

Thèse de Doctorat
en
Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie

présentée par

Agnès Fienga
à
l' Observatoire de Paris

sujet:

OBSERVATIONS ASTROMETRIQUES DES PLANETES
ET
AJUSTEMENT DES THEORIES ANALYTIQUES DE LEUR MOUVEMENT

Rapporteurs:

E. M. Standish (Jet Propulsion Laboratory)

Dan Pascu (U.S. Naval Observatory)

Soutenue le 18 octobre 1999 devant le jury composé de :

Catherine Turon (Observatoire de Paris)

François Mignard (Observatoire de Côte d'Azur)

Pierre Bretagnon (Institut de mécanique céleste)

Jean-Eudes Arlot (Institut de mécanique céleste)

E. M. Standish (Jet Propulsion Laboratory)

Dan Pascu (U.S. Naval Observatory)

Abstract

In this work, we have begun the first adjustment of the analytical theories of the planets built at the IMC-BDL, VSOP.

We had gather together several types of observations, reduce and homogenize them. There are very different types of data: old and recent transit observations spread on a period of more than 2 centuries (1750-1997), photographic and CCD observations, radar ranging data and positions of planets deduced from tracking observations of space probe by the use of the VLBI techniques. We also used positions of outer planets deduced from satellites absolute positions. We have treated an important number of data limiting our first study to the planets Mercury, Venus, Jupiter and Saturn.

From the first fit made on Mercury and Venus observations, we have deduced a new link between the inertiel dynamical reference frame of VSOP and the inertiel cinematic reference frame of the ICRS. Furthermore, we confirm the idea that, in the case of the inner planets, thanks to radar and VLBI data, the optical observations, even recent ones, do not bring useful information in the fit and, worth, degrade it. We obtained 3 new solutions for the motion of Mercury, Venus and the Earth-Moon barycenter, with a good external accuracy. We choosed to test the quality of the new solution of motion of the Earth-Moon barycenter by including this solution in the fitted orbit of the outer planets.

We made a second fit based on observations of Jupiter and Saturn, computed in the reference frame deduced from the fit on Mercury and Venus observations. We increased the accuracy of a factor 2 on the positions of Jupiter when we compared positions deduced from the fitted solution and observed positions (made at La Palma in 1983-1993) which are not included in the fit. Finally, we made one of the first wavelet analysis on non-regularly sampled time series.

Résumé

Dans ce travail, nous avons commencé à mettre en place le premier ajustement des théories analytiques du mouvement des planètes du système solaire construites à l'Institut de mécanique céleste. Nous avons rassemblé un grand nombre d'observations, de type très différent, nous les avons réduites et avons rendu homogènes les échantillons d'ajustement ainsi constitués. Ces données regroupent aussi bien des observations angulaires méridiennes du XVIIIème et XIXème siècles, des observations CCD modernes que des estimations de distances géocentriques par tirs radar et des positions angulaires déduites du suivi des sondes spatiales par la technique d'interférométrie à très longue base. Nous avons utilisé aussi dans le cas des planètes géantes des positions indirectes du photocentre de la planète déduites d'observations de satellites galiléens ou de Saturne. De l'ajustement des solutions du mouvement de Mercure et Vénus, nous en avons déduit un nouveau raccordement entre le système de référence dynamique des planètes, et plus précisément de VSOP87, et celui cinématique de l'ICRS. De plus, nous confirmons l'idée que les observations optiques ne sont plus à utiliser dans le cadre d'un ajustement précis du mouvement de ces objets, Mercure et Vénus, et justifions l'utilisation univoque de données radar et radio. Un deuxième ajustement, raccordé au précédent, a été effectué pour les solutions analytiques de Jupiter et Saturne. Nous améliorons la précision de ces théories d'un facteur deux lors de comparaisons entre positions déduites de ces nouvelles solutions et positions observées mais non incluses dans les échantillons d'ajustement. Enfin, nous montrons l'efficacité d'appliquer des méthodes d'analyse pointues, telle que l'analyse en ondelettes dans la détection d'effets observationnels dans les résidus utilisés lors des ajustements et l'impact de ces détection-corrrections sur les nouvelles solutions.

Remerciements

Il me paraît difficile de conclure sur quelques rebarbatifs (mais cependant nécessaires) tableaux de chiffres sans rendre hommage et remercier les gens qui m'ont accompagné, aidé et soutenu tout au long de ce travail.

Tout d'abord, je voudrais exprimer ma très grande reconnaissance à messieurs Standish et Pascu qui, malgré l'obstacle de la langue, ont accepté sans hésitation de sacrifier quelque peu de leur temps afin de lire et commenter ce manuscrit. Leurs critiques et les discussions qui s'en suivirent permirent d'enrichir grandement ce travail grâce à leur grande expérience sur les différents types de données et leurs divers niveaux de traitements. Je tiens à remercier plus particulièrement monsieur Standish d'une part pour avoir mis à ma disposition l'ensemble des données dont dispose le Jet Propulsion Laboratory dès le début de ce travail et d'autre part pour son intérêt constant pour celui-ci. Un grand merci à monsieur Mignard pour son expertise statistique et son regard critique sur l'ensemble de ce mémoire ainsi qu'à madame Turon pour son intérêt sur un sujet si lointain et pourtant si proche de la dynamique et de l'astrométrie stellaire.

Plus encore, je tiens à saluer ici monsieur Bretagnon pour ses conseils toujours nombreux et avisés sur le plan des théories analytiques ainsi que pour son soutien, sa confiance et son aide face aux hardus problèmes des traitements de données.

Enfin, qu'il me soit permis de remercier chaleureusement monsieur Arlot sans qui il ne m'aurait pas été possible de travailler sur un sujet aussi vaste et aussi passionnant; merci pour sa confiance tout au long de ces trois années et pour ses conseils aussi bien techniques que sur la direction général de ce travail. Je ne finirais pas sans rendre un hommage tout particulier à mes compagnons de travail et amis au sein de l'IMC-BDL qui m'ont permis d'avancer dans cette recherche aussi bien grâce de fruteuses collaborations et d'abondantes discussions qu'à leur simple soutien quotidien.

En termes plus personnels, un grand salut à ma famille et à mes amis qui m'ont supporté en toutes occasions, ce qui n'est pas une moindre tâche.

