{v}_{\text{obs}}(t)$$

où $\overrightarrow{\mathbf{v}_{\text{obs}}}$ est la vitesse barycentrique de l'observateur.

En utilisant la relation 4.1, on a :

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_r} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OG}}(t) - \overrightarrow{\mathbf{OM}}(t - \tau)}{\tau} - \overrightarrow{\mathbf{v}_{\text{obs}}}(t)$$

La direction apparente de l'objet vue de l'observateur peut donc s'écrire suivant le vecteur unitaire $\overrightarrow{\mathbf{u}}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t - \tau) - \overrightarrow{\mathbf{OG}}(t) + \tau \overrightarrow{\mathbf{v}_{\text{obs}}}(t)}{|\overrightarrow{\mathbf{OM}}(t - \tau) - \overrightarrow{\mathbf{OG}}(t) + \tau \overrightarrow{\mathbf{v}_{\text{obs}}}(t)|}$$

Enfin, en considérant le mouvement de la Terre rectiligne uniforme entre $t - \tau$ et t ⁽³⁾, on a :

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}}(t) - \tau \overrightarrow{\mathbf{v}_{\text{obs}}} = \overrightarrow{\mathbf{OG}}(t - \tau)$$

La direction apparente de l'objet à l'instant t peut être approximée par la direction de Observateur-Objet à l'instant $t - \tau$. L'aberration est donc corrigée de cette manière.

4.1.5 Correction de la réfraction

La réfraction atmosphérique est la déviation des rayons lumineux liée à la présence de l'atmosphère. En notant z_0 la distance zénithale observée (c'est à dire l'angle entre le zénith du lieu et l'objet) et z la distance zénithale de l'objet s'il n'y avait pas d'atmosphère alors la réfraction s'écrit : $R = z - z_0$. Elle tend à relever la position des astres par rapport à l'horizon.

Les principaux modèles de réfraction supposent que l'atmosphère est constituée de couches horizontales et chaque couche possède un indice de réfraction qui lui est propre. Autrement dit, les couches d'égal indice sont localement des sphères centrées en un point O proche du centre de la Terre. En utilisant la loi de Descartes sur la réfraction et par des considérations géométriques, on arrive à l'expression (voir les détails dans [69]) :

$$R = \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z_0}} \quad (4.2)$$

en intégrant entre l'infini ($n = 1$) et le sol ($n = n_0$) et où r_0 est la distance entre l'observateur et le point O .

En intégrant et en développant la formule (4.2) et en ne conservant que les termes du second ordre, on obtient la formule de Laplace :

$$R = A \tan z_0 - B \tan^3 z_0$$

Cette relation donne une valeur approchée de la réfraction (hypothèse pas rigoureusement exacte, développement au second ordre) qui reste relativement précise pour des valeurs de z_0 inférieures à 70° . Les coefficients A et B sont déduits des tables de Pulkovo [1].

Ainsi, pour des conditions atmosphériques standards (Température de 0°C , pression de 1013 hPa, une longueur d'onde de 590 nm et pression partielle de vapeur d'eau de 0 Pa), la valeur de la réfraction est :

$$R = 60'' .236 \tan z_0 - 0'' .0675 \tan^3 z_0$$

³En pratique, le temps lumière pour des objets proches de Saturne est d'environ 80 minutes.

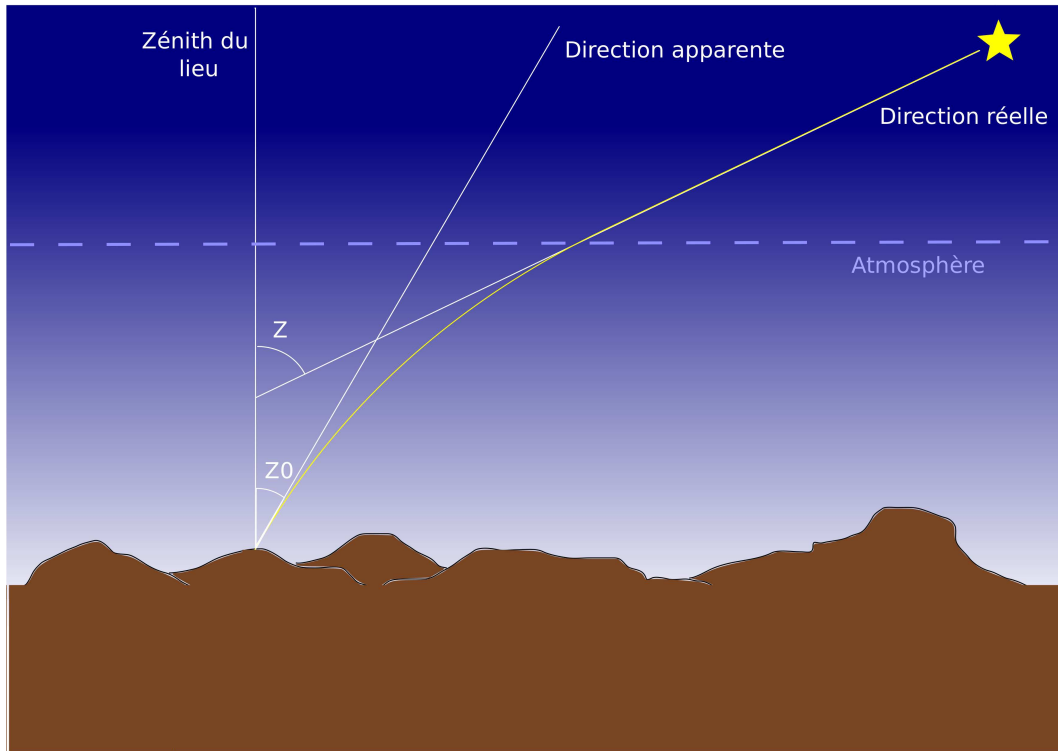


Fig. 4.3: Schéma explicatif de la réfraction. z_0 est la distance zénithale observée et z est la distance zénithale s'il n'y avait pas d'atmosphère. La réfraction est alors l'angle $R = z - z_0$.

Cette relation n'est plus valable pour de fortes distances zénithales ($z_0 \geq 70^\circ$). Dans ce cas, on peut toujours utiliser les tables de réfraction mais la précision de l'observation doit être relativisée par rapport aux conditions dans lesquelles elle a été réalisée (turbulence liée à l'épaisseur d'atmosphère traversée par le rayon lumineux).

4.1.6 Correction de la phase

Au cours d'une observation, c'est la position du photocentre qui est mesurée et non celle du centre de masse. Pour des petits objets éloignés, l'écart entre ces deux points est négligeable et ils peuvent être alors confondus. Pour des objets plus gros ou plus proches, cet écart peut devenir important. En général, cette correction est rarement effectuée par l'observateur.

Les deux principaux effets qui produisent un écart entre le photocentre et le centre de masse sont une surface non-homogène de l'objet et l'effet de phase. L'hétérogénéité de la surface est difficilement modélisable donc rarement prise en compte (sauf pour les phénomènes mutuels). L'effet de phase a été plusieurs fois modélisé mais pour notre étude des satellites planétaires, nous allons détailler la méthode de Lindgren (1977, [48]).

La phase i d'un objet O vu depuis la Terre T et éclairé par le Soleil S , est fournie par la relation suivante :

$$\cos i = \frac{\vec{OT} \cdot \vec{OS}}{\|\vec{OT}\| \|\vec{OS}\|}$$

où \vec{OS} est le vecteur objet-Soleil et \vec{OT} est le vecteur objet-Terre. Elle peut alors atteindre

environ 12° pour des objets autour de Jupiter et environ 6° pour des objets autour de Saturne.

Lindgren (1977, [48]) montre que l'écart entre le photocentre (P) et le centre de masse (P_0) pour un objet sphérique de surface homogène peut se calculer en fonction de cet angle de phase et du rayon s de l'objet par la relation :

$$|P - P_0| = Cs \sin(i/2)$$

C est une fonction qui dépend de la loi de diffusion utilisée. Pour des corps qui possèdent une atmosphère et en général très diffusants, on utilisera la loi de Lambert :

$$C = \frac{3\pi}{4} \frac{\cos^3(\frac{i}{2})}{\sin i + (\pi - i) \cos i}$$

Pour des objets sans atmosphère qui ont une surface de type lunaire, on préférera la loi de Lommel-Seeliger qui donne :

$$C = \frac{2}{3\pi} [\sin i + (\pi - i) \cos i] \left[\cos(\frac{i}{2}) - \sin^2(\frac{i}{2}) \ln(\cot(\frac{i}{4})) \right]$$

Pour les satellites, la loi de Minnaert est la plus adaptée ⁽⁴⁾ et c'est celle que nous avons utilisée. C'est une loi empirique pour laquelle :

$$C = \frac{2k + 1}{2k + 2}$$

où k est le paramètre de Minnaert. Pour des angles de phase petits (inférieurs à 30°) ce paramètre peut être considéré comme constant. Ainsi, pour des objets dont la surface est de type lunaire (sans atmosphère), $k = 0.5$. Pour des objets à surface diffusante (avec atmosphère) $k = 1$. On remarquera que la loi de Lambert correspond à la loi de Minnaert pour $k = 1$ et pour un angle de phase faible et que la loi de Lommel-Seeliger correspond à la loi de Minnaert pour $k = 0.5$.

Nous présentons dans le tableau 4.1 le rayon (issu de Jacobson, 2006, [37]) ainsi que les valeurs utilisées C et k pour chaque satellite. Excepté pour Titan, les paramètres de Minnaert ne sont pas disponibles. Ces paramètres ont alors été pris égaux à $k = 0.5$ lorsque le satellite ne possède pas d'atmosphère (tous les satellites sauf Titan) et à $k = 1$ pour ceux qui en possèdent une (Titan). Hestroffer (2003, [33]) donne un paramètre de Minnaert de $k = 0.90 \pm 0.02$ pour Titan avec un rayon $R = 2847$ km. Compte tenu des nouvelles valeurs du rayon données par Jacobson, nous avons gardé $k = 1$.

Tab. 4.1: Paramètres utilisés pour la correction de l'effet de phase pour les satellites de Saturne

Satellite	rayon (km)	k	C
Mimas	198.30	0.5	0.667
Encelade	252.10	0.5	0.667
Téthys	533.00	0.5	0.667
Dioné	561.70	0.5	0.667
Rhée	764.30	0.5	0.667
Titan	2575.50	1	0.750
Hypérion	133.00	0.5	0.667
Japet	735.60	0.5	0.667

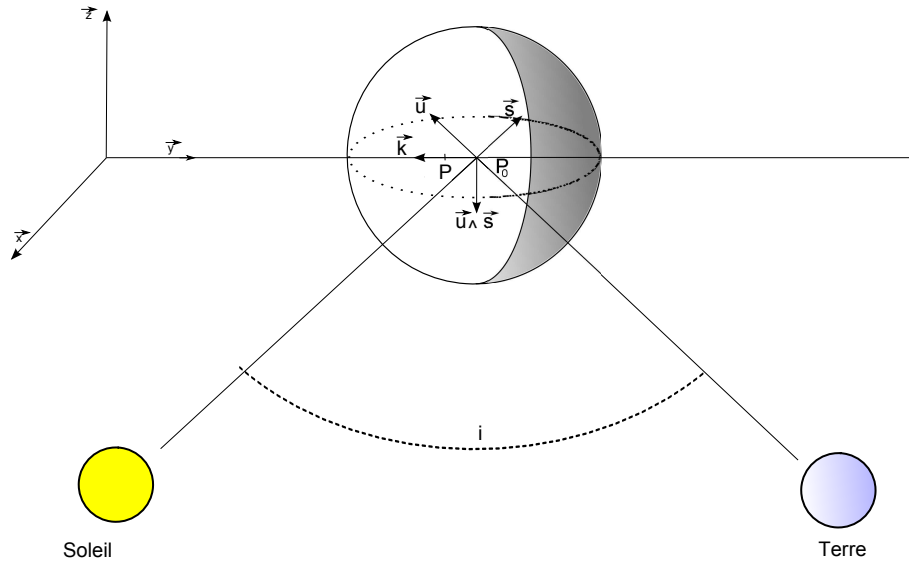


Fig. 4.4: Schéma représentant les paramètres nécessaires au calcul de l'écart entre le centre de masse et le photocentre

Il reste à déterminer dans quelle direction s'effectue cet écart entre photocentre et centre de masse.

Sur la figure 4.4, nous avons représenté un objet sphérique avec les directions Objet(O)-Terre(T) et Objet(O)-Soleil(S). Notons \vec{s} le vecteur normalisé de la direction Soleil-Objet et \vec{u} le vecteur normalisé de la direction Terre-Objet. L'écart entre le photocentre et le centre de masse se produit donc dans le plan TSO et perpendiculairement à la direction \vec{u} ce qu'on peut caractériser par le vecteur \vec{k} qui vaut $\vec{k} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{s})$. Par la suite, nous normalisons ce vecteur.

Par construction, le vecteur \vec{k} appartient au plan tangent de l'observation. Sa projection sur les axes X et Y du plan tangent fournit Q l'angle entre la direction du pôle Nord céleste et la direction Objet Soleil (projeté dans le plan tangent) (voir figure 4.5). En coordonnées apparentes, l'écart entre centre de masse et photocentre peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha \cos \delta &= Cs \sin \frac{i}{2} \sin Q \\ \Delta\delta &= Cs \sin \frac{i}{2} \cos Q\end{aligned}$$

Ici, s est le rayon apparent de l'objet considéré. La direction centre de masse-photocentre est celle du vecteur \vec{k} .

⁴Plus de détails sont présentés dans Fienga (1999, [25]).

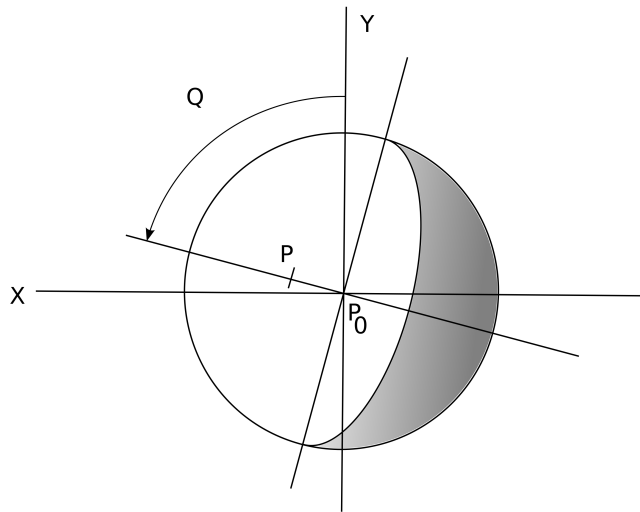


Fig. 4.5: Représentation de l'écart entre le centre de masse et le photocentre dans le plan tangent de l'observation

De manière pratique, nous pouvons directement prendre en compte l'effet de phase en corrigeant le vecteur Observateur-Objet du vecteur $Cs \sin i/2 \vec{k}$.

Nous présentons (Tab. 4.2) la quantification de l'effet de phase pour chaque satellite en donnant l'écart maximum entre le photocentre et le centre de masse calculé pour un angle de phase de 6.3° qui est la valeur maximale pour Saturne.

Tab. 4.2: Valeurs de l'écart maximal entre photocentre et centre de masse

satellite	$ P - P_0 _{max}$ (mas)
Mimas	1.1
Encelade	1.3
Téthys	2.8
Dioné	3.0
Rhée	4.1
Titan	15.4
Hypériorion	0.7
Japet	3.9

Il est bon de noter que pour certains corps, cette correction est à discuter. En effet, certains satellites comme Mimas et Japet ne présentent pas une surface homogène. Le modèle de correction de phase peut alors s'avérer insuffisant. Au vu des écarts maximum observés pour ces satellites (pas plus de 4 mas), nous avons choisi d'effectuer tout de même la correction de l'effet de phase pour chacun des satellites.

4.2 Équations aux variations et ajustement

Grâce à l'ensemble des corrections présentées précédemment, il est désormais possible de comparer les positions observées aux positions calculées par le modèle. La seconde étape

est le calcul des équations aux variations qui vont permettre de relier une variation des conditions initiales aux variations de positions.

4.2.1 Équations aux variations

Bien qu'équivalentes dans le principe, les équations aux variations pour les deux modèles utilisés sont détaillées de manière distincte.

Équations aux variations pour l'intégration numérique

Les équations aux variations permettent de déterminer à une date donnée, la variation des positions-vitesses de chaque objet en fonction des variations de chaque paramètre. Considérons le vecteur $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$ des p paramètres du modèle. Pour chaque temps d'observations t_j , $j = 1, \dots, N$, on peut calculer la position des m corps noté \mathbf{r} ⁽⁵⁾ et solution d'un système différentiel (système issu des équations du mouvement). En notant φ le flot dynamique associé à ce système projeté dans l'espace des positions, on peut alors écrire :

$$\mathbf{r}^j = \varphi(\mathbf{c}, t_j)$$

Une variation des paramètres initiaux $\Delta\mathbf{c} = (\Delta c_1, \dots, \Delta c_p)$ se traduira alors par une variation de la position que l'on notera :

$$\mathbf{r}^j + \Delta\mathbf{r}^j = \varphi(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}, t_j)$$

Ainsi, d'après la formule de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}^j &= \varphi(\mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}, t_j) - \varphi(\mathbf{c}, t_j) \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial\varphi}{\partial c_k}(\mathbf{c}, t_j) \cdot \Delta c_k + O((\Delta c_k)^2) \end{aligned}$$

En supposant que les variations des paramètres initiaux sont suffisamment petites, on pourra se contenter de l'ordre 1, à savoir :

$$\Delta\mathbf{r}^j \approx \sum_{k=1}^p \frac{\partial\varphi}{\partial c_k}(\mathbf{c}, t_j) \cdot \Delta c_k \quad (4.3)$$

Le programme d'intégration numérique permet d'intégrer ces équations aux variations en même temps que les équations du mouvement, autorisant ainsi le calcul des dérivées partielles. Par la suite, on cherchera à déterminer la valeur optimale de $\Delta\mathbf{c}$ pour que la différence entre les positions calculées et positions observées $\Delta\mathbf{r}$ soit la plus petite possible au sens des moindres carrés. L'écriture des équations qui permet de relier les variations de positions de chacun des satellites aux variations de positions astrométriques (variation des coordonnées absolues, différentielles ou coordonnées angle de position et séparation) est détaillée dans l'annexe A.

⁵Les positions de chacun des corps du système sont intégrées simultanément puisque la position d'un corps dépend de la position des autres corps. Le vecteur \mathbf{r} défini ici est donc formé de $6m$ composantes correspondant aux positions vitesses des m corps.

Équations aux variations pour TASS

Le principe est sensiblement le même excepté que cette fois, les équations aux variations permettent de déterminer la variation des termes des séries σ (fréquence, amplitude et phase associées aux m corps). Ces termes sont en effet fonction des conditions initiales, on peut alors écrire :

$$\sigma = \Phi(\mathbf{c})$$

Notons que les termes des séries ne dépendent cette fois pas du temps. Pour les mêmes raisons et sur le même principe que précédemment, une variation des termes des séries peut s'écrire :

$$\Delta\sigma \approx \sum_{k=1}^p \frac{\partial\Phi}{\partial c_k}(\mathbf{c}) \cdot \Delta c_k \quad (4.4)$$

Cette fois, on cherchera à estimer la variation des conditions initiales à travers la variation des termes des séries par la méthode des moindres carrés. Autrement dit, on cherchera à déterminer les valeurs des conditions initiales qui minimisent la différence entre positions observées et positions calculées (grâce aux termes des séries) au sens des moindres carrés.

En raison de leur non-dépendance au temps, les dérivées partielles $(\frac{\partial\Phi}{\partial c_k})$ ont été calculées une fois pour toutes, en supposant que les variations de ces dérivées étaient négligeables.

4.2.2 Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés est largement utilisée et détaillée dans de nombreux ouvrages ou articles (par exemple dans Eichhorn, 1993, [22]). Nous présentons ici la méthode telle qu'elle est appliquée à notre étude.

Le système défini par l'équation (4.3) peut s'écrire sous forme matricielle $\Delta X = B\Delta C$, en posant ⁽⁶⁾ :

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta r^1 \\ \vdots \\ \Delta r^N \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial c_1}(\mathbf{c}, t_1) & \dots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_p}(\mathbf{c}, t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial c_1}(\mathbf{c}, t_N) & \dots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_p}(\mathbf{c}, t_N) \end{pmatrix}, \Delta C = \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_p \end{pmatrix}$$

Nous cherchons maintenant les valeurs optimales de $(\Delta c_k)_{k=1,\dots,p}$ qui minimisent au sens des moindres carrés les composantes de la matrice ΔX .

Nous considérons pour cela, la fonction \mathcal{F} définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \Delta C \mapsto \|\Delta X - B\Delta C\|^2 &= \sum_{j=1}^N \left(\Delta r^j - \sum_{k=1}^p \frac{\partial\varphi}{\partial c_k}(\mathbf{c}, t_j) \cdot \Delta c_k \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\Delta r^j - \sum_{k=1}^p b_{jk} \Delta c_k \right)^2 \end{aligned}$$

Nous cherchons un minimum de cette fonction \mathcal{F} , c'est-à-dire que l'on cherche à résoudre $d\mathcal{F} = 0$. Ceci peut encore s'écrire, pour tout indice j , sous la forme d'un système de N

⁶Ce raisonnement est le même pour l'équation (4.4).

lignes appelé système normal :

$$\sum_{j=1}^N \left(b_{jk} r^j - \sum_{k=1}^p b_{jk} \Delta c_k b_{kj} \right) = 0$$

ou encore ${}^t B \Delta X = {}^t B B \Delta C$. La solution recherchée peut donc s'écrire $\Delta C = ({}^t B B)^{-1} {}^t B \Delta X$. Il s'agit de la solution des moindres carrés qui se ramène finalement à l'inversion d'une matrice. La matrice normale du système N peut alors s'écrire :

$$N = {}^t B B$$

Les composantes de ΔX (c'est-à-dire les observations) peuvent être corrélées et avoir des précisions variées. Dans ce cas, nous considérons la matrice de covariance des observations V_{obs} . Dans la théorie des moindres carrés, cette matrice est supposée connue. On cherche alors à minimiser $\|U(\Delta X - B \Delta C)\|^2$ où $U^T U = V_{obs}^{-1}$. Dans ce cas, la solution des moindres carrés s'écrit :

$$\Delta C = ({}^t B V_{obs}^{-1} B)^{-1} {}^t B V_{obs}^{-1} \Delta X \quad (4.5)$$

et la matrice de covariance correspondante $\Lambda = ({}^t B V_{obs}^{-1} B)^{-1}$.

Le principal problème est d'estimer la matrice V_{obs} . Dans le cas précédent, nous avons considéré que les observations étaient indépendantes et avaient toutes la même précision, c'est-à-dire que V_{obs} valait la matrice identité. Cette hypothèse n'est pas très réaliste.

Une autre manière de faire est de considérer que les observations sont indépendantes mais que leur précision est variable. Ainsi, la matrice s'écrit :

$$V_{obs} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{N_{obs}}^2 \end{pmatrix}$$

où N_{obs} est le nombre d'observations. Cela revient à multiplier chaque ligne i de la matrice B et du vecteur ΔX par ε_i . On affecte ainsi un poids qui vaut $1/\varepsilon_i^2$ à la i -ème observation. Plus la précision de l'observation sera élevée plus elle aura d'importance dans l'ajustement.

Le choix d'utiliser cette matrice diagonale est un parti pris raisonnable. De plus, cette hypothèse est largement utilisée dans des travaux similaires. Nous avons donc fait de même pour l'ajustement des deux modèles TASS et NUMINT.

4.2.3 Principe général de l'ajustement

Le principe de l'ajustement est de déterminer les valeurs optimales des paramètres du modèle (masses, coefficients d'aplatissement, positions vitesses des satellites à un temps t_0 pour le modèle NUMINT ou éléments osculateurs des satellites au temps t_0 pour le modèle TASS). Les valeurs initiales de ces paramètres permettent de calculer les positions des satellites aux dates d'observations qui seront justement comparées aux observations. Suivant le modèle utilisé, le principe est légèrement différent.

Principe de l'ajustement pour TASS

Pour TASS, les conditions initiales permettent de déterminer les termes des séries puis les positions des satellites aux dates d'observations. Ces positions sont exprimées

dans les mêmes coordonnées et le même repère que l'observation pour être comparées aux observations elles-mêmes. Les dérivées partielles sont calculées une seule fois en utilisant les termes initiaux des séries (voir section 4.2.1). La méthode des moindres carrés permet finalement de déterminer les nouveaux paramètres initiaux à l'aide de ces dérivées partielles et des O-C.

La figure 4.6 résume le principe de l'ajustement pour TASS.

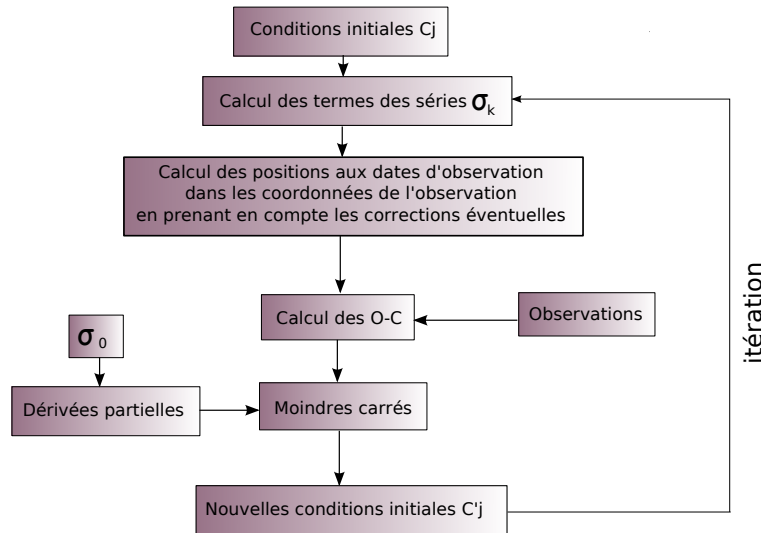


Fig. 4.6: Principe de l'ajustement aux observations pour TASS

La convergence ⁽⁷⁾ des conditions initiales s'obtient après trois ou quatre itérations. La principale caractéristique de l'ajustement pour TASS est que les dérivées partielles $(\frac{\partial \Phi}{\partial c_k})$, indépendantes des dates d'observations, ont été calculées une fois pour toute avec la théorie TASS. Il n'est donc pas nécessaire de les recalculer à chaque itération de l'ajustement. L'inconvénient est que l'ajustement est moins précis. Cependant cela permet de diminuer significativement le temps de calcul autorisant l'utilisation de méthodes statistiques que nous verrons par la suite.

Principe de l'ajustement pour NUMINT

Pour NUMINT, les conditions initiales permettent de calculer directement les positions vitesses et les dérivées partielles pour chaque date d'observation. Les positions sont ensuite exprimées dans les mêmes coordonnées que l'observation mais dans le repère de la théorie (à savoir J2000). Ceci provient du fait qu'il est en général fastidieux ⁽⁸⁾ de transformer les dérivées partielles du repère de la théorie dans le repère de l'observation. Il faut donc transformer l'observation en l'exprimant dans le repère de la théorie.

On compare ensuite les positions observées et les positions calculées puis on détermine à l'aide des dérivées partielles, des O-C et de la méthode des moindres carrés, un nouveau

⁷On parle de convergence lorsque la correction des paramètres devient de plus en plus petite à chaque itération.

⁸Pour s'en convaincre, on pourra observer les quelques cas particuliers dans l'annexe A où il a fallu transformer les dérivées partielles du repère de la théorie dans le repère de l'observation.

jeu de conditions initiales. La convergence de ces conditions initiales est atteinte après trois ou quatre itérations. La figure 4.7 résume le principe de l'ajustement pour le modèle d'intégration numérique.

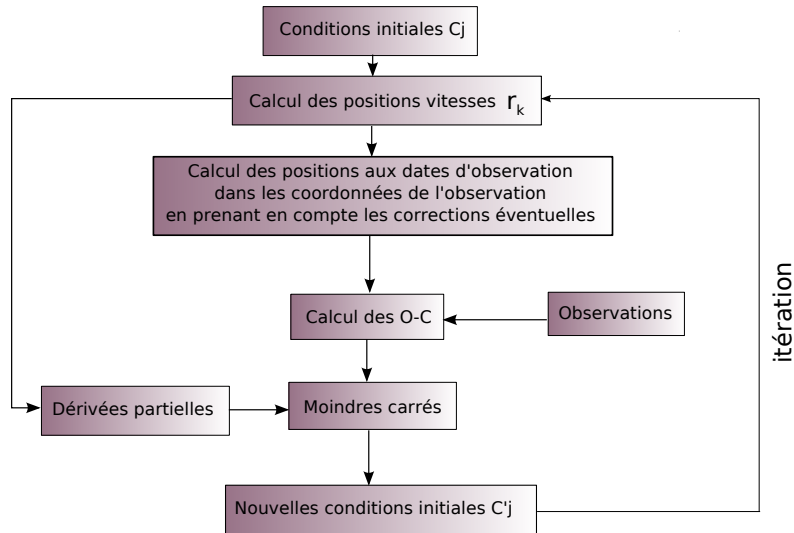


Fig. 4.7: Principe de l'ajustement aux observations pour NUMINT

Le fait de recalculer à chaque itération les dérivées partielles permet un ajustement plus précis. Mais d'un autre côté, le temps de calcul devient plus long rendant difficile l'utilisation de méthodes statistiques.

Chapitre 5

Détection d'accélération dans le mouvement des satellites

Sommaire

5.1	Introduction	60
5.2	Estimation du signal	62
5.3	Ajustement aux observations	62
5.4	Conclusion	64

L'utilité d'un catalogue d'observations est multiple. Le catalogue de positions astrométriques permet en effet d'ajuster une théorie sur des observations et de déterminer les meilleures conditions initiales. On obtiendra ainsi des éphémérides relativement précises.

Le catalogue d'observations rend également possible la détection d'une accélération séculaire dans la longitude moyenne de certains satellites. Cette accélération est due aux effets de marée agissant sur le satellite et en la mesurant, il sera possible de quantifier ces effets de marée. C'est l'un des objectifs du groupe de travail Encelade ⁽¹⁾ dont un premier travail a déjà permis d'estimer une valeur de cette dissipation (Lainey *et al.*, 2007, [45])

5.1 Introduction

La présence de "geysers" ou jets de vapeur observés à la surface d'Encelade par la sonde Cassini fin 2005 a rapidement été imputée aux forces de marées levées par la planète. Or, la dissipation de marée gouverne l'évolution à long terme des systèmes de planètes géantes.

Le principe des marées est le suivant : les différences d'attraction gravitationnelle subies sur les différents points d'un corps créent les forces de marées. Ces forces tendent à déformer le corps en un ellipsoïde et crée un bourrelet de marées orienté dans la direction du corps perturbateur (satellite). Comme dans le même temps, la planète tourne également sur elle-même plus vite que le satellite ne tourne autour d'elle, le bourrelet a tendance à être en avance. Un couple de rappel pour aligner le bourrelet dans la direction

¹Groupe de travail regroupant des chercheurs de l'IMCCE, de l'Observatoire Royal de Belgique (ORB), des Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur (FUNDP) et du Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA)

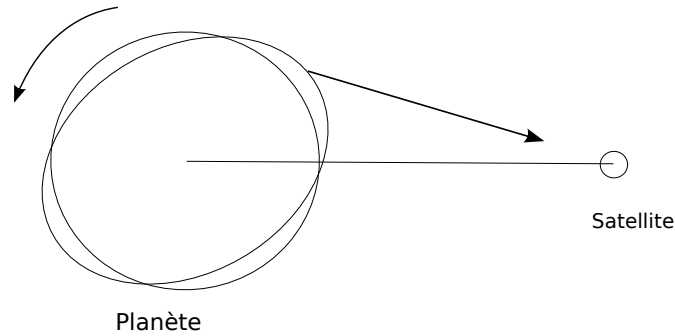


Fig. 5.1: Schéma explicatif de l'effet de marée. Le bourrelet de marée tend à s'aligner avec la direction du satellite ce qui entraîne un ralentissement de la rotation et par conservation du moment cinétique, un ralentissement de la révolution du satellite et donc l'augmentation de son demi-grand axe.

du satellite se crée alors sur la planète. Ce couple fait ralentir la rotation ⁽²⁾ de la planète et par conservation du moment cinétique du système, il provoque l'augmentation du demi-grand axe du satellite et donc la décélération du satellite.

La première estimation du facteur de dissipation Q de Saturne est due à Goldreich et Soter (1966, [28]). La présence de satellites proches de la planète, comme Mimas, permet de donner une valeur minimale de Q . En effet, si Q est trop petit, l'évolution orbitale des satellites les entrainerait soit en dehors du système, soit en collision avec la planète en moins de 4.5 milliards d'années (âge du Système Solaire). En appliquant ce principe, Goldreich et Soter concluent que $Q \geq 60000 - 70000$.

Grâce à la même méthode mais en utilisant de nouvelles valeurs des paramètres physiques, Gavrilov et Zharkov (1977, [27]) affinent la borne inférieure : $Q \geq 14000$.

La valeur de Q peut également être estimée en utilisant un large échantillon d'observations de satellites pour y détecter une accélération séculaire dans la longitude moyenne. Cette méthode a été testée avec succès par Lainey *et al.* (2007, [44]) sur les satellites martiens et a permis de déterminer la dissipation dans la planète Mars. Appliquée au satellite galiléen Io, elle a également permis de donner une borne supérieure à la dissipation dans Jupiter (Lainey *et al.*, 2005, [47]).

Pour Saturne, la même méthode peut être appliquée en utilisant le catalogue COSS08 (Lainey *et al.*, 2007, [45]).

²Si le satellite se situe au delà de l'orbite synchrone. Dans le cas contraire, le couple tend à accélérer la rotation de la planète et à accélérer la révolution du satellite

5.2 Estimation du signal

La première étape de cette étude est d'estimer le signal (valeur de l'accélération dans la longitude) que l'on peut attendre pour différents valeurs de Q de Saturne. L'estimation du signal se fait en comparant d'une part, le mouvement des satellites en incluant dans le modèle une dissipation et d'autre part, en négligeant cette dissipation.

Le modèle utilisé pour cette étude est NOE (Lainey *et al.* 2004, [46]). Les coefficients harmoniques de Saturne sont pris jusqu'à l'ordre 6, les masses des satellites sont issues de Jacobson *et al.* (2006, [37]). Les perturbations du Soleil et de Jupiter sont introduites via les éphémérides DE406. La précession de Saturne est également prise en compte (Jacobson, 2007, [36]). Les paramètres ajustés sont les positions vitesses de chaque satellite ainsi que le facteur de dissipation de Saturne Q .

Dans un premier temps, le modèle NOE est ajusté à TASS1.7. Ensuite, l'influence de la dissipation a été simulée pour deux valeurs différentes ($Q = 10^5$ et $Q = 10^4$). Pour chacun des satellites, on compare les positions entre le modèle où la dissipation est prise en compte et le modèle où elle est négligée (Fig.5.2).

Il apparaît que lorsque la dissipation est de l'ordre de 10^5 , l'influence sur le mouvement des satellites est très petite (une quinzaine de kilomètres). Pour une dissipation d'un ordre de grandeur plus faible (10^4), proche de sa borne inférieure, les effets peuvent atteindre plus d'une centaine de kilomètres sur un siècle et devenir détectables grâce aux observations astrométriques. Cependant, les dérives observées peuvent être en partie absorbées en changeant faiblement le moyen mouvement et la longitude du satellite. Dans la réalité, l'effet attendu est sans doute d'un ordre de grandeur plus petit. Quoiqu'il en soit, l'estimation du facteur Q par les observations astrométriques est réalisable uniquement s'il est proche de sa valeur limite.

5.3 Ajustement aux observations

Dans un second temps, les paramètres (positions vitesses et facteur de dissipation) ont été ajustés à l'aide des observations du catalogue COSS08 sur la période 1886-2007. Les résidus obtenus après ajustement avec NOE apparaissent sur le tableau 5.1. Nous avons distingué les résidus pour les observations en coordonnées absolues et pour celle en coordonnées (s, p) . N désigne le nombre d'observations utilisées. Pour rappel, 0.1" correspond à environ 600 km.

Tab. 5.1: Table des résidus calculés avec NOE

	rms α	rms δ	N	rms s	rms p	N_s	N_p
Mimas	0.1090	0.0860	772	0.1696	0.1940	223	237
Encelade	0.0888	0.0873	2090	0.1511	0.1393	479	477
Téthys	0.0680	0.0659	3532	0.1578	0.1591	638	642
Dioné	0.0612	0.0627	3619	0.1474	0.1596	425	418
Rhée	0.0495	0.0530	4252	0.1723	0.1583	419	407
Titan	0.0749	0.0739	3160	0.1808	0.1566	466	456
Hypériorion	0.2468	0.1616	1589	0.3267	0.5054	137	114
Japet	0.0835	0.0864	2159	0.1754	0.2687	134	130

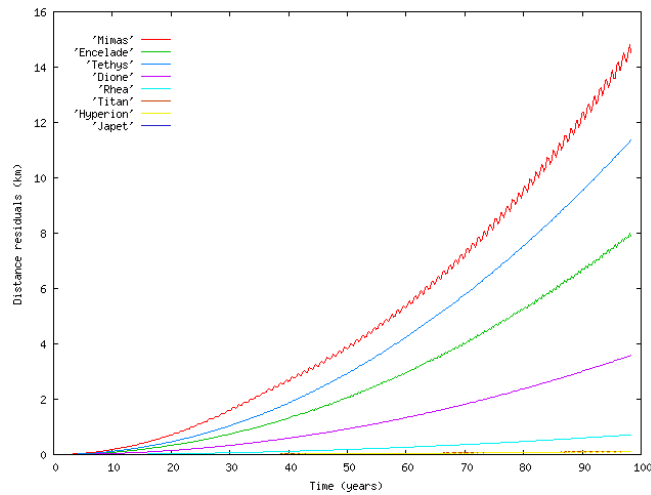
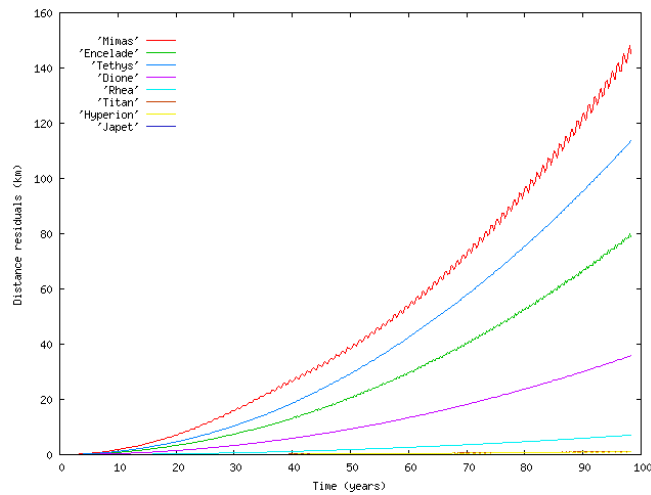
(a) $Q = 100000$ (b) $Q = 10000$

Fig. 5.2: Écart en km entre les positions données par le modèle avec dissipation et modèle sans dissipation

Les premiers résultats suggèrent que le facteur de dissipation atteint la valeur $Q = 1810 \pm 280$ ce qui est difficile à expliquer compte tenu des bornes inférieures rappelées plus haut. L'une des possibilités est que le signal que l'on cherche à détecter est trop faible et que ce que l'on mesure est ni plus ni moins que du bruit. Néanmoins, la valeur trouvée n'est pas corrélée aux autres paramètres ajustés. Il est également possible qu'il s'agisse d'un signal physique présent dans les observations mais non pris en compte dans le modèle.