Table des matières

Introduction	ix
1 Présentation générale	3
1.1 Astrométrie directe: les données du Jet Propulsion Laboratory	3
1.2 Astrométrie directe: les données de l'Institut d'Astronomie Appliquée de Saint Petersbourg	4
1.3 Astrométrie directe: les données de Paris	5
1.4 Astrométrie indirecte: sondes spatiales et satellites naturels	6
1.5 Diversités et choix des données	7
I Les observations utilisées	1
2 Les données radar	9
2.1 Présentation générale	9
2.1.1 Les données	9
2.1.2 Théorie et techniques d'observations	10
2.2 Algorithme de réduction	13
2.2.1 Processus général	14
2.2.2 Topographie de surface	17
2.2.3 La correction relativiste $\Delta\tau_{REL}$	18
2.2.4 La correction solaire $\Delta\tau_{SOL}$	20
2.2.5 Les corrections troposphérique $\Delta\tau_{TROP}$ et ionosphérique	24
2.3 Résultats de la réduction	28
3 Les données optiques	31
3.1 Les observations méridiennes	31
3.1.1 Présentation	31
3.1.2 La réduction: généralités	31
3.1.3 Mesure du photocentre	37
3.2 Les observations photographiques et CCD	37
3.2.1 Observations directes des planètes	37
3.2.2 Astrométrie indirecte: observations des satellites	37
3.2.3 Mise en place d'une nouvelle méthode de réduction d'images astromé- triques, photographiques ou CCD: la réduction à une étoile	43
3.3 Homogénéisation des repères	51
3.3.1 Terminologie	51
3.3.2 Systèmes de référence dynamiques: rappels historiques	51

3.3.3	Corrections régionales, zonales et équation en magnitude	54
3.3.4	Correction d'équinoxe	55
3.3.5	Passage entre repère apparent FK5 et repère astrométrique J2000 FK5	56
3.3.6	Passage du repère J2000 FK5 au repère ICRF 2000	56
3.4	Effet de phase	58
3.4.1	Analyse Spectrale: théorie	62
3.4.2	Résultats	63
3.5	Cas des observations de Paris	68
3.5.1	Echelle de temps	69
3.5.2	Changement de repères	69
3.6	Conclusions	70
4	Données VLBI et sondes spatiales	79
4.1	Principe du VLBI en astrométrie	79
4.1.1	L'acquisition	79
4.1.2	Corrélation des signaux	80
4.2	Application au suivi des sondes Magellan et Galileo	82
5	Théories planétaires	89
5.1	Présentation des théories planétaires	89
5.1.1	Les théories numériques	89
5.1.2	Les théories analytiques	90
5.1.3	Systèmes de référence dynamiques	92
5.2	Les dérivées partielles	95
5.2.1	Mise en place des équations	95
5.2.2	Calculs de $d\sigma_1$ et de $d\sigma_2$	96
5.2.3	Ecriture complète	97
II L'ajustement des théories analytiques: les problèmes à résoudre		85
6	Méthodes statistiques	99
6.1	Généralités sur la régression	99
6.1.1	Normalité asymptotique - Théorème central-limite	99
6.1.2	Les estimateurs	100
6.2	Premières applications à l'algorithme d'ajustement	102
6.2.1	Tests de normalité	102
6.2.2	Algorithme des moindres carrés	104
6.3	Analyse en composantes principales	106
6.3.1	Description multidimensionnelle	106
6.3.2	ACP: théorie	107
6.3.3	Algorithme et application à la régression	110
6.3.4	Conclusion	112
6.4	Tests de qualité	112
6.4.1	Qualité de l'ajustement	112
6.4.2	Qualité de l'orbite à court et moyen terme - Prévion	113

7	L'algorithme d'ajustement	115
7.1	Ecriture matricielle des équations de conditions	115
7.1.1	Cas général	115
7.1.2	Cas du barycentre Terre-Lune et des planètes intérieures	117
7.1.3	Cas des planètes extérieures	118
7.2	Connexion des repères	119
7.2.1	Mise en place des quantités observées	119
7.2.2	Raccordement des repères dynamique et cinématique	119
7.3	Calcul de nouvelles positions angulaires	121
8	Planètes intérieures	125
8.1	Choix des observations	125
8.1.1	Observations optiques	125
8.1.2	Les données radar	128
8.2	Les résultats	129
8.2.1	Mise en place des résultats	129
8.2.2	Solution Radar - VLBI	130
8.2.3	Solutions Radar - VLBI - Optiques	134
8.2.4	Discussion	141
8.2.5	Conclusions	146
III	L'ajustement des théories analytiques: les premiers résultats	122
9	Planètes extérieures	151
9.1	Mise en place des solutions	151
9.1.1	Les observations	151
9.1.2	L'ajustement	153
9.2	Les nouvelles solutions	155
9.2.1	Analyse en composantes principales et corrélations	156
9.2.2	Discussion sur les solutions	157
9.2.3	Résidus <i>après ajustement</i>	163
9.3	Prévisions	166
9.4	Discussion	173
9.5	Analyse en ondelettes des résidus	175
9.5.1	Contexte	175
9.5.2	Détection	176
9.5.3	Interprétation	177
9.5.4	Déconvolution	179
9.5.5	Conclusion	186
10	Perspectives	193
10.1	Vers une nouvelle astrométrie	193
10.1.1	Introduction	193
10.1.2	Implications techniques	194
10.1.3	Implications sur le processus de réduction en lui-même	197
10.1.4	Effets détectables	198
10.1.5	Conclusion	200
10.2	Quelles observations astrométriques planétaires dans l'avenir?	200

10.2.1 Planètes intérieures: vers l'abandon des observations optiques	200
10.2.2 Planètes extérieures: vers un renouveau des observations optiques	202
IV Perspectives et conclusion	191
11 Conclusion	205
Annexes	216
A Compléments de statistique	217
A.1 Généralités sur la régression	217
A.1.1 Distributions normales et asymptotiquement normales	217
A.1.2 Les estimateurs	219
A.1.3 estimateurs biaisés	220
B PRIAM: Procédure de Réduction d'Images AstroMétriques	227
B.1 Contexte	227
B.2 Algorithme et architecture	228
B.2.1 Présentation générale	229
B.2.2 Mise en place du repère de référence tel qu'il est observé	230
B.2.3 Fonction de raccordement	238
B.2.4 Détermination des positions inconnues	240
B.3 Optimisation	241
B.3.1 Discussion préalable	241
B.3.2 De la géométrie des points de raccordement	242
B.3.3 Choix de l'ordre de la fonction de raccordement et réduction à peu d'étoiles	244
C APDB: Astrometric Planetary Data Base	247
D Corrélations et autres paramètres des ajustements	251
D.1 Constantes du modèle d'Owens	251
D.2 Paramètres de l'ajustement	252
D.2.1 Mercure-Vénus-le barycentre Terre-Lune	252
D.2.2 Jupiter et Saturne	255
E On the use of Hipparcos data for the determination of astrometric positions of outer planets	259

Introduction

”Si l’on arrive à réconcilier la théorie avec l’observation, les astronomes, [...], n’auront plus qu’à se reposer dans une consciencieuse oisiveté à l’égard des planètes, se contentant de quelques rares observations pour constater l’exactitude et le triomphe de leurs théories. Ce pourrait être pour quelques-uns l’âge d’or de l’astronomie.” (Le Verrier, 1854)

C’est en ces termes que U.-J. Le Verrier introduisit son travail fondamental, publié entre 1855 et 1877, de mise en œuvre des solutions analytiques du mouvement des huit planètes du système solaire, dans le rapport annuel de l’Observatoire impérial de Paris en l’année 1854. Et d’ajouter: *”J’avouerai qu’un avenir si parfait ne me sourirait pas.”*

Près de 150 ans plus tard, cette même préoccupation de *réconcilier* théories du mouvement des systèmes planétaires et observations demeure un élément majeur dans la compréhension de la dynamique du système solaire. Paradoxalement, alors que ce siècle a vu apparaître une nouvelle physique et se développer de nouvelles techniques d’observations révolutionnant notre approche de l’astrométrie aussi bien en terme d’instrumentation que de précision, les théories planétaires n’ont connu de profondes modifications que très récemment. Rappelons qu’il faudra attendre 1984 et la substitution des théories Le Verrier-Gaillot (Gaillot, 1913) et de Newcomb-Hill (Newcomb, 1898) - Eckert (Eckert, 1951) dans *la Connaissance des temps* et l’*Astronomical Almanac* par de nouvelles solutions analytiques, VSOP82 (Bretagnon, 1982) et numériques, DE102, (Newhall et al, 1983) pour enfin avoir accès à des théories dynamiques modernes. En effet, après le développement et l’amélioration par Gaillot (1913) des théories de Le Verrier (1855-1877), la mise en place par Newcomb en 1898 de nouvelles solutions – ajustées sur un ensemble d’observations plus important que celui de Le Verrier – et l’amélioration par Hill, en 1895, des solutions de Jupiter et Saturne, aucune autre théorie dynamique de l’ensemble des planètes du système solaire n’a été développée pendant près de cinquante ans. Il faudra attendre l’avènement de l’informatique pour voir l’établissement de nouvelles solutions. On citera notamment les solutions de Eckert en 1951 pour les planètes intérieures et la première intégration numérique complète du système solaire mise en place par Osterwinter et al en 1972. En France, aucune modification n’a été apportée à la solution de Gaillot jusqu’en 1984 et sa substitution par la solution VSOP82. Cette dernière s’inscrit dans la tradition des théories analytiques développées au Bureau des longitudes, mais n’est cependant pas ajustée aux observations, tout comme la solution suivante, VSOP87, ces deux théories ayant été ajustées à l’intégration numérique DE200. Ainsi, depuis Gaillot en 1913, aucune solution analytique du mouvement des planètes développée au Bureau des longitudes n’a été ajustée aux observations. Le travail entrepris dans cette thèse n’a aucunement la prétention de répondre aux attentes accumulées depuis plus de 80 ans, mais a l’espoir de poser les premières pierres d’un travail que Le Verrier qualifiait *“d’un dur labeur de quinze à vingt années”*.

Comme nous l’avons déjà signalé, au cours du vingtième siècle et en particulier de la dernière

partie de ce siècle, ont été mises en place de nouvelles techniques d'observations astrométriques de haute précision. On citera entre autres les données radar de distance par tirs directs sur la surface des planètes telluriques, et par suivi des sondes spatiales, les données angulaires déduites là encore du suivi de sondes par interférométrie à très longue base. Ces techniques diffèrent des techniques classiques d'observations méridiennes et photographiques aussi bien en terme d'instrumentation que de précision dans l'estimation des positions des objets observés. Par exemple, l'avènement de la technologie radar a-t-il permis de passer le cap de la dizaine de kilomètres d'incertitude sur l'estimation des distances Terre-Mercure alors que les meilleures observations optiques entraînent une incertitude angulaire équivalente à 200 kilomètres en moyenne sur l'orbite géocentrique de Mercure. Remarquons que ce gain de précision n'est pas sans prix qui est ici la très grande complexité de réduction de cette nouvelle astrométrie en particulier issue des techniques d'interférométrie. Un tel bouleversement des techniques d'observations astrométriques développées sur une période de temps relativement restreinte (20 ans pour le radar et moins d'une dizaine d'années pour le VLBI) n'est bien sûr pas sans conséquence sur les méthodes d'ajustement des théories dynamiques des objets observés: comment concilier des types de données aussi disparates? Ne conserver que deux types d'observations d'excellente précision mais ne couvrant qu'une partie limitée de l'orbite de la planète est-ce suffisant pour garantir la stabilité d'une telle solution? La mise en lumière par Morrison (1998) d'un décalage en ascension droite de l'orbite de Jupiter par comparaison aux observations nous pousserait à répondre par la négative.

Face à de telles interrogations nous avons recherché des méthodes de réduction et d'ajustement permettant, d'une part, d'améliorer la qualité astrométrique des positions en particulier issues des observations optiques, méridiennes et photographiques, des planètes intérieures et extérieures et d'autre part d'estimer l'impact de chaque type d'observations sur l'ajustement des solutions de leur mouvement.

Dans un premier temps, grâce principalement à la collaboration efficace avec le Jet Propulsion Laboratory (JPL) et avec l'Institut d'Astronomie Appliquée de Saint Petersburg nous avons rassemblé un grand nombre d'observations très diverses. Les échantillons sont aussi bien constitués de données angulaires méridiennes et photographiques classiques, que de données radar brutes et des positions angulaires VLBI de Vénus et Jupiter. La description détaillée de ces échantillons ainsi que l'exposé des méthodes de réduction appliquées à chacun constitue le premier volet de cette présentation. De plus grâce à l'utilisation du catalogue astrométrique de haute précision Hipparcos et à la mise en place d'un algorithme minimisant les erreurs de réduction, nous avons pu montrer qu'il était possible d'améliorer de façon significative la qualité des positions déduites des observations photographiques. L'exposé de cette méthode, l'application de celle-ci à un exemple concret d'observations photographiques réalisées entre 1967 et 1974 par D.Pascu à l' U.S. Naval Observatory ainsi que l'ébauche des perspectives d'applications au projet Gaia complètent la première partie de ce mémoire de thèse.

La deuxième partie de ce travail a bien sûr consisté dans la mise en place mathématique et statistique de l'ajustement des solutions analytiques de Mercure, Vénus, le barycentre Terre-Lune, Jupiter et Saturne issues de VSOP87.