5.4 Conclusion

L'étude a permis de montrer que le facteur de dissipation de Saturne peut être estimé grâce aux observations astrométriques seulement s'il est proche de sa borne inférieure (14000 d'après Gavrilov & Zharkov, 1977, [27]). La valeur de Q issue de l'ajustement doit être améliorée par une étude plus approfondie. La force de marées pour chacun des satellites n'est pas prise en compte pour l'instant mais devra l'être par la suite. Ce travail qui s'inscrit dans le cadre du groupe de travail "Encelade" est toujours en cours.

Nous venons de voir dans cette partie qu'un modèle dynamique ajusté à des observations permet de calculer et donc prévoir la position d'un objet à une date quelconque. La précision de cette éphéméride dépend d'un certain nombre de paramètres et est souvent difficile à estimer. Dans la partie suivante, nous allons dans un premier temps faire un tour d'horizon des précédentes études portant sur la précision des éphémérides notamment en ce qui concerne les astéroïdes. Ensuite, nous présenterons quelques méthodes d'estimation de la précision dont une méthode simple et robuste, le bootstrap. Enfin, nous montrerons que ces méthodes permettent effectivement d'estimer la précision des éphémérides.

Deuxième partie

Propagation des erreurs dans les éphémérides

Chapitre 6

Le problème des erreurs pour les éphémérides

Sommaire

6.1	Les différents types d'erreurs des éphémérides	68
6.1.1	La précision interne	68
6.1.2	La précision externe	68
6.1.3	La précision de représentation	69
6.2	Le cas des astéroïdes	69
6.2.1	Détermination d'une orbite	70
6.2.2	Les régions de possibles mouvements	70

6.1 Les différents types d'erreurs des éphémérides

La précision des éphémérides telles qu'elles sont publiées dépend principalement de trois précisions différentes : la précision interne, la précision externe et la précision de représentation.

6.1.1 La précision interne

La précision interne est directement liée à la précision du modèle. Elle dépend de l'importance des termes négligés dans les séries. Elle peut être évaluée par comparaison avec une intégration numérique. Des trois précisions, c'est elle la meilleure et la mieux estimée. Elle atteint quelques mas pour les satellites galiléens avec le modèle NOE et à peine une dizaine de mas pour les satellites de Saturne (excepté Hypérion et Japet) pour le modèle TASS.

6.1.2 La précision externe

La précision externe est due aux erreurs sur les paramètres donc liée aux observations. Elle dépend à la fois de la qualité des observations mais également de leur répartition. Elle est en général assez mal connue et c'est elle qui a tendance à dégrader la qualité globale des éphémérides.

Les erreurs commises sur les observations ont de multiples sources :

- L'observateur lui-même lisant la mesure de la position.

- L’instrument utilisé pour l’observation.
 - Le catalogue d’étoiles de référence utilisé pour la réduction. La position des étoiles de référence comporte généralement un biais qui dépend de la direction sur la sphère céleste.
 - Les corrections qui doivent être prises en compte dans la réduction et qui sont négligées (réfraction, aberration, effets de phase...). On trouvera d’ailleurs une estimation de ces effets dans Vienne *et al.* (2001, [89]).
 - Les modèles imparfaits de réfraction ou de la phase.
 - La différence entre centre de masse et photocentre due à la non-homogénéité de la surface du satellite.
 - L’incertitude du temps de l’observation, notamment pour les anciennes observations.
- Certaines de ces erreurs sont faibles comme les dernières citées mais cumulées entre elles, elles deviennent importantes.

De plus, la répartition des observations tient également un rôle important. Comme nous le verrons par la suite, une absence d’observations pendant une période assez longue rend l’éphéméride moins précise.

6.1.3 La précision de représentation

La représentation des éphémérides est un moyen de donner rapidement la position d’un objet sans être obligé de lancer une intégration numérique. Les positions des objets sont alors calculées à intervalles réguliers et la position pour un instant en dehors d’un intervalle peut être approchée par simple interpolation. Pour une meilleure précision, il est possible de réduire la taille des intervalles mais au détriment de la rapidité. L’autre moyen est d’approximer la position de l’objet sur un intervalle par des polynômes de Tchebychev⁽¹⁾ et d’augmenter le nombre de coefficients en fonction de la précision souhaitée.

La précision de la représentation dépend ainsi du nombre de coefficients et de la longueur des intervalles de validité que l’on choisit. Elle est à ce titre fixée par l’utilisateur et donc entièrement contrôlable. C’est pourquoi, nous ne nous y intéresserons pas par la suite.

On peut ajouter à ces trois types de précision, la précision liée au modèle et qui dépend de la manière dont celui-ci est paramétré, notamment pour le calcul des dérivées partielles. En effet, pour TASS, les dérivées partielles sont calculées une seule fois. Elles présentent donc une erreur qui reste faible en général mais qui peut devenir importante pour les satellites à courte période dont le mouvement est sensible aux conditions initiales (voir section 8.2.1). Pour l’intégration numérique, cette erreur est incluse dans la précision interne puisque le calcul des dérivées partielles s’effectuent à chaque itération.

6.2 Le cas des astéroïdes

La précision des éphémérides au cours du temps a surtout été étudiée pour les astéroïdes. En effet, généralement, lors de leur découverte, les astéroïdes sont observés pendant une courte durée puis parfois, ils sont perdus. L’observation pendant une courte durée permet déjà d’obtenir une première orbite. Cette orbite se caractérise par les six éléments elliptiques à savoir, le demi-grand axe a , l’excentricité e , l’inclinaison i , la longitude du nœud ascendant Ω , la longitude du périastre ϖ et enfin l’anomalie moyenne M . Ces six paramètres suffisent à caractériser l’orbite képlérienne de l’astéroïde.

¹On trouvera tous les détails dans le chapitre 9 de l’*Introduction aux éphémérides astronomiques* [69].

6.2.1 Détermination d'une orbite

Depuis le XVIII^e siècle et les travaux de Gauss, il est possible de déterminer une orbite héliocentrique à partir de trois observations. Cette méthode reste encore utilisée pour les astéroïdes nouvellement découverts. Par la suite, plusieurs méthodes basées sur celle de Gauss ont été développées pour affiner l'orbite. On peut citer par exemple les méthodes de Gauss-Encke-Merton ou bien Moulton-Väisälä-Cunningham. On trouvera également une présentation générale de détermination d'orbites dans Danby (1992, [10]).

Quelques fois, seulement deux observations sont disponibles ou encore la série d'observations s'effectue sur un arc d'orbite trop court. Les méthodes présentées précédemment ne donnent alors pas de résultats concluants. Dans ce cas, des méthodes de détermination d'orbite à partir de deux observations ont été développées. Celles-ci introduisent des contraintes sur l'orbite afin de réduire le nombre de degrés de liberté du système. Il existe ainsi des méthodes qui supposent une orbite circulaire éliminant de fait les valeurs de l'excentricité et de la longitude du périastre.

D'autres méthodes (Väisälä ou Orlov [91]) supposent que lors de leur découverte, les astéroïdes se situent à proximité du périhélie (situation la plus propice à leur observation). Marsden (1991, [49]) souligne également cette hypothèse. Celle-ci est en effet vérifiée pour des astéroïdes découverts avant ou au début des programmes de surveillance et de détection d'astéroïdes. Mais depuis la généralisation de ces programmes, cette hypothèse est probablement devenue de moins en moins valable car on détecte maintenant des astéroïdes de magnitude élevée, donc éloignés de leur périhélie.

Parfois, ces différentes méthodes ne permettent pas d'obtenir une orbite suffisamment précise. En effet, si on désire refaire des observations, il est nécessaire de déterminer une orbite permettant d'obtenir des éphémérides suffisamment précises pour retrouver l'astéroïde à une date donnée. Ce problème a donc amenés les astronomes à développer d'autres méthodes de détermination d'orbites et plus généralement à s'intéresser à l'étude de la précision des éphémérides des astéroïdes au cours du temps.

6.2.2 Les régions de possibles mouvements

Pour faire du suivi observationnel d'astéroïdes, les astronomes doivent établir une éphéméride, c'est-à-dire donner la position de l'astéroïde sur la sphère céleste à un instant donné. Comme les orbites déterminées sont rarement très précises, il arrive que si le suivi a lieu longtemps après les dernières observations, l'astéroïde peut se situer assez loin de la position calculée. Pour pallier ce problème, les astronomes s'intéressent non plus exactement à l'éphéméride mais essayent plutôt de déterminer la région de l'espace où l'astéroïde est censé se trouver. On parle alors de *régions de possibles mouvements*. Cette région est en pratique associée à un ensemble d'observations. À chaque jeu d'observations va correspondre une région de possibles mouvements. Celle-ci peut être déterminée par l'ensemble des orbites qu'on peut obtenir à partir d'un jeu d'observations, en tenant compte des erreurs d'observations.

La méthode la plus classique est de déterminer une famille d'orbites en utilisant la solution donnée par la méthode des moindres carrés et la matrice de covariance associée. L'idée est que le vecteur des conditions initiales $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\hat{c}_0, \Lambda_0)$ de moyenne \hat{c}_0 , solution des moindres carrés et de matrice de

variance-covariance Λ_0 également issue des moindres carrés. Les valeurs possibles des conditions initiales définissent ainsi un hyperellipsoïde centré sur \hat{c}_0 solution des moindres carrés, dans l'espace des phases.

Bordovitsyna *et al.* (2001, [8]) proposent des algorithmes de détermination de régions de possible mouvements pour les astéroïdes. Ces algorithmes sont basés sur la méthode des moindres carrés et sa matrice de covariance associée. Avdyushev & Banshchikova (2007, [7]) utilisent une méthode similaire appliquée aux satellites de Jupiter récemment découverts. Ils montrent que l'orbite de certains de ces satellites ne peut pas être déterminée de manière fiable par manque d'observations. En fait, après seulement une révolution, l'erreur faite sur la position est comparable à la taille de l'orbite. Cette méthode (méthode de Monte Carlo utilisant la matrice de covariance) sera présentée plus en détail dans la section 7.1 puisque nous l'avons retenu parmi les méthodes qui seront comparées.

Milani (1999, [51]) traite également ce problème à l'aide de cette méthode pour retrouver des astéroïdes perdus. Il montre que l'hypothèse de linéarisation et donc la solution des moindres carrés échoue lorsque l'arc d'observations des astéroïdes est trop court. Il développe alors des algorithmes pour déterminer les régions possibles pour retrouver un astéroïde.

Muironen et Bowell (1993, [53]) utilisent l'approche statistique pour ce problème de détermination d'orbites. Ils introduisent la théorie bayésienne et utilisent la technique de Monte-Carlo pour déterminer une famille d'orbites couvrant la région de possibles mouvements de l'astéroïde. La théorie bayésienne permet de déterminer la densité de probabilité *a posteriori* des éléments orbitaux de l'astéroïde grâce à une information *a priori*.

Mathématiquement, la densité de probabilité des éléments orbitaux $\mathbf{P} = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$ peut s'écrire :

$$p_{pos}(\mathbf{P}) \propto p_{pre}(\mathbf{P})p_{\varepsilon}(O - C)$$

où $p_{pos}(\mathbf{P})$ représente la densité de probabilité *a posteriori* des éléments orbitaux, $p_{pre}(\mathbf{P})$ la densité de probabilité *a priori* et $p_{\varepsilon}(O - C)$ la densité de probabilité des O-C. Dans Muironen & Bowell (1993, [53]), l'information *a priori* est la distribution uniforme des éléments orbitaux.

Virtanen *et al.* (2001, [91]) reprennent cette même approche en considérant la distribution des éléments orbitaux de 25 612 astéroïdes connus. La figure 6.1 illustre la distribution du demi grand-axe, de l'inclinaison, de l'excentricité et de la magnitude de ces astéroïdes. Cette information est alors utilisée pour contraindre les familles d'orbites générées.

Concrètement, les orbites sont générées par une méthode de Monte-Carlo et par une méthode de détermination d'orbite grâce à deux observations. On vérifie si la méthode des moindres carrés donne une orbite préliminaire (c'est-à-dire qui donne des O-C acceptables). Si c'est le cas, cette orbite servira de référence pour créer la famille d'orbites. Si ce n'est pas le cas alors on utilise l'information *a priori* sur la distribution pour choisir aléatoirement les éléments orbitaux des orbites qu'on souhaite créer. La méthode peut finalement être résumée ainsi :

- Deux observations sont choisies aléatoirement parmi l'ensemble des observations de l'astéroïde.
- Un bruit aléatoire est ajouté à ces deux observations.

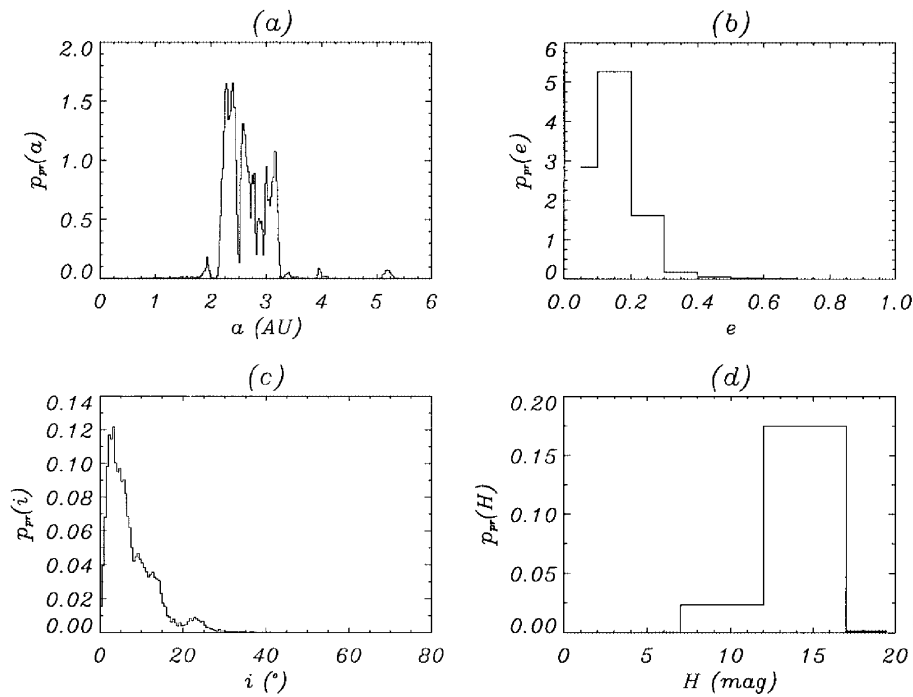


Fig. 6.1: Distribution des éléments elliptiques de 25 612 astéroïdes connus (source : Virtanen *et al.* (2001, [91]))

- Une nouvelle orbite est ainsi déterminée par une méthode de détermination d'orbite.
- On calcule les O-C pour les autres dates d'observations et si les résidus sont acceptables alors l'orbite est stockée. Sinon, on recommence le processus.

Dès que le nombre d'orbites stockées est suffisant (environ 2000 dans Virtanen *et al.*, 2001, [91]) alors, on peut calculer la densité de probabilité des éléments orbitaux et ainsi déterminer les régions de possibles mouvements de l'astéroïde. Cette méthode a permis de retrouver des astéroïdes observés par le passé puis perdus.

La principale caractéristique des astéroïdes est le faible nombre d'observations disponibles et leur mouvement en général lent. A l'opposé, les satellites sont en général beaucoup observés (et sur une longue période) et leur mouvement est rapide. Les méthodes de détermination des régions de possibles mouvements que l'on vient de voir doivent donc être adaptées à l'étude des satellites. Dans le chapitre suivant, nous détaillerons deux de ces méthodes qui ont été adaptées aux satellites.

Chapitre 7

Méthodes d'estimation de la précision

Sommaire

7.1	Méthode de Monte-Carlo à partir de la matrice de covariance (MCCM)	74
7.2	Méthode de Monte-Carlo appliquée aux observations (MCO) .	76
7.3	Le rééchantillonnage d'observations : le Bootstrap	77
7.4	Quid des autres méthodes de rééchantillonnage	78

Nous présentons à présent trois méthodes pour estimer la précision des éphémérides au cours du temps. Nous avons vu comment déterminer des éphémérides à partir d'un modèle dynamique ajusté à un jeu d'observations $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ effectuées respectivement aux temps t_1, \dots, t_N . Le principe de ces trois méthodes est de déterminer à partir de ce jeu d'observations la région de possibles mouvements au cours du temps. Cette région permettra alors de déterminer la précision de nos éphémérides.

Les deux premières méthodes sont caractéristiques des études faites sur le sujet pour les astéroïdes. La première s'appuie sur une méthode de Monte Carlo utilisant la solution des moindres carrés et la matrice de covariance associée. La deuxième est également une méthode de Monte Carlo qui s'appuie sur les observations. Enfin, la troisième méthode est une méthode de rééchantillonnage, le bootstrap.

7.1 Méthode de Monte-Carlo à partir de la matrice de covariance (MCCM)

Cette méthode a déjà été abordée dans le chapitre précédent. Elle s'appuie sur la solution des moindres carrés et de sa matrice de covariance. Globalement, avec cette méthode, les conditions initiales sont estimées par la solution des moindres carrés et leur intervalle de confiance est déterminé par la matrice de covariance. Beaucoup d'auteurs l'ont utilisé, par exemple Bordovitsyna *et al.* (2001, [8]) et Avdyushev & Banshchikova (2007, [7]).

La méthode des moindres carrés (voir section 4.2.2) permet d'estimer les paramètres de la théorie. En reprenant les mêmes notations que dans cette section, nous avons vu que, d'après l'équation (4.5), le vecteur des paramètres ΔC pouvait être estimé par :

$$\Delta C = ({}^t B V_{obs}^{-1} B)^{-1} {}^t B V_{obs}^{-1} \Delta X$$

où B est la matrice des dérivées partielles, V_{obs} la matrice de covariance des observations et ΔX le vecteur des O-C. La matrice normale du système peut être définie par $N = {}^t B V_{obs}^{-1} B$ et la matrice de covariance par $\Lambda = N^{-1}$. Le vecteur des conditions initiales est supposé avoir une distribution gaussienne $\mathcal{N}(\hat{\mathbf{c}}, \Lambda)$.

Dans la pratique, il est possible de construire K orbites à partir de la solution des moindres carrés et la matrice de covariance en faisant varier aléatoirement chacun des paramètres initiaux pour chaque orbite k (variant de 1 à K) de cette manière :

$$\mathbf{c}^k = A\eta^k + \hat{\mathbf{c}} \quad (7.1)$$

où $\hat{\mathbf{c}}$ est le vecteur des paramètres solutions des moindres carrés, η^k un vecteur à p dimensions de nombres normalement distribués (p étant le nombre de paramètres) et A est une matrice triangulaire pour laquelle $A^t A = \Lambda$. A peut être obtenue par la décomposition de Cholesky puisque la matrice de covariance est symétrique et définie positive.

Nous pouvons alors obtenir un hyperellipsoïde des conditions initiales dans l'espace des phases. Chaque jeu de nouveaux paramètres initiaux permet d'obtenir une orbite (voir figure 7.1) et de calculer les positions associées à cette orbite aux instants souhaités. Les K orbites créées forment un faisceau d'orbites représentant la région de possibles mouvements.

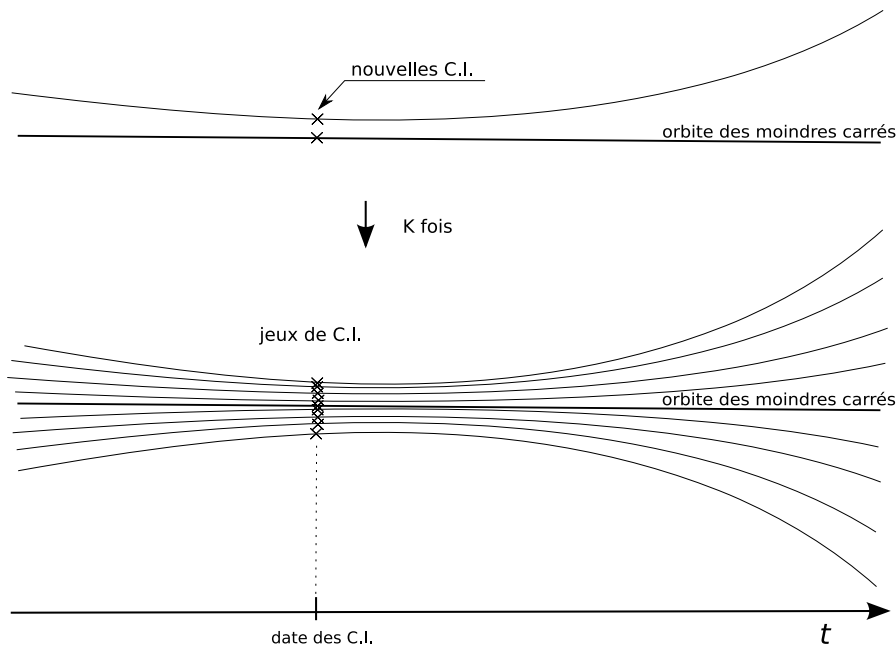


Fig. 7.1: Principe de la méthode MCCM

L'hypothèse de cette méthode est que les conditions initiales estimées par moindres carrés $\hat{\mathbf{c}}$ suivent une loi gaussienne de moyenne \mathbf{c} (les vraies conditions initiales) et de matrice de covariance Λ . Il s'agit donc d'une méthode dite «paramétrique», dans le sens où on fait une hypothèse sur la loi de distribution des erreurs.

7.2 Méthode de Monte-Carlo appliquée aux observations (MCO)

La seconde méthode s'inspire de la méthode de Virtanen *et al.* (2001, [91]). L'idée est d'introduire un bruit supplémentaire aux observations et d'ajuster ensuite le modèle à celles-ci.

Pour un jeu de N observations $(\alpha_i)_{i=1,\dots,N}$, la méthode est la suivante :

- On fixe la moyenne μ et l'écart-type σ du bruit introduit.
- Pour chaque observation α_i , on ajoute une erreur ε_i suivant une distribution gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ donnant ainsi une nouvelle observation $\alpha'_i = \alpha_i + \varepsilon_i$.
- Le modèle est ajusté à ce nouveau jeu d'observations $(\alpha'_i)_{i=1,\dots,N}$ et une nouvelle orbite est ainsi déterminée.

Le processus peut être itéré autant de fois que voulu (voir figure 7.2) et l'ensemble des orbites créées forme alors la région de possibles mouvements.

Cette méthode de Monte-Carlo appliquée aux observations (MCO) s'appuie sur l'hypothèse que les erreurs d'observations sont indépendantes et gaussiennes. Il s'agit donc également d'une méthode paramétrique.

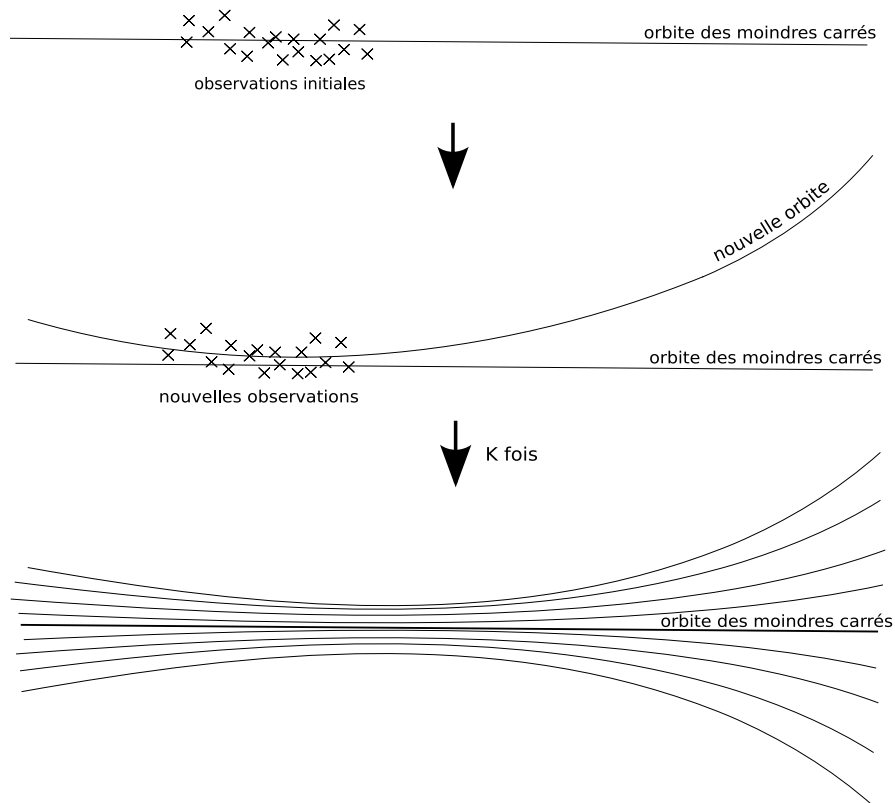


Fig. 7.2: Principe des méthodes MCO et du bootstrap

Ces deux méthodes sont caractéristiques des méthodes utilisées pour déterminer la région de possibles mouvements des astéroïdes. Dans le chapitre 8, ces méthodes permettront de comparer les résultats avec la méthode de rééchantillonnage dont nous allons parler maintenant.

7.3 Le rééchantillonnage d'observations : le Bootstrap

Les méthodes de rééchantillonnage, comme leur nom l'indique, consistent à reformer des nouveaux échantillons à partir d'un échantillon initial. Il existe plusieurs méthodes de rééchantillonnage mais nous utiliserons uniquement le bootstrap pour des raisons que nous détaillerons dans le point suivant.

La méthode du bootstrap ⁽¹⁾ a été introduite pour la première fois par Efron (1979, [20]) dans le but d'estimer la variance d'une variable aléatoire. Le bootstrap a depuis été étendu avec succès à plusieurs autres problèmes comme la distribution des erreurs d'un estimateur. Efron & Tibshirani (1993, [21]) présentent ainsi plusieurs exemples d'utilisation de cette méthode.

L'idée du bootstrap est de rééchantillonner l'échantillon initial $(t_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, N}$ pour en obtenir un nouveau avec le même nombre d'éléments $(t'_i, \alpha'_i)_{i=1, \dots, N}$. Pour obtenir ce nouveau jeu d'observations, on réalise un tirage aléatoire *avec remise* de l'échantillon initial $(t_i, \alpha_i)_{i=1, \dots, N}$. Le nouveau jeu possède bien le même nombre d'observations que l'échantillon initial. Ensuite, le modèle est ajusté à ce nouveau jeu d'observations.

Dans cette méthode, certaines observations peuvent apparaître plusieurs fois dans un échantillon bootstrap. Ceci revient à donner un poids plus important à certaines observations, qui correspond au nombre d'occurrences. Contrairement aux méthodes présentées précédemment, la seule hypothèse du bootstrap est que les observations sont indépendantes. En particulier, aucune hypothèse n'est faite sur la loi de distribution des erreurs d'observations. Les erreurs peuvent donc être non gaussiennes. Il s'agit donc d'une méthode *non paramétrique*, c'est à dire qui ne fait pas d'hypothèse sur la loi de distribution des erreurs.

La méthode du bootstrap peut être résumée ainsi :

- On crée un jeu aléatoire d'entiers indépendants $(k_j)_{j=1, \dots, N}$ avec une distribution uniforme dans l'intervalle $[1, N]$.
- On construit un nouveau jeu d'observations $(t_{k_j}, \alpha_{k_j})_{j=1, \dots, N}$, l'échantillon bootstrap.
- Le modèle est ajusté à cet échantillon bootstrap, déterminant ainsi une nouvelle orbite.

Le processus est répété autant de fois que voulu. Le principe est le même que sur la figure 7.2 à l'exception que les nouvelles observations sont créées par rééchantillonnage.

Dans la réalité, les observations ne sont sans doute pas indépendantes. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer par exemple (sur la figure 3.2 au chapitre 3) qu'en 1995, on a environ 28 000 observations. Cela signifie que pour certaines nuits, on a plus de 100 observations du même satellite à seulement quelques minutes d'intervalle. Par conséquent, il existe une corrélation entre les observations et la méthode du bootstrap doit être adaptée.

¹Le terme *bootstrap* viendrait de la phrase «*to pull oneself up by one's bootstrap*» citée dans *les Aventures du Baron de Munchhausen* de Rudolph Erich Raspe. On peut la traduire par «*s'en tirer par ses propres moyens*». Embourbé dans un marécage, le Baron est censé s'en être sorti en se tirant par les bottes. Les «bootstraps» sont les anneaux de cuir fixés sur les bottes qui permettent de les enfiler plus facilement.

On utilise alors une technique similaire au rééchantillonnage par blocs proposée par Politis (2003, [60]) qui a été introduite dans l'analyse de séries temporelles. Au lieu de rééchantillonner les observations de manière indépendante, on les groupe dans des blocs indépendants et on rééchantillonne ces blocs par la méthode du bootstrap. Par la suite, nous noterons BR, la méthode du bootstrap simple et BBR la méthode du bootstrap par blocs.

La méthode du bootstrap par blocs appliquée à notre étude peut être résumée ainsi :

- On regroupe les observations en B blocs indépendants $(B_k) : (t_i, \alpha_i)$ avec $i \in B_k$ et $k = 1, \dots, B$.
- On crée un jeu aléatoire d'entiers indépendants $(k_j)_{j=1, \dots, B}$ avec une distribution uniforme dans l'intervalle $[1, B]$.
- On construit un échantillon bootstrap (t_i, α_i) avec $i \in B_{k_j}$ et $j = 1, \dots, B$.
- Le modèle est ajusté à ce nouveau jeu d'observations.

Le processus peut être itéré autant de fois que voulu.

Pour peu que les blocs ne comportent pas le même nombre d'éléments, la méthode du bootstrap par blocs ne donnera pas rigoureusement le même nombre d'observations que l'échantillon initial. Par ailleurs, il est impératif de ne pas regrouper les données en des blocs trop peu nombreux sous peine de faire échouer la méthode. Si les blocs d'indépendances sont peu nombreux, il conviendra d'utiliser la méthode du bootstrap simple (BR).

Enfin, on peut montrer (voir Annexe B) que la probabilité de l'événement «tirer k fois le même élément de l'échantillon» (noté $X = k$) peut s'écrire, dès que le nombre d'éléments est grand devant k :

$$P(X = k) \approx \frac{e^{-1}}{k!}$$

Le tableau 7.1 donne la valeur de la probabilité pour différentes valeurs de k . Ainsi en moyenne, la méthode du bootstrap néglige environ 36.8% de l'échantillon initial. Ceci est à mettre en relation avec les autres méthodes de rééchantillonnage que l'on verra dans la section suivante.

Tab. 7.1: Probabilité de tirer k fois le même élément dans le bootstrap pour différentes valeurs de k

k	0	1	2	3	4	5	6	...	10
$P(X = k)$	0.3678	0.3678	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005	...	10^{-7}

7.4 Quid des autres méthodes de rééchantillonnage

Les autres méthodes de rééchantillonnage fonctionnent sur le même principe. De manière générale, on peut voir un rééchantillonnage comme un échantillon pondéré $(\alpha_1, w_1), \dots, (\alpha_N, w_N)$ de l'échantillon initial $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Les $(w_i)_{i=1, \dots, N}$ ont des propriétés spécifiques aux méthodes de rééchantillonnage. Par exemple, pour le bootstrap, le poids est choisi aléatoirement suivant une loi multinomiale.

Le *jackknife* consiste à retirer aléatoirement une observation ou un groupe d'observations de l'échantillon initial pour produire un nouvel échantillon. Il s'agit d'une méthode

moins générale que le bootstrap et historiquement plus ancienne. Vu le nombre de données mises en jeu (pour rappel, on compte environ 130 000 observations des satellites de Saturne), le problème est que retirer une observation de l'échantillon de départ ne va pas changer fondamentalement celui-ci.

Une idée pourrait être de retirer non plus une mais un groupe d'observations de l'échantillon initial. C'est le principe du *random hold-out* où l'on retire aléatoirement de l'échantillon initial un certain nombre p d'éléments. Ces deux méthodes (*jackknife* et *random hold-out*) sont deux méthodes dites de *sous-échantillonnage* c'est-à-dire qu'une partie seulement des données initiales sont sélectionnées (contrairement au bootstrap). On trouvera le détail d'autres méthodes de rééchantillonnage dans la thèse de S.Arlot (2007, [6])

Plusieurs tests ont été réalisés sur ces autres méthodes de rééchantillonnage. Même si elles donnent un aperçu des résultats auxquels on peut s'attendre, il apparaît qu'elles sont moins simples à utiliser que le bootstrap. Quelle portion doit-on supprimer dans le cas du *random hold-out* ? Qu'est ce que une observation lorsqu'on doit supprimer l'une d'elles dans le *jackknife* ? Voici le genre de questions qui peut être évité en utilisant le bootstrap.

Cependant, malgré sa simplicité, le bootstrap présente aussi certains désavantages par rapport aux méthodes dites paramétriques. Les méthodes paramétriques font une hypothèse sur la loi de distribution des erreurs d'observations contrairement aux méthodes non paramétriques comme le bootstrap. Quand ces hypothèses sont vérifiées, les méthodes paramétriques sont plus précises que les méthodes non-paramétriques. Au contraire, dans le cas inverse, elles ont tendance à être moins précises.

Chapitre 8

Validation des méthodes

Sommaire

8.1 Observations simulées	80
8.1.1 Simulation d'observations	81
8.1.2 Mesure pour la comparaison des orbites	81
8.1.3 Mesure de la région de possibles mouvements	82
8.2 Comparaison des méthodes	85
8.2.1 Comparaison simulations-MCCM	85
8.2.2 Comparaison simulations-MCO	87
8.2.3 Comparaison simulations-bootstrap	88
8.2.4 Conclusion	91
8.3 Nombre d'échantillons nécessaires	92
8.4 Discussion sur le bootstrap par blocs	94
8.5 Résultats avec l'intégrateur numérique	97
8.6 Conclusion	97

La détermination de la précision d'une éphéméride au cours du temps passe par la détermination de la région de possibles mouvements, c'est-à-dire la région de l'espace où l'objet est censé se trouver à un instant t . Afin de valider et comparer les différentes méthodes vues précédemment, nous avons simulé des observations. L'intérêt d'utiliser des observations simulées est de maîtriser les lois de distribution des observations. Pour cette validation, nous avons étudié deux satellites de Saturne aux propriétés dynamiques différentes : Mimas et Titan. Mimas a une période de 0.942 jours contre une période de 15.945 jours pour Titan. Chacun des satellites représente un des deux groupes, ceux dont le mouvement est rapide et ceux dont le mouvement est lent.

8.1 Observations simulées

Nous avons vu que les observations permettent de déterminer une orbite. Or, les observations sont des mesures de positions réelles de l'objet entachées d'erreurs. On peut imaginer qu'une observation (donc une mesure de la position de l'objet) réalisée au même instant mais dans des conditions différentes peut donner une mesure légèrement différente. De là, une orbite légèrement différente pourra être déterminée. La région de possibles mouvements correspondra donc à l'ensemble des orbites que l'on peut déterminer à partir d'un jeu d'observations en prenant en compte les erreurs d'observations.

L'idée ici est de simuler à chaque date d'observation l'ensemble des mesures qui pourraient être faites en tenant compte des erreurs d'observations. De là, on pourra déterminer

l'ensemble des orbites correspondant à ces observations, qui représentera alors la région de possibles mouvements.

Pour simuler la région de possibles mouvements, nous allons donc partir d'une orbite initiale ⁽¹⁾ que l'on supposera réelle pour laquelle nous calculerons les positions (supposées réelles) à des dates d'observations données. Ensuite, nous simulerons l'ensemble des mesures de ces positions réelles en leur ajoutant une erreur aléatoire. Pour chaque jeu d'observations simulées, nous déterminerons une orbite et l'ensemble des orbites créées donnera une simulation de la région de possibles mouvements.