Enfin, la troisième partie de notre manuscrit sera consacré en l'analyse des nouvelles solutions issues d'ajustements de la théorie dynamique VSOP87 à divers échantillons. Par cette analyse, nous essaierons de répondre aux questions liés à l'utilisation d'échantillons de nature plus ou moins diversifiée et couvrant des périodes plus ou moins étendues. De ces analyses, seront déduites de nouvelles conditions initiales pour les solutions analytiques du mouvement de Mercure, Vénus, Jupiter, Saturne ainsi que celles de l'orbite du barycentre Terre-Lune. De cette dernière

détermination, nous déduirons un nouveau raccordement entre le système de référence dynamique inertiel de VSOP et le système de référence localement cinématique inertiel de l'ICRS. D'autre part, nous appliquerons une nouvelle technique d'analyse de données, l'analyse en ondellettes. Cette analyse originale mettra en lumière des effets systématiques de type erreurs zonales de catalogues stellaires et de réfraction. Après correction de ces effets, nous verrons que les ajustement des solutions du mouvement de Jupiter et Saturne seront grandement améliorés. Nous concluerons enfin, en soulignant que ce travail nous permet de jeter les bases d'un ajustement complet qu'il reste encore à faire et que nous espérons poursuivre dans le cadre du développement de théories analytiques plus précises.

Les observations utilisées

Chapitre 1

Présentation générale

Les données que nous avons traitées dans ce travail diffèrent, de par leurs origines et les techniques mises en œuvre. Elles sont extraites de 3 sources: la base de données du Jet Propulsion Laboratory, mise à notre disposition dès le début de ce travail par Standish, celle de l'Institut d'Astronomie Appliquée de Saint Petersburg et enfin des Annales de l'Observatoire de Paris. Chaque ensemble regroupe des observations astrométriques de type méridien, radar et photographique, pour les deux premiers et uniquement méridienne pour le dernier. Les données du JPL englobent de plus des positions de planètes issues du suivi des sondes spatiales ainsi qu'un certain nombre de points normaux obtenus par le biais d'occultations stellaires, par exemple. Enfin, l'exploitation des catalogues astrométriques de satellites de planètes géantes nous a permis d'obtenir, par une astrométrie indirecte des planètes, un complément intéressant d'information.

Comme on peut le voir, les techniques astrométriques dont il est question ici sont très diverses et n'apportent pas toutes la même information sur les orbites des neuf planètes du système solaire.

1.1 Astrométrie directe: les données du Jet Propulsion Laboratory

Nous avons commencé par traiter l'ensemble des données méridiennes et radar fournies par le Jet Propulsion Laboratory. Ces données constituent une grande partie de l'échantillon observationnel utilisé par le JPL pour l'ajustement des théories DE102 et suivantes (Newhall et al, 1983, Standish, 1990, 1993 et 1998). Nous appellerons ce premier groupe d'observations, le groupe Contemporain ou JPL et nous décrirons ici l'ensemble des observations que nous avons extraites de cette base et utilisées dans notre ajustement. Cet échantillon s'étend sur une période allant de 1911 à 1994. Il représente, sans tenir compte des données VLBI de suivi de sondes, 64.7 % du total de l'ensemble des données utilisées dans ce travail, avec une distribution de 61.3 % de données méridiennes et 3.4 % de données radar, ces dernières faisant leur apparition dès 1964. Les observations méridiennes sont issues à 79% des observations réalisées à l'U.S. Naval Observatory entre 1911 et 1982 (Publications de l'U.S. Naval Observatory, 1911-1992). Les observations faites au Royal Greenwich Observatory (Royal Observatory, Bulletins, 1973) interviennent à hauteur de 18%, le reste étant distribué entre l'Observatoire de Bordeaux, le Tokyo Mitaka-Mura (Tokyo Astronomical Bulletin, 1971) et le CAMC de La Palma (Carlsberg Meridien Circle Catalogue, 1997). La précision angulaire moyenne sur l'ensemble de ces observations méridiennes varie selon les planètes. Elle est de l'ordre de 0.7 à 0.9 secondes de degré

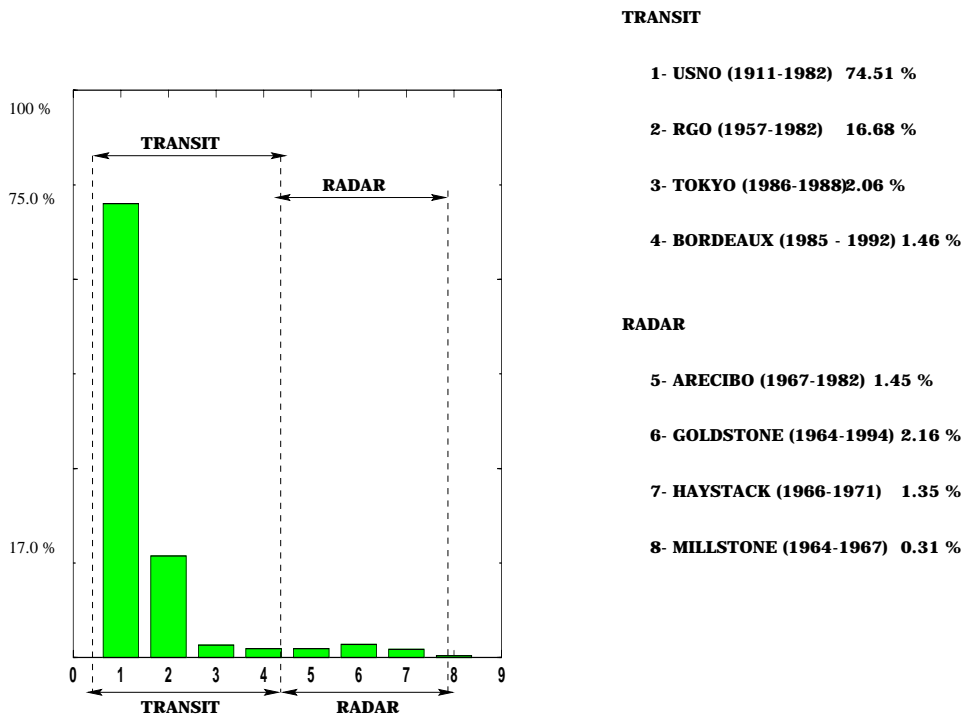


FIG. 1.1: Groupe JPL: Répartition des observations utilisées dans notre ajustement tirées de la base du JPL par observatoires - Ne sont pas incluses les données VLBI du suivi des sondes Magellan et Galileo.

pour les planètes intérieures et de 0.4 à 0.6 seconde de degré pour les extérieures.

Les observations radar sont réparties en égale proportion entre les principaux sites américains, comme on peut le voir dans la figure 1.1. La contribution de ces données à l'ajustement paraît marginale de par leur faible nombre. Cependant, l'astrométrie issue de la technique des tirs radar est d'une précision bien supérieure à celle fournie par les observations méridiennes (de l'ordre de quelques kilomètres, comme nous le verrons dans la suite) et deviendra donc prépondérante par le jeu des pondérations.