8.1.1 Simulation d'observations

Le principe pour simuler des observations est d'introduire un bruit gaussien dont la moyenne μ et l'écart-type σ sont définis à l'avance. En règle générale, nous ne considérerons que $\mu = 0$. Pour ne pas simuler des observations ayant une distribution purement gaussienne, nous avons introduit une dépendance artificielle dans ces observations en faisant varier σ tous les mois. Les observations d'un même mois seront donc simulées avec les mêmes paramètres μ et σ . L'élaboration des observations simulées peut être résumée ainsi :

- Un jeu de $N = 3650$ dates d'observations $(t_i)_{i=1,\dots,N}$ équiréparties tous les $p = 4$ jours est défini. Ces dates sont centrées sur le 1^{er} janvier 1980 pour respecter la date des conditions initiales de TASS. La période couverte par les observations simulées s'étend donc de 1960 à 2000.
- Pour chacune des dates (t_i) ainsi créées, on calcule la position (α_i^0, δ_i^0) de chacun des satellites. Ces positions seront considérées par la suite comme positions réelles des satellites.
- Pour chaque mois de la période, un bruit aléatoire $\sigma_{J(i)}$ est calculé suivant la distribution gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où $\mu = 0.15''$ et $\sigma = 0.05''$ ⁽²⁾. Une valeur de $0.15''$ correspond à des observations de qualité convenable.
- À chaque coordonnée de chaque observation i , un bruit est ajouté donnant de nouvelles coordonnées :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^0 + \xi_i^\alpha \sigma_{J(i)} && \text{en ascension droite} \\ \delta_i &= \delta_i^0 + \xi_i^\delta \sigma_{J(i)} && \text{en déclinaison} \end{aligned}$$

où $\xi_i^\alpha, \xi_i^\delta$ sont de distribution normale et indépendantes. Les observations d'un même mois ont la même précision mais celles réalisées à des mois différents ont des précisions différentes. Une dépendance entre observations d'un même mois est ainsi introduite ⁽³⁾.

Le processus peut être itéré K fois et on obtient ainsi K jeux d'observations simulées (α_i^k, δ_i^k) . Le modèle est ensuite ajusté à chacun de ces jeux d'observations fournissant autant d'orbites. L'ensemble des orbites représente alors la région de possibles mouvements simulée (Fig.8.1).

8.1.2 Mesure pour la comparaison des orbites

Nous avons créé $K = 200$ jeux d'observations simulées (entre 1960 et 2000) et ainsi 200 orbites en appliquant le processus précédent. Pour représenter les différences obtenues

¹Sur les schémas de ce chapitre, nous faisons apparaître l'orbite initiale que l'on supposera être l'orbite réelle.

²Dans la pratique, il est possible d'obtenir dans ces conditions un paramètre σ négatif. En toute rigueur, nous prendrons la valeur absolue de la variable ainsi générée.

³Par exemple, $(\xi_i^\alpha \sigma_{J(i)})^2$ et $(\xi_j^\alpha \sigma_{J(j)})^2$ sont corrélées pour i et j dans le même bloc, prouvant ainsi cette dépendance.

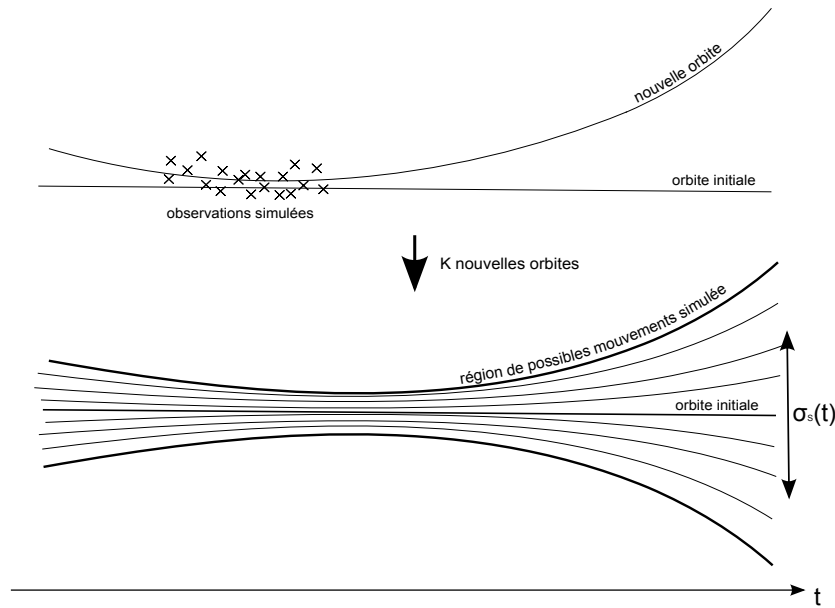


Fig. 8.1: Principe de la simulation de la région de possibles mouvements

entre ces orbites, nous avons utilisé la séparation angulaire entre la position donnée par l'orbite k et la position initiale (supposée être la position réelle). Cette séparation peut être obtenue à chaque instant t et pour chaque orbite k par :

$$s_k(t) = \sqrt{(\Delta\alpha_k(t) \cos \delta_0(t))^2 + \Delta\delta_k(t)^2}$$

où $\Delta\alpha_k(t) = \alpha_k(t) - \alpha_0(t)$ et $\Delta\delta_k(t) = \delta_k(t) - \delta_0(t)$.

La figure 8.2 ⁽⁴⁾ représente la différence en séparation entre l'orbite k et l'orbite initiale pour les 200 orbites générées par les observations simulées. La différence pendant la période d'observations à savoir entre 1960 et 2000, est relativement faible. Puis en dehors de la période d'observations, les positions ont tendance à diverger. Ainsi, pour Mimas, la différence peut atteindre 9" après deux siècles. Pour Titan, la différence est moindre puisque elle atteint moins de 0.4" après 200 ans.

La différence entre Mimas et Titan s'explique par le fait que Mimas (période de 0.942 jour) a un mouvement plus rapide que celui de Titan (période de 15.945 jours). Une incertitude sur la position entraînera une incertitude sur la vitesse et au cours du temps, la divergence sera d'autant plus rapide que la vitesse du satellite est rapide.

La période des oscillations pour Mimas paraît proche de la période du terme principal de la longitude moyenne du satellite (70.56 ans). Pour Titan, la période des oscillations est proche de 15 ans correspondant alors au troisième terme principal ⁽⁵⁾ de la longitude moyenne (14.73 ans). Les oscillations sont visiblement liées à la théorie.

8.1.3 Mesure de la région de possibles mouvements

La figure 8.2 représente l'ensemble des 200 orbites produites caractérisant la région de possibles mouvements. Pour synthétiser l'information contenue dans ces résultats, nous

⁴Pour cette figure ainsi que les suivantes, la période d'observations est caractérisée par la zone grisée.

⁵Les deux premiers termes principaux de la longitude moyenne de Titan ont des périodes de plusieurs centaines d'années (3263 et 703 ans) et donc non couverte par la période 1800-2200.

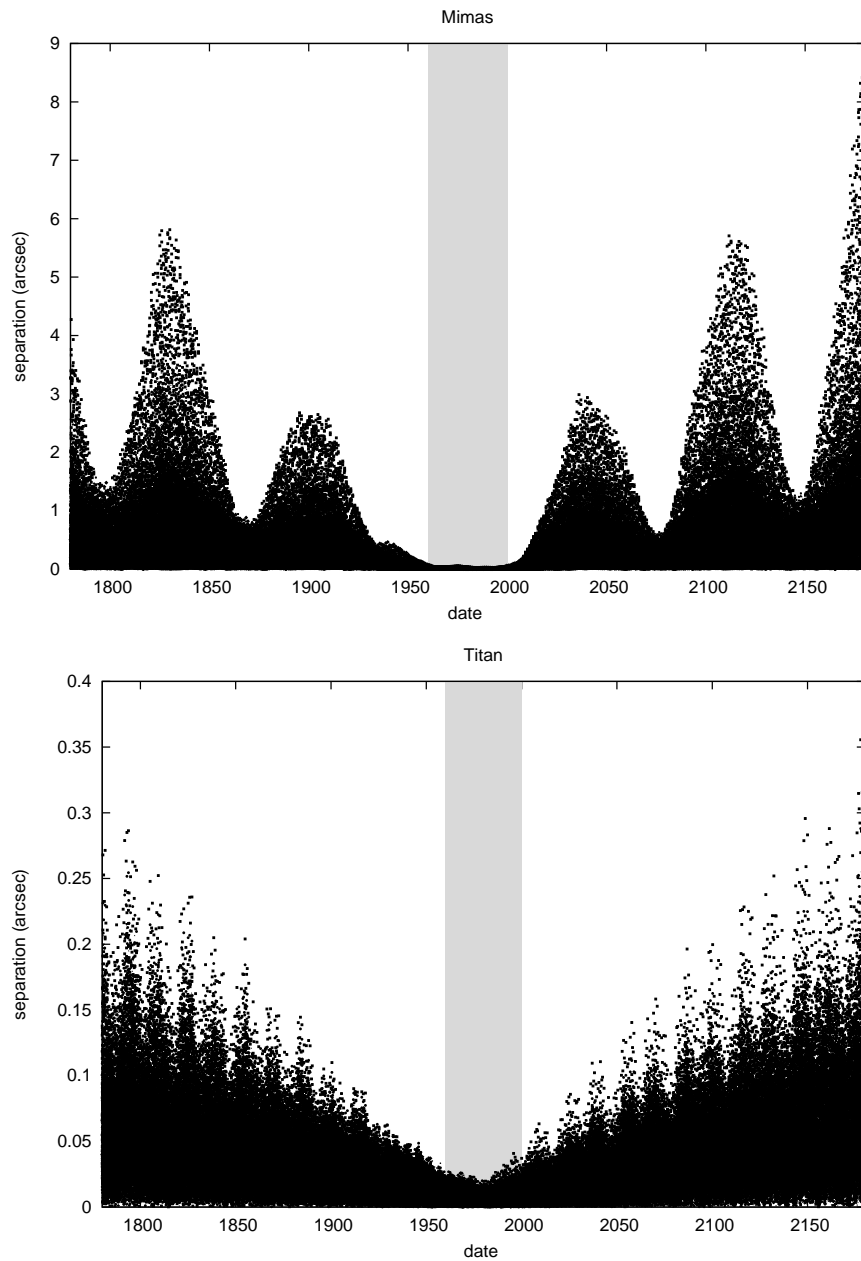


Fig. 8.2: Différence en séparation entre les 200 orbites simulées après ajustement sur la période 1960-2000 pour Mimas et Titan

introduisons la *précision extrapolée* qui est une mesure de la taille de la région de possibles mouvements.

Pour chaque orbite k et chaque instant t , nous pouvons calculer $s_k(t)$, la différence entre la position donnée par l'orbite k et la position donnée par l'orbite initiale ou de référence. Les $(s_k)_{k=1,\dots,K}$ peuvent être considérés comme des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire S et la moyenne quadratique $\sqrt{\langle (S(t))^2 \rangle}$ de S permet de mesurer l'incertitude de la position à l'instant t . Cette moyenne quadratique peut être estimée par :

$$\sigma_S(t) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K s_k(t)^2} \quad (8.1)$$

Ce paramètre ⁽⁶⁾ donne une mesure de la taille de la région de possibles mouvements et représente la dispersion moyenne des K orbites à un instant t . On l'appellera par la suite la *précision extrapolée* de la position. Le faisceau d'orbites obtenu sur la figure 8.2 est ainsi synthétisé en une seule courbe qui dépend du temps (Fig 8.3).

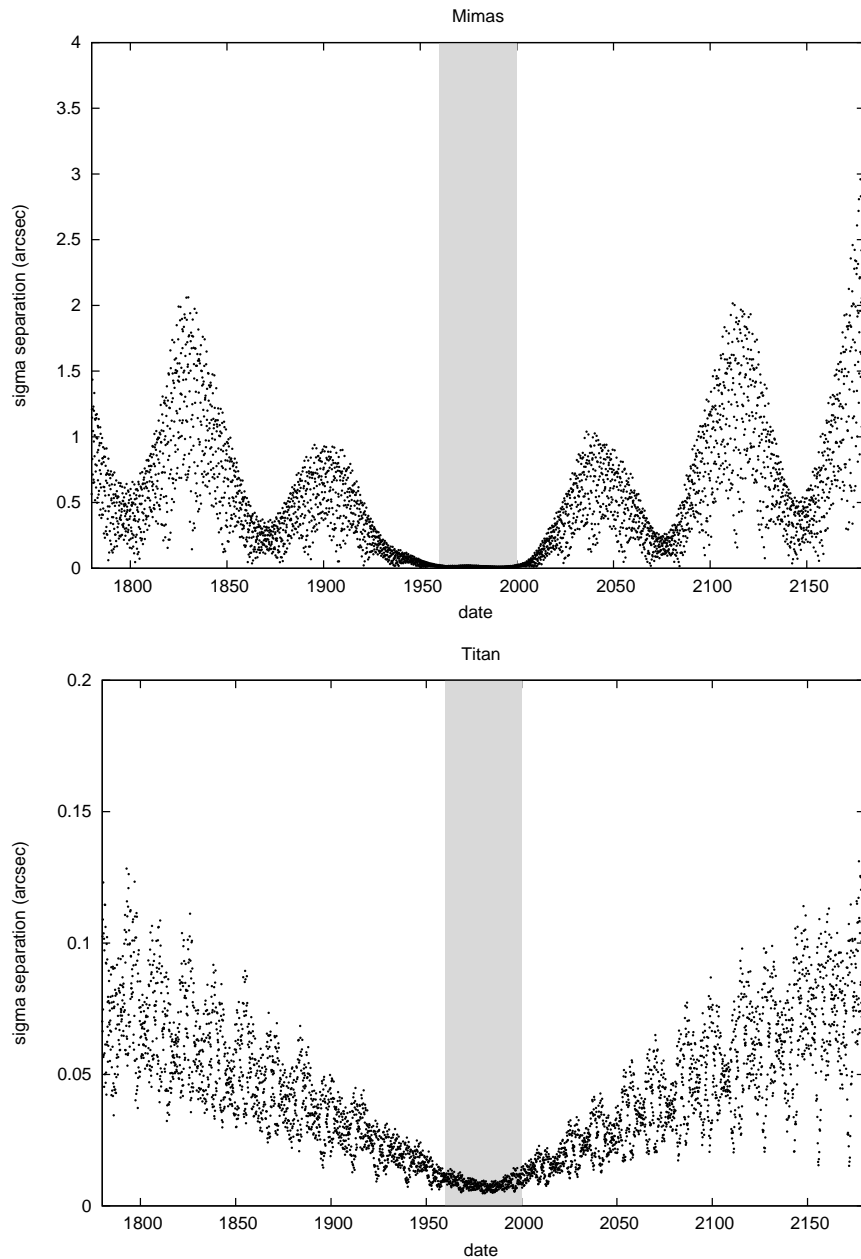


Fig. 8.3: Valeur du σ_S obtenues à partir des 200 orbites simulées après ajustement sur la période 1960-2000 pour Mimas et Titan

Nous aurions pu introduire d'autres moyens de mesure de la taille de cette région comme le maximum où encore le p -ième centile des $(s_k)_{k=1,\dots,K}$. L'avantage de la précision extrapolée est qu'elle moyenne l'écart entre les différentes orbites ce qui n'est pas le cas des autres mesures. Son estimation sera alors plus précise et on pourra se contenter d'un

⁶Par abus de langage, nous avons nommé ce paramètre σ qui est en général réservé à la notation de l'écart-type. Les variables aléatoires étant toutes positives, il paraît plus judicieux d'utiliser la moyenne quadratique et non l'écart-type pour mesurer la dispersion des orbites.

nombre d'orbites créées inférieur. La moyenne des s_k aurait également pu être utilisée mais notre choix s'est porté sur la moyenne quadratique puisqu'on cherchait à mesurer la dispersion des orbites. La précision extrapolée permettra par la suite de comparer les méthodes en étudiant la différence entre ces valeurs pour chacune de ces méthodes au cours du temps. Pour toutes les figures à venir, nous représenterons désormais la précision extrapolée et non l'ensemble des orbites créées.

8.2 Comparaison des méthodes

Pour comparer les différentes méthodes, nous choisissons l'un des jeux d'observations simulées (créé précédemment) comme jeu de d'observations de référence. L'orbite de référence est l'orbite obtenue après ajustement à ce jeu d'observations. Ensuite, nous appliquons l'une des méthodes décrites dans le chapitre 7. La région de possible mouvements ainsi déterminée contient l'orbite initiale (Fig.8.4). La comparaison entre la région simulée et celle obtenue avec l'une des méthodes s'effectue en utilisant la précision extrapolée $\sigma_S(t)$ (partie 8.1.3).

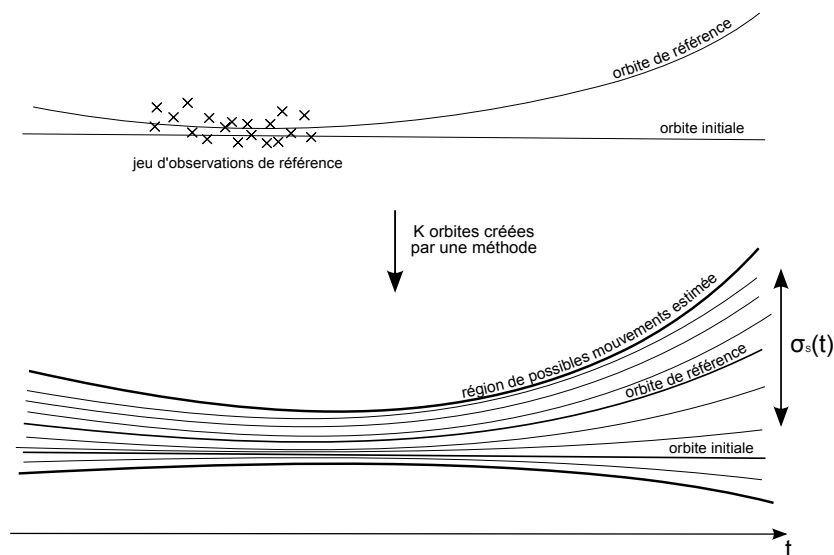


Fig. 8.4: Principe de détermination de la région de possibles mouvements à partir d'un jeu de référence

8.2.1 Comparaison simulations-MCCM

La figure 8.5 représente la différence de la précision extrapolée évaluée avec la méthode de la matrice de covariance (MCCM) et celle évaluée par les simulations pour Mimas et Titan. Pour cette méthode, nous avons utilisé comme matrice de covariance des observations $V_{obs} = \varepsilon I$ avec $\varepsilon = 0.15''$ (la moyenne des $\sigma_{J(i)}$ définis dans la partie 8.1.1).

La méthode MCCM donne des résultats différents des simulations pour le satellite Mimas. Une explication possible est que MCCM suppose que l'erreur sur les conditions initiales est gaussienne. De plus, comme le mouvement de Mimas est très sensible aux conditions initiales et que les dérivées partielles dans TASS sont fixes, la matrice de variance

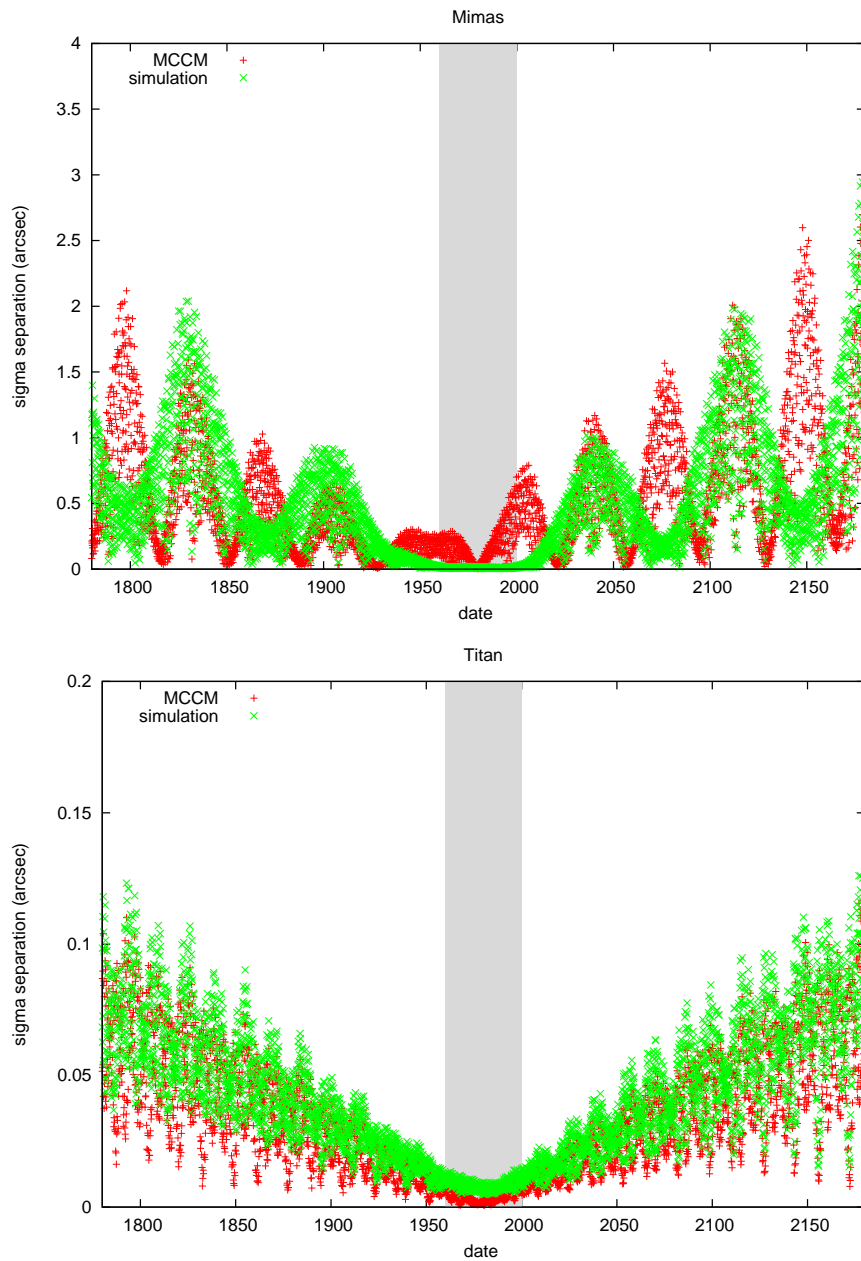


Fig. 8.5: Différence de σ_S entre les simulations et MCMC pour Mimas et Titan sur la période 1960-2000

covariance de conditions initiales est probablement mal estimée par les moindres carrés. Il apparaît que cette méthode ne peut pas être utilisée pour TASS et le satellite Mimas.

Cependant, pour Titan, ce n'est pas le cas. En effet, la précision extrapolée fournie par MCMC semble relativement proche de la valeur donnée par les simulations. Pour vérifier ce sentiment, nous avons calculé le coefficient de corrélation entre les deux courbes. Ce coefficient vaut $\rho_S = 0.955$, ce qui confirme l'impression. La différence entre les deux valeurs obtenues semblent liées uniquement par un facteur multiplicatif, ce que nous espérions, et qui vaut en moyenne (⁷) $\alpha_S = 0.790$.

⁷Le facteur de proportionnalité est calculé comme étant le rapport de la valeur obtenue par la méthode sur la valeur obtenue par les simulations.

8.2.2 Comparaison simulations-MCO

La seconde méthode, Monte-Carlo à partir des observations (MCO) a été utilisée. Nous avons ajouté des erreurs gaussiennes indépendantes sur les observations de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0.15''$ (la moyenne des $\sigma_{J(i)}$ définis dans la partie 8.1.1). La comparaison entre les précisions extrapolées obtenues par cette méthode et par les simulations est représentée sur la figure 8.6.

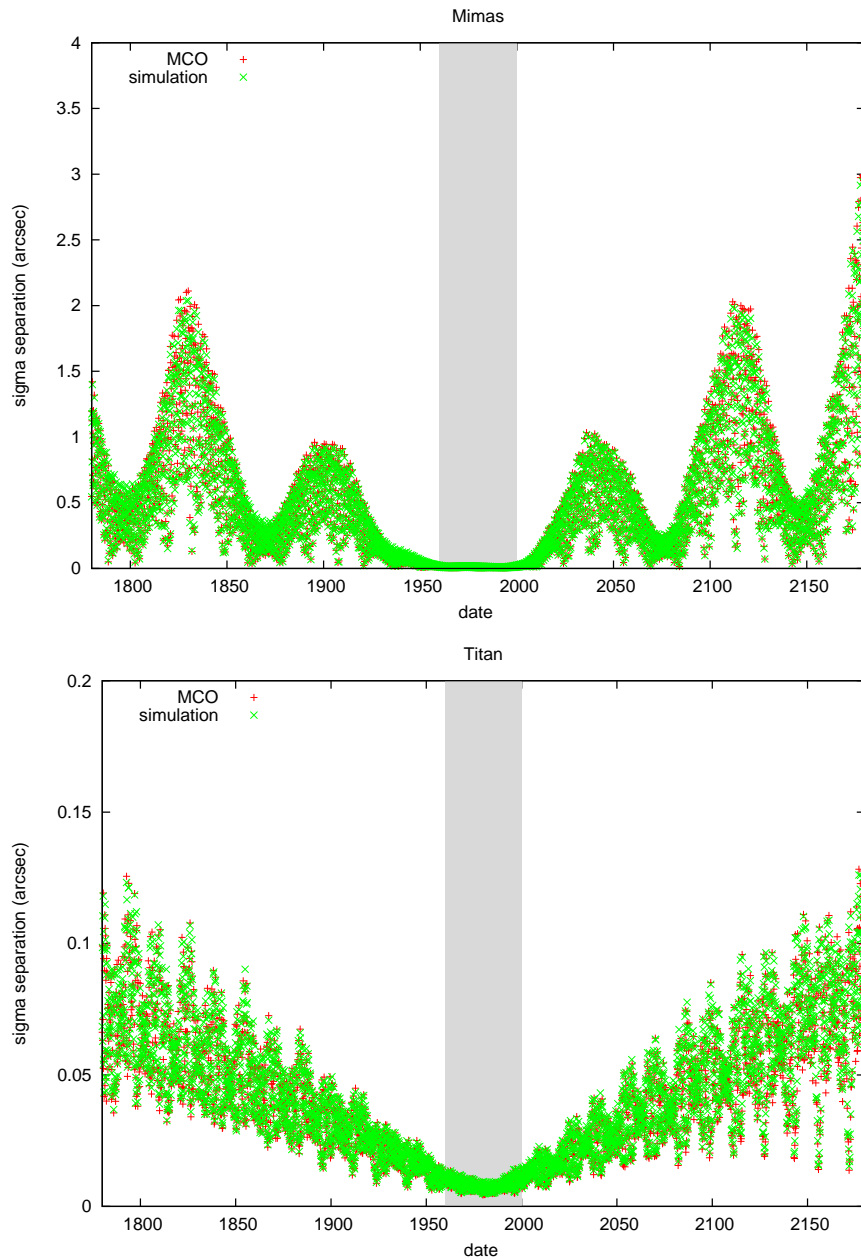


Fig. 8.6: Différence de σ_S entre les simulations et MCO pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000

Les résultats obtenus avec la méthode MCO semblent très proches de ceux obtenus avec les simulations. En effet, le coefficient de corrélation entre les deux courbes est de $\rho_S = 0.999$ pour Mimas et $\rho_S = 0.994$ pour Titan. Un coefficient de corrélation proche de 1 indique que la différence entre les deux courbes est seulement un facteur multiplicatif, qui

dépend du satellite. Le facteur de proportionnalité entre les deux courbes vaut en moyenne $\alpha_S = 1.001$ pour Mimas et $\alpha_S = 0.966$ pour Titan.

La méthode MCO est basée sur des hypothèses plus réalistes que la méthode MCCM. En effet, MCO suppose que les erreurs d'observations sont de même distribution gaussienne et indépendantes. La première hypothèse est vérifiée pour les simulations. Ce n'est donc pas étonnant que MCO donne de bons résultats avec ces observations. Dans la pratique, les erreurs des observations réelles ne sont pas totalement gaussiennes et la précision de celles-ci dépend de multiples paramètres (voir partie 6.1.2) et n'est évidemment pas constante.

8.2.3 Comparaison simulations-bootstrap

La méthode du bootstrap simple (BR) a ensuite été appliquée. Les résultats sont sensiblement identiques et les deux courbes semblent également corrélées (Fig.8.7). En effet, les coefficients de corrélation valent $\rho_S = 1.000$ pour Mimas et $\rho_S = 0.999$ pour Titan. Les facteurs de proportionnalité moyens sont respectivement de $\alpha_S = 1.458$ pour Mimas et $\alpha_S = 1.456$ pour Titan. Les résultats paraissent légèrement moins précis (du moins pour la proportionnalité) qu'avec la méthode précédente (MCO). Cela n'est pas vraiment étonnant puisque la méthode MCO fait l'hypothèse supplémentaire de distribution gaussienne des erreurs (ce qui est le cas des observations simulées).

Lors des simulations, nous avons volontairement introduit une dépendance entre observations d'un même mois. L'hypothèse d'indépendance des observations postulée par les méthodes (MCCM, MCO et BR) n'est donc pas ici vérifiée. Nous avons vu dans la partie 7.3 qu'une manière de contourner cette hypothèse est d'utiliser le bootstrap par blocs (BBR). Il consiste à appliquer le bootstrap non plus directement sur les observations mais sur des blocs indépendants d'observations. Pour les observations simulées, le choix légitime est de grouper ces observations par mois. Les résultats de la méthode BBR pour Mimas et Titan apparaissent sur la figure 8.8. Les coefficients de corrélation sont de $\rho_S = 0.999$ pour Mimas et de $\rho_S = 0.999$ pour Titan. Les facteurs de proportionnalité moyens sont respectivement de $\alpha_S = 1.484$ pour Mimas et $\alpha_S = 1.441$ pour Titan. La différence avec le bootstrap simple (BR) n'est pas si évidente.

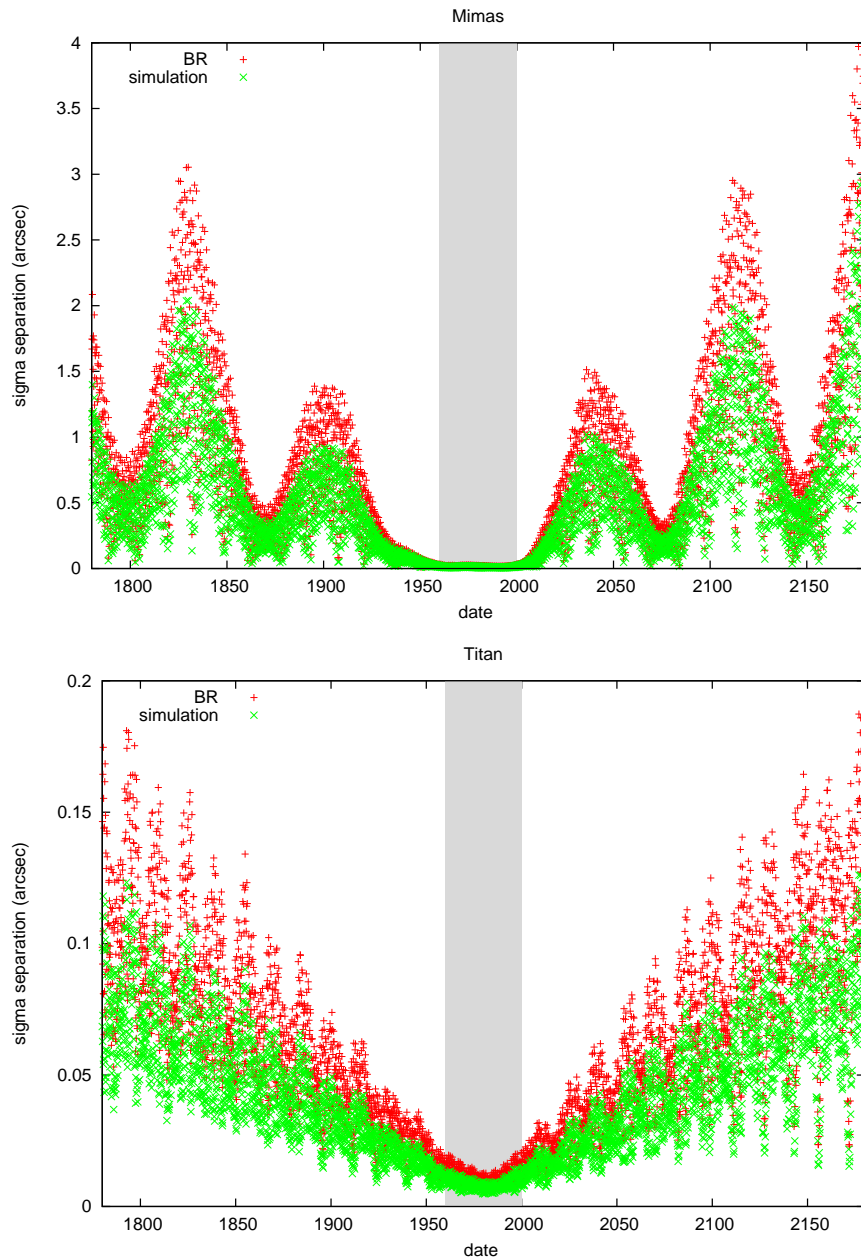


Fig. 8.7: Différence de σ_S entre les simulations et BR pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000

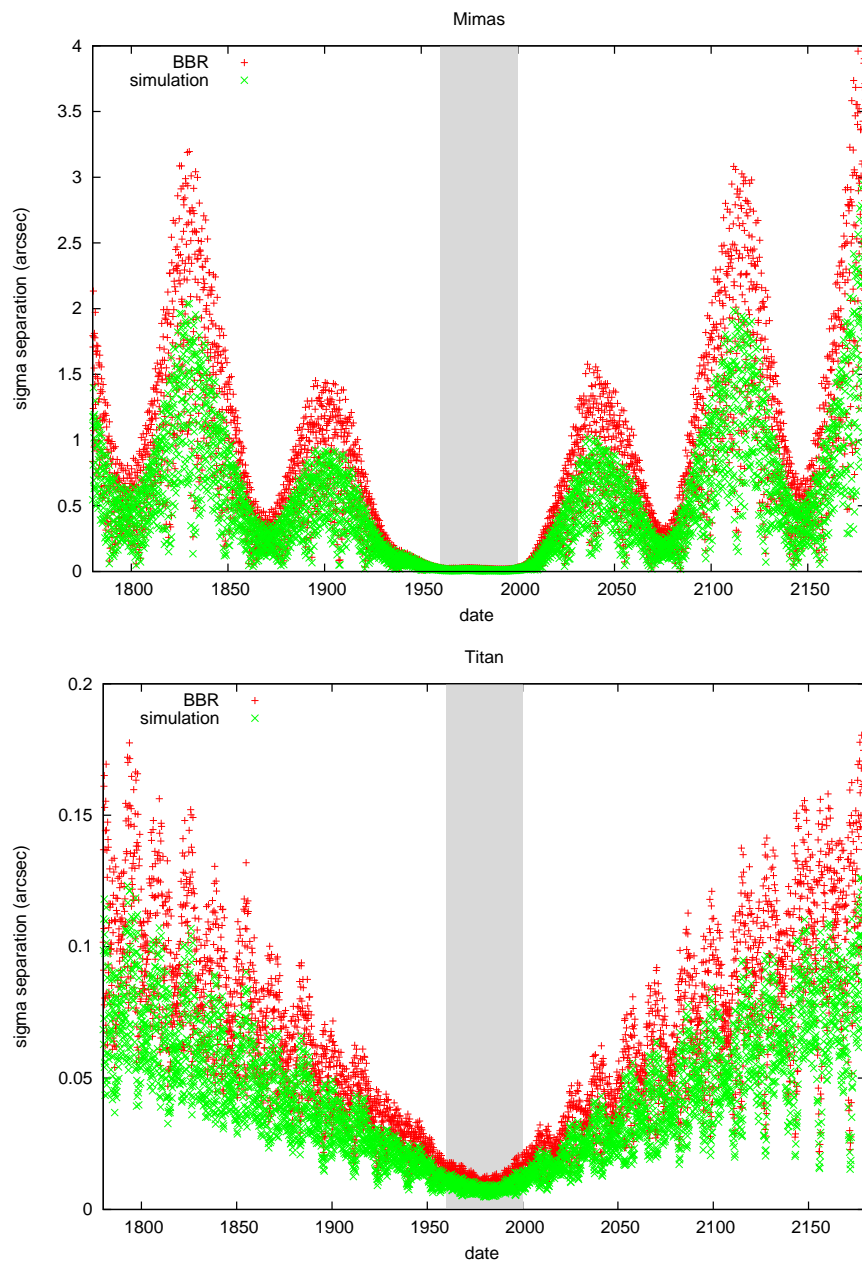


Fig. 8.8: Différence de σ_S entre les simulations et BBR pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000

8.2.4 Conclusion

Au regard du tableau 8.1, la méthode qui semble donner la précision extrapolée et par conséquent la région de possibles mouvements, la plus proche des simulations (ou de la réalité) est la méthode de Monte-Carlo sur les observations (MCO).

Tab. 8.1: Récapitulatif des coefficients de corrélation et facteurs de proportionnalité entre les différentes méthodes et les simulations pour les satellites Mimas et Titan

Méthodes	Mimas		Titan	
	ρ_S	α_S	ρ_S	α_S
MCCM	0.511	1.876	0.955	0.790
MCO	0.999	1.001	0.994	0.966
BR	1.000	1.458	0.999	1.456
BBR	0.999	1.484	0.999	1.441

Cependant, si on excepte la première méthode (MCCM), les autres méthodes (MCO, BR et BBR) donnent des résultats globalement équivalents. Pourtant, pour traiter le problème avec de vraies observations, le bootstrap apparaît comme la meilleure méthode. En effet, deux points, l'un théorique, l'autre pratique, nous amènent à privilégier cette méthode.

Le premier point est que les méthodes BR et BBR sont des méthodes non-paramétriques, c'est-à-dire qu'aucune hypothèse sur la distribution des erreurs d'observations n'est faite. A l'inverse, MCO est une méthode paramétrique. Les méthodes paramétriques se comportent généralement mieux que les non-paramétriques quand les hypothèses sont effectivement vérifiées (c'est ce qu'on vient de voir sur les observations simulées). Par contre, elles deviennent moins précises dès que les hypothèses ne sont plus vérifiées. De plus, les méthodes non-paramétriques sont plus robustes dans le sens où elles ne sont pas trop perturbées par des points aberrants. L'approche non-paramétrique apparaît donc nécessaire dès que la distribution des erreurs d'observations est inconnue (comme cela peut être le cas dans la réalité).

Le second point est d'ordre pratique et concerne l'implémentation de la méthode. Avec les observations simulées, l'implémentation des méthodes est relativement simple. Mais avec les vraies observations, deux problèmes peuvent apparaître pour déterminer la valeur du bruit ajouté dans la méthode MCO :

- Le premier problème est que les observations réelles sont fournies dans des formats⁽⁸⁾ différents (coordonnées absolues, différentielles, angle de position et séparation, etc...). Parfois, pour les observations de la fin du XIX^e et du début du XX^e siècle, seule une des coordonnées est disponible. Par conséquent, introduire une erreur sur l'observation devient rapidement difficile puisque ces erreurs doivent être homogènes. C'est en particulier le cas pour l'erreur ajoutée sur l'angle de position exprimé en degrés qui doit être homogène à l'erreur introduite sur les autres coordonnées (exprimées en arcsec).
- Le second problème vient de l'estimation de la valeur de l'écart-type des bruits ajoutés. Cette valeur dépend des résidus mais également de la manière de calculer ces résidus. En fait, si l'observation est donnée en intersatellite (satellite observé par

⁸On pourra se reporter à la partie 3.2.6 pour s'en convaincre.

rapport au satellite référence), le résidu global dépend des résidus sur la position des deux satellites alors que dans le cas d'observation en coordonnées absolues, le résidu global dépendra *a priori* seulement du résidu sur la position du satellite ⁽⁹⁾.

Le bootstrap évite ces problèmes car aucune information *a priori* (comme la valeur de l'écart-type des bruits ajoutés) n'est nécessaire. La méthode du bootstrap présente l'avantage d'être une méthode facile à implémenter, utilisable pour tout type d'observations (absolues ou intersatellites) et permettant d'estimer convenablement la région de possibles mouvements d'un satellite.

8.3 Nombre d'échantillons nécessaires

Dans la méthode de bootstrap, nous avons créé 200 échantillons bootstrap. Ce nombre est un compromis entre temps de calcul et précision de l'estimation. Un bon test est de choisir un nombre d'échantillons pour lequel les valeurs du coefficient de corrélation et du facteur de proportionnalité se stabilisent.

Dans cette optique, nous avons calculé la précision extrapolée ($\sigma_S(t)$) avec p échantillons bootstrap puis nous avons déterminé le coefficient de corrélation ρ_S et le facteur de proportionnalité α_S entre la précision extrapolée obtenue par les simulations et celle obtenue par le bootstrap à partir de p échantillons. On obtient de cette manière un coefficient de corrélation ρ_S et un facteur de proportionnalité α_S fonction de p .

La figure 8.9 représente d'un côté la valeur du coefficient de corrélation et de l'autre la valeur du facteur de proportionnalité en fonction de p pour les satellites principaux de Saturne (excepté Hypérion).

Il apparaît que les différentes valeurs se stabilisent pour $p = 200$ échantillons. Un bon compromis semble donc de créer 200 échantillons pour estimer la précision extrapolée.

On pourra remarquer que pour certains satellites, 100 jeux d'observations semblent suffisants. Au final, nous avons retenu le nombre de 200 échantillons à créer pour estimer la précision extrapolée, compromis entre temps de calcul et fiabilité du résultat.

Un autre enseignement de ces deux courbes est que le coefficient de corrélation tend vers une valeur proche de 1 et le facteur de proportionnalité tend vers une valeur autour de 1.4-1.5 pour chacun des satellites. Ces deux paramètres semblent donc peu dépendre du satellite étudié.

⁹Dans la pratique, il dépend également de la précision du catalogue d'étoiles qui a servi à réduire la position.

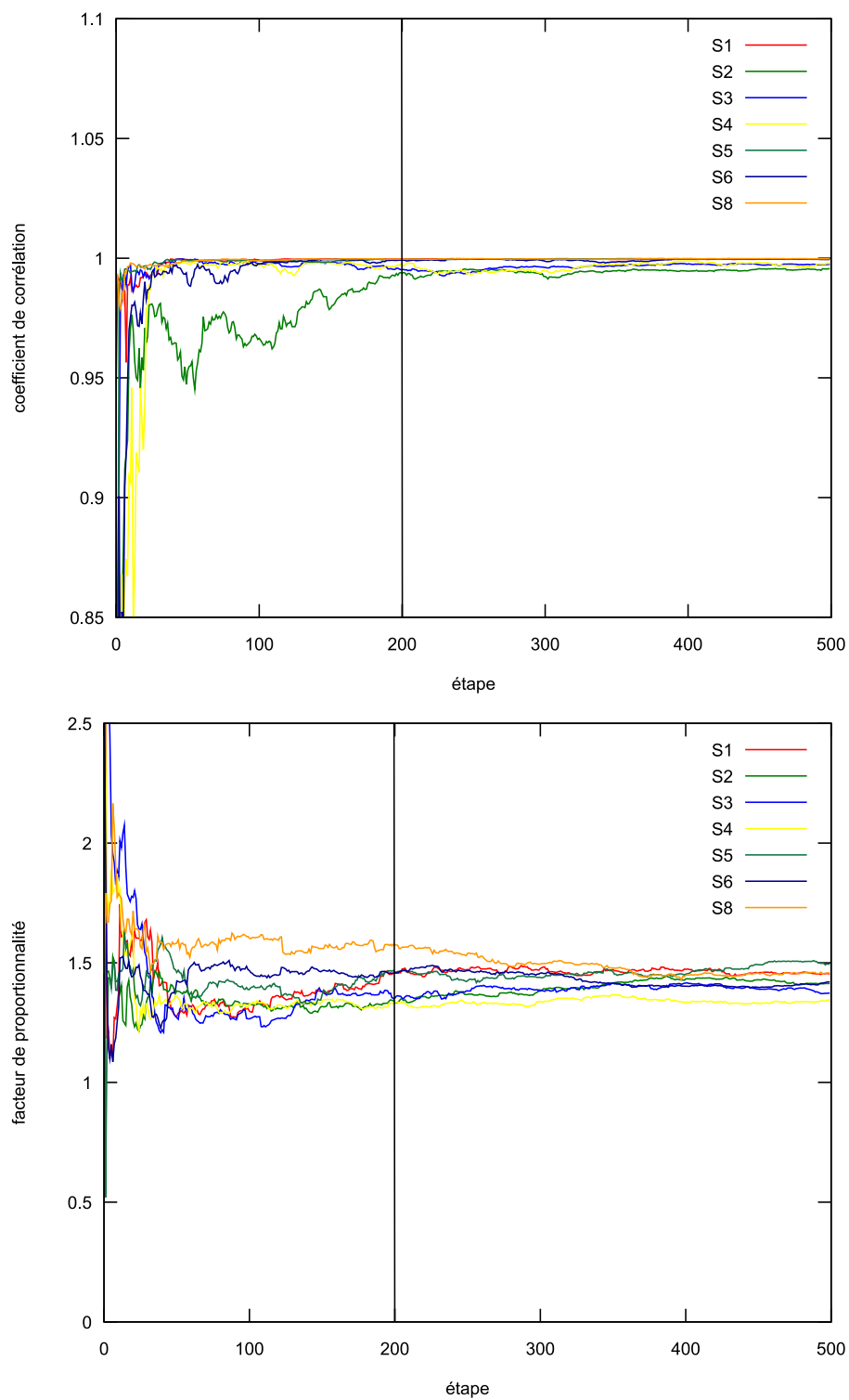


Fig. 8.9: Coefficient de corrélation et facteur de proportionnalité entre les simulations et BR calculés à partir de p échantillons

8.4 Discussion sur le bootstrap par blocs

Pour les simulations, la création des blocs d'observations indépendantes est évidente (groupements par mois). Dans le cas des vraies observations, cette construction est moins naturelle. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous appliquerons la méthode du bootstrap par blocs aux vraies observations (voir chapitre 9). Cependant, nous pouvons déjà affirmer qu'il paraît délicat de grouper les vraies observations en des blocs indépendants.

Nous allons donc nous intéresser au comportement du bootstrap par blocs quand les observations sont groupées dans des blocs qui ne sont pas forcément indépendants. Pour cela, nous avons repris les observations simulées (voir partie 8.1.1) et nous avons groupé les observations non plus par blocs d'un mois mais par blocs de 15 jours. L'objectif étant que ces groupes ne soient pas nécessairement indépendants. En effet, pour chaque mois, les deux blocs de 15 jours ainsi définis seront dépendants car appartenant au même mois.

La figure 8.10 représente la différence de valeur de la précision extrapolée obtenue par les simulations et par la méthode du bootstrap par blocs de trois mois (noté ici BBR2). En comparant avec la figure 8.8, on constate que le BBR2 donne une valeur légèrement moins précise. En fait, le coefficient de corrélation entre les deux courbes est de $\rho_S = 0.999$ pour Mimas et de $\rho_S = 0.998$ pour Titan et les facteurs de proportionnalité moyens sont respectivement de $\alpha_S = 1.541$ pour Mimas et $\alpha_S = 1.433$ pour Titan.

En groupant les observations en des blocs non-indépendants, le BBR a tendance à surestimer la valeur de la précision extrapolée surtout pour les satellites à mouvement rapide comme Mimas.

Un autre inconvénient du bootstrap par blocs peut survenir lorsque les observations sont groupées dans des blocs de taille trop importante. Dans ce cas, les blocs seront peu nombreux et le nombre d'échantillons disponibles pour appliquer la méthode sera insuffisant. En effet, pour avoir au moins 200 échantillons bootstrap différents, il faut avoir au moins 6 éléments dans l'échantillon initial (Tab.8.2). Autrement dit, comme ici, nous créons 200 échantillons, il faudra regrouper les éléments en plus de 6 blocs.

Tab. 8.2: Nombre maximal N d'échantillons bootstrap différents réalisables avec p observations

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24310	92378

Note : La démonstration de ce tableau est dans l'Annexe B.

Cependant, en choisissant 200 échantillons parmi 462, la proportion de jeux qui apparaissent au moins deux fois reste importante. Nous avons d'ailleurs calculé numériquement la proportion de jeux qui apparaissent au moins deux fois en créant N jeux bootstrap avec un échantillon initial de p éléments, ceci pour quelques valeurs de p et N (Tab.8.3).

Ainsi, en créant 200 échantillons bootstrap à partir d'un échantillon initial contenant 6 éléments, 29.3% des échantillons apparaîtront au moins deux fois. Pour le même nombre d'échantillons créés (200), il faut au moins avoir 10 éléments dans l'échantillon initial pour que cette probabilité soit inférieure à 0.01. L'inconvénient de voir apparaître des

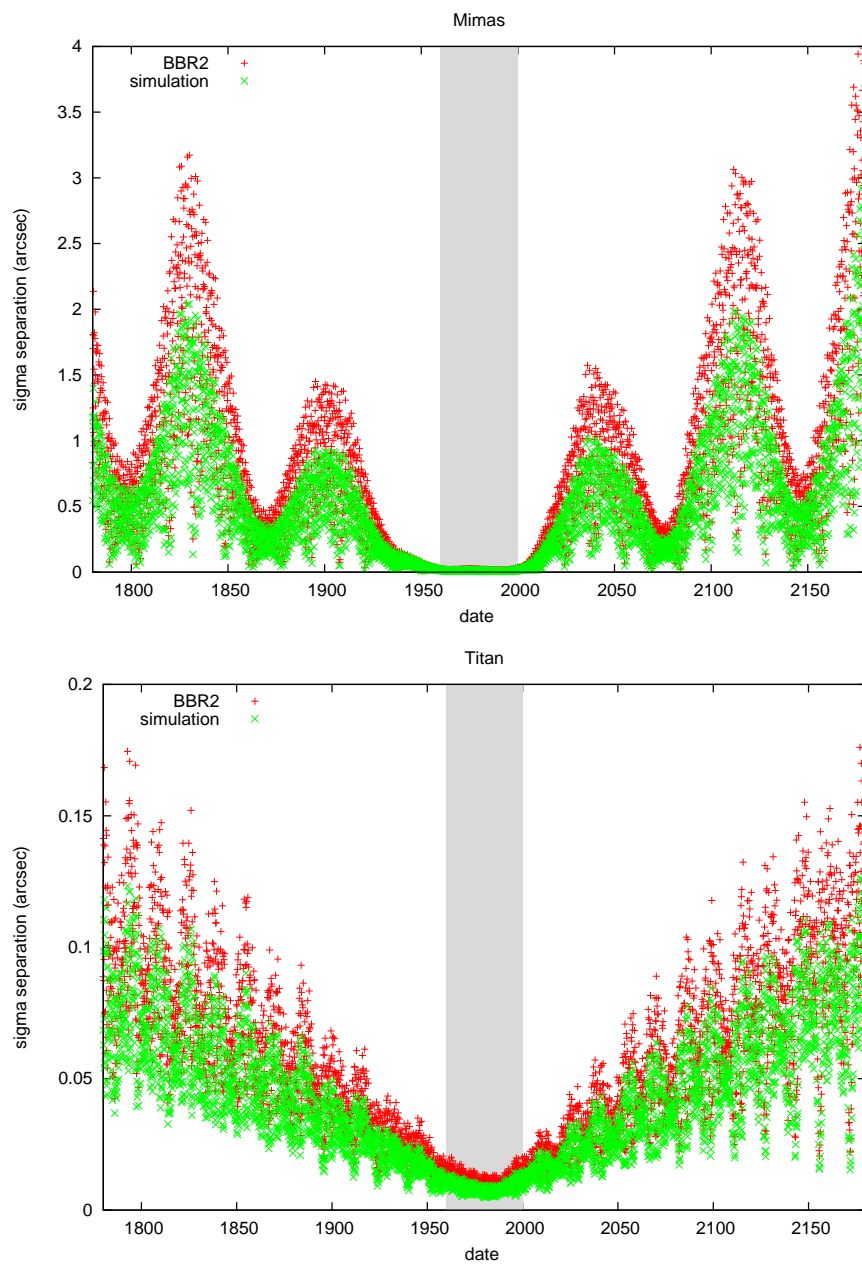


Fig. 8.10: Différence de σ_S entre les simulations et BBR2 pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000

échantillons en double ou plus, est de se retrouver trop souvent avec les mêmes échantillons d'observations qui, au final donneront la même orbite.

En pratique, il faudra impérativement s'assurer que les éléments ne sont pas regroupés en moins d'une dizaine de blocs sous peine de ne pas créer suffisamment d'échantillons bootstrap différents.

Tab. 8.3: Pourcentage de jeux qui apparaissent au moins deux fois lors de N tirages bootstrap d'un échantillon initial de p éléments

$p \backslash N$	30	50	100	200	500	1000
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0.8020	0.8990	0.9740	0.9980	1.0000	1.0000
4	0.4320	0.5810	0.7650	0.9000	0.9670	0.9920
5	0.1680	0.2590	0.4220	0.6070	0.8190	0.9090
6	0.0591	0.0924	0.1713	0.2933	0.5130	0.6845
7	0.0176	0.0307	0.0571	0.1102	0.2326	0.3745
8	0.0057	0.0094	0.0188	0.0363	0.0842	0.1543
9	0.0017	0.0026	0.0058	0.0111	0.0278	0.0531
10	0.0005	0.0011	0.0016	0.0036	0.0082	0.0165

Note : Les pourcentages sont calculés de manière numérique en faisant la moyenne de 1000 essais. On trouvera les détails de la méthode de calcul en Annexe B.2.

8.5 Résultats avec l'intégrateur numérique

La comparaison des méthodes effectuée dans la partie précédente a été réalisée avec TASS en raison de la rapidité de calcul des ajustements avec cette théorie. Pour vérifier que les résultats n'étaient pas trop dépendants du modèle utilisé, nous avons appliqué le même principe de comparaison en utilisant cette fois l'intégrateur numérique.

Les observations simulées ont été générées de la même manière que précédemment et les résultats sont également comparés en utilisant la précision extrapolée. Seulement 30 jeux d'observations ont été simulés en raison du temps de calcul. L'intégrateur numérique n'est pas adapté à ce genre de méthodes statistiques notamment à cause du trop grand nombre d'observations mises en jeu dans les ajustements.

La figure 8.11 montre la valeur de la précision extrapolée obtenue avec les simulations et avec la méthode MCO. Comme pour TASS, les deux courbes sont également corrélées. Les coefficients de corrélation respectifs sont $\rho_S = 0.989$ pour Mimas et de $\rho_S = 0.997$ pour Titan. Les facteurs de proportionnalité moyens sont respectivement de $\alpha_S = 0.848$ pour Mimas et $\alpha_S = 0.723$ pour Titan.

La figure 8.12 montre la valeur de la précision extrapolée obtenue avec les simulations et avec la méthode BR. Les coefficients de corrélation respectifs sont $\rho_S = 0.999$ pour Mimas et de $\rho_S = 0.997$ pour Titan. Les facteurs de proportionnalité moyens sont respectivement de $\alpha_S = 1.041$ pour Mimas et $\alpha_S = 0.832$ pour Titan.

La figure 8.13 représente la valeur de la précision extrapolée obtenue avec les simulations et avec la méthode BBR. Les deux courbes sont là aussi corrélées ($\rho_S = 0.981$ et $\alpha_S = 0.999$ pour Mimas et de $\rho_S = 0.997$ et $\alpha_S = 0.842$ pour Titan).

La méthode BR paraît ici la plus précise. Cependant, ce résultat est à relativiser compte tenu du faible nombre d'échantillons créés (30) en raison du temps de calcul. Le facteur de proportionnalité est lui plus proche de 1 que pour le modèle TASS. Ceci laisse penser que ce facteur dépend non pas du satellite mais plutôt du modèle utilisé.

En comparant cette fois l'amplitude des résultats obtenus entre les deux modèles (TASS et NUMINT), on constate que le modèle numérique est nettement plus précis que TASS. Cela n'est pas très étonnant compte tenu de la précision interne des deux modèles.

8.6 Conclusion

Quelque soit le modèle utilisé, le bootstrap semble la meilleure méthode pour estimer la précision de la position d'un satellite au cours du temps. D'une part, le bootstrap permet une implémentation simple et aucune information *a priori* ne doit être fournie comme cela peut être le cas pour les méthodes MCO et MCCM. D'autre part, cette méthode ne fait notamment pas l'hypothèse d'une erreur gaussienne des observations comme les méthodes paramétriques. Dans le cas réel, les erreurs d'observations ne sont effectivement pas totalement gaussiennes. Pour s'aquitter de cette dépendance, il est possible de grouper les observations par blocs indépendants. Il conviendra d'utiliser cette méthode avec précaution car si ces blocs ne sont en réalité pas indépendants, le bootstrap aura tendance à surestimer la précision. De plus, créer des blocs en trop faible quantité peut entraîner l'échec de la méthode. Dans les applications de la partie III, nous étudierons la précision des éphémérides uniquement à travers la méthode du bootstrap.

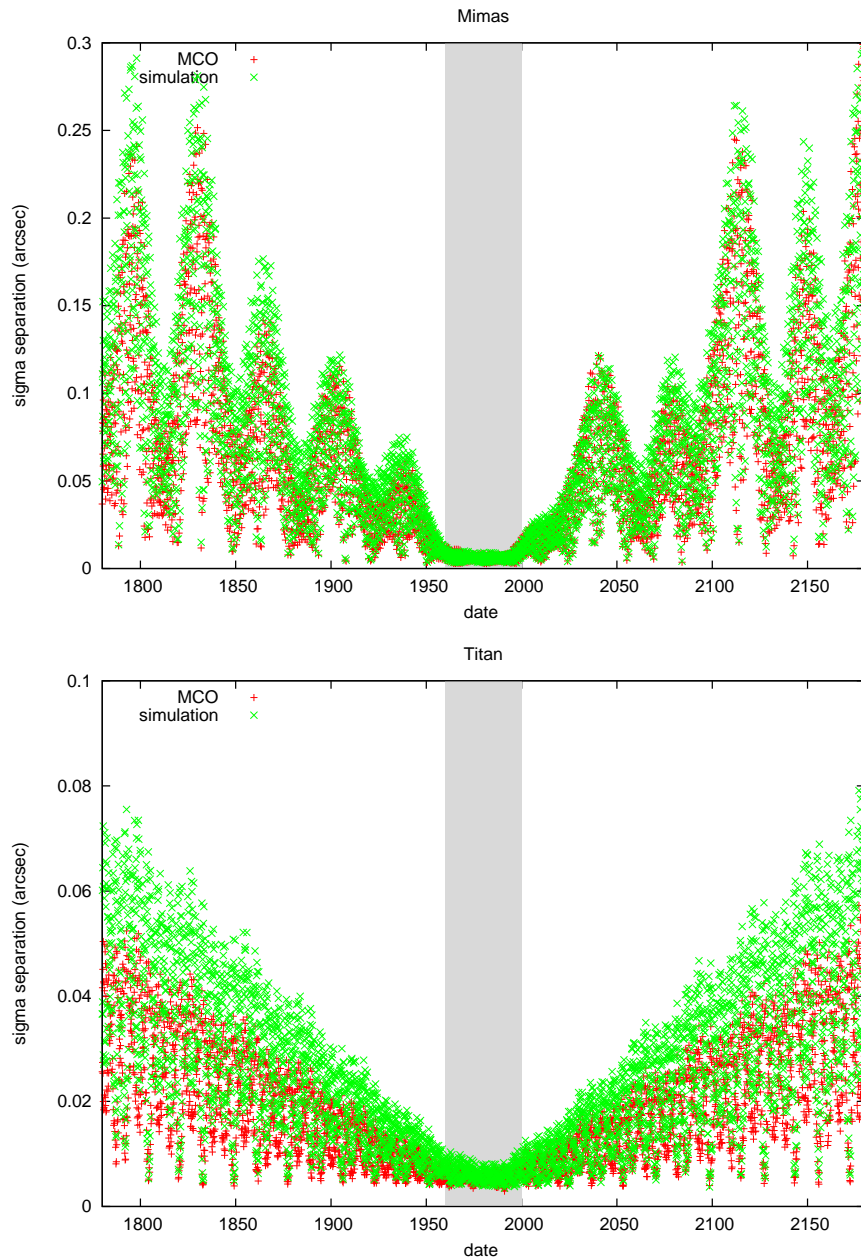


Fig. 8.11: Différence de σ_S entre les simulations et MCO pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000 avec NUMINT

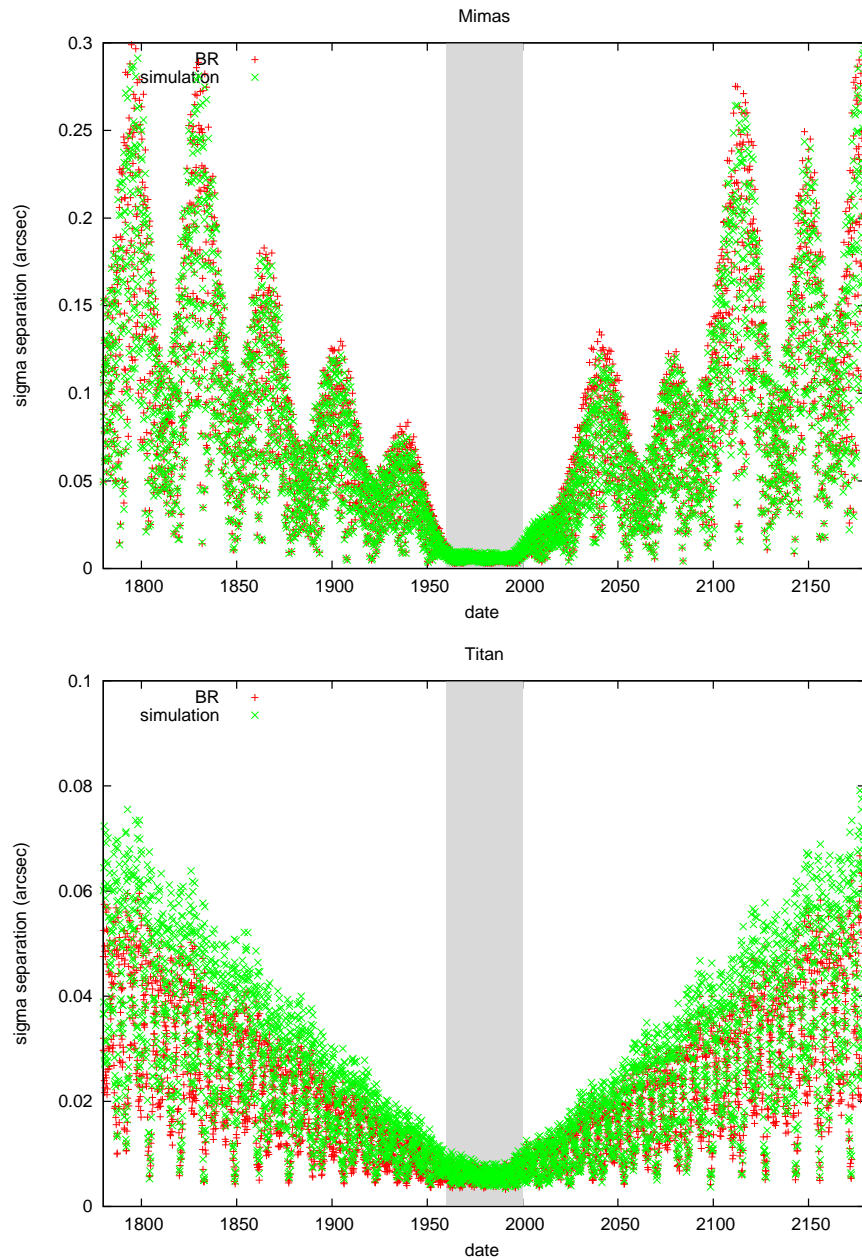


Fig. 8.12: Différence de σ_S entre les simulations et BR pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000 avec NUMINT

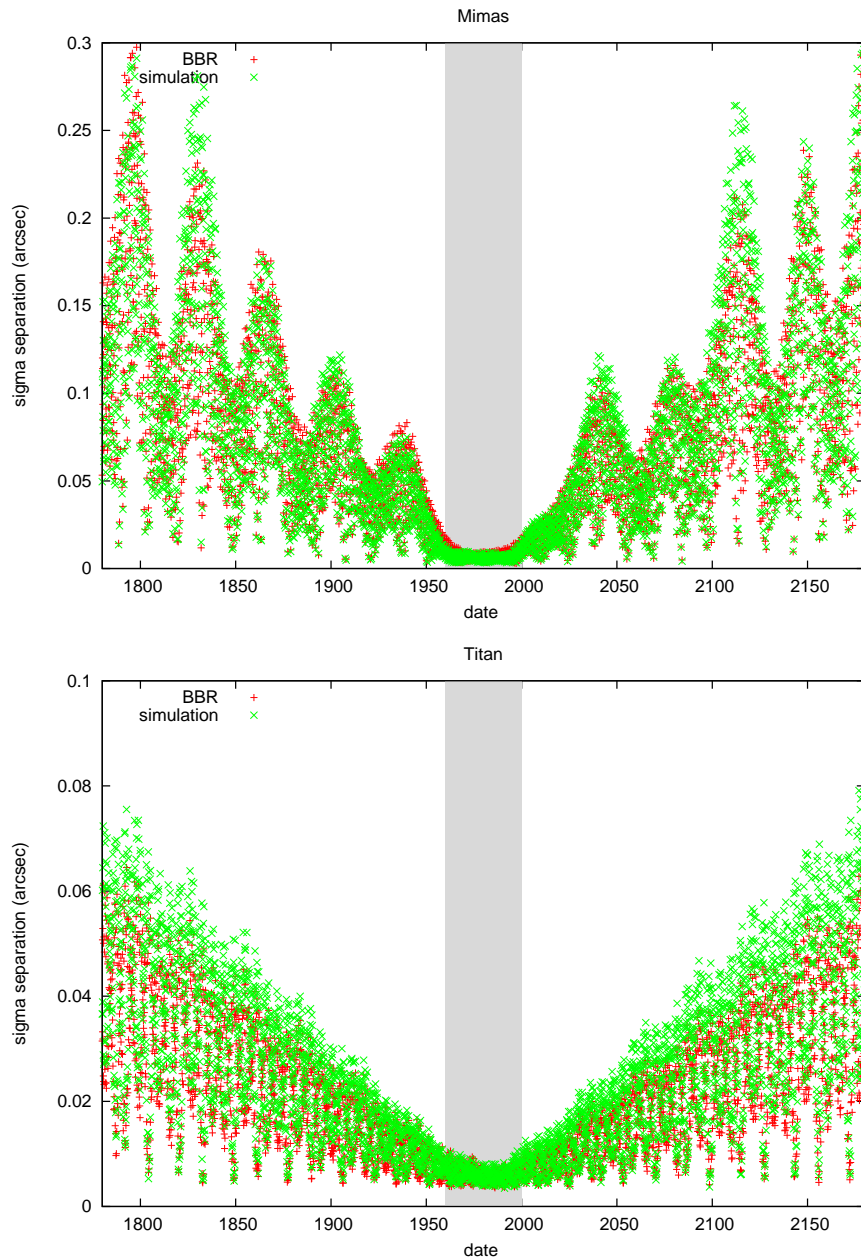


Fig. 8.13: Différence de σ_S entre les simulations et BBR pour Mimas et Titan après ajustement sur la période 1960-2000 avec NUMINT

Troisième partie

Applications

Chapitre 9

Application aux éphémérides des satellites de Saturne

Sommaire

9.1	Comparaison après ajustement sur deux périodes	104
9.2	Comparaison avec les résidus d’observations	108
9.2.1	Sur une période ancienne : 1874-1900	108
9.2.2	Sur une période récente : 1980-2007	108
9.3	Estimation de la précision des éphémérides obtenues avec TASS111	

L’estimation de la précision des éphémérides est désormais possible à l’aide du bootstrap. Nous avons légitimement appliqué cette méthode aux vraies observations des satellites de Saturne. Celles-ci sont issues du catalogue COSS08 (voir chapitre 3). Dans un premier temps, nous étudierons la précision issue d’un ajustement sur deux périodes différentes, ensuite nous comparerons la précision aux O-C, enfin, nous détaillerons la précision des éphémérides fournies par TASS.

9.1 Comparaison après ajustement sur deux périodes

D’après les histogrammes de la répartition de ces observations (Fig.3.2 et Fig.3.3 au chapitre 3), nous pouvons distinguer deux périodes distinctes :

- Les anciennes observations (de 1874 à 1947) qui sont principalement des observations micrométriques donc *a priori* de faible précision.
- Les observations récentes (de 1961 à 2007) qui sont principalement des observations photographiques (y compris CCD) donc *a priori* de précision meilleure.

Au regard de l’histogramme (Fig.3.2), il apparaît que certaines années comme en 1995, on compte plus de 28 000 observations. Pour certaines nuits de cette même année, on peut compter plus d’une centaine d’observations du même objet. Il est évident que ces observations ne sont pas indépendantes. La principale hypothèse de la méthode du bootstrap (BR) est précisément l’indépendance des observations. Dans ces conditions, nous savons qu’une solution est de grouper les observations par blocs indépendants, c’est le bootstrap par blocs (BBR). Le choix des groupes indépendants n’est pas si naturel qu’il y paraît.

Pour essayer de définir ces blocs, il est bon de s’interroger sur ce qui rend les observations dépendantes les unes des autres. Nous avons déjà vu les principales sources d’erreurs des observations (voir partie 6.1.2). Les causes de dépendance des observations sont en réalité les mêmes, à savoir :

- L’observateur lui-même lisant la mesure de la position.
- L’instrument utilisé pour l’observation.
- Le catalogue d’étoiles de référence utilisé pour la réduction. La position des étoiles de référence comporte généralement un biais qui dépend de la direction sur la sphère céleste.
- Les corrections qui doivent être prises en compte dans la réduction et qui sont négligées (réfraction, aberration, effets de phase...).
- Les modèles imparfaits de réfraction ou de la phase.
- La différence entre centre de masse et photocentre due à la non-homogénéité de la surface du satellite.
- L’incertitude du temps de l’observation, notamment pour les anciennes observations.

Pour définir des blocs d’indépendance, il est nécessaire de tenir compte de toutes ces causes. De plus, les blocs ne doivent pas être trop peu nombreux (moins d’une dizaine) sous peine de voir la méthode être moins précise (voir partie 8.4). Un bon compromis nous a semblé de grouper les observations par nuit. En effet, on peut supposer que les observations faites au cours d’une même nuit ont généralement été réalisées par le même observateur et le même instrument.

Finalement, les méthodes bootstrap BR et BBR ont été appliquées afin d’estimer la précision des éphémérides issues des ajustements sur chacune de ces périodes.

La figure 9.1 représente la précision extrapolée estimée par BR et par BBR après ajustements sur les anciennes observations (1874-1947) pour Mimas et Titan.

Les valeurs trouvées avec BR et BBR sont différentes mais seulement en amplitude comme pour les simulations. Celle-ci révèle qu’il existe probablement une dépendance entre les observations de la période 1874-1947. Comme nous avons pu le montrer dans la partie 8.4, le BBR a tendance à surestimer la précision extrapolée quand les blocs ne sont pas indépendants. En fait, la plupart de ces observations sont des observations micrométriques. Compte tenu du temps de lecture des positions sur le micromètre, le nombre d’observations en une nuit pendant cette période excède rarement la dizaine et se situent en moyenne entre 1 et 5. Grouper les observations par nuit ne semble pas constituer des groupes indépendants. On voit là la limite du BBR quand il n’existe pas de groupes d’observations indépendants naturels.

La figure 9.2 représente la précision extrapolée estimée par BR et par BBR après ajustements sur les observations récentes pour Mimas et Titan.

Ici, les différences d’amplitude entre les valeurs obtenues par BR et BBR sont moins importantes. Les observations semblent donc moins dépendantes sur la période 1961-2007. En fait, sur cette période, il y a beaucoup plus d’observations par nuit. La dépendance entre observations d’une même nuit est moins évidente car pour certaines nuits d’observations, il peut y avoir plusieurs instruments et observateurs.

Le résultat le plus surprenant est sans doute la valeur atteinte par la précision extrapolée sur les deux périodes. En effet, pour Mimas, sur la période 1874-1947, σ_S atteint environ 2.5" deux siècles après la période d’observations alors que pour la période 1961-2007, elle atteint 6.5". Ce résultat peut paraître surprenant car les observations récentes sont *a priori* de meilleure qualité que les observations anciennes. La période couverte par les observations anciennes (73 ans) est plus grande que celle couverte par les observations récentes (46 ans). En fait, les anciennes observations couvrent la période du terme principal de la longitude moyenne de Mimas (70.56 ans) ce qui n’est pas le cas des observations récentes. Ainsi, la longitude moyenne de Mimas est mieux estimée avec les observations anciennes. Par conséquent, pour des éphémérides précises en dehors de la période d’obser-

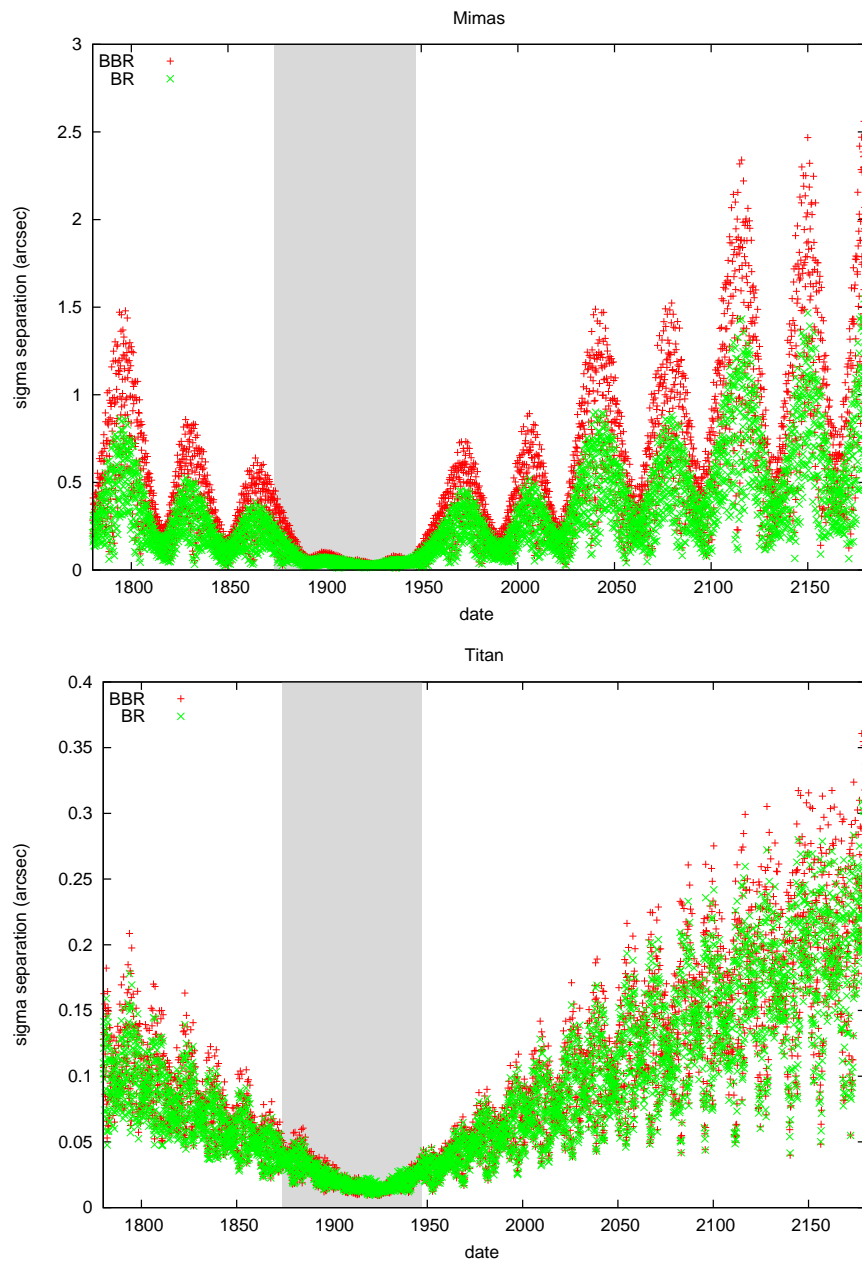


Fig. 9.1: Valeur de la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur la période 1874-1947

vations, une courte période de bonnes observations n'est pas systématiquement meilleure qu'une longue période d'observations moyennes.