Autre élément important: les observations angulaires déduites des suivi des sondes Magellan (18 observations) (Folkner, 1992, 1993, 1994a, 1994b) et Galileo (23 observations) par la technique d'interférométrie à très longue base. Leur nombre est extrêmement limité mais leur rôle dans l'ajustement est majeur puisque c'est grâce à ces observations réalisées entre 1994 et 1997 que nous mettrons en place le lien entre système de référence dynamique de VSOP et celui cinématique de l'ICRS.

1.2 Astrométrie directe: les données de l'Institut d'Astronomie Appliquée de Saint Petersburg

Dans un deuxième temps, grâce à une collaboration avec l'Institut d'Astronomie Appliquée de Saint Petersburg, nous avons pu avoir accès à une importante série d'observations méridiennes, photographiques et radar pour l'ensemble des planètes. Ceci nous a permis de compléter à hauteur de 20% la série de données initiales du JPL et d'étendre la période couverte par les données

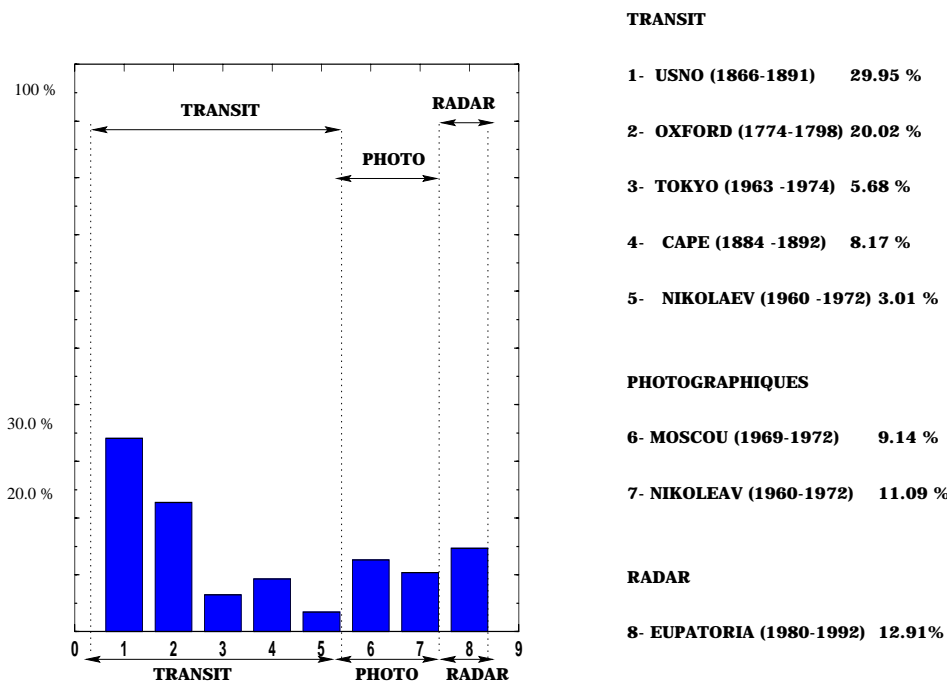


FIG. 1.2: Groupe IAA: Répartition des observations utilisées dans notre ajustement tirées de la base de l'IAA par observatoires

de plus d'un siècle. C'est en raison de la présence de données anciennes, que nous appellerons cet apport supplémentaire de données, groupe Ancien ou IAA. Ce groupe introduit de nouveaux sites d'observations dans l'échantillon, comme on peut le voir sur l'histogramme de la figure 1.2. Il contribue donc à la diminution des risques de corrélations induits par une concentration importante de données issues d'un même observatoire. La distribution des observations est plus homogène que dans le groupe JPL aussi bien au niveau des périodes que des sites d'observations. Les données méridiennes contemporaines de celles du JPL leurs sont équivalentes en précision, alors que les données plus anciennes atteignent des précisions de l'ordre de 1.0 à 1.5 seconde de degré pour les planètes intérieures et 0.8 à 1.2 seconde de degré pour les planètes extérieures. Il est à signaler de plus que 23.7 % des données optiques sont des observations photographiques de planètes extérieures, réalisées à Moscou et à l'observatoire de Nikolaïev entre 1960 et 1982 dont la précision est de 0.4 à 0.5 seconde de degré. Les observations radar originales présentes et sont issues d'observations réalisées à l'observatoire d'Eupatoria en Crimée. Là encore, la précision de ce type d'observations sur les distances Terre-planète est grande et atteint la dizaine de kilomètres. Tout comme dans le cas des données JPL, la prépondérance de ces observations dans l'ajustement est évidente.

1.3 Astrométrie directe: les données de Paris

Après avoir effectué des recherches au sein des bibliothèques de l'Observatoire de Paris et du Bureau des longitudes, il a été possible de remettre à jour quelques séries d'observations de planètes géantes plus ou moins directement exploitables. Nous avons ainsi retrouvé des observations méridiennes et visuelles des XVIIIème (non exploitées dans ce travail), XVIIIème et

VENUS								
Observatoires	Periodes	Nbr.Obs	Observatoires	Periodes	Nbr.Obs	Observatoires	Periodes	Nbr.Obs
USNO	1866-1891	1211	Arecibo	1967-1982	227	VLBI - Magellan	1991-1994	18
	1914-1982	4230	DSS13/DSS14	1964-1994	507			
RGO	1957-1982	815	Millstone Haystack	1964-1971	320			
Cape + Oxford	1774- 1892	1277	Eupatoria	1972-1990	813			

MERCURE								
Observatoires	Periodes	Nbr.Obs	Observatoires	Periodes	Nbr.Obs	Observatoires	Periodes	Nbr.Obs
USNO	1866-1891	776	Arecibo	1967-1982	242			
	1914-1982	2743	DSS13/DSS14	1970-1994	179			
RGO	1957-1982	361	Millstone Haystack	1966-1971	217			
Cape + Oxford	1774- 1892	739	Eupatoria	1980-1992	75			

FIG. 1.3: *Séries d'observations traitées dans ce travail pour Mercure et Vénus*

XIX^{ème} siècles. Ce troisième apport sera improprement désigné sous le terme de données de Paris et représente 12.3 % de l'échantillon utilisé lors de l'ajustement. Ces observations se répartissent entre deux sites: le Royal Greenwich Observatory (73 %) et l'Observatoire de Paris et concernent quatre objets: Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Ce qui est intéressant ici, ce n'est pas tant la variété des sources ou des techniques observationnelles mises en œuvre (méridienne dans les 2 cas) que les périodes d'observations couvertes. En effet, grâce à ces observations, nous couvrons une moitié de XVIII^{ème} et la totalité de XIX^{ème} siècle. La précision de ces observations est bien sûr dégradée par rapport aux données précédentes. Cependant, comme nous le verrons, leur présence dans l'ajustement, même sous forme de points moyens, apporte une information non négligeable sur l'orbite des planètes géantes.