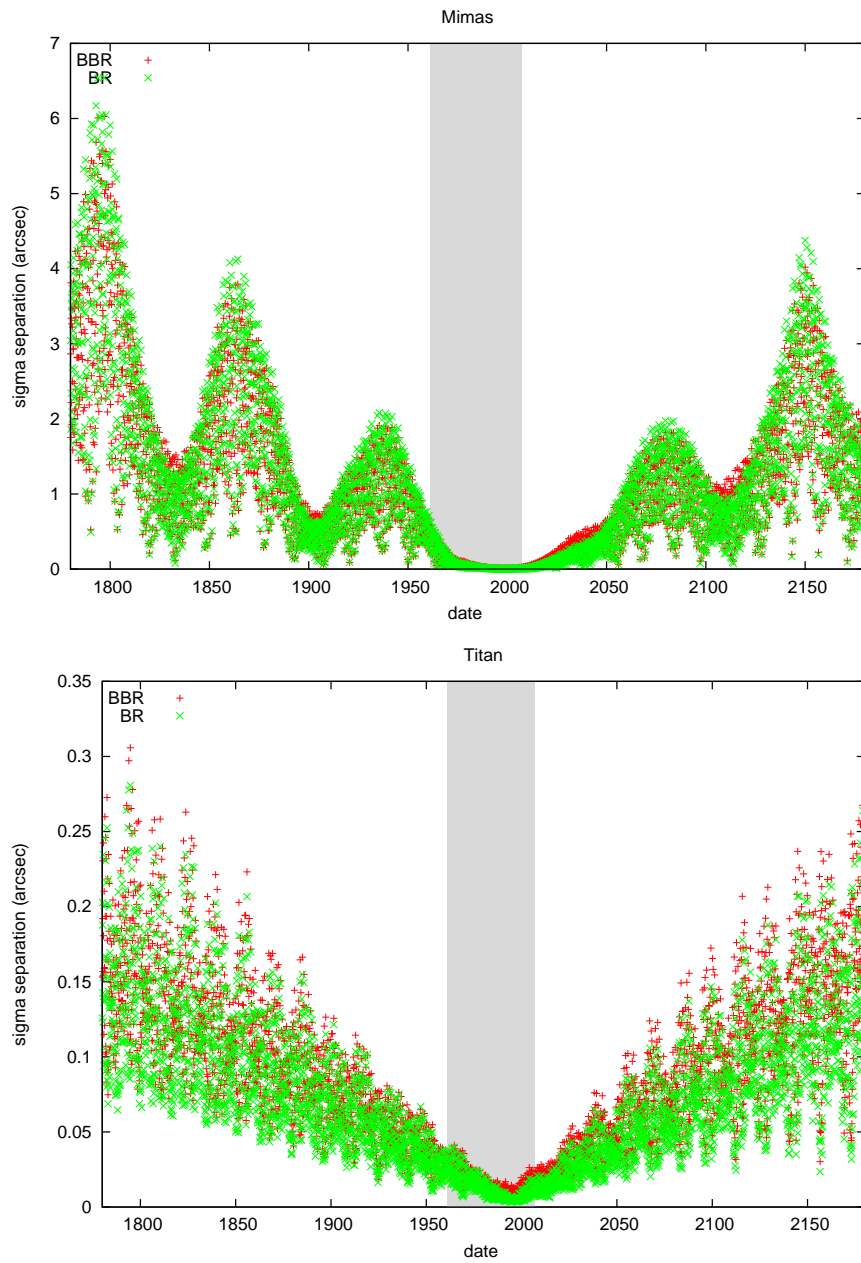


Fig. 9.2: Valeur de la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur la période 1961-2007

9.2 Comparaison avec les résidus d'observations

Un des moyens utilisés pour vérifier la validité de la méthode du bootstrap a été de créer des simulations. Même si les simulations permettent de traiter avec des données dont les paramètres statistiques sont connus, elles restent différentes des vraies observations. Un autre moyen est de vérifier en comparant avec des O-C (¹). Le problème de ces O-C est que l'erreur d'observation est la plus importante et quand la précision extrapolée est du même ordre de grandeur que la précision de l'observation, la comparaison devient difficile. De plus, la précision extrapolée est une mesure particulière de la région de possibles mouvements. Par conséquent, il sera seulement possible d'observer une tendance générale des O-C par rapport à la précision extrapolée (au niveau des variations et non au niveau des valeurs).

Pour pouvoir mettre en évidence une corrélation entre les O-C et la précision extrapolée, nous avons choisi d'ajuster sur une courte période d'observations afin de rendre la valeur de la précision extrapolée assez grande (quelques secondes d'arcs). C'est pourquoi nous avons choisi les périodes 1874-1900 et 1980-2007.

9.2.1 Sur une période ancienne : 1874-1900

Dans un premier temps, nous avons ajusté notre modèle aux observations de la période 1874-1900. Le modèle ainsi ajusté nous a servi à calculer les O-C sur toute la période couverte par le catalogue COSS (1874-2007). Il en résulte naturellement une dégradation de ces O-C en dehors de la période d'ajustement.

Dans un second temps, nous avons calculé la précision extrapolée à l'aide du bootstrap (BR et BBR) après ajustement à la période d'observations 1874-1900. La figure 9.3 permet de comparer les O-C et la précision extrapolée estimée par BR et BBR, issue de l'ajustement à cette période d'observations. On note une dégradation des ces trois valeurs en dehors de la période d'observations. Une certaine corrélation peut être observée mais les erreurs propres aux observations restent prépondérantes notamment pour Titan.

9.2.2 Sur une période récente : 1980-2007

Nous avons appliqué le même principe à la période d'observation 1980-2007. La comparaison entre O-C et précision extrapolée est visible sur la figure 9.4. Là encore, seul le résultat sur Mimas est exploitable en raison de l'erreur propre aux observations qui est trop grande par rapport à la précision extrapolée.

On constate que les O-C (calculés à partir du modèle ajusté à la période 1980-2007) et la valeur de la précision extrapolée semblent relativement corrélés (notamment au niveau du creux de 1900 qui est visible pour les deux paramètres).

L'estimation de la précision de l'éphéméride fournit par la méthode du bootstrap paraît relativement proche de la réalité puisque aux erreurs d'observations près, O-C et précision extrapolée suivent les mêmes variations.

¹Les O-C étant calculés à partir de la théorie ajusté à une certaine période d'observations.

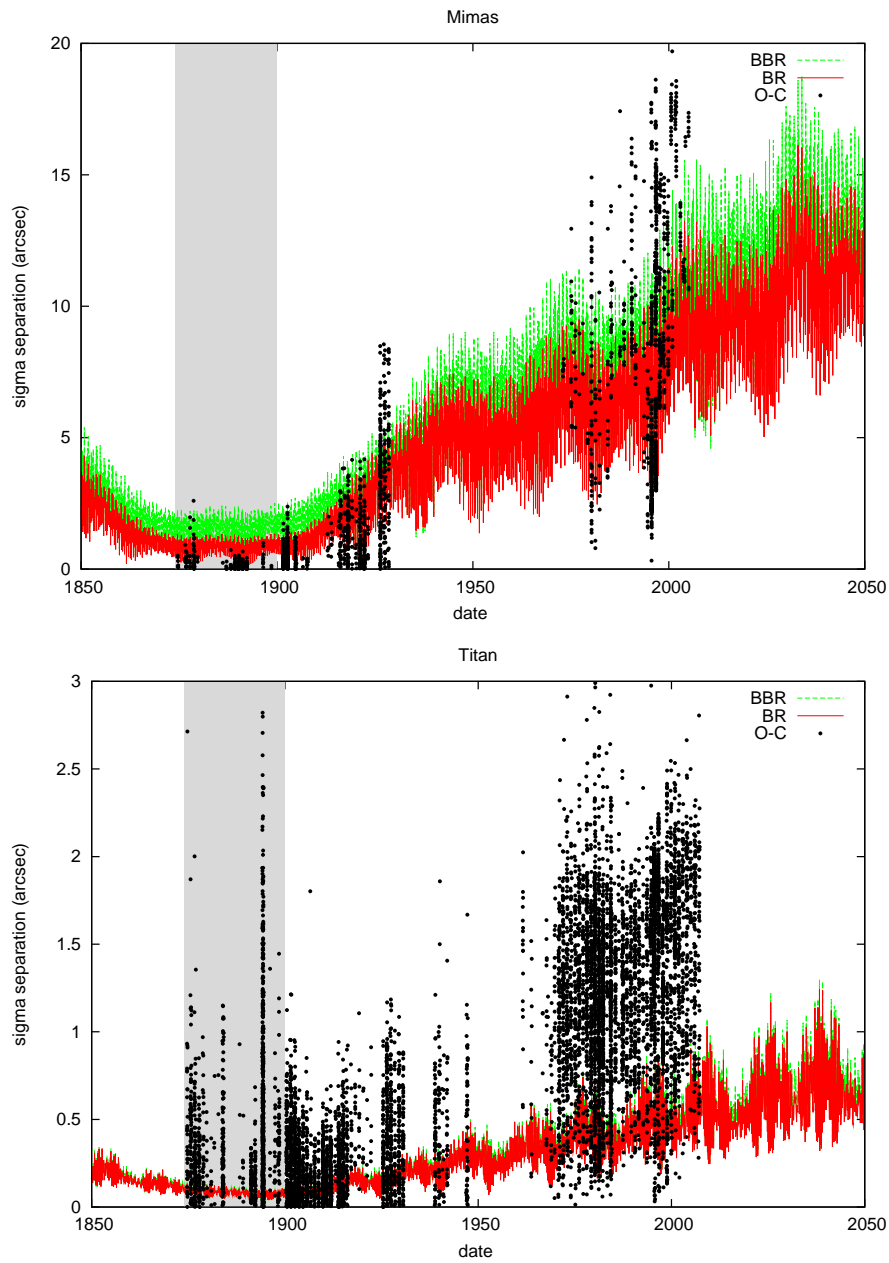


Fig. 9.3: Comparaison entre les O-C et la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur la période 1874-1900

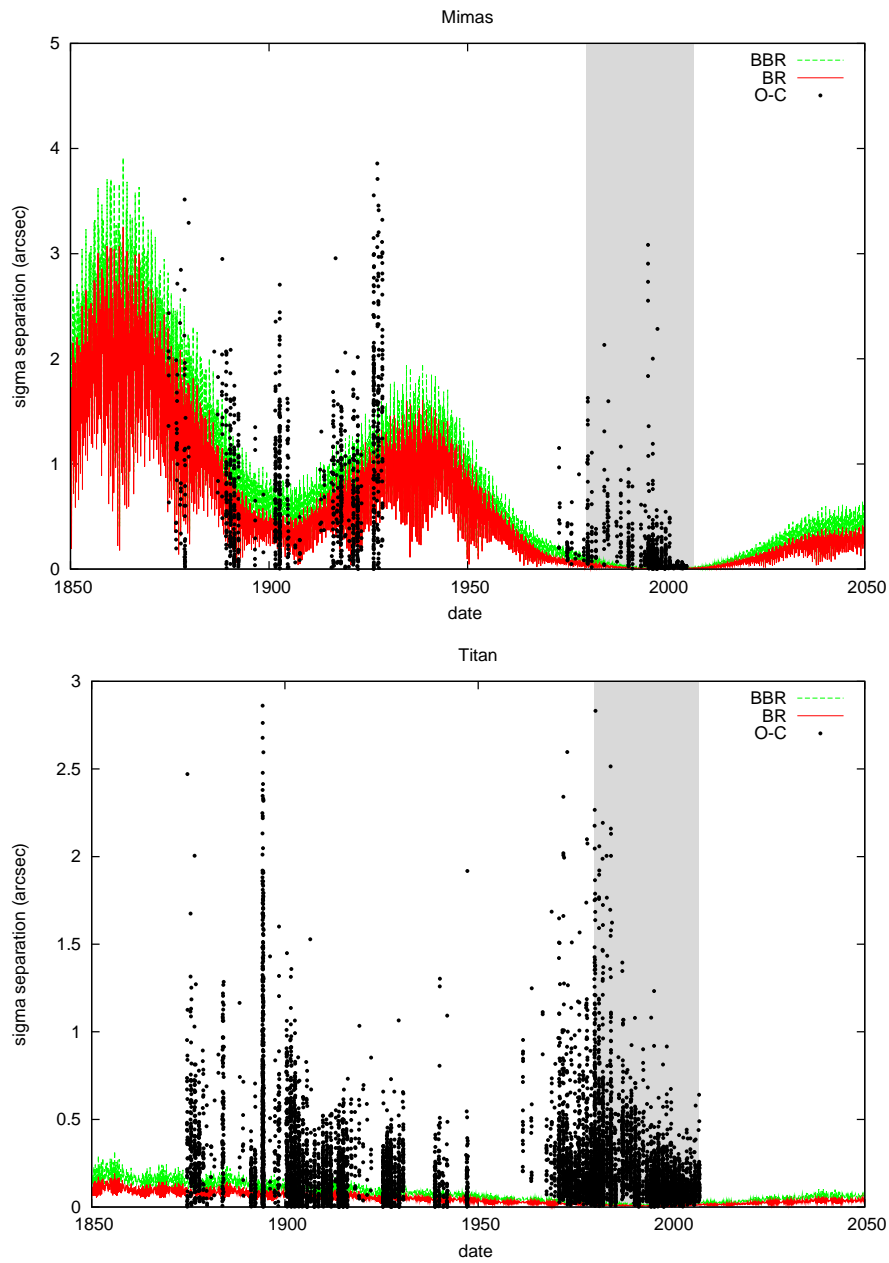


Fig. 9.4: Comparaison entre les O-C et la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur la période 1980-2007

9.3 Estimation de la précision des éphémérides obtenues avec TASS

Après avoir estimé la précision extrapolée sur différentes périodes d'observations, nous sommes enfin en mesure de l'estimer sur la période entière des observations disponibles (1874-2007). Cette estimation correspond effectivement à la précision à laquelle on peut s'attendre en utilisant la théorie TASS ajustée au catalogue COSS08.

Les figures 9.5, 9.6, 9.7 et 9.8 représentent la précision extrapolée pour Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan et Japet estimée par BR et BBR. Pour chaque figure, un histogramme rappelle la distribution des nuits d'observations pour chaque satellite.

La tendance générale est que plus un satellite est rapide, plus la précision sur sa position se dégrade au cours du temps. C'est particulièrement le cas pour les périodes sans observations. Par exemple pour Mimas, l'absence d'observations entre 1945 et 1975 se ressent particulièrement sur la précision extrapolée pendant cette période. Une légère asymétrie dans les courbes (la précision extrapolée semble être plus importante en 1750 qu'en 2150) révèle que les observations les plus récentes (de la période 1960-2007) ont plus de poids dans l'ajustement.

La précision des éphémérides des satellites fournies par la théorie TASS est relativement bonne puisque elle atteint en général autour de 80 mas sur 400 ans (250 mas pour Mimas) et inférieure à 50 mas (100 mas pour Mimas) sur la période d'observations. Rappelons que 50 mas représentent environ 300 km au niveau de Saturne.

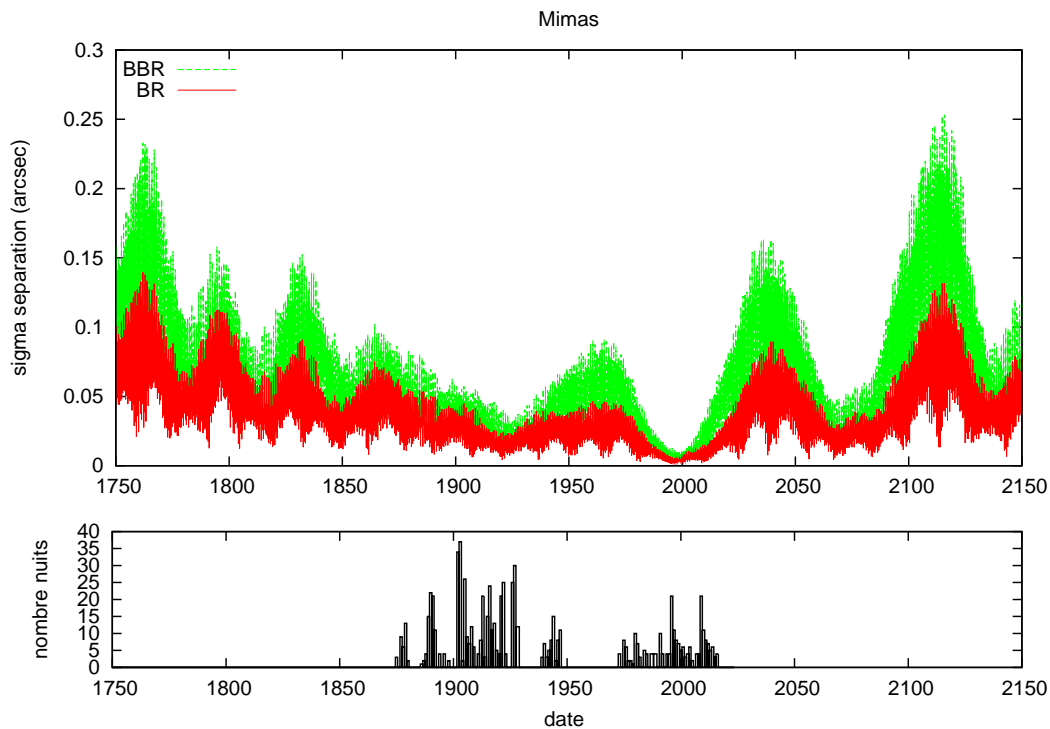


Fig. 9.5: Valeur de la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur les observations de COSS08 pour Mimas

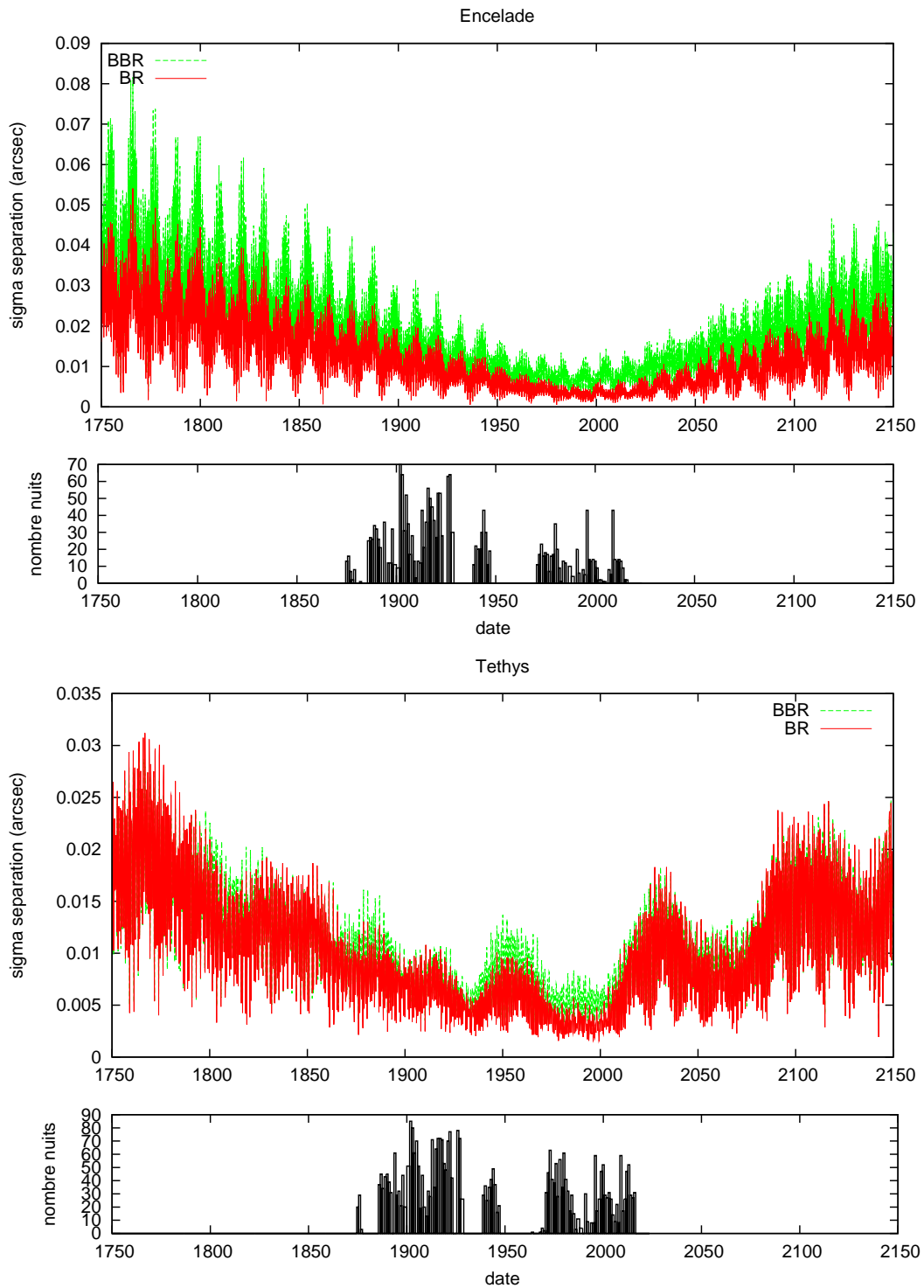


Fig. 9.6: Valeur de la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur les observations de COSS08 pour Encelade et Téthys

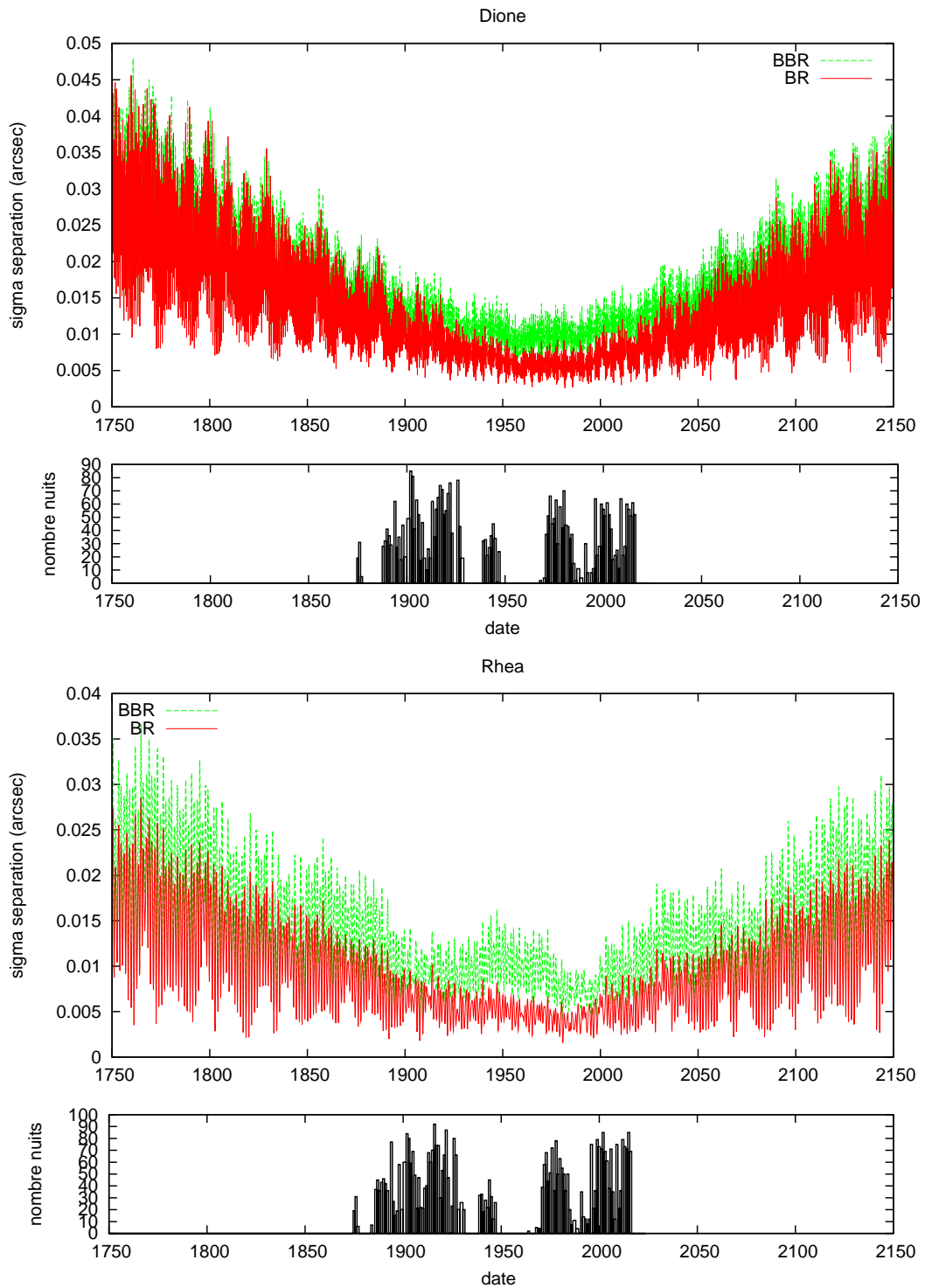


Fig. 9.7: Valeur de la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur les observations de COSS08 pour Dioné et Rhéa

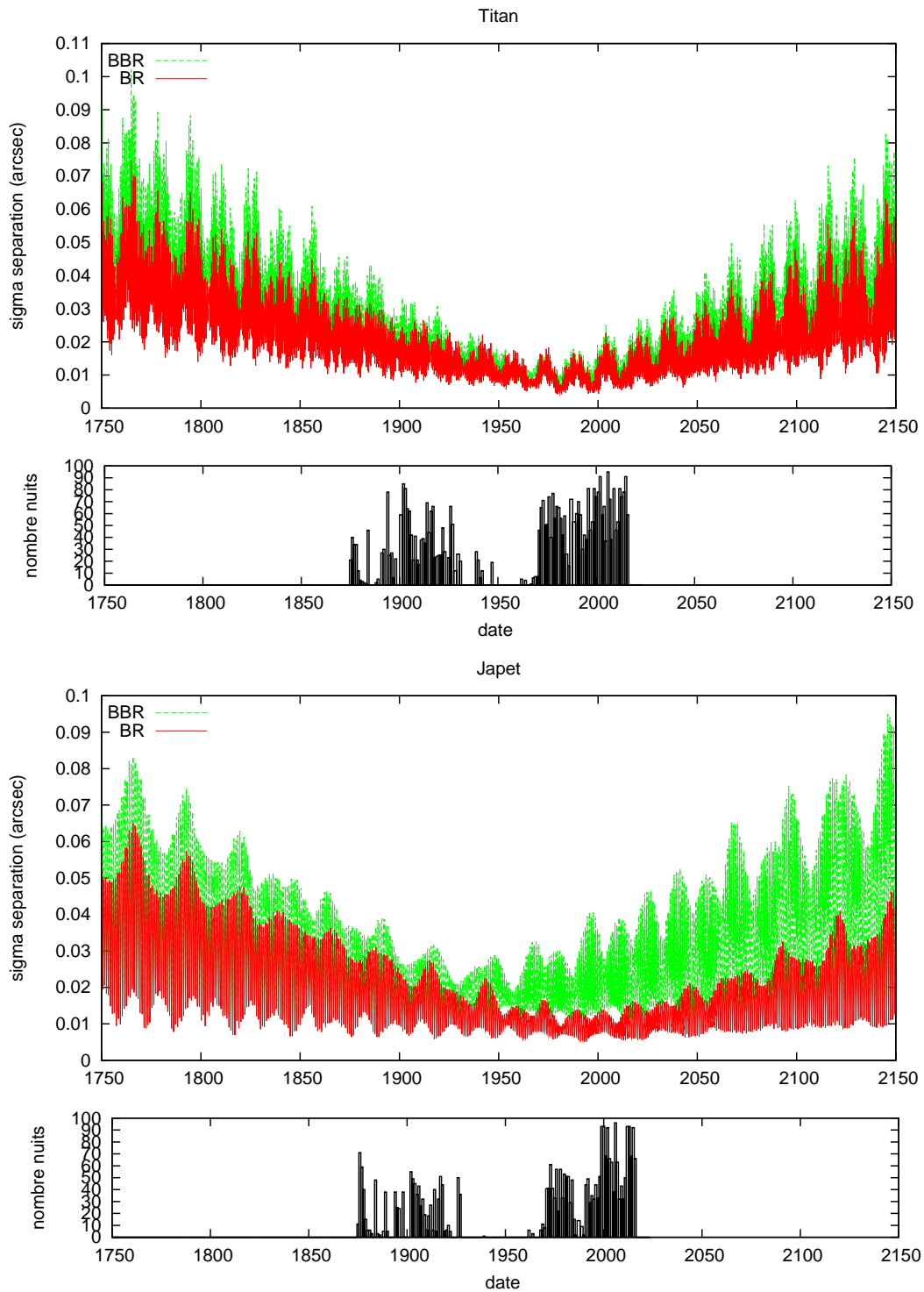


Fig. 9.8: Valeur de la précision extrapolée σ_S estimée par BR et BBR après ajustement sur les observations de COSS08 pour Titan et Japet

Chapitre 10

Application aux observations attendues de la mission spatiale Gaia

Sommaire

10.1	Présentation de la mission Gaia	116
10.1.1	Introduction	116
10.1.2	Les performances de Gaia	117
10.1.3	Les instruments de Gaia	117
10.1.4	L'orbite et la rotation du satellite	119
10.2	Gaia et les satellites naturels des planètes	121
10.2.1	Introduction	121
10.2.2	Les satellites naturels observables par Gaia	121
10.3	Apport de la mission Gaia à la précision des éphémérides . . .	124
10.3.1	Les observations Gaia	124
10.3.2	Le catalogue Gaia	124
10.3.3	Apport des observations et du catalogue Gaia	125

10.1 Présentation de la mission Gaia

10.1.1 Introduction

Gaia est une ambitieuse mission dont l'objectif est d'étendre considérablement les mesures astrométriques, photométriques et spectroscopiques d'un grand nombre d'objets célestes. Son lancement est prévu pour décembre 2011 et la mission doit durer cinq ans. Développée par l'Agence Spatiale Européenne, elle s'inscrit dans la lignée de la mission Hipparcos. Les mesures effectuées permettront de déterminer les distances, vitesses (radiales et tangentielles) et magnitudes de plus d'un milliard d'objets jusqu'à une magnitude 20. La précision des mesures astrométriques en fin de mission sera de l'ordre d'une dizaine de microarcsecondes (μas) pour la plupart des objets. Ce niveau de précision ouvre des portes à des sujets de recherche très variés comme la physique stellaire, les systèmes de référence, la physique fondamentale, etc... ⁽¹⁾

¹La liste des domaines couverts par la mission est disponible sur le site de l'ESA <http://gaia.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=28890>

Pour le système solaire, Gaia fournira d'importantes données puisque :

- 100 000 à 1 million nouveaux astéroïdes (de Vénus à la ceinture de Kuiper) seront observés.
- Les masses et diamètres de certains objets pourront être déterminés avec précision.
- Les classes taxonomiques pourront être effectuées à partir de la photométrie multi-couleur.
- Une astrométrie de haute précision sera possible pour tous les objets du système solaire.

10.1.2 Les performances de Gaia

Par rapport à son prédécesseur Hipparcos, les gains de performance de Gaia seront d'un facteur 100 en précision, 1 000 en sensibilité et 10 000 en nombre d'étoiles observées. En effet, pour des objets ponctuels, la précision atteindra $25 \mu\text{as}$ à la magnitude 15 contre 1 mas environ pour Hipparcos (Mignard *et al.*, 2007, [50]). Elle diminue ensuite rapidement avec la magnitude puisqu'à la magnitude 20, elle ne sera que de 0.3 mas. Le tableau suivant fournit la précision en fonction de la magnitude.

Tab. 10.1: Précision atteinte en fin de mission pour des objets stellaires en fonction de la magnitude

magnitude	≤ 12	15	20
précision (μas)	7	25	300

De même, Gaia atteindra des objets jusqu'à la magnitude 20 contre une magnitude 12 pour Hipparcos. Enfin, alors qu'Hipparcos avait observé environ 120 000 étoiles, Gaia pourra mesurer environ 1.3×10^9 d'objets.

10.1.3 Les instruments de Gaia

Le satellite Gaia est composé de deux miroirs rectangulaires ayant pour dimensions $1.45 \times 0.50 \text{ m}^2$ et collectant le signal en provenance de deux champs différents. Les deux miroirs, séparés par un angle de 106.5° , renvoient chacun leur signal sur un même plan focal, le plan focal astrométrique.

Le principe de fonctionnement du satellite est de balayer le ciel (voir figure 10.5). Pour cela, le satellite tourne sur lui même en 6h permettant ainsi de scanner une partie du ciel. Les images des astres renvoyées dans le plan focal balaient ainsi un jeu de capteurs CCD.

Cette matrice comporte en effet 106 CCD ayant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire 4500×1966 pixels et chaque pixel correspond à une surface de $59 \times 177 \text{ mas}^2$ dans le ciel. Le temps d'intégration des CCD est d'environ 1000 pixels par seconde en accord avec le temps de rotation du satellite.

Le plan focal astrométrique se compose de plusieurs parties (voir figure 10.2). Une étoile traverse la matrice de gauche à droite. Elle est d'abord détectée par l'une des deux premières colonnes de CCD (*sky mapper* SM) qui va fournir aux colonnes suivantes les caractéristiques du transit. Ensuite l'étoile traverse les colonnes suivantes (*astrometric field* AF) qui sont spécialement dédiées aux mesures astrométriques. Pour des étoiles de magnitude inférieure à 13, il existe un système de fenêtrage (*gate*) qui évite la saturation du CCD. Grâce à ce système, des étoiles jusqu'à la magnitude 4 peuvent être mesurées

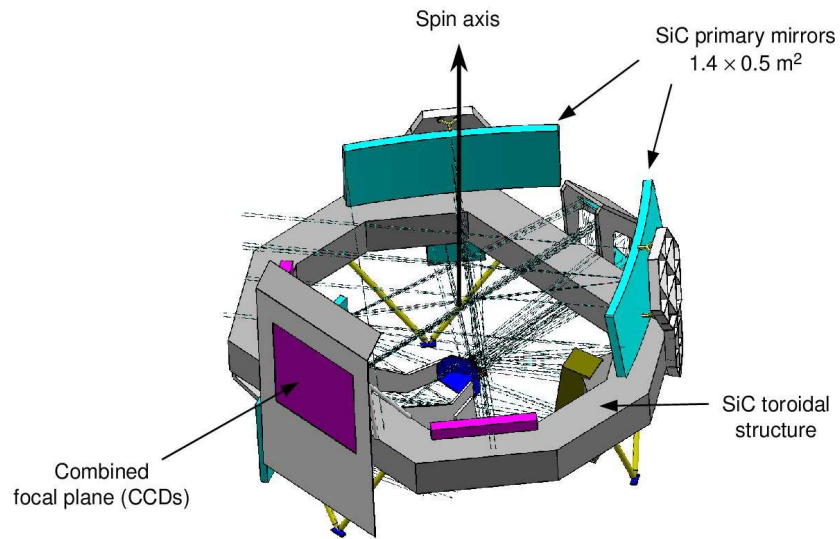


Fig. 10.1: Vue d'ensemble des instruments (Source : ESA)

sans saturation avec toutefois une dégradation de la précision. Enfin, l'étoile traverse les deux dernières colonnes dédiées aux mesures photométriques (*blue photometer BP* et *red photometer RP*)

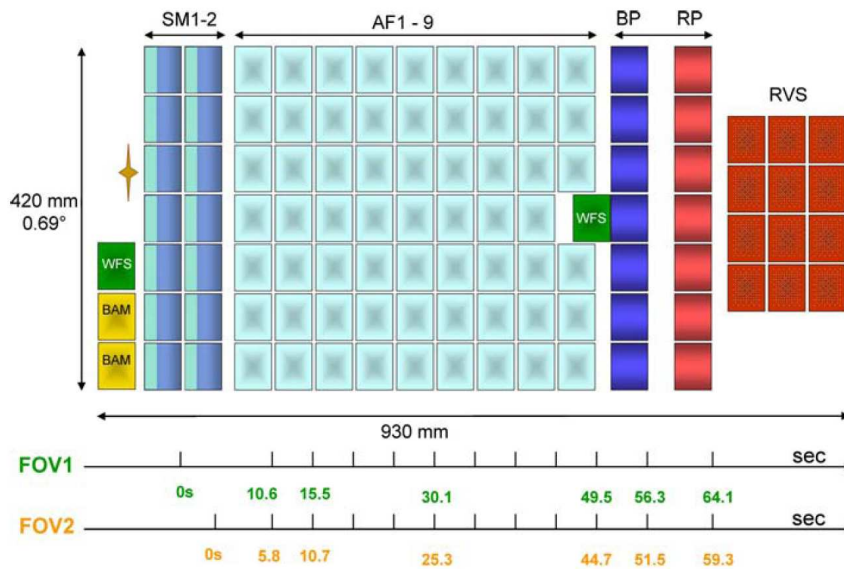


Fig. 10.2: Description du plan focal astrométrique (Source : Mignard *et al.*, 2007, [50])

10.1.4 L'orbite et la rotation du satellite

Le satellite Gaia sera placé au voisinage du point de Lagrange L2 du système Soleil-Terre, à environ 1.5 millions de km de la Terre, sur la ligne Soleil-Terre, dans la direction opposée au Soleil (Fig.10.3). Le point L2 est un point semi-stable. Concrètement, cela veut dire que, dans cette région de l'espace, un satellite peut être maintenu autour du point L2 pendant plusieurs années avec des manœuvres peu coûteuses.