D'autre part, il y a environ une vingtaine d'années, I. Shapiro avait commencé à regrouper de très nombreuses et très diverses observations optiques des planètes, en vue de l'extension de la base observationnelle des éphémérides construites à l'époque au MIT. Dans le cadre du développement et de la mise en service de la base de données APDB (cf Annexe C), accessible aujourd'hui sur le web, nous avons récupéré une grande partie de cette base de données. Cependant, il s'est avéré que ces observations étaient encore sous forme brute, et donc inutilisables telles quelles dans notre travail.

1.4 Astrométrie indirecte: sondes spatiales et satellites naturels

A ces trois ensembles d'observations astrométriques classiques, il faut ajouter les données issues de missions spatiales telles que le tracking VLBI de Magellan (pour Vénus) et de Galileo (pour Jupiter) que nous avons déjà mentionné. Ces données ont été traitées en dernier lieu, du fait de leur nombre limité (18 pour Vénus et 23 pour Jupiter) et sont issues de la base de données du JPL. Leur précision est incomparable puisque de l'ordre de quelques millisecondes de degré pour le tracking VLBI de Magellan.

Ajoutons enfin l'apport de positions astrométriques indirectes de planètes extérieures, obtenues à partir de positions astrométriques de leurs satellites. Grâce à l'exploitation de catalogues

JUPITER					
Observatoires	Periodes	Nbr.Obs	Observatoires	Periodes	Nbr.Obs
USNO	1866- 1890	334	CAMC	1992-1995	423
	1914-1994	2053		Hipparcos USNO	1967-1974
RGO	1958-1982	465	Greenwich	1750-1869	677
Tokyo Mitaka	1963-1973	186	Paris	1837-1867	320
Oxford	1774-1798	505	VLBI - Galileo	1996-1997	23
Nikolaev-Photo	1961-1982	275			
SATURNE					
USNO	1926-1982	1422	Strugnell-Taylor	1966-1981	3358
	1866- 1890	390		CAMC	1987-1994
RGO	1958-1982	405	Greenwich	1836-1867	819
Nikolaev-Photo	1961-1982	306			
Tokyo Mitaka	1963-1974	191			
Oxford	1774-1798	261			

FIG. 1.4: *Séries d'observations traitées dans ce travail pour Jupiter et Saturne*

astrométriques de satellites, tels que le catalogue de Strugnell et Taylor pour Saturne, et l'utilisation d'observations méridiennes, photographiques ou CCD des satellites galiléens, nous avons pu obtenir des positions très précises, de l'ordre de 0.05 seconde de degré – pour les réductions CCD et méridiennes modernes – à 0.5 seconde de degré pour les plus anciennes données de catalogue. Et cela notamment pour Jupiter. Ces observations indirectes nous serviront de compléments aux trois groupes d'observations initiales pour des périodes comprises entre 1960 et 1997.

1.5 Diversités et choix des données

L'apport de ces cinq échantillons de données est indéniable, aussi bien au niveau de la diversité des techniques mises en œuvre que des périodes couvertes. Si l'on compare aux données utilisées par le JPL, le nouvel échantillon compte plus de 30% d'observations supplémentaires réparties sur plus de deux siècles. Nous verrons par la suite que cela n'est pas sans conséquence sur la qualité de la solution ajustée.

Sur les graphes de la figure 1.5 sont représentées les orbites héliocentriques des quatre corps dont il sera question dans la suite à savoir, Mercure, Vénus, Jupiter et Saturne. Ces orbites sont tracées à partir des positions en X,Y des planètes à l'instant des observations. Dans le cas des planètes intérieures, on note que l'ensemble des données radar fournit des observations des distances Terre-planètes sur plus d'une orbite. De plus, les données VLBI issues du suivi de Magellan autour de Vénus sont bien réparties sur l'orbite héliocentrique de cette dernière. On peut donc conclure, malgré le nombre limité d'observations angulaires par interférométrie à très longue base, qu'un ajustement radar+VLBI des orbites de Vénus, Mercure et indirectement du barycentre Terre-Lune est cohérent en terme de périodes orbitales couvertes par les

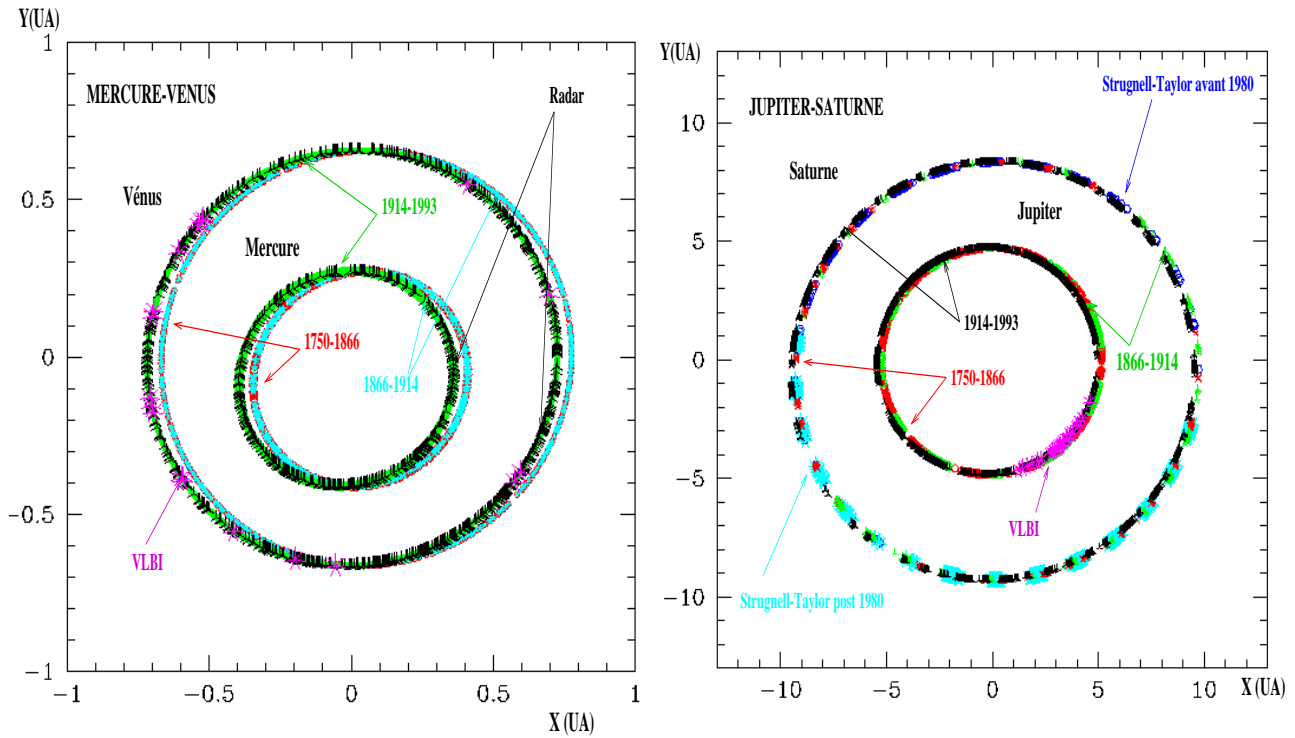


FIG. 1.5: *Orbites héliocentriques des planètes ajustées aux dates d'observations*

observations. Le problème se pose en terme assez différent pour les planètes extérieures. En effet, dans ce cas, tous les types des données sont complémentaires et l'apport des observations anciennes et celles déduites des positions satellitaires est indéniable, en particulier pour Saturne.

Devant l'importance et la taille de l'ensemble des données présentées, il nous a fallu faire un choix sur les observations et les planètes à traiter dans ce travail. Deux stratégies étaient possibles: soit ajuster les théories planétaires de l'ensemble des planètes mais en n'utilisant qu'une partie des données, ce qui aurait entraîné une perte d'information, soit de traiter l'ensemble de l'information disponible par le biais des différentes techniques d'observations présentées plus haut dans un ajustement plus ciblé. C'est cette option que nous avons choisie, sachant que le raccordement de l'orbite terrestre à l'ensemble du système dynamique ne nécessite, en théorie, qu'une seule orbite de planète. Pour ce raccordement, il nous est apparu intéressant de traiter les observations de Vénus, d'une part et de Mercure d'autre part. En effet, Vénus est la planète tellurique la plus massive du système intérieur et donc la plus susceptible d'induire des perturbations sur l'orbite terrestre. Le choix de Mercure se justifie par la qualité de ces observations optiques après traitement d'un effet de phase aisément modélisable. D'autre part, nous n'avons eu accès aux observations radar de Mars que tardivement et face au caractère très particulier de ce traitement, il nous apparut préférable de ne pas inclure dans notre ajustement des données dont la réduction ne donnait pas pleinement satisfaction. D'autre part, connaissant les problèmes liés à la dérive des orbites des planètes extérieures mis en évidence par Morrison (1998) concernant en particulier l'orbite de Jupiter, nous nous sommes attachés à expliquer ce phénomène par un ajustement des deux planètes les plus touchées par cette dérive à savoir, Jupiter et Saturne.

Chapitre 2

Les données radar

Après la seconde guerre mondiale, le développement des techniques d'émission et de réception de signaux de longueur d'onde comprise entre 400 et 9000 Mhz a permis d'améliorer considérablement les éphémérides des corps du système solaire en général et des planètes telluriques intérieures en particulier. En effet, au début des années soixante et des grandes vagues successives d'exploration du système solaire, il s'est agi d'une part de construire des orbitographies extrêmement précises de sondes telles que Mariner, Viking, Venera, etc et d'autre part de suivre ces orbiters au cours de leur mission. L'utilisation du radar dans les phases préparatoires (construction d'éphémérides de haute précision des planètes ciblées mais aussi des sondes) et dans le suivi de telles missions en a été un élément déterminant. Du fait de leur proximité de la Terre et dans le cadre des préparations des missions spatiales, c'est à Mars, Mercure et Vénus que s'est en premier lieu appliquée cette technique. Les premiers tirs radar ont été effectués en 1960. En 1967, l'impact de ces données sur la construction d'éphémérides a été mis en évidence par Ash (1967) et reste une caractéristique des éphémérides modernes (Newhall, 1983, Standish, 1990 et 1995).

Comme nous l'avons dit, une autre utilisation des données radar, en aval cette fois des missions spatiales, consiste à faire le suivi de ces sondes. En effet, tous les *orbiters* lancés sont suivis ou "traqués" par des antennes radio en utilisant les techniques de tirs radar et d'interférométrie à très longue base et cela tout au long de leur mission. Cette astrométrie très précise – de l'ordre de quelques mètres – et régulière des sondes permet de déduire des positions supplémentaires de planètes ou d'objets – astéroïdes ou comètes – proches de l'orbite nominale de la sonde. C'est ce type de données que nous présenterons dans le chapitre consacré aux sondes spatiales.

Nous rappelons que seules les données radar de Vénus et de Mercure ont été traitées dans ce travail et que ces observations correspondent à des distances entre objets. Nous mettrons de côté les mesures de vitesses relatives issues d'observations par effet Doppler.

2.1 Présentation générale

2.1.1 Les données

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous ne considérerons ici que les mesures de distances entre la Terre et la planète observée. Ces mesures correspondent à l'intervalle de temps nécessaire au signal pour atteindre la planète et à son écho pour nous parvenir. On obtient alors une estimation de l'ordre de quelques dizaines de mètres à quelques kilomètres, de la position de la planète au moment du contact du signal avec la surface de la planète.

Les sites d'observations dont sont issues nos données sont au nombre de quatre. La contri-

Antenne	Periode	Frequence	Diametre	Sigma	% / Nbr. Total d'obs.
Arecibo	1967-1982		305 m		14.7 %
		1997-1975: 430 Mhz		10 km	
		1975-1982: 2380 Mhz		1.5 km	
Goldstone DSS 13 DSS 13-14 DSS 14	1964-1994				22 %
		2320 Mhz	26 m	1.5 km	
		8500 Mhz	70 m	1.5 km	
Haystack	1966-1971	784 Mhz	37 m	1.5 km	13.7 %
Millstone	1964 - 1967	1295 Mhz	26 m	1.5 km	3.3 %
Eupatoria	1980 - 1992	769 Mhz	70 m	1.5 km	46.3 %

Nbr Total d'obs: 3167

FIG. 2.1: *Distribution des observations radar de Mercure et de Vénus par observatoire, période d'observation et caractéristiques techniques des antennes*

bution de chacun de ces sites ainsi que les périodes couvertes par chacun d'eux, leurs caractéristiques techniques, le sigma moyen pour chacune des antennes sont présentées dans la figure 2.1. Certaines observations ont été effectuées en mode bistatique entre l'antenne DSS13 et DSS14 de Goldstone, à savoir que le signal a été transmis par DSS14 et reçu par DSS13. Elles apparaissent dans la figure 2.1 sous l'intitulé DSS13-14

2.1.2 Théorie et techniques d'observations

Théorie de la détection radar

On se place dans le cas simplifié d'un tir radar sur un objet fixe isolé placé dans le vide. Les antennes émettrices et réceptrices diffèrent et sont, elles aussi, supposées être dans le vide.