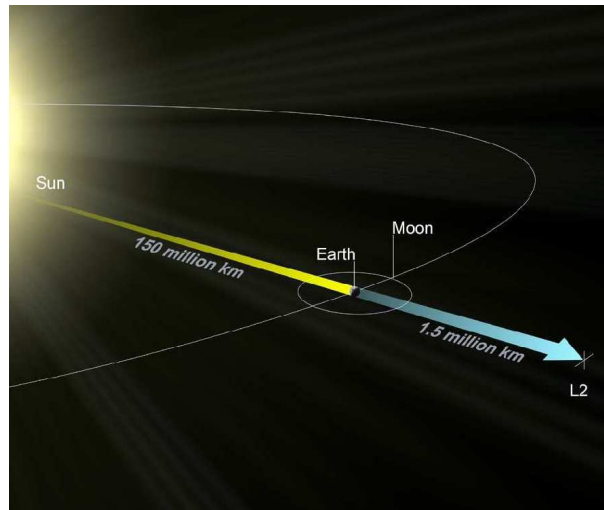


Fig. 10.3: Position du satellite Gaia en orbite autour du point de Lagrange L2 (Source : ESA)

Pour éviter la zone d'ombre de la Terre autour de ce point L2, le satellite sera placé sur une orbite de type Lissajous (Fig.10.4). Ceci lui permettra d'être constamment éclairé par le Soleil afin d'être alimenté en énergie et également d'éviter les chocs thermiques lors des passages dans l'ombre de la Terre. Les conditions initiales seront choisies de façon telle qu'à chaque boucle, le satellite évite la zone d'ombre de la Terre et cela, pendant au moins 6 ans, le satellite mettant environ six mois pour faire une boucle complète.

Une fois placé sur cette orbite, le satellite Gaia effectuera un balayage particulier. En effet, comme on peut le voir sur la figure 10.5, le satellite tournera autour de son axe en 6 heures soit une vitesse de balayage de 60 arcsec/s. Cet axe de rotation précèdera selon un cône d'axe dirigé vers le Soleil et d'angle 45° , assurant qu'une région trop proche du Soleil ne soit balayée par le satellite. La période de précession sera d'environ 63 jours ce qui permettra, en moyenne, d'observer 80 fois environ chaque objet pendant la durée de la mission.

Le ciel ne sera toutefois pas uniformément balayé. Certaines zones comme l'écliptique seront moins observées. De plus, la configuration particulière fait qu'à chaque instant, il existe deux régions inobservables, deux cônes centrés sur le satellite l'un dans la direction du Soleil et l'autre dans sa direction opposée (Fig.10.6). En effet, comme le satellite est orienté de manière à éviter d'observer une région trop proche du Soleil, par symétrie, il ne peut observer la région située dans la direction opposée au Soleil. Pour les objets du système solaire, cela implique qu'ils ne seront pas observables pendant leur opposition. La période la plus propice à leur observation sera lorsqu'ils seront en quadrature.

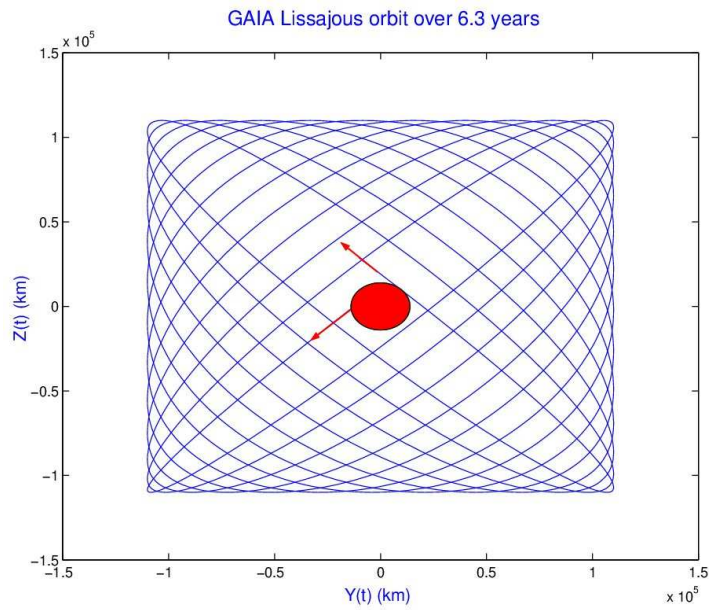


Fig. 10.4: Orbite de Lissajous du satellite Gaia autour du point de Lagrange L2 (Source : ESA)

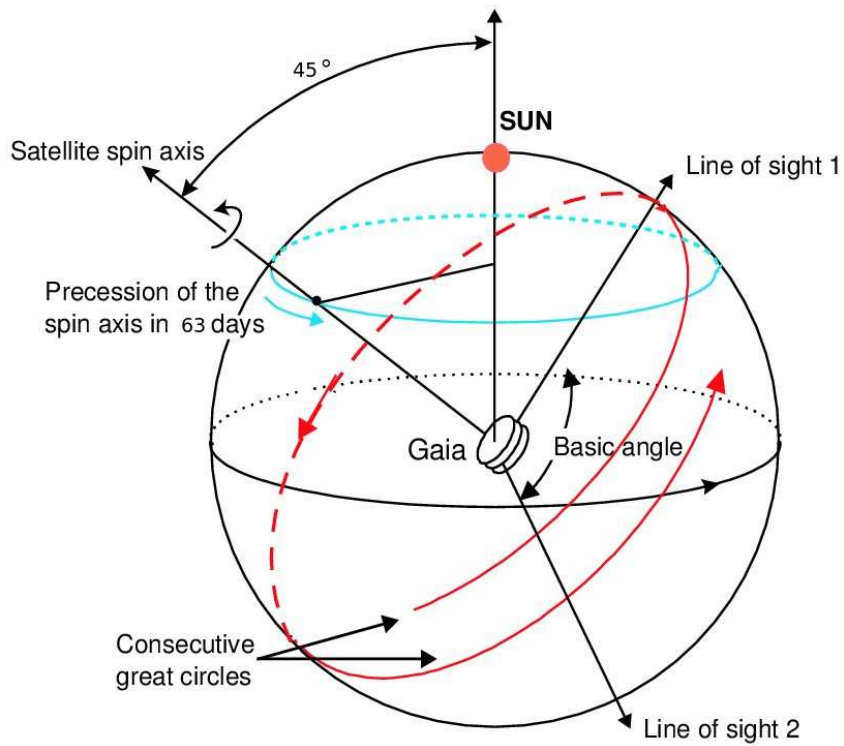


Fig. 10.5: Principe du balayage du ciel par Gaia (Source : Mignard *et al.*, 2007, [50])

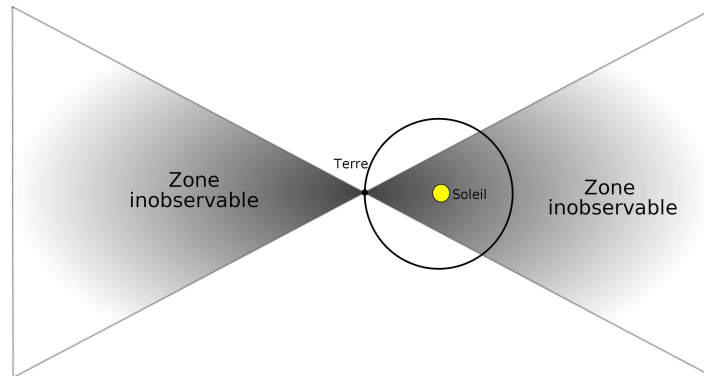


Fig. 10.6: Région non couverte par Gaia par rapport au Soleil

10.2 Gaia et les satellites naturels des planètes

10.2.1 Introduction

Compte tenu de sa précision astrométrique extrême, Gaia apparaît comme un outil idéal pour l'astrométrie des objets du système solaire, aussi bien pour les astéroïdes (Mignard *et al.*, 2007, [50]) que les satellites naturels (Tanga & Mignard, 2005, [75]). Elle apportera d'une part une série de positions précises et d'autre part, un catalogue dense et précis d'étoiles qui permettra par la suite une réduction plus précise des observations au sol.

La magnitude limite atteinte par le satellite étant la magnitude 20, Gaia pourra en théorie observer la majorité des satellites naturels des planètes géantes (Tab. 10.2). La précision sera, quant à elle, moins bonne que pour les étoiles car d'une part, l'objet possède un mouvement propre plus important qui fait que, pendant l'exposition, le satellite se sera déplacé et d'autre part, Gaia mesurera la position du photocentre des satellites et non celle du centre de masse. En pratique, la précision dépendra principalement du modèle de photocentre et devrait être d'un ordre de grandeur supérieur aux étoiles (soit environ 0.1 à 1 mas).

10.2.2 Les satellites naturels observables par Gaia

- Les satellites naturels observables par le satellite Gaia doivent respecter trois critères :
- être suffisamment brillants (magnitude inférieure à 20) mais pas trop (magnitude supérieure à 4) sous peine de saturer le CCD. Pour des objets de faible magnitude (entre 4 et 10), il est prévu un système de fenêtre permettant de ne pas saturer le CCD. Cette technique se fait au prix d'une moins bonne précision (Tanga & Mignard, 2005, [75]).
 - être suffisamment éloignés de la planète (ou de ses anneaux dans le cas de Saturne) car d'une part, un satellite proche de sa planète sera plus souvent inobservable (soit devant ou soit derrière sa planète) et d'autre part en raison du halo lumineux

engendré par la proximité de la planète (Tanga & Mignard, 2005, [75]). Dans ce cas, le nombre d'observations pourra être plus petit que 50.

- ne pas avoir une taille angulaire plus grande que ~ 200 mas car dans ce cas, la position du photocentre ne pourra pas être déterminée (Mignard *et al.*, 2007, [50]).

La dernière condition implique des diamètres inférieurs à 750 km pour les satellites de Jupiter, 1 400 km pour les satellites de Saturne, 2 800 km pour ceux d'Uranus et 4 500 km pour ceux de Neptune. Cela élimine donc les plus gros satellites comme les galiléens et Titan. Rhéa et Japet sont au niveau de cette limite ce qui suggère qu'ils ne seront pas observés à chaque fois par la sonde. Les autres satellites vérifient globalement tous ces critères (voir tableau 10.2).

Pour les satellites faibles (magnitude supérieure à 15), de petite taille, les observations fournies par Gaia seront d'un apport considérable. Les seules observations de ces satellites sont souvent des observations spatiales, certes de bonne qualité mais de faible nombre. Gaia fournira une cinquantaine d'observations d'excellente qualité. Elles permettront d'affiner les modèles de mouvements de ces satellites.

Pour les satellites plus gros comme les satellites principaux de Saturne, l'apport de ces nouvelles observations est plus relatif. Le grand nombre d'observations existant permet en partie d'avoir une orbite de bonne qualité. Cela dit, les observations Gaia restent quand même au moins un ordre de grandeur plus précise que les meilleures observations actuelles (0.02'' pour les phénomènes mutuels).

Tab. 10.2: Satellites naturels observables par Gaia

numéro	satellites	magnitude
<i>Satellites de Jupiter</i>		
J-16	Métis	17.5
J-15	Adrastéia	18.9
J-5	Amalthée	14.1
J-14	Thébé	15.7
J-13	Léda	20.0
J-6	Himalia	14.8
J-10	Lysithéa	18.4
J-7	Élara	16.8
J-12	Ananké	18.9
J-11	Carmé	18.0
J-8	Pasiphaé	17.0
J-9	Sinopé	18.3
<i>Satellites de Saturne</i>		
S-16	Prométhée*	15
S-17	Pandore*	15.5
S-11	Épiméthée	15
S-10	Janus	14
S-1	Mimas	12.9
S-2	Encelade	11.7
S-3	Téthys	10.3
S-13	Télesto	18
S-14	Calypso	18.5
S-4	Dioné	10.4
S-12	Hélène	17
S-5	Rhéa**	9.7
S-7	Hypérion	14.2
S-8	Japet**	11.9
S-9	Phœbé	16.5
<i>Satellites d'Uranus</i>		
U-5	Miranda	16.5
U-1	Ariel	14.4
U-2	Umbriel	15.3
U-3	Titania	13.9
U-4	Obéron	14.2
<i>Satellites de Neptune</i>		
N-1	Triton	13.7
N-2	Néréide	18.7

Note : Les valeurs des magnitudes proviennent de [69].

* : Les satellites Prométhée et Pandore sont proches de l'anneau A et seront vraisemblablement difficilement observables.

** : Les satellites Rhéa et Japet ont un diamètre proche de la valeur maximale pour être observés.

Bon nombre de satellites pourront être observés par Gaia. Le satellite apportera une cinquantaine d'observations pour chaque satellite avec une précision inégale. Nous allons maintenant étudier l'apport de telles observations sur les éphémérides des satellites de Saturne.

10.3 Apport de la mission Gaia à la précision des éphémérides

La mission Gaia fournira à la fois une cinquantaine d'observations très précises pour chaque satellite et également un catalogue d'étoiles dense et précis. Nous allons voir maintenant quel peut être l'impact de ces deux données dans la précision des éphémérides des satellites de Saturne.

10.3.1 Les observations Gaia

L'apport des observations Gaia sur la précision des éphémérides peut être mis en évidence par la méthode du bootstrap. L'idée est de comparer la précision extrapolée sur l'éphéméride avec uniquement les observations au sol, avec celle obtenue en ajoutant les observations Gaia, ceci à la fin de la mission.

Pour cela, nous avons dû simuler des observations terrestres jusqu'à la fin de la mission (c'est à dire fin 2016). Nous avons repris, pour la période 2005-2016, une distribution des observations identique à celle de la période 1992-2003 en tenant compte du décalage entre deux oppositions (à savoir 378 jours pour Saturne). Ce choix est fait de manière à simuler les observations jusqu'en 2016 et faire correspondre l'opposition de 2009 (opposition pour laquelle des phénomènes mutuels seront observables) avec l'opposition de 1995 marquée par un grand nombre d'observations (réalisées justement en raison des phénomènes mutuels). Au niveau de la précision de ces observations créées, nous avons conservé les mêmes O-C que pour les observations de la période 1992-2003. Au final, nous avons utilisé les observations du catalogue COSS (*i.e.* entre 1874 et 2007) auxquelles ont été ajoutées les observations simulées de la période 2005-2016.

Les observations Gaia ont également été simulées. Pour chacun des satellites, nous nous sommes donné 50 dates d'observations sur 5 ans (2012-2016) équiréparties (tous les 36 jours) en bruitant ⁽²⁾ les positions calculées avec un bruit gaussien de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$ mas.

Nous avons donc appliqué la méthode du bootstrap (BR et BBR) aux deux périodes d'observations (période 1874-2016 avec et sans les observations Gaia). L'ajustement aux deux périodes nous fournit une précision extrapolée que l'on peut comparer (Figs.10.7 et 10.8).

10.3.2 Le catalogue Gaia

Hormis les observations propres, Gaia fournira également un catalogue d'étoiles d'une densité et d'une précision inégale. Il sera possible de réduire les observations en utilisant ce catalogue d'étoiles et d'obtenir des positions plus précises.

Il faudra pour cela prendre en compte un certain nombre de nouvelles corrections lors de la réduction comme l'absorption de l'atmosphère qui varie suivant que l'objet observé s'élève ou descend dans le ciel, l'aberration différentielle ou bien encore la couleur des étoiles dans la réfraction.

Nous serons en mesure de réduire les nouvelles observations mais également les anciennes observations obtenues sur plaques photographiques. Ces observations ont été réduites à l'époque en utilisant un catalogue d'étoiles souvent peu précis. Actuellement, une nouvelle procédure de réduction utilisant le *scan* ⁽³⁾ d'anciennes plaques photographiques et l'utilisation de catalogues d'étoiles plus précis (UCAC2) a été élaboré par

²Le bruitage des observations est réalisé de la même manière que dans la partie 8.1.1

³Le *scan* signifie ici la numérisation de la plaque photographique.

V.Robert à l'IMCCE. Ce travail a montré qu'en réduisant d'anciennes plaques photographiques par cette méthode, il était possible d'obtenir des positions astrométriques plus précises (pour les galiléens, le résidu des observations est d'environ 30-40 mas).

Une nouvelle réduction des anciennes plaques photographiques en utilisant le catalogue d'étoiles fourni par Gaia permettra donc d'obtenir des observations dont les résidus seront de l'ordre de la dizaine de mas.

Dans cette optique, nous avons calculé par la méthode du bootstrap la précision extrapolée en supposant que tous les observations réalisées sur plaques photographiques étaient reréduites. Nous avons pour cela appliqué un bruit gaussien de moyenne $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 10$ mas aux positions calculées aux dates de ces observations. Cela ne sera sans doute pas le cas de la totalité des observations car d'une part la procédure de réduction prend du temps (temps de collecte des plaques et temps de numérisation) mais aussi parce que la réduction ne donnera pas forcément une bonne précision pour chacune des plaques en raison de problèmes liés à la plaque elle-même (problèmes liés à l'instrument, etc...) et aux informations disponibles sur ces observations.

10.3.3 Apport des observations et du catalogue Gaia

Les figures 10.7 et 10.8 représentent la valeur de la précision extrapolée estimée par la méthode du bootstrap à partir de la période d'observations 1874-2016 sans les observations Gaia, la même période avec les observations Gaia et enfin la même période mais après une nouvelle réduction des plaques photographiques avec le catalogue d'étoiles Gaia.

La différence avec l'ajout des observations Gaia est assez faible pour les quatre satellites. Ceci s'explique en fait par le faible nombre de nouvelles observations (seulement 50 sur 5 ans) par rapport aux observations terrestres existantes qui s'étalent entre 1874 et 2016. Ce résultat rejoint la conclusion de la partie 9.1 pour laquelle nous avons montré que le modèle ajusté à une courte période d'observations de bonne qualité ne donnait pas nécessairement une éphéméride plus précise que le modèle ajusté à une longue période d'observations moyennes.

Par contre, il est clair que la réduction des anciennes observations avec le catalogue Gaia apporte un gain de précision important pour les éphémérides des satellites. En effet, la précision extrapolée est environ cinq fois plus faible. Cependant, nous avons pris dans notre cas l'ensemble des observations obtenues par plaques photographiques comme pouvant être réduites de nouveau, alors qu'en réalité, toutes ne pourront être reréduites. La valeur trouvée correspond donc au mieux que l'on puisse attendre.

La nouvelle réduction des plaques à partir du catalogue Gaia prendra vraisemblablement beaucoup de temps. Il sera donc nécessaire de mettre en place une stratégie de réduction d'observations afin de déterminer les observations qui devront être réduites en premier.

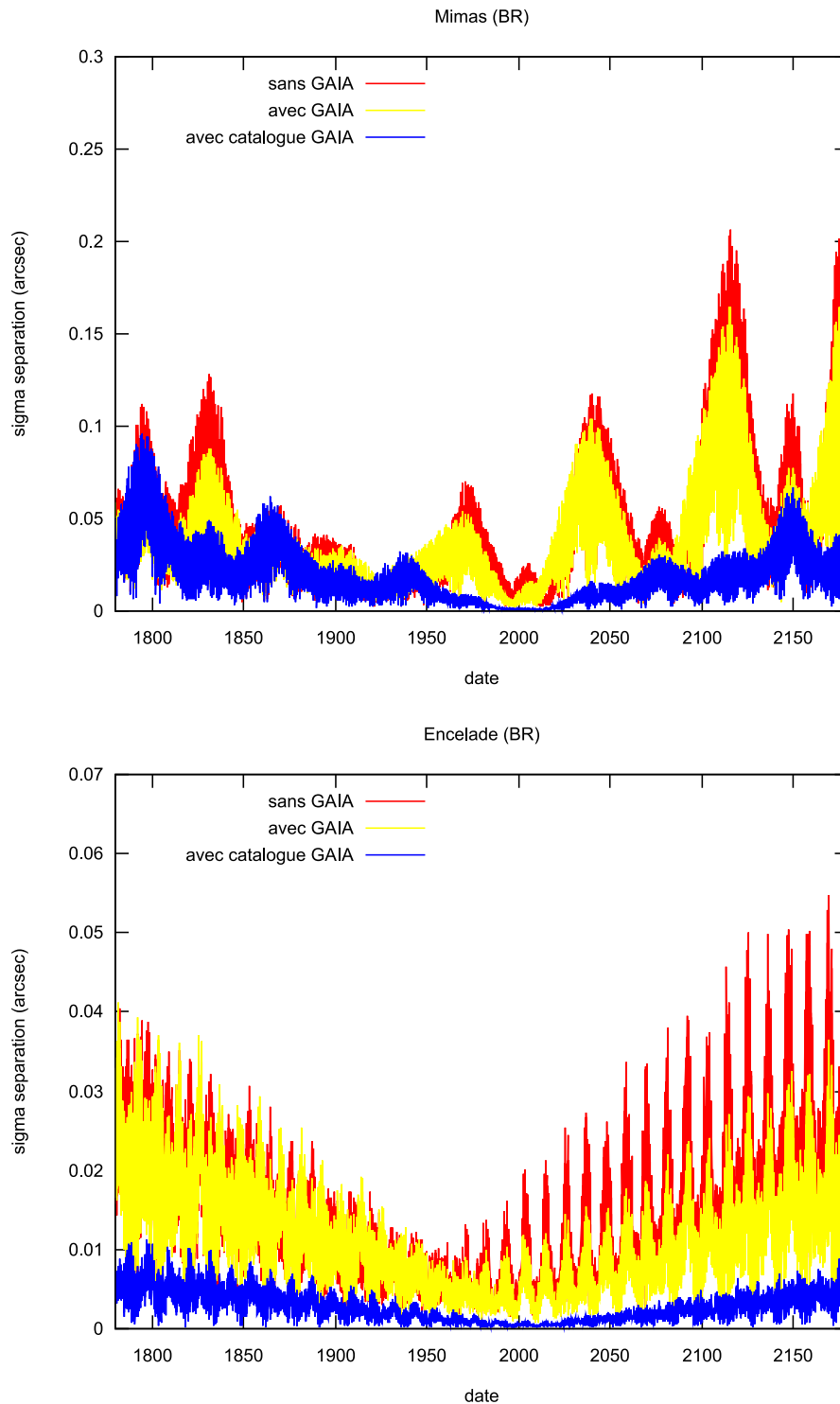


Fig. 10.7: Estimation de la précision extrapolée pour les satellites Mimas et Encelade avec ou sans l'apport de la mission Gaia

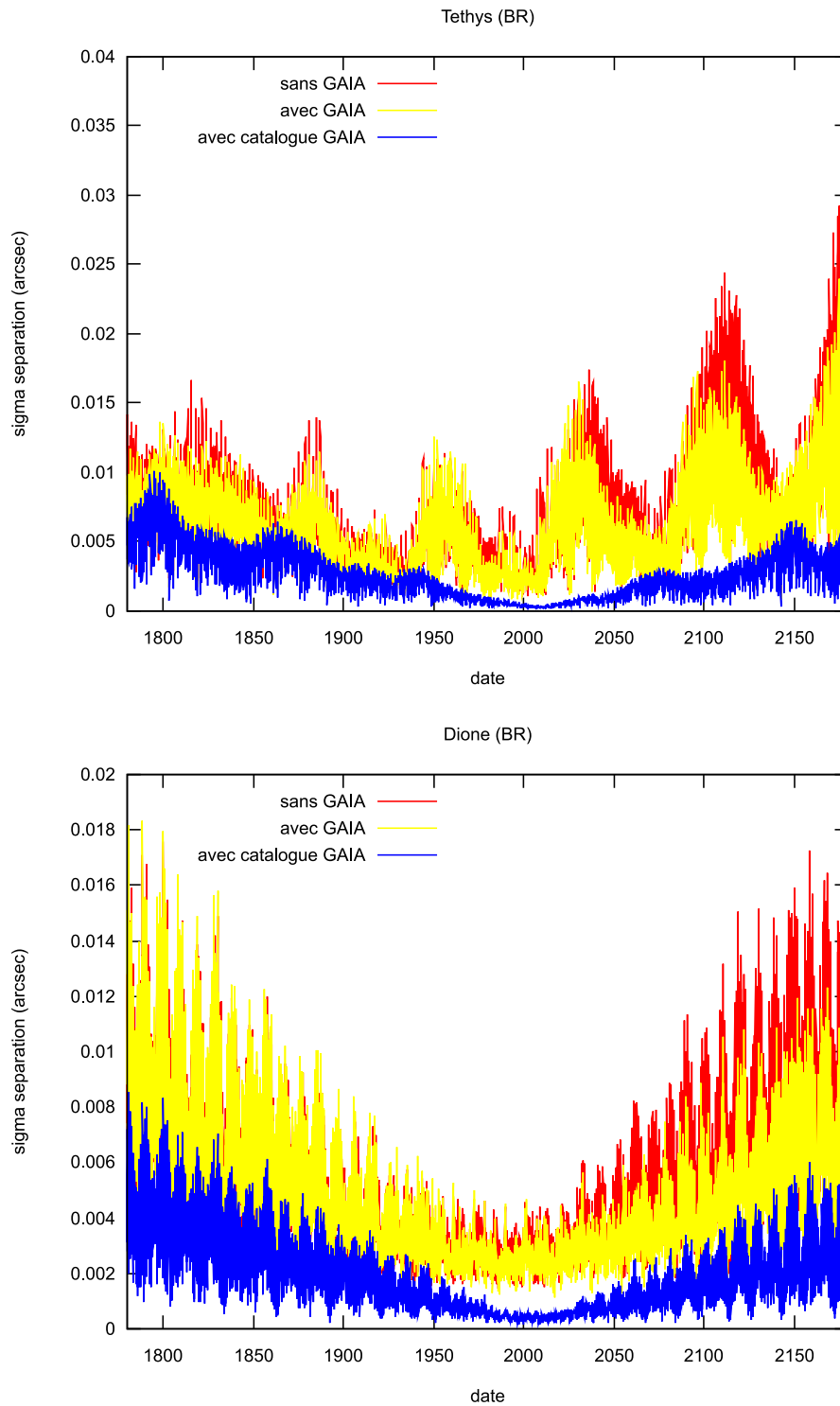


Fig. 10.8: Estimation de la précision extrapolée pour les satellites Téthys et Dioné avec ou sans l'apport de la mission Gaia

Chapitre 11

Application à l'astéroïde (4179) Toutatis

Sommaire

11.1 Présentation de (4179) Toutatis	128
11.2 Modèle dynamique et observations	130
11.2.1 Modèle dynamique	130
11.2.2 Observations	130
11.3 Précision des éphémérides de Toutatis	131
11.3.1 Précision en distance	131
11.3.2 Précision d'une rencontre proche	136
11.4 Conclusion	137

L'étude de la précision des éphémérides présente également un intérêt pour les astéroïdes. Nous avons vu que la détermination de la région de possibles mouvements peut permettre de retrouver des astéroïdes observés par le passé puis perdus (voir partie 6.2). Malheureusement, les méthodes que nous avons vu précédemment ne peuvent pas s'appliquer à de tels astéroïdes puisque le manque d'observations ne permet pas d'obtenir une orbite de référence, solution des moindres carrés. Même si le nombre d'observations était suffisant pour déterminer une solution des moindres carrés, il faudrait également disposer de plus de 10 observations pour pouvoir créer suffisamment d'échantillons bootstrap différents (voir partie 8.4). Nous ne pourrions donc appliquer les méthodes précédentes que pour des astéroïdes suffisamment observés.

Un autre intérêt est pour les astéroïdes géocroiseurs. Estimer la précision de la trajectoire de ces astéroïdes permet de mieux appréhender les rencontres proches entre une planète et un astéroïde. Dans ce chapitre, nous nous intéressons exclusivement à l'astéroïde géocroiseur (4179) Toutatis pour lequel nous estimerons la précision de sa position au cours du temps.

11.1 Présentation de (4179) Toutatis

L'astéroïde (4179) Toutatis a été découvert en janvier 1989 par C.Pollas. C'est un astéroïde géocroiseur de la classe des Apollo ⁽¹⁾ ce qui signifie que son orbite possède un demi grand axe plus grand que l'unité astronomique et une distance au périhélie plus petite que 1.017 UA.

¹Du nom du premier astéroïde de ce groupe découvert par K.W.Reinmuth.

Des observations radar ont montré que Toutatis est un astéroïde irrégulier ayant pour dimensions 4.5x2.4x1.9km. L'analyse des courbes de lumière et des données radar ont mis en évidence une rotation singulière de l'astéroïde (Ostro *et al.*, 1999, [55]; Mueller *et al.*, 2002, [52]). Sa rotation est une combinaison de deux rotations principales d'axes différents et de périodes 5.3 jours et 7.4 jours.

Tab. 11.1: Éléments orbitaux de (4179) Toutatis pour l'époque 2454800.5 (soit le 30 novembre 2008)

Excentricité e	0.62876
Demi grand axe a	2.53189100 UA
Distance au périhélie q	0.93994735 UA
Inclinaison sur l'écliptique i	0.44605°
Nœud ascendant Ω	124.29°
Argument du périhélie ω	278.75°
Anomalie moyenne M	5.85°
Période P	4.03 ans

Note : Les données sont issues du JPL.

Toutatis a croisé la Terre à plusieurs reprises notamment en septembre 2004 à environ 4 distances lunaires. Il croise également régulièrement l'orbite de Mars. Ces passages proches des planètes perturbent la trajectoire de l'astéroïde ce qui rend ses éphémérides moins précises et la prédiction de nouvelles rencontres proches quasiment impossibles à moyen terme. Cependant, d'après Ostro *et al.* (1999, [55]), la probabilité de collisions avec la Terre pour les six prochains siècles est nulle.

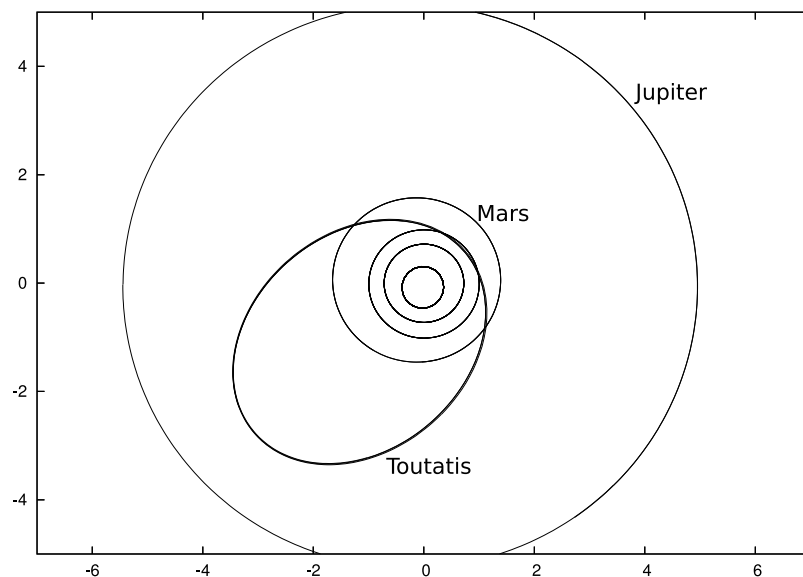


Fig. 11.1: Orbite actuelle de Toutatis

11.2 Modèle dynamique et observations

11.2.1 Modèle dynamique

Le modèle dynamique utilisé pour les astéroïdes est le modèle NOE (voir 2.3) adapté aux astéroïdes. Il s'agit d'une intégration numérique des équations du mouvement de l'astéroïde. Les perturbations des huit planètes ainsi que Pluton et la Lune sont prises en compte dans ce modèle. Il s'agit de perturbations forcées puisque les positions des planètes sont calculées par les éphémérides planétaires du JPL DE406 et non par l'intégration numérique. L'ajustement aux observations se déroule de manière identique à celui abordé dans la partie 4.2.3. Les équations aux variations sont également intégrées en même temps que les équations du mouvement.

11.2.2 Observations

Bien que découvert en 1989, l'objet avait déjà été observé deux fois en 1934 et en 1976 et 5 fois en 1988 sans qu'on puisse alors en déterminer son orbite. On dénombre au total 2701 observations de l'astéroïde sur la période 1934 à 2007 mais la quasi totalité des observations sont dans la période 1989-2007 (Fig.11.2). Toutes ces observations proviennent du Minor Planet Center qui compile les observations des astéroïdes.

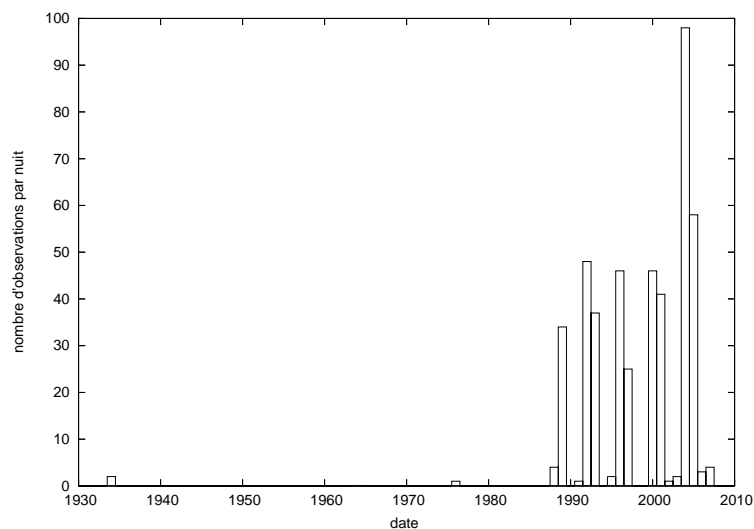


Fig. 11.2: Répartition du nombre de nuits d'observations pour chaque année

Le modèle dynamique a été ajusté sur l'ensemble de ces observations. Les résidus apparaissent dans le tableau 11.2. Seules les observations dont les O-C sont inférieures à 3" ont été conservées. Les nombres N_α et N_δ correspondent au nombre de coordonnées (ascension droite α et déclinaison δ) considérées. L'orbite ainsi ajustée sera considérée comme orbite de référence.

Tab. 11.2: Résidus des observations de (4179) Toutatis

rms _α	rms _δ	N _α	N _δ
0.5438	0.5093	2651	2682

Note : Seules les O-C inférieures à 3" sont prises en compte.

11.3 Précision des éphémérides de Toutatis

11.3.1 Précision en distance

La méthode du bootstrap a été appliquée pour déterminer la région de possibles mouvements de l'astéroïde. Nous avons créé cette fois 500 échantillons bootstrap ⁽²⁾.

Compte tenu des passages proches de la Terre, nous n'avons pas retenu la séparation angulaire pour mesurer l'écart entre les différentes positions. En effet, la variation importante de la distance Terre-Astéroïde apporte un biais pour cette mesure. Cette fois, nous comparons les orbites en distance, c'est-à-dire qu'à chaque date on mesure la distance entre la position donnée par l'orbite de référence et celle donnée par l'orbite k issue d'un ajustement au k -ième échantillon bootstrap.

$$d_k(t) = \sqrt{(x_k(t) - x_0(t))^2 + (y_k(t) - y_0(t))^2 + (z_k(t) - z_0(t))^2}$$

où x_k, y_k, z_k et x_0, y_0, z_0 représentent les coordonnées cartésiennes de l'objet issues respectivement de l'orbite k et de l'orbite de référence.

De la même manière qu'au chapitre 8, nous utilisons la précision extrapolée associée à la distance pour synthétiser l'information des 500 orbites créées. La moyenne quadratique des variables aléatoires d_k définies précédemment s'écrit :

$$\sigma_D(t) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_k(t)^2} \quad (11.1)$$

La figure 11.3 représente la valeur de la précision extrapolée associée à la distance, après ajustement à l'ensemble des observations de Toutatis (1934-2007) et pour rappel, la répartition des nuits d'observations entre 1820 et 2050.

Sur cette période, la précision extrapolée atteint 400 km dans les années 1940 mais reste faible (autour de 50 km) entre 1980 et 2020. Cette variation s'explique également par la distribution des observations. En effet, les années 1990-2007 correspondent à la période où l'on dispose de nombreuses observations. La précision reste très bonne pendant la période d'observations mais diverge rapidement en dehors.

La présence des deux observations en 1934, ne suffit pas à conserver une bonne précision sur la période 1940-1980. La relative bonne précision sur la période avant 1930, alors qu'on ne dispose pas d'observations peut s'expliquer par le fait que l'astéroïde ne subit pas de passage proche de la Terre qui perturbe sa trajectoire (Fig.11.8 et Tab11.3). Lors des passages proches de 1853 et 1879, la distance Toutatis-Terre est toujours supérieure à 0.06 UA.

²Le temps de calcul des ajustements successifs nous limite à 500 échantillons.

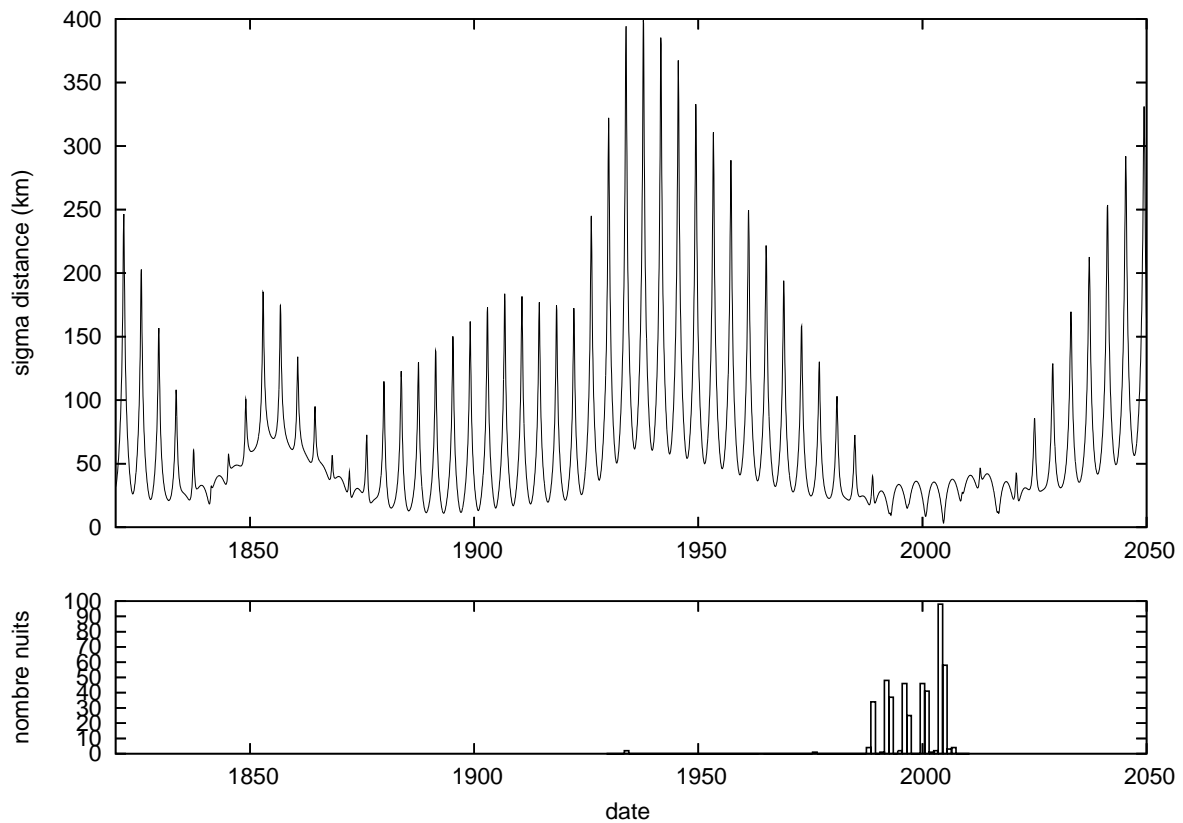


Fig. 11.3: Valeur de la précision extrapolée en distance pour Toutatis entre 1820 et 2050

Les figures 11.4, 11.5, 11.6 et 11.7 représentent la précision extrapolée de la position de Toutatis sur, respectivement, les périodes 1450-1750, 1750-2050, 2050-2200 et 2200-2600. La valeur de la précision diverge au cours du temps et cette divergence est accentuée à chaque passage proche entre la Terre et l'astéroïde (voir la liste des passages proches sur la période 1400-2400 sur le tableau 11.3). Ainsi, la précision atteint 3 500 km en 2100, 100 000 km en 2200, 200 000 km en 2300, 8 millions de km en 2400 et 80 millions de km en 2500. Autrement dit, la précision de l'orbite de Toutatis rend impossible toute prédiction de sa position à partir de la période 2300-2400. En particulier, la prédiction de rencontres proches est impossible au-delà de cette période.

L'étude des déciles ⁽³⁾ des 500 orbites créées montre que la valeur de la précision extrapolée donnée dans ce chapitre est sensiblement la même que le 7ème décile (Fig.11.9). Cela signifie qu'environ 70% des orbites créées se situent à une distance inférieure à la distance donnée par la précision extrapolée.

³Chacune des dix parties d'effectif égal, d'un ensemble de statistique ordonné.

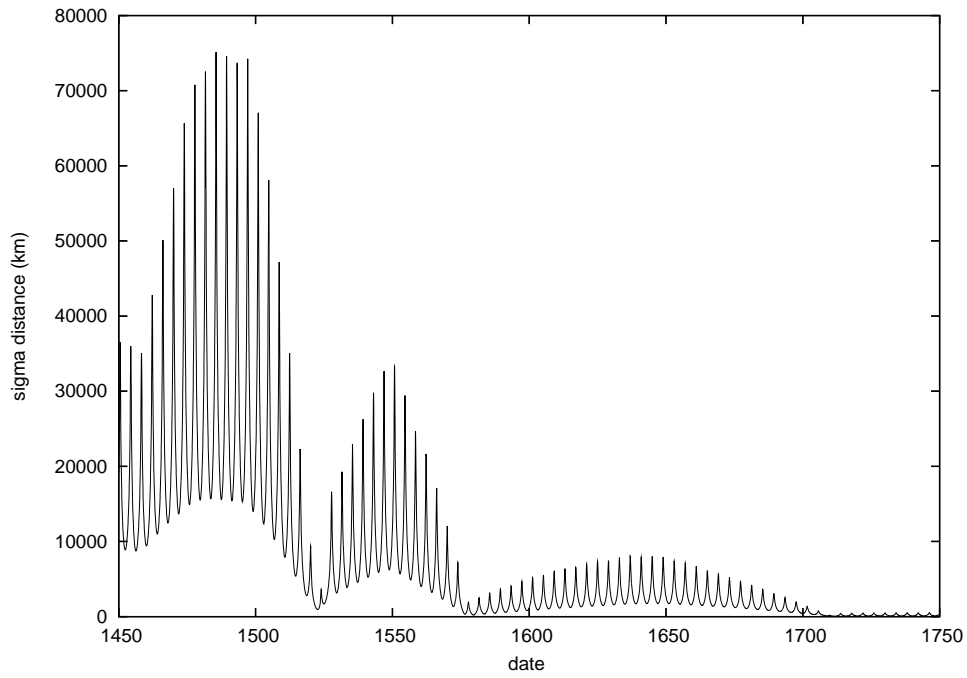


Fig. 11.4: Valeur de la précision extrapolée en distance pour Toutatis entre 1450 et 1750

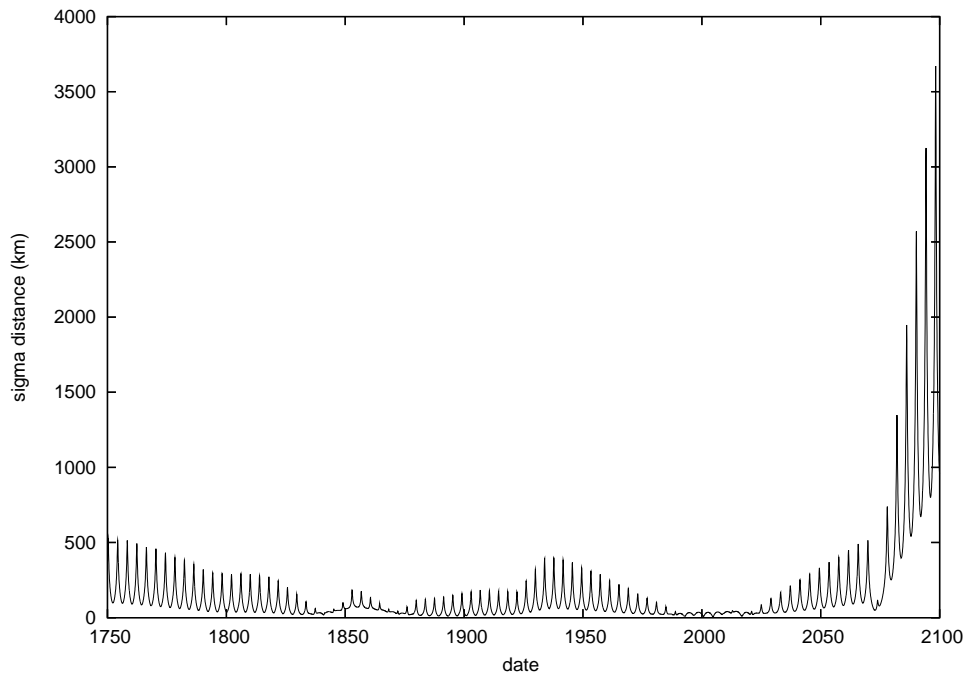


Fig. 11.5: Valeur de la précision extrapolée en distance pour Toutatis entre 1750 et 2100

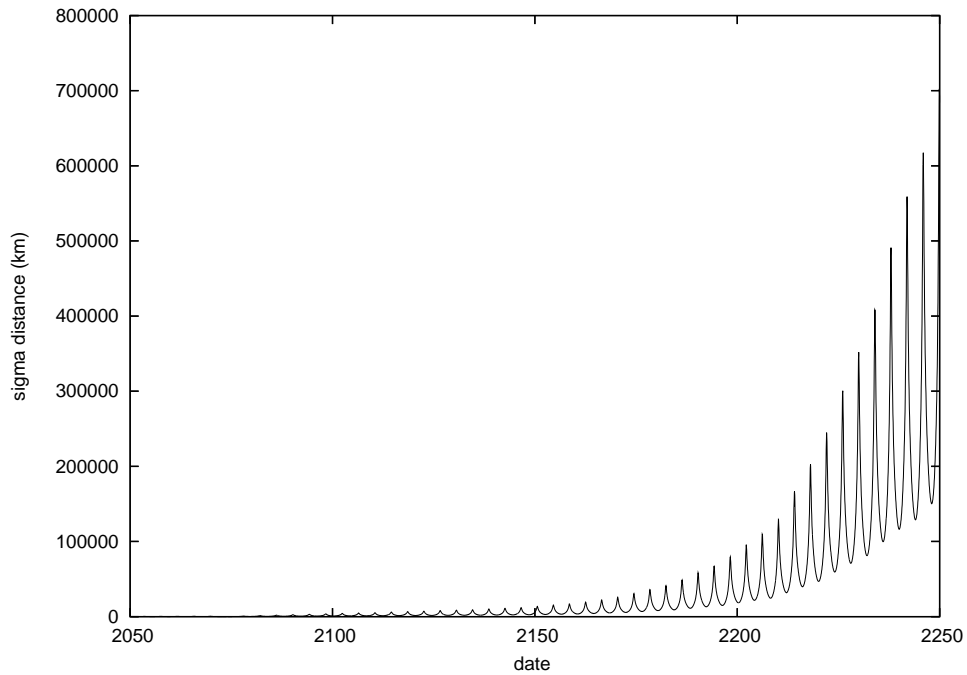


Fig. 11.6: Valeur de la précision extrapolée en distance pour Toutatis entre 2050 et 2250

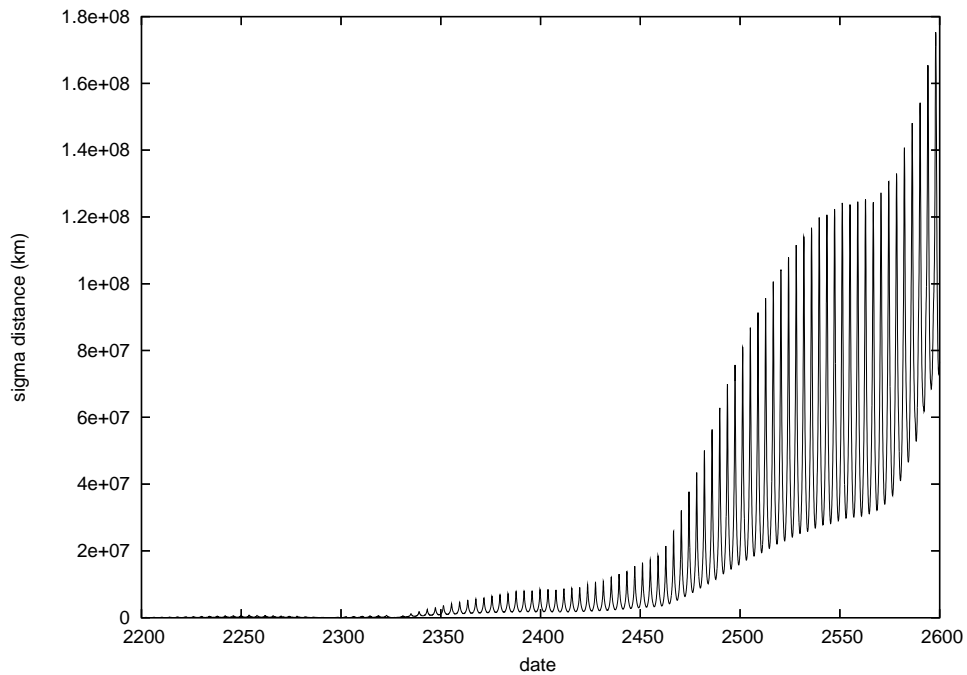


Fig. 11.7: Valeur de la précision extrapolée en distance pour Toutatis entre 2200 et 2600

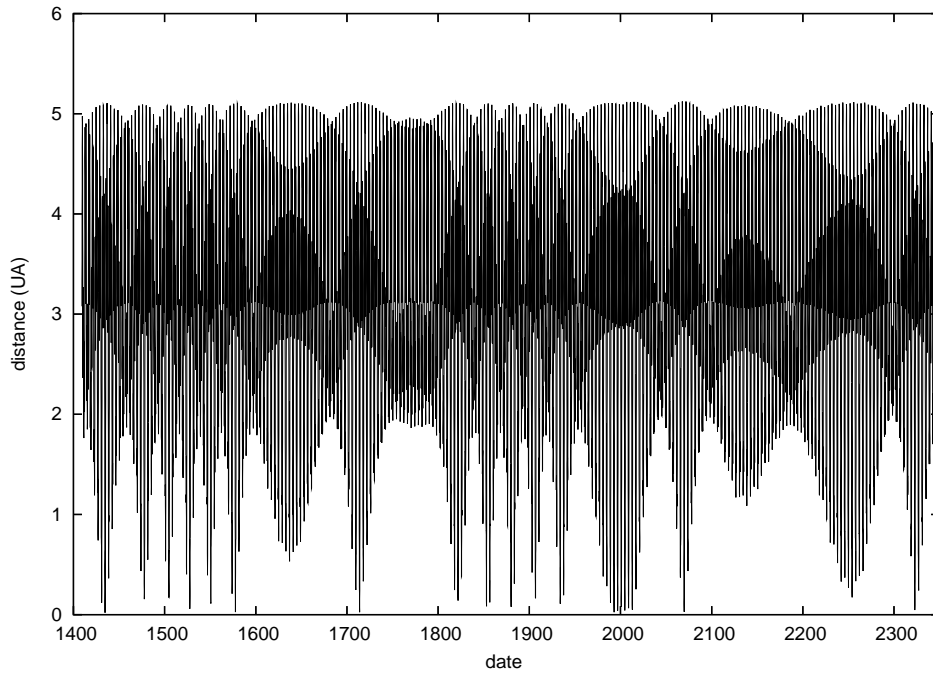


Fig. 11.8: Distance Terre-Toutatis entre 1820 et 2200

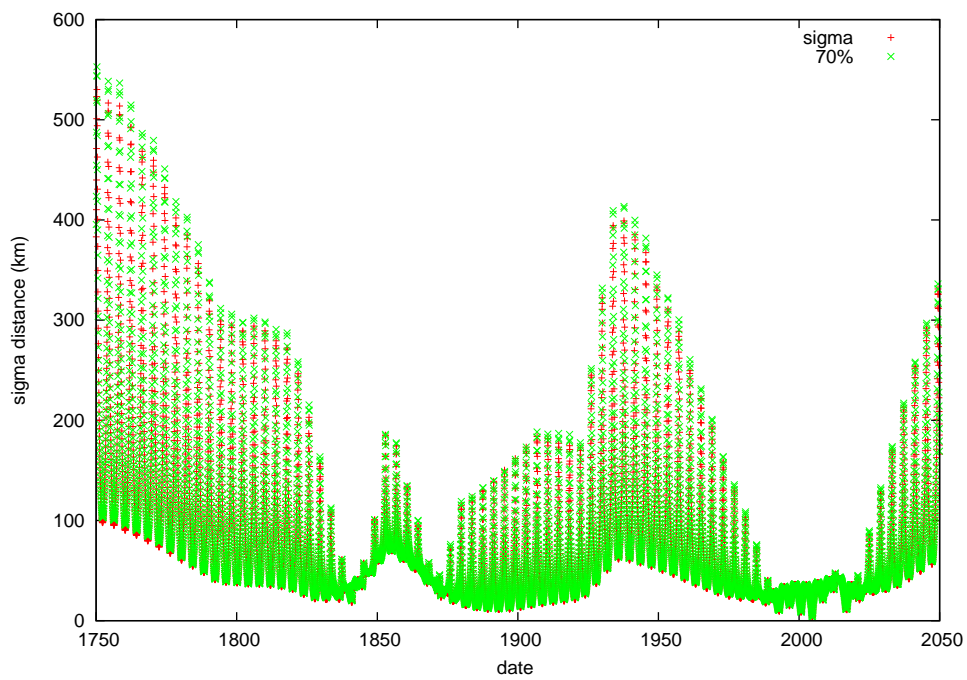


Fig. 11.9: Comparaison entre la valeur du 7ème décile et de la précision extrapolée entre 1750 et 2050

11.3.2 Précision d'une rencontre proche

Nous avons vu qu'une rencontre proche entre un astéroïde et une planète perturbe significativement la précision de la trajectoire de cet astéroïde. D'après la figure 11.8, Toutatis et la Terre subissent plusieurs rencontres proches sur la période 1450-2400. Dans l'optique de déterminer la précision temporelle et spatiale d'une rencontre proche, nous avons listé l'ensemble des rencontres entre Toutatis et la Terre à une distance inférieure à 0.1 UA entre 1400 et 2400.

Tab. 11.3: Liste des rencontres proches à moins de 0.1 UA de la Terre entre 1400 et 2400.

jour	mois	année	heure (TT)	distance (UA)
31	8	1434	20 :42	0.018972
28	8	1527	23 :39	0.047875
28	8	1577	10 :59	0.014092
3	11	1713	01 :50	0.021830
2	1	1853	13 :52	0.071197
21	12	1879	15 :58	0.068768
8	12	1992	05 :35	0.024150
29	11	1996	22 :52	0.035432
31	10	2000	04 :27	0.073865
29	9	2004	13 :36	0.010357
9	11	2008	12 :22	0.050248
12	12	2012	06 :40	0.046333
5	11	2069	15 :44	0.019850
21	10	2322	08 :46	0.045000

La rencontre du 29 septembre 2004 est la plus serrée entre 1400 et 2400. Les observations avant et après cette rencontre proche permettent une bonne connaissance de l'orbite et évitent par conséquent que sa précision se dégrade. Les prochaines rencontres proches auront lieu en 2012, 2069 et 2322.

Nous avons cherché à déterminer la précision temporelle et spatiale de chacune de ces rencontres. Pour cela, nous avons tracé pour chacune des 500 orbites créées par le bootstrap, le minimum de distance Terre-Toutatis en fonction de l'heure (en TT) de ce minimum (Figs.11.10, 11.11, 11.12). La croix tracée sur la figure représente l'orbite de référence, solution des moindres carrés.

La rencontre proche du 12 décembre 2012 peut être prédite à environ $1.4 \cdot 10^{-6}$ UA (soit environ 200 km) en distance et environ 15 secondes en temps. Pour la rencontre proche du 5 novembre 2069, la précision se dégrade principalement au niveau du temps puisque le minimum peut avoir lieu sur une période de 7 minutes. La précision en distance est cette fois meilleure puisque la plage de distance s'étale sur $9 \cdot 10^{-7}$ UA (soit environ 130 km). La rencontre proche d'octobre 2322 est relativement imprécise. En effet, les différents temps du minimum s'étale sur 84 heures (environ 3.5 jours) et les distances minimum s'étendent sur 0.017 UA (soit environ 2.5 millions de km). Prévoir la trajectoire de Toutatis et ses rencontres proches avec la Terre au-delà de cette date est quasi-impossible actuellement. En effet, suivant que l'astéroïde passe au minimum à 0.035 UA ou à 0.052 UA de la Terre à cette date, sa trajectoire sera sensiblement différente.

Les marges d'erreurs sur les rencontres proches sont en accord avec la valeur de la précision obtenue pour ces mêmes dates. En effet, la précision extrapolée est d'environ 45

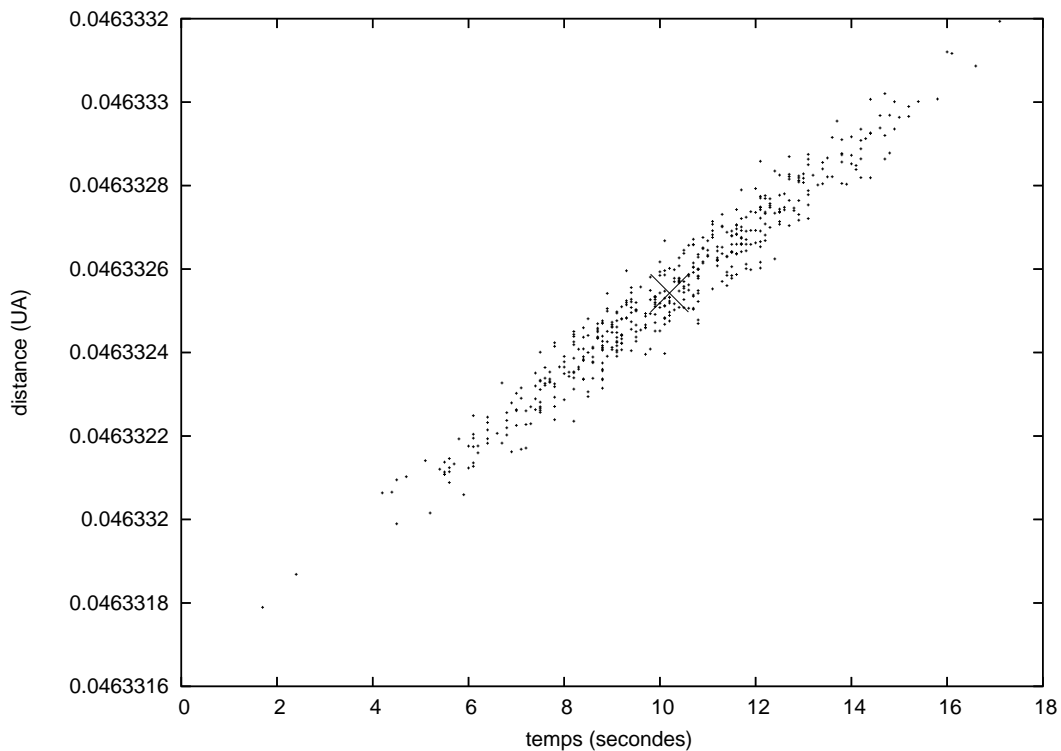


Fig. 11.10: Minimum de distance Terre-Toutatis en fonction de l'heure (en secondes) de ce minimum pour les 500 orbites créées pour la journée du 12 décembre 2012. L'origine correspond à 6h40.

km en 2012, 500 km en 2069 et 670 000 km. Rappelons que les barres d'erreurs données dans le paragraphe précédent constituent des valeurs maximales atteintes par les 500 orbites. Par contre la précision extrapolée mesure la dispersion de ces 500 orbites autour de la position de référence, c'est-à-dire celle obtenue après ajustement à l'ensemble des observations.

Au regard de la précision de la rencontre proche d'octobre 2322, il paraît légitime de ne pas prévoir d'autres rencontres postérieures à cette date. De même les dates des rencontres proches du passé (Tab.11.3) doivent être prises avec précaution compte tenu de la valeur de la précision extrapolée à ces dates.

11.4 Conclusion

Notre étude se veut surtout être une étude préliminaire qui montre que la méthode du bootstrap peut être utilisée pour les astéroïdes. L'estimation de la précision des éphémérides d'astéroïdes a un intérêt tout particulier pour les géocroiseurs. En effet, on peut estimer la précision temporelle et spatiale de rencontres proches et ainsi mieux appréhender le risque de collisions.

Nous avons montré que le manque d'observations associé à des rencontres proches de l'astéroïde avec des planètes rendait difficile la détermination d'une trajectoire précise.

Cette étude peut et doit être améliorée en incluant au modèle dynamique des perturbations que nous avons négligées (J_2 des planètes) et qui peuvent avoir un impact important lors de rencontres proches.

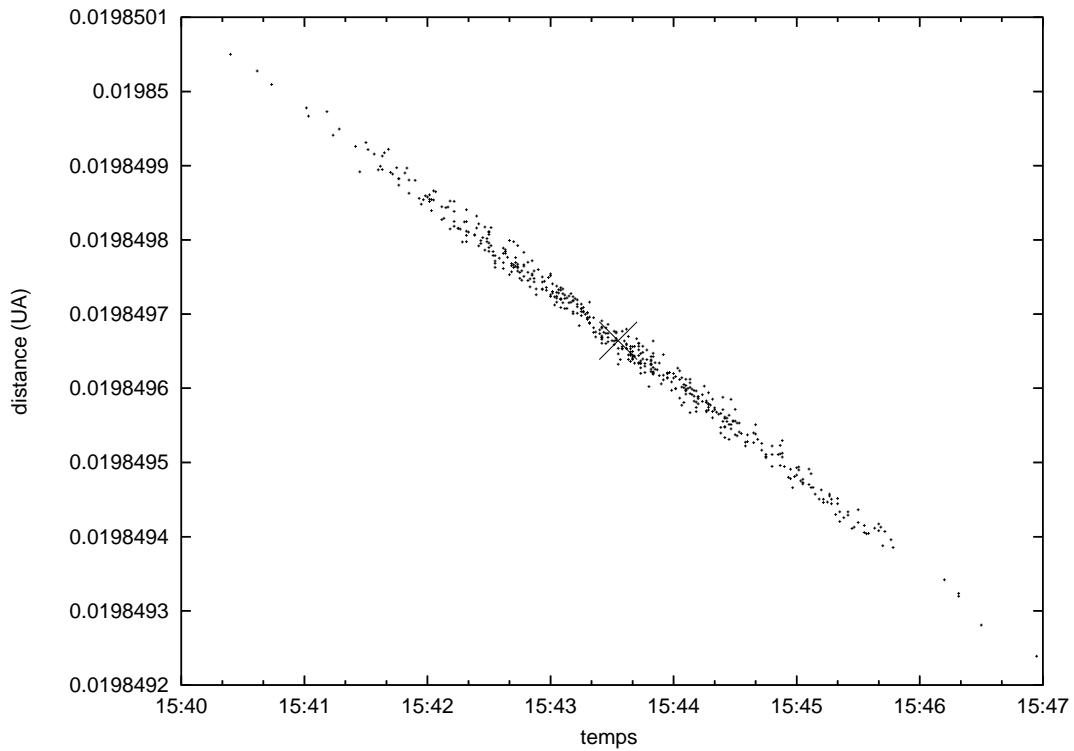


Fig. 11.11: Minimum de distance Terre-Toutatis en fonction de l'heure (en TT) de ce minimum pour les 500 orbites créées pour la journée du 5 novembre 2069

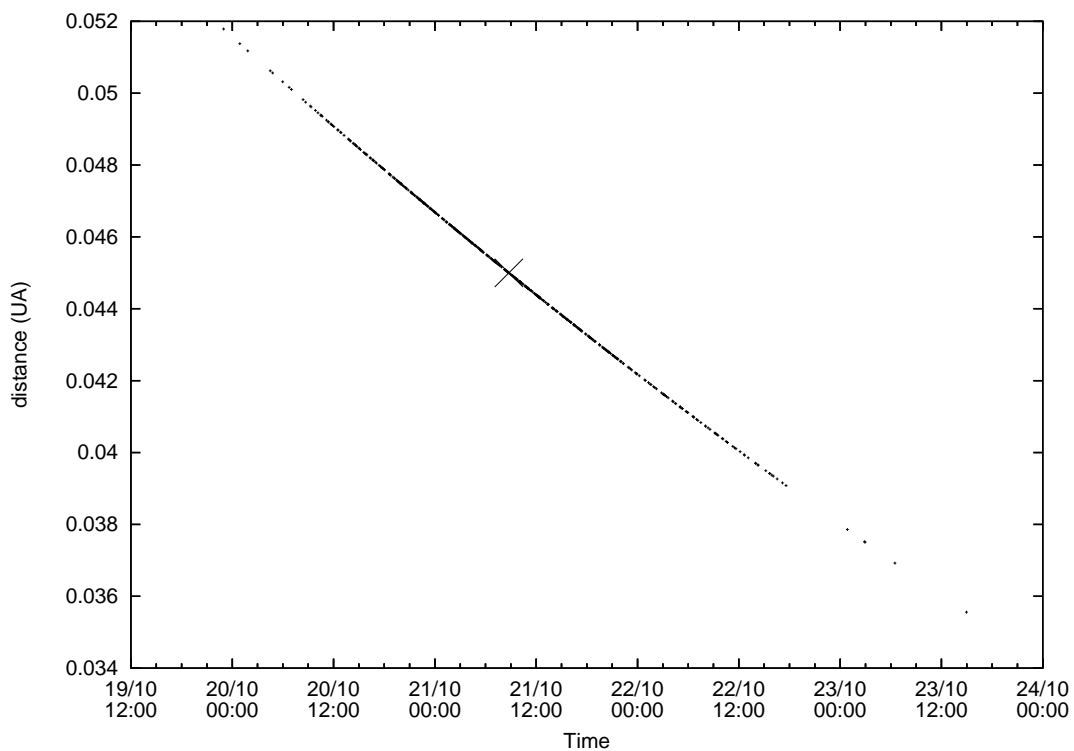


Fig. 11.12: Minimum de distance Terre-Toutatis en fonction de la date (en TT) de ce minimum pour les 500 orbites créées pour le mois d'octobre 2322

Conclusion et Perspectives

La précision des éphémérides d'un objet du système solaire peut être déterminée par un certain nombre de méthodes. La méthode du bootstrap que nous avons détaillé, présente plusieurs avantages par rapport aux autres. C'est une méthode non-paramétrique, c'est-à-dire qu'aucune hypothèse sur la distribution des erreurs d'observations n'est faite. De plus, elle est utilisable pour tout type d'observations et elle évite l'introduction de paramètres *a priori*, comme la valeur d'un bruit ajouté aux observations dans la méthode MCO (Monte Carlo utilisant les observations), qui peuvent être soit difficiles à estimer à l'avance, soit inadaptés au problème dans le cas de l'utilisation de plusieurs types de coordonnées. La seule hypothèse que doit respecter le bootstrap est l'indépendance des observations (comme les autres méthodes d'ailleurs). Cette hypothèse peut être contournée en groupant les observations en blocs indépendants. Nous avons vu que l'utilisation de blocs indépendants s'avère parfois délicate dans le sens où il peut être difficile de grouper les observations et que ces mêmes groupes doivent être en nombre suffisant.

En utilisant la méthode du bootstrap, nous avons pu déterminer la précision des éphémérides des satellites de Saturne pour le modèle TASS. Cette précision est relativement bonne puisqu'elle est comprise entre 30 et 100 mas (300 mas pour Mimas) entre 1750 et 2150. La précision est encore meilleure sur la période d'observations. Nous avons également mis en évidence que pour disposer d'éphémérides de bonne qualité, il valait mieux avoir des observations de qualité moyenne pendant une longue période que des observations de bonne qualité pendant une période plus courte. Ce résultat met en avant l'utilité de poursuivre régulièrement les observations au sol. De plus, on peut s'attendre à ce que l'utilisation d'observations antérieures à 1874 (observations pourtant peu précises) permette d'améliorer encore la qualité des éphémérides.

La méthode du bootstrap nous a également permis de mettre en évidence l'apport de la mission astrométrique Gaia pour les éphémérides. La cinquantaine d'observations d'excellente qualité ne permettra que d'augmenter faiblement la précision des éphémérides. En revanche, nous avons montré que le catalogue d'étoiles de référence fourni par la mission, permettra de réduire à nouveau les anciennes observations et on peut espérer améliorer la précision d'un facteur 5. La réduction des nouvelles plaques à l'aide du catalogue Gaia s'annonce comme une remarquable avancée dans la précision des éphémérides. Compte tenu du temps nécessaire à cette nouvelle réduction, il sera nécessaire de définir une stratégie pour sélectionner les plaques à réduire en priorité en fonction notamment de la précision attendue mais également de leur répartition dans le temps.

Enfin, la méthode du bootstrap permet également de déterminer la précision de l'éphéméride d'un astéroïde. Nous avons vu qu'estimer la précision de la position d'un astéroïde présente un intérêt tout particulier pour les géocroiseurs. En effet, il est possible d'estimer la précision temporelle et spatiale de rencontres proches entre l'astéroïde et une planète, de manière à mieux appréhender la trajectoire de l'astéroïde et les risques de collision.

Tout au long de cette thèse, nous avons mis en place un certain nombre d'outils dont les applications ne sont pas limitées au strict cadre de la thèse. Le catalogue d'observations des satellites de Saturne couvre une large période permettant de détecter une accélération séculaire dans la longitude moyenne de certains satellites et ainsi de déterminer les effets de marée, cause de cette accélération. Les premiers résultats de cette étude, qui est toujours en cours, montre que la détection de cette accélération est possible si le facteur de dissi-

pation dans Saturne est proche de sa borne inférieure (à savoir $Q = 14000$). La méthode du bootstrap peut également s'appliquer à beaucoup d'autres problèmes d'estimation de précision que nous n'avons pas soulevé dans la thèse. Elle peut en effet être utilisée pour étudier la précision de certains paramètres physiques déterminés grâce aux observations. L'estimation de la précision de la masse ou encore de paramètres gravitationnels (J_2) d'un objet par exemple doit pouvoir être déterminée par cette méthode.

Annexes

Annexe A

Changement de coordonnées et équations aux variations

Nous présentons dans cette partie, le changement de coordonnées et les équations aux variations tels qu'il est effectué avec l'intégrateur numérique. Le changement de coordonnées permet d'exprimer les positions calculées par le modèle et les positions observées dans un même repère. Nous détaillons également trois cas particuliers pour lesquelles les méthodes générales présentées ne s'appliquent pas.

A.1 Le changement de coordonnées et équations aux variations

L'écriture des équations aux variations qui expriment des variations des positions cartésiennes des satellites en fonction des variations des paramètres initiaux est effectuée numériquement. On trouvera tous les détails de ces calculs dans Lainey (2002, [43]). Dans une écriture matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial x_i}{\partial c_p} \\ \frac{\partial y_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial c_p} \\ \frac{\partial z_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial z_i}{\partial c_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_p \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ sont les variations des positions en coordonnées cartésiennes, $\frac{\partial x_i}{\partial c_j}$ sont les dérivées partielles et Δc_j les variations des conditions initiales.

L'utilisation de systèmes de coordonnées différents pour les observations nécessite de recourir aux matrices de passage pour calculer les variations des positions données dans un système de coordonnées en fonction des paramètres initiaux.

Étant donné que les équations aux variations sont calculées dans le repère équatorial J2000 et afin de pouvoir utiliser de manière simple les équations aux variations, nous sommes amenés à exprimer, dès que possible, ces observations sous deux formes :

- Les observations absolues seront toujours exprimées en (α, δ) mais dans le système de référence J2000.
- Les observations intersatellites seront exprimées, si possible, en $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta)$ toujours dans le système de référence J2000.

Ce choix permet d'unifier les observations. En effet, le calcul des dérivées partielles dans un système de référence variant selon l'observation est particulièrement complexe. Le calcul des équations aux variations et l'ajustement sont donc réalisés dans le repère équatorial J2000. C'est pourquoi, les observations doivent être exprimées dans ce repère.

A.1.1 Changement de repère

La plupart des observations du catalogue ne sont pas données dans le repère J2000. La transformation des coordonnées dans un repère quelconque (soit le repère B1950 ou soit le repère de la date) en coordonnées dans le repère J2000 est nécessaire. Cette transformation est possible uniquement pour des coordonnées (α, δ) à l'aide des formules de Aoki *et al.* (1983, [5]).

Pour des observations intersatellites, nous procédons en cinq étapes. Par exemple pour des observations $(\Delta\alpha_{1950} \cos \delta, \Delta\delta_{1950})$ données dans le repère B1950 :

- nous calculons à l'aide de notre modèle, la position du satellite de référence $(\alpha_{2000}^r, \delta_{2000}^r)$.
- nous transformons ces coordonnées dans le repère souhaité $(\alpha_{1950}^r, \delta_{1950}^r)$. On prend en compte éventuellement les différentes corrections.
- nous déterminons les coordonnées du satellite observé par :

$$\alpha_{1950}^o = \alpha_{1950}^r + \frac{\Delta\alpha_{1950} \cos \delta}{\cos \delta_{1950}^r}$$

$$\delta_{1950}^o = \delta_{1950}^r + \Delta\delta_{1950}$$

- nous transformons ces coordonnées dans le repère J2000 $(\alpha_{2000}^o, \delta_{2000}^o)$ que nous corrigeons si besoin de la réfraction.
- les coordonnées intersatellites exprimées dans le repère J2000 sont données par :

$$\Delta\alpha_{2000} = (\alpha_{2000}^o - \alpha_{2000}^r) \cos \delta_{2000}^r$$

$$\Delta\delta_{2000} = \delta_{2000}^o - \delta_{2000}^r$$

A.1.2 Le changement de coordonnées et équations aux variations

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, il existe quatre types de coordonnées pour les observations du catalogue. Il est nécessaire d'exprimer les dérivées partielles associées à ces coordonnées pour chacune d'elles.

coordonnées de type 0 (α, δ)

L'identité suivante donne une relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées absolues.

$$\begin{aligned} X + x_i &= r_i \cos \alpha_i \cos \delta_i \\ Y + y_i &= r_i \sin \alpha_i \cos \delta_i \\ Z + z_i &= r_i \sin \delta_i \end{aligned}$$

où (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées planétocentriques du satellite i et (X, Y, Z) les coordonnées de la planète.

Cette relation permet de calculer les dérivées partielles des coordonnées absolues en fonction des coordonnées cartésiennes.

En effet, écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_i} & \frac{\partial \alpha_i}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \delta_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \delta_i}{\partial y_i} & \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_i}{r_i \cos \delta_i} & \frac{\cos \alpha_i}{r_i \cos \delta_i} & 0 \\ -\frac{\sin \delta_i \cos \alpha_i}{r_i} & -\frac{\sin \delta_i \sin \alpha_i}{r_i} & \frac{\cos \delta_i}{r_i} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Ce qui, à partir de l'égalité A.1, permet d'écrire la relation entre les variations des coordonnées absolues en fonction des paramètres ⁽¹⁾

$$\begin{pmatrix} d\alpha_i \\ d\delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial z_i} \\ \frac{\partial\delta_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\delta_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\delta_i}{\partial z_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial x_i}{\partial c_N} \\ \frac{\partial y_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial y_i}{\partial c_N} \\ \frac{\partial z_i}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial z_i}{\partial c_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_N \end{pmatrix}$$

Pour simplifier, nous noterons la relation précédente $\mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{H}_i \mathbf{C}$.

coordonnées de type 1 ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)

En prenant les notations précédentes et par linéarité, on a pour l'observation entre le satellite i et le satellite j :

$$\begin{pmatrix} d\Delta\alpha \cos \delta \\ d\Delta\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(\alpha_i - \alpha_j) \cos \delta_j \\ d(\delta_i - \delta_j) \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j) = \mathbf{B}(\mathbf{P}_i \mathbf{H}_i - \mathbf{P}_j \mathbf{H}_j) \mathbf{C}$$

$$\text{où : } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \delta_j & 1 \end{pmatrix}$$

coordonnées de type 2 ($\Delta\alpha, \Delta\delta$), 3 (p, s) ou 4 (X, Y)

Pour ces trois différents types, quand les deux coordonnées sont disponibles au même temps d'observation, un changement de coordonnées approprié permet de se ramener au cas précédent.

A.1.3 Les transformations de coordonnées

Pour chaque type de coordonnées, il est possible de passer de l'une à l'autre via des relations mathématiques.

transformation ($\Delta\alpha, \Delta\delta$) \longrightarrow ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)

Cette transformation revient à multiplier la première coordonnée par $\cos \delta_r$ où δ_r est la déclinaison du satellite de référence. Seulement, cette valeur n'est pas connue. On utilise alors la valeur donnée par la théorie. Ainsi, la transformation s'écrit :

$$\Delta\alpha \cos \delta \xrightarrow{\times \cos \delta_r} \Delta\alpha$$

$$\Delta\delta \longrightarrow \Delta\delta$$

transformation (X, Y) \longrightarrow ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$)

Les coordonnées tangentielles ⁽²⁾ s'obtiennent par la relation :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\cos \delta_o \sin(\alpha_o - \alpha_r)}{\sin \delta_r \sin \delta_o + \cos \delta_o \cos \delta_r \cos(\alpha_o - \alpha_r)} \\ Y &= \frac{\sin \delta_o \sin \delta_r - \cos \delta_o \cos \delta_r \cos(\alpha_o - \alpha_r)}{\sin \delta_r \sin \delta_o + \cos \delta_o \cos \delta_r \cos(\alpha_o - \alpha_r)} \end{aligned}$$

¹Pour éviter de confondre avec les coordonnées intersatellites, nous noterons par $(d\alpha, d\delta)$ les O-C ($\alpha_o - \alpha_c, \delta_o - \delta_c$)

²Dans le catalogue COSS08, il n'existe aucune observation possédant ce type de coordonnées. Cependant, ce type de coordonnées est nécessaire pour la transformation de coordonnées (p, s) en coordonnées $(\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta)$.

où l'indice o fait référence au satellite observé et l'indice r au satellite référence.

En supposant les différences $\Delta\alpha = \alpha_o - \alpha_r$ et $\Delta\delta = \delta_o - \delta_r$ petites, la relation précédente peut s'écrire :

$$\begin{aligned} X &= \Delta\alpha \cos \delta_r - \Delta\alpha \Delta\delta \sin \delta_r + \frac{1}{6} \Delta\alpha^3 (3 \cos \delta_r - 1) + \dots \\ Y &= \Delta\delta + \frac{1}{2} \Delta\alpha^2 \sin \delta_r \cos \delta_r + \frac{1}{3} \Delta\delta^3 + \frac{1}{2} \Delta\alpha^2 \Delta\delta \cos 2\delta_r + \dots \end{aligned}$$

ou inversement :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha \cos \delta_r &= X + XY \tan \delta_r + \dots \\ \Delta\delta &= Y - \frac{1}{2} X^2 \tan \delta_r + \dots \end{aligned}$$

C'est la relation que nous utilisons et δ_r est calculé comme précédemment.

transformation $(p, s) \longrightarrow (\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta)$

Ce type de coordonnées était fortement utilisé avant les années 1950. La séparation s et l'angle de position p étaient souvent mesurés séparément (c'est-à-dire à des temps différents). Cette mesure se faisait avec deux types d'instruments : l'héliomètre et le micromètre.

La relation entre ces coordonnées et les coordonnées tangentielles est la suivante :

$$\begin{aligned} X &= s \sin p \\ Y &= s \cos p \end{aligned} \tag{A.3}$$

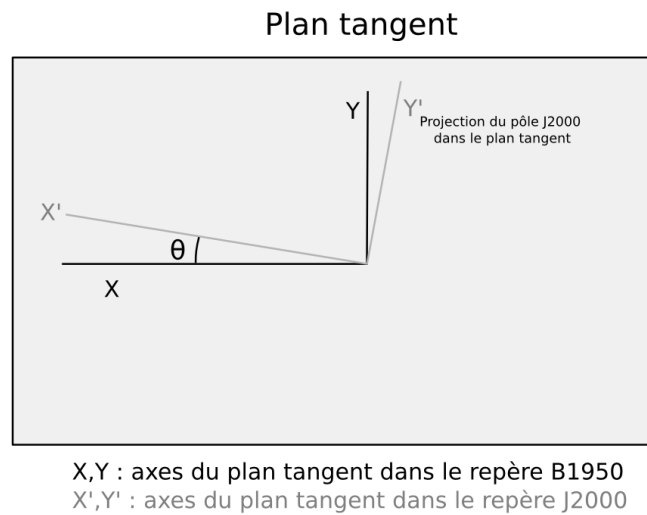
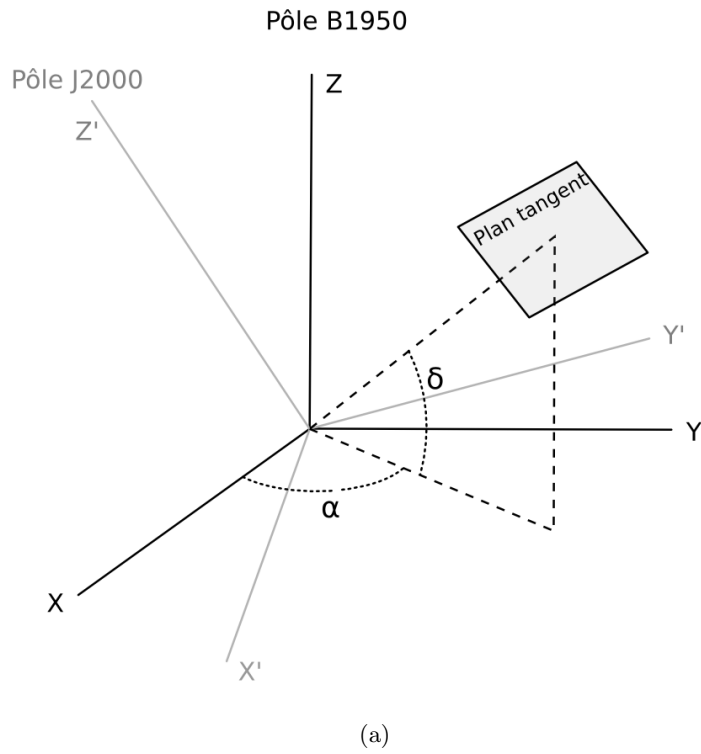
Malheureusement, les cas d'observations de ce type où les deux coordonnées sont mesurées au même instant sont peu fréquents. Pour les anciennes observations (avant les années 60), les deux coordonnées sont mesurées séparément, c'est-à-dire à des instants différents, et pas forcément par paire. De plus, elles sont exprimées dans le repère de la date et non en J2000 comme dans le calcul des équations variationnelles. Ceci nous contraint à envisager une autre stratégie pour l'ajustement. Nous distinguerons trois cas : les coordonnées de type 3, les coordonnées de type 1 ou 2 et les coordonnées de type 0.

A.2 Premier cas particulier : observation d'une seule coordonnée de type 3 (s, p)

A.2.1 Changement de repère

Ce genre d'observation pose problème pour le changement de repère. En effet, pour passer par exemple du repère de la date au repère J2000, on a besoin de connaître deux coordonnées (en ascension droite et en déclinaison). Lorsqu'on a une seule d'entre elles, même un changement de coordonnées ne permet pas cette transformation.

Cependant, le changement de repère ne pose pas de problème pour la coordonnée s puisqu'il s'agit d'une mesure angulaire qui est invariante par rotation. Pour la coordonnée p , il suffit de voir que le changement de repère revient à tourner le plan tangent d'un angle θ comme sur la Fig.A.1. L'angle θ se calcule par la projection du pôle du repère de la date dans le plan tangent de l'observation (Fig.A.1). De cette manière, on obtient une mesure de p dans le repère J2000.



(b)

Fig. A.1: Projection du pôle du repère J2000 dans le plan tangent de l'observation

A.2.2 Équations aux variations pour les coordonnées p, s

Nous cherchons ici à exprimer les variations des coordonnées par rapport aux paramètres (c_i).

Nous avons vu précédemment (équation A.3) la relation entre les coordonnées (p, s) et les coordonnées tangentielles (X, Y). Inversement ⁽³⁾ :

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ p &= \text{Atan2}(X, Y) \end{aligned}$$

De ces relations, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial c_j} \\ \frac{\partial s}{\partial c_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial X} & \frac{\partial p}{\partial Y} \\ \frac{\partial s}{\partial X} & \frac{\partial s}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \alpha_o} & \frac{\partial X}{\partial \alpha_r} & \frac{\partial X}{\partial \delta_o} & \frac{\partial X}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha_o} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha_r} & \frac{\partial Y}{\partial \delta_o} & \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_o}{\partial x_o} & \frac{\partial \alpha_o}{\partial y_o} & \frac{\partial \alpha_o}{\partial z_o} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \alpha_r}{\partial x_o} & \frac{\partial \alpha_r}{\partial y_o} & \frac{\partial \alpha_r}{\partial z_o} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \alpha_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \alpha_r}{\partial y_r} & \frac{\partial \alpha_r}{\partial z_r} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \delta_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \delta_r}{\partial y_r} & \frac{\partial \delta_r}{\partial z_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_o}{\partial c_j} \\ \frac{\partial y_o}{\partial c_j} \\ \frac{\partial z_o}{\partial c_j} \\ \frac{\partial x_r}{\partial c_j} \\ \frac{\partial y_r}{\partial c_j} \\ \frac{\partial z_r}{\partial c_j} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial X} &= \frac{Y}{X^2 + Y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial Y} &= -\frac{X}{X^2 + Y^2} \\ \frac{\partial s}{\partial X} &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ \frac{\partial s}{\partial Y} &= \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha_o} &= \cos \delta_r - \Delta \delta \sin \delta_r + \frac{1}{2} \Delta \alpha^2 (3 \cos \delta_r - 1) \\ \frac{\partial X}{\partial \alpha_r} &= -\cos \delta_r + \Delta \delta \sin \delta_r - \frac{1}{2} \Delta \alpha^2 (3 \cos \delta_r - 1) \\ \frac{\partial X}{\partial \delta_o} &= -\Delta \alpha \sin \delta_r \\ \frac{\partial X}{\partial \delta_r} &= -\Delta \alpha \Delta \delta \cos \delta_r - \frac{1}{2} \Delta \alpha^3 \sin \delta_r \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha_o} &= \Delta \alpha \cos \delta_r \sin \delta_r + \Delta \alpha \Delta \delta \cos 2\delta_r \\ \frac{\partial Y}{\partial \alpha_r} &= -\Delta \alpha \cos \delta_r \sin \delta_r - \Delta \alpha \Delta \delta \cos 2\delta_r \\ \frac{\partial Y}{\partial \delta_o} &= 1 + \Delta \delta^2 + \frac{1}{2} \Delta \alpha^2 \cos 2\delta_r \\ \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} &= -1 - \Delta \delta^2 - \Delta \alpha^2 \Delta \delta \sin 2\delta_r \end{aligned}$$

Le reste des coefficients des matrices se détermine comme pour la relation A.2.

³Voir dans la page de notation pour la définition de la fonction Atan2

A.3 Second cas particulier : observation d'une seule coordonnée de type 1 ($\Delta\alpha \cos \delta, \Delta\delta$) ou 2 ($\Delta\alpha, \Delta\delta$)

Pour ce second cas particulier, la stratégie est différente. En effet, nous laissons les observations dans le repère de la date et les équations aux variations sont exprimées cette fois dans le repère de la date et non dans le repère J2000.

Par exemple, nous avons la coordonnée $\Delta\alpha_{date}^o$ (coordonnée observée dans le repère de la date). Nous déterminons la valeur calculée $\Delta\alpha_{date}^c$. Nous avons alors la relation suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_{date}^o - \Delta\alpha_{date}^c &= \sum_j \frac{\partial\Delta\alpha_{date}}{\partial c_j} \Delta c_j \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial\Delta\alpha_{date}}{\partial\Delta\alpha_{J2000}} \frac{\partial\Delta\alpha_{J2000}}{\partial c_j} + \frac{\partial\Delta\alpha_{date}}{\partial\Delta\delta_{J2000}} \frac{\partial\Delta\delta_{J2000}}{\partial c_j} \right) \Delta c_j\end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta\delta_{date}^o - \Delta\delta_{date}^c &= \sum_j \frac{\partial\Delta\delta_{date}}{\partial c_j} \Delta c_j \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial\Delta\delta_{date}}{\partial\Delta\alpha_{J2000}} \frac{\partial\Delta\alpha_{J2000}}{\partial c_j} + \frac{\partial\Delta\delta_{date}}{\partial\Delta\delta_{J2000}} \frac{\partial\Delta\delta_{J2000}}{\partial c_j} \right) \Delta c_j\end{aligned}$$

Les termes $\frac{\partial\Delta\alpha_{date}}{\partial\Delta\alpha_{J2000}}$, $\frac{\partial\Delta\alpha_{date}}{\partial\Delta\delta_{J2000}}$, $\frac{\partial\Delta\delta_{date}}{\partial\Delta\alpha_{J2000}}$ et $\frac{\partial\Delta\delta_{date}}{\partial\Delta\delta_{J2000}}$ sont déterminés grâce à la relation :

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_{date} &= \Delta\alpha_{J2000} \cos \theta + \Delta\delta_{J2000} \sin \theta \\ \Delta\delta_{date} &= -\Delta\alpha_{J2000} \sin \theta + \Delta\delta_{J2000} \cos \theta\end{aligned}$$

L'angle θ se calculant comme précédemment, par la projection du pôle du repère de la date dans le plan tangent de l'observation.

A.4 Troisième cas particulier : observation d'une seule coordonnée de type 0 (α, δ)

L'idée est sensiblement la même que pour le second cas, puisque l'observation est laissée dans le repère de la date. Les équations variationnelles doivent alors être écrites dans ce même repère.

Prenons par exemple une observation α_{date}^o (ascension droite observée dans le repère de la date). Nous déterminons la valeur calculée correspondante α_{date}^c . Nous avons alors la relation suivante liant les O-C et les équations variationnelles avec (x_v, y_v, z_v) les coordonnées du vecteur objet-observateur dans le repère vrai de la date, et (x_{00}, y_{00}, z_{00}) les coordonnées du même vecteur dans le repère J2000 :

$$\begin{aligned}\alpha_{date}^o - \alpha_{date}^c &= \sum_j \frac{\partial\alpha_{date}}{\partial c_j} \Delta c_j \\ &= \left(\frac{\partial\alpha_{date}}{\partial c_1} \quad \dots \quad \frac{\partial\alpha_{date}}{\partial c_N} \right) \begin{pmatrix} \Delta c_1 \\ \vdots \\ \Delta c_N \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où :

$$\left(\frac{\partial \alpha_{date}}{\partial c_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \alpha_{date}}{\partial c_N} \right) = \left(\frac{\partial \alpha_{date}}{\partial x_v} \quad \frac{\partial \alpha_{date}}{\partial y_v} \quad \frac{\partial \alpha_{date}}{\partial z_v} \right) M \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{00}}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial x_{00}}{\partial c_N} \\ \frac{\partial y_{00}}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial y_{00}}{\partial c_N} \\ \frac{\partial z_{00}}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial z_{00}}{\partial c_N} \end{pmatrix}$$

La première matrice du terme de droite se calcule à partir de la relation (A.2). $M = R_1(-\varepsilon_A - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\psi)R_1(\varepsilon_A)R_3(-90 - z_A)R_1(\theta_A)R_3(90 - \zeta_A)$ est la matrice de composition des 6 rotations permettant de passer de coordonnées dans le repère J2000 aux coordonnées dans le repère vrai de la date, dont on trouvera le détail dans les chapitres 4.5.4 et 4.5.7 de [69].

Annexe B

Propriétés du bootstrap

B.1 Propriété de probabilité

Cette partie démontre la propriété de la partie 7.3.

On se propose de calculer la probabilité de tirer k fois la même observation dans un jeu de n éléments quand k est petit devant n lors d'un tirage bootstrap.

Soit $P(X = k)$ la probabilité de tirer k fois la i -ème observation. Remarquons que cette probabilité est bien évidemment indépendante de i .

Le tirage bootstrap est un tirage aléatoire avec remise. X suit donc une loi binomiale, sa probabilité est donc :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

où p représente la probabilité de succès, c'est-à-dire, la probabilité de choisir la i -ème observation parmi n et $q = 1 - p$. Clairement, cette probabilité vaut $p = \frac{1}{n}$.

Finalement

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

$$P(X = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{k! n^k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

Pour k fixé et $k \ll n$, on a :

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n^k} \sim \frac{\overbrace{n \cdot n \dots n}^{k \text{ fois}}}{n^k} = \frac{n^k}{n^k} = 1$$

et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(n-k) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{n-k}{n} + o(1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -1$$

et comme :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

alors :

$$P(X = k) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{k!}$$

B.2 Propriété de combinatoire

Cette partie démontre la propriété de la partie 8.4. Le tirage bootstrap est un tirage avec remise et sans ordre de n éléments pris parmi n . En combinatoire, dans le cas général, le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments pris parmi n (avec remise et sans ordre) est :

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Dans notre cas, $n = k$ donc ce nombre vaut :

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

On peut donc retrouver le tableau 8.2 vu dans la partie 8.4.

Tab. B.1: Nombre maximal N d'échantillons bootstrap différents réalisables avec p observations

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24310	92378

Si on dispose de 6 observations (ou blocs d'observations), on pourra créer au maximum 462 échantillons bootstrap différents. Comme dans l'étude réalisée, nous avons choisi de créer 200 échantillons bootstrap, il apparaît qu'en tirant 200 fois parmi 462, la proportion de jeux qui seront tirés au moins deux fois est non nulle.

D'ailleurs, nous avons cherché à estimer cette proportion en fonction du nombre d'éléments dans l'échantillon initial p et le nombre de jeux bootstrap créés N . La méthode pour estimer cette proportion est la suivante :

- On crée N jeux bootstrap à partir d'un échantillon initial de p éléments.
- Sur ces N jeux créés, on compte le nombre de jeux q qui apparaissent au moins deux fois.
- Le rapport q/N donne une estimation de la probabilité cherchée.
- En itérant 1000 fois les étapes précédentes et en calculant la moyenne des rapports q/N , on obtient l'estimation de la probabilité qui apparaît dans le tableau 8.3 ou le tableau ci-après.

Tab. B.2: Pourcentage de jeux qui apparaissent au moins deux fois lors de N tirages bootstrap d'un échantillon initial de p éléments

$p \backslash N$	30	50	100	200	500	1000
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0.8020	0.8990	0.9740	0.9980	1.0000	1.0000
4	0.4320	0.5810	0.7650	0.9000	0.9670	0.9920
5	0.1680	0.2590	0.4220	0.6070	0.8190	0.9090
6	0.0591	0.0924	0.1713	0.2933	0.5130	0.6845
7	0.0176	0.0307	0.0571	0.1102	0.2326	0.3745
8	0.0057	0.0094	0.0188	0.0363	0.0842	0.1543
9	0.0017	0.0026	0.0058	0.0111	0.0278	0.0531
10	0.0005	0.0011	0.0016	0.0036	0.0082	0.0165

Notations utilisées

M_{\odot} : masse solaire

$M_{\text{♃}}$: masse de Saturne

La fonction Atan2 est définie par :

$$\text{Atan2}(x, y) = \arctan(x, y) + \begin{cases} \pi & \text{si } x < 0 \\ 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

mas : milli-arcsecondes

μas : micro-arcsecondes

Bibliographie

- [1] Poulkovo, (tables de réfraction de), 1985. observatoire astronomique principal de l'Académie des sciences d'URSS, Poulkovo, éditions Naouka, section de Léninegrad. 50
- [2] K. Aksnes, F. Franklin, and P. Magnusson. The longitude discrepancy for mutual satellite phenomena resolved. *AJ*, 92 :1436–1444, 1986. 30
- [3] K. Aksnes, F. Franklin, R. Millis, P. Birch, C. Blanco, S. Catalano, and J. Piironen. Mutual phenomena of the Galilean and Saturnian satellites in 1973 and 1979/1980. *AJ*, 89 :280–288, 1984. 30
- [4] J. D. Anderson, W. L. Sjogren, and G. Schubert. Galileo gravity results and the internal structure of Io. *Science*, 272 :709–712, 1996.
- [5] S. Aoki, M. Soma, H. Kinoshita, and K. Inoue. Conversion matrix of epoch B 1950.0 FK 4-based positions of stars to epoch J 2000.0 positions in accordance with the new IAU resolutions. *A&A*, 128 :263–267, 1983. 147
- [6] S. Arlot. *Rééchantillonnage et sélection de modèles*. Thèse de doctorat, Université Paris XI, 2007. 79
- [7] V. A. Avdyushev and M. A. Banschikova. Regions of possible motions for new Jovian satellites. *Solar System Research*, 41 :413–419, 2007. 71, 74
- [8] T. Bordovitsyna, V. Avdyushev, and A. Chernitsov. New Trends in Numerical Simulation of the Motion of Small Bodies of the Solar System. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80 :227–247, 2001. 71, 74
- [9] J. K. Campbell and S. P. Synnott. Gravity field of the Jovian system from Pioneer and Voyager tracking data. *AJ*, 90 :364–372, 1985.
- [10] J. M. A. Danby. *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond : Willman-Bell, —c1992, 2nd ed., 1992. 70
- [11] H. Debehogne. Observations photographiques de grosses planètes et de leurs satellites. *Bulletin of the Astronomical Observatoire Royale de Belgique*, 9 :68–77, 1979. 31
- [12] J. Desmars, A. Vienne, and J.-E. Arlot. A new catalogue of observations of the eight major satellites of Saturn (1874-2007). *A&A*, 493 :1183–1195, 2009. 28, 34
- [13] A. Dollfus and J. Texereau. Saturn X (Janus). *IAU Circ.*, 1995 :1, 1967. 16
- [14] G. Dourneau. *Observations et études du mouvement des huit premiers satellites de Saturne*. Thèse de doctorat, Observatoire de Bordeaux, 1987. 22, 24, 33
- [15] G. Dourneau, J.F. Le Campion, M. Rapaport, and 14 coauteurs. Observations des planètes, satellites et astéroïdes avec la lunette méridienne de l'Observatoire de Bordeaux (1995-2007). *Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste*, 2007. 33
- [16] L. Duriez. *Approche d'une théorie générale planétaires en variables elliptiques héliocentriques*. Thèse, Université de Lille, 1979. 23

- [17] L. Duriez. *Cours de mécanique céleste classique*. LDL, 2002.
- [18] L. Duriez and A. Vienne. A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. I - Equations and method of resolution. *A&A*, 243 :263–275, 1991. 23
- [19] L. Duriez and A. Vienne. Theory of motion and ephemerides of Hyperion. *A&A*, 324 :366–380, 1997. 23
- [20] B. Efron. Bootstrap methods : another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7 :1–26, 1979. 77
- [21] B. Efron and R.J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*, volume 57 of *Mono-graphs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall/CRC, 1993. 77
- [22] H. Eichhorn. Generalized Least-Squares Adjustments - a Timely but much Ignored Tool. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56 :337–351, 1993. 56
- [23] N. Emelianov and J. E. Arlot. The IAU Com. 20 Natural Planetary Satellites Data Base of astrometric observations. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 37 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 728–+, 2005. 30, 31
- [24] E. Everhart. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In *Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution*, volume 83 of *Proceeding of IAU Colloq.*, 1985. 25
- [25] A. Fienga. *Observations astrométriques des planètes et ajustement des théories analytiques de leur mouvement*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, 1999. 53
- [26] R. G. French, C. A. McGhee, M. Frey, R. Hock, S. Rounds, R. Jacobson, and A. Verbiscer. Astrometry of Saturn’s Satellites from the Hubble Space Telescope WFPC2. *PASP*, 118 :246–259, 2006. 30, 33
- [27] S. V. Gavrilov and V. N. Zharkov. Love numbers of the giant planets. *Icarus*, 32 :443–449, 1977. 61, 64
- [28] P. Goldreich and S. Soter. Q in the Solar System. *Icarus*, 5 :375–389, 1966. 61
- [29] D. Harper, K. Beurle, I. P. Williams, C. D. Murray, D. B. Taylor, A. Fitzsimmons, and I. M. Cartwright. CCD astrometry of Saturn’s satellites in 1995 and 1997. *A&AS*, 136 :257–259, 1999. 31
- [30] D. Harper, C. D. Murray, K. Beurle, I. P. Williams, D. H. P. Jones, D. B. Taylor, and S. C. Greaves. CCD astrometry of Saturn’s satellites 1990-1994. *A&AS*, 121 :65–69, 1997. 31, 38
- [31] D. Harper and D. B. Taylor. The orbits of the major satellites of Saturn. *A&A*, 268 :326–349, 1993. 33
- [32] D. Harper and D.B. Taylor. Analysis of ground-based observations of the satellites of Saturn 1874 - 1988. *A&A*, 284 :619–628, 1994. 28
- [33] D. Hestroffer. Photometry with a periodic grid II. Results for J2 Europa and S6 Titan. *A&A*, 403 :749–756, 2003. 52
- [34] I. S. Izmailov, A. A. Kiselev, T. P. Kiseleva, and E. V. Khrutskaya. Using a CCD camera in Pulkovo programs of observations of binary and multiple stars and satellites of major planets with the 26-inch refractor. *Astronomy Letters*, 24 :665–672, 1998. 32
- [35] R. A. Jacobson. The Gravity Field of the Jovian System and the Orbits of the Regular Jovian Satellites. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 33 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 1039–+, 2001.
- [36] R. A. Jacobson. The Orientation and Precession of the Pole of Saturn. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, volume 38, 2007. 62

- [37] R. A. Jacobson, P. G. Antreasian, J. J. Bordi, K. E. Criddle, R. Ionasescu, J. B. Jones, R. A. Mackenzie, M. C. Meek, D. Parcher, F. J. Pelletier, W. M. Owen, Jr., D. C. Roth, I. M. Roundhill, and J. R. Stauch. The Gravity Field of the Saturnian System from Satellite Observations and Spacecraft Tracking Data. *AJ*, 132 :2520–2526, 2006. 14, 16, 25, 52, 62
- [38] T.P. Kisseleva and S.M. Chanturiya. The determination of positions of saturnian satellites - Dione, Rhea, Titan, Hyperion and Iapetus by photographic observations in Abastumany astrophysical observatory of science academy of Georgia. *Izvestiia glavnoi astronomicheskoi observatorii Pulkovo.*, 214 :356–360, 2000. 32
- [39] T.P. Kisseleva and I.S. Izmailov. The results of Positional CCD-observations of satellites of Saturn and Jupiter with 26-inch refractor at Pulkovo. *Izvestiia glavnoi astronomicheskoi observatorii Pulkovo.*, 214 :333–343, 2000. 32
- [40] T.P. Kisseleva and O.A. Kalinitchenko. The results of photographic observations of the saturnian satellites at Pulkovo in 1994–1998. *Izvestiia glavnoi astronomicheskoi observatorii Pulkovo.*, 214 :344–355, 2000. 32
- [41] T.P. Kisseleva, A.A. Kisselev, E.V. Khrutskaya, and O.A. Kalinitchenko. The results of positional photographic and CCD observations of saturnian satellites with the 26-inch refractor at Pulkovo in 1995. *Izvestiia glavnoi astronomicheskoi observatorii Pulkovo.*, 210 :76–94, 1996. 32, 38
- [42] Y. Kozai. On the Motion of the Inner Satellites of Saturn. *PASJ*, 7 :176–+, 1955. 22
- [43] V. Lainey. *Théorie dynamique des satellites galiléens*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, 2002. 24, 146
- [44] V. Lainey, V. Dehant, and M. Pätzold. First numerical ephemerides of the Martian moons. *A&A*, 465 :1075–1084, 2007. 24, 61
- [45] V. Lainey, J. Desmars, J. Arlot, O. Karatekin, B. Noyelles, and A. Vienne. First Steps Toward an Accurate Quantification of the Saturnian Tidal Dissipation. *AGU Fall Meeting Abstracts*, pages A190+, 2007. 60, 61
- [46] V. Lainey, L. Duriez, and A. Vienne. New accurate ephemerides for the Galilean satellites of Jupiter. I. Numerical integration of elaborated equations of motion. *A&A*, 420 :1171–1183, June 2004. 24, 62
- [47] V. Lainey and G. Tobie. New constraints on Io’s and Jupiter’s tidal dissipation. *Icarus*, 179 :485–489, 2005. 61
- [48] L. Lindegren. Meridian observations of planets with a photoelectric multilist micrometer. *A&A*, 57 :55–72, 1977. 51, 52
- [49] B. G. Marsden. The computation of orbits in indeterminate and uncertain cases. *AJ*, 102 :1539–1552, 1991. 70
- [50] F. Mignard, A. Cellino, K. Muinonen, P. Tanga, M. Delbò, A. Dell’Oro, M. Granvik, D. Hestroffer, S. Mouret, W. Thuillot, and J. Virtanen. The Gaia Mission : Expected Applications to Asteroid Science. *Earth Moon and Planets*, 101 :97–125, December 2007. 117, 118, 120, 121, 122
- [51] A. Milani. The Asteroid Identification Problem. I. Recovery of Lost Asteroids. *Icarus*, 137 :269–292, 1999. 71
- [52] B. E. A. Mueller, N. H. Samarasinha, and M. J. S. Belton. The Diagnosis of Complex Rotation in the Lightcurve of 4179 Toutatis and Potential Applications to Other Asteroids and Bare Cometary Nuclei. *Icarus*, 158 :305–311, 2002. 129
- [53] K. Muinonen and E. Bowell. Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities. *Icarus*, 104 :255–279, 1993. 71

- [54] B. Noyelles, A. Vienne, and P. Descamps. Astrometric reduction of lightcurves observed during the PHESAT95 campaign of Saturnian satellites. *A&A*, 401 :1159–1175, 2003. 31
- [55] S. J. Ostro, R. S. Hudson, K. D. Rosema, J. D. Giorgini, R. F. Jurgens, D. K. Yeomans, P. W. Chodas, R. Winkler, R. Rose, D. Choate, R. A. Cormier, D. Kelley, R. Littlefair, L. A. M. Benner, M. L. Thomas, and M. A. Slade. Asteroid 4179 Toutatis : 1996 Radar Observations. *Icarus*, 137 :122–139, 1999. 129
- [56] Q. Y. Peng, A. Vienne, and K. X. Shen. Positional measuring procedure and CCD observations for Saturnian satellites. *A&A*, 383 :296–301, 2002. 31
- [57] M. A. C. Perryman. Overview of the Gaia Mission. In *The Three-Dimensional Universe with Gaia*, volume 576 of *ESA Special Publication*, pages 15–+, January 2005.
- [58] W. H. Pickering. The ninth and tenth satellites of Saturn. *Annals of Harvard College Observatory*, 53 :173–185, 1905. 18, 20
- [59] D. A. Pierce. Observations of Saturn’s satellites 1789-1972. *PASP*, 87 :785–787, 1975. 28
- [60] D.N. Politis. The impact of bootstrap methods on time series analysis. *Statist. Sci.*, 18 :219–230, 2003. Silver anniversary of the bootstrap. 78
- [61] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, C. Lloyd, P. Rees, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, C. Lloyd, and P. Rees. Book Review : Numerical recipes in Fortran : the art of scientific computing / Cambridge U Press. *The Observatory*, 113 :214–+, 1993.
- [62] R. Qiao, K. Shen, J. Liu, and D. Harper. 1994-1996 CCD astrometric observations of Saturn’s satellites and comparison with theories. *A&AS*, 137 :1–5, 1999. 32, 33
- [63] R. C. Qiao, K. X. Shen, D. Harper, and J. R. Liu. 1997-2000 CCD astrometric observations of Saturn’s satellites and comparison with theories. *A&A*, 422 :377–379, 2004. 32
- [64] M. Rapaport. *Contribution à l’étude dynamique des satellites de Saturne*. Thèse, Bordeaux, 1977. 22
- [65] M. Rapaport, R. Teixeira, J. F. Le Campion, C. Ducourant, J. I. B. Camargo, and P. Benevides-Soares. Astrometry of Pluto and Saturn with the CCD meridian instruments of Bordeaux and Valinhos. *A&A*, 383 :1054–1061, 2002. 33
- [66] P. K. Seidelmann, B. A. Archinal, M. F. A’Hearn, A. Conrad, G. J. Consolmagno, D. Hestroffer, J. L. Hilton, G. A. Krasinsky, G. Neumann, J. Oberst, P. Stooke, E. F. Tedesco, D. J. Tholen, P. C. Thomas, and I. P. Williams. Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements : 2006. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 98 :155–180, 2007. 14, 16, 17
- [67] S. S. Sheppard. Saturn’s Known Satellites, 2008. <http://www.dtm.ciw.edu/sheppard/satellites/>. 16, 17, 19
- [68] J. L. Simon, P. Bretagnon, J. Chapront, M. Chapront-Touze, G. Francou, and J. Laskar. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets. *A&A*, 282 :663–683, 1994. 14
- [69] J.L Simon, M. Chapront-Touzé, B. Morando, and Thuillot W. *Introduction aux éphémérides astronomiques*. EDP Sciences, 1997. 37, 50, 69, 123, 153
- [70] A. T. Sinclair. The orbits of Tethys, Dione, Rhea, Titan and Iapetus. *MNRAS*, 180 :447–459, 1977. 22

- [71] E.M. Standish. Jpl planetary ephemeris de414, 2006. disponible à l'adresse <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de414iom.pdf>. 41
- [72] F. R. Stephenson and L. V. Morrison. Long-term changes in the rotation of the Earth : 700 B.C. to A.D. 1980. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 313 :47–70, 1984. 47, 48
- [73] R. C. Stone. Positions for the Outer Planets and Many of Their Satellites. V. FASTT Observations Taken in 2000-2001. *AJ*, 122 :2723–2733, 2001. 33
- [74] P.R. Strugnell and D.B. Taylor. A catalogue of ground-based observations of the eight major satellites of Saturn, 1874-1989. *A&AS*, 83 :289–300, 1990. 24, 28
- [75] P. Tanga and F. Mignard. Observing the Natural Satellites of Solar System Bodies with Gaia. In *The Three-Dimensional Universe with Gaia*, volume 576 of *ESA Special Publication*, pages 313–+, January 2005. 121, 122
- [76] D. B. Taylor and K. X. Shen. Analysis of astrometric observations from 1967 to 1983 of the major satellites of Saturn. *A&A*, 200 :269–278, 1988. 22, 33
- [77] S.B. Tolbin. Results of positional photographic observations of Saturn with the Pul-kovo normal astrograph during 1975-1984. *Scientific paper deposited in All-russian institute of scientific and technical information 3077-B91*, 1, 1991. 30
- [78] S.B. Tolbin. Results of positional photographic observations of Saturn with the Pul-kovo normal astrograph during 1975-1984. *Scientific paper deposited in All-russian institute of scientific and technical information 3078-B91*, 1, 1991. 30
- [79] U.S.N.O. Astronomical and Meteorological Observations made during the Year 1871 at the United States Naval Observatory. *Astronomical and Meteorological Observations made at the U.S. Naval Observatory, 1877*. 30
- [80] U.S.N.O. Flagstaff Astrometric Scanning Transit Telescope Planet and Planetary Satellite Observations, 2008. <http://www.nofs.navy.mil/data/plansat.html>. 30, 33
- [81] G. Vass. CCD Positions of the Saturnian Satellites in 1995. *Romanian Astronomical Journal*, 7 :45–+, 1997. 32
- [82] C. H. Veiga, R. Vieira Martins, A. Vienne, W. Thuillot, and J.-E. Arlot. CCD astrometric observations of Saturnian satellites. *A&A*, 400 :1095–1101, 2003. 31, 33
- [83] C. Veillet and G. Dourneau. 1980-1985 astrometric observations of the first eight satellites of Saturn at Pic-du-Midi, ESO and CFH. *A&AS*, 94 :291–297, 1992. 24
- [84] A. Vienne. *Théorie Analytique des Satellites de Saturne*. Thèse de doctorat, Université de Lille, 1991. 22
- [85] A. Vienne. *Différents aspects de la Dynamique des huit principaux satellites de Saturne*. Habilitation à diriger des recherches, Unversité des Sciences et Techniques de Lille, 2001. 24
- [86] A. Vienne and L. Duriez. A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. II - Short-period perturbations. *A&A*, 246 :619–633, 1991. 23
- [87] A. Vienne and L. Duriez. A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. III - Long-period perturbations. *A&A*, 257 :331–352, 1992. 23
- [88] A. Vienne and L. Duriez. TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites. *A&A*, 297 :588–+, 1995. 23
- [89] A. Vienne, W. Thuillot, and J.-E. Arlot. Astrometric reduction of CCD observations of planetary Satellites without reference star : application to Saturn's satellites. *Notes Scientifiques et Techniques de l'Institut de Mécanique Céleste*, 2001. 33, 38, 49, 69

- [90] A. Vienne, W. Thuillot, C. H. Veiga, J.-E. Arlot, and R. Vieira Martins. Saturnian satellite observations made in Brazil during the 1995 opposition with an astrometric analysis. *A&A*, 380 :727–733, 2001. 31, 32, 38
- [91] J. Virtanen, K. Muinonen, and E. Bowell. Statistical Ranging of Asteroid Orbits. *Icarus*, 154 :412–431, 2001. 70, 71, 72, 76
- [92] V.I. Voronenko and G.K. Gorel. Photographic observations of Jupiter’s and Saturn’s satellites made in Nikolaev in 1983-1985. *Scientific paper deposited in All-russian institute of scientific and technical information 6693-B88*, pages 1–92, 1988. 32
- [93] V.I. Voronenko, G.K. Gorel, L.A. Gudkova, and J.A. Pozhalova. Photographic observations in Nikolaev of satellites of Jupiter and Saturn in 1986-1987. *Scientific paper deposited in All-russian institute of scientific and technical information 3167-B91*, pages 1–15, 1991. 32
- [94] E. W. Woolard and G. M. Clemence. *Spherical astronomy*. New York, Academic Press, 1966., 1966. 49