– Puissance émise et reçue

On note P_t la puissance du signal émis dans toutes les directions de façon isotrope, et P_i la densité de puissance passant par un élément de surface donné perpendiculaire à la direction de propagation en un point suffisamment éloigné de l'antenne. On peut écrire:

$$P_i = \frac{P_t}{4\pi r^2} \quad (2.1)$$

où r est la distance entre le point et l'antenne émettrice. En général, les antennes ont un pouvoir directionnel important, c'est-à-dire que l'on peut diriger l'émission du signal de façon assez précise. On note G_t le gain directionnel de l'antenne, qui est fonction de

l'azimut et la hauteur de la cible. Dans ce cas, P_i devient:

$$P_i = \frac{P_t G_t}{4\pi r^2} \quad (2.2)$$

On suppose maintenant qu'au point considéré se trouve un objet qui intercepte le signal et le réfléchit dans toutes les directions. La densité de puissance réfléchiée par unité de surface, P_s à une distance r' de l'objet est estimée en terme de section de dispersion, σ , de l'objet observé par:

$$P_s = \frac{P_i \sigma}{4\pi r'^2} \quad (2.3)$$

où σ se définit comme la surface effective de réflexion de l'objet. Autrement dit, σ représente la surface de l'objet sur laquelle va se produire l'écho du signal. Au retour du signal, si l'on suppose que l'on a capté la totalité de la puissance réfléchiée avec une antenne de surface effective, A_e , alors la puissance reçue sera P_r :

$$P_r = P_s A_e L \quad (2.4)$$

où L est le facteur d'atténuation du signal. On obtient donc une première estimation de la puissance de l'écho d'un signal émis à une puissance P_t avec:

$$P_r = \frac{P_t G_t A_e L}{(4\pi)^2 r'^2 \cdot r^2} \sigma \quad (2.5)$$

Cette équation est appelée *équation du radar*

Dans le cas où l'antenne émettrice est aussi l'antenne réceptrice, on a $r' = r$. D'autre part, on sait que (Silver, 1951) le gain directionnel est lié à la surface effective de l'antenne par la relation:

$$G_t = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \quad (2.6)$$

avec λ , la longueur d'onde du signal. Pour une observation monostatique, c'est-à-dire avec une seule antenne émettrice et réceptrice, l'équation du radar devient:

$$P_r = \frac{P_t A_e^2 L}{4\pi \lambda^2 r^4} \sigma \quad (2.7)$$

Avec cette équation, il devient alors possible de choisir le type de transmetteur et d'antenne le plus adapté à l'objet ou aux types d'objets que l'on veut observer, autrement dit pour une surface de réflexion et une distance r données.

– Bruit de détection

La détection de l'écho va être limitée par la puissance du bruit, P_n , produit par des sources diverses contaminant le récepteur. Dans la majorité des cas, la composante dominante du bruit est un bruit blanc aléatoire dans la bande passante, B_r , du récepteur. Il est commun de modéliser ce genre de bruit par une relation du type $P_n = kTB_r$ où k est la constante de Boltzmann. T représente alors ce que l'on appelle le bruit thermique équivalent et se décompose en bruit stellaire, T_s (radiations atmosphérique, solaire et cosmique) et en bruit généré par le récepteur lui-même, T_r .

On suppose toujours que l'objet observé et l'antenne sont dans le vide et que l'objet est stationnaire. Dans ce cas, la distance, r , qui sépare l'objet de l'antenne s'écrit $r = \frac{c\tau}{2}$ où τ est le temps d'aller retour du signal. On définit alors la *résolution limite*, Δr , de la mesure de distance par :

$$\Delta r = \frac{c\Delta t}{2} \quad (2.8)$$

où Δt est la période de pulsation de chaque composante du signal. Pour obtenir une bonne résolution, il faut donc diminuer cette période. Or il existe une relation directe entre la bande passante de l'émetteur, B_e , et Δt , puisque $B_e = \frac{0.886}{\Delta t}$. La bande passante du récepteur, B_r , devant correspondre à la bande passante de l'émetteur, on établit un lien direct entre la résolution limite du signal et le bruit de détection du radar. Ainsi, si on diminue la période de pulsation de chaque composante du signal, on augmente la bande passante du transmetteur et donc on augmente le bruit de détection, P_n . Il faut alors trouver un équilibre entre la résolution limite et le bruit de détection. La solution généralement adoptée est alors de moduler le signal déjà pulsé.

On voit ici l'importance des données techniques sur la qualité de détection des antennes ainsi que sur la précision de mesure des distances.

Techniques d'observations

Elles sont nombreuses car depuis 1960 et les premiers tests d'écho radar sur Vénus par l'antenne DSS13 de Goldstone, les applications de la technique radar se sont multipliées. On citera par exemple en plus des mesures de distance et de vitesse relative par effet Doppler, l'imagerie radar d'objets proches de l'orbite terrestre comme les astéroïdes géocroiseurs, cette dernière ayant connue un grand essor depuis une dizaine d'années (Ostro, 1988, 89, 90a, 90b, 92, Mitchell, 1995 et Ostro, 1996).

Le principe des observations radar réside donc dans l'émission d'une onde cohérente pulsée avec des pics de puissance variant entre 450kW et 2.0 MW selon le transmetteur utilisé et une fréquence variant entre 430 et 8500 Mhz. Comme nous l'avons vu précédemment, la période des pulsations, Δt , est fonction des objets à observer et peut passer de 10 μs à 4 ms. La période entre chaque pulsation est choisie de façon à maximiser la puissance moyenne de transmission. L'émission du signal se fait par l'intermédiaire d'une antenne dont la structure peut différer d'un site à l'autre.

Dans le cas de l'antenne d'Arecibo, cette antenne consiste en un miroir sphérique fixe d'un diamètre de 300 mètres au-dessus duquel se trouvent l'émetteur et le récepteur. L'émission du signal dans la direction de l'objet observé se fait par déplacement de l'émetteur au dessus du miroir de façon à tirer profit de sa symétrie sphérique. Plus l'émetteur s'écarte de sa position zénithale, plus il y a perte de puissance du signal. On s'efforcera donc, bien plus qu'ailleurs, de pointer des objets au méridien du lieu, c'est ce que l'on qualifie de "fenêtres" de pointage. Ce système est très particulier car lié à l'emplacement de l'antenne dans une cuvette naturelle de l'île de Puerto Rico.

Plus généralement, l'antenne est montée sur une monture alt-azimutale, comme c'est le cas pour une majorité des antennes constituant le Deep Space Network. Le pointage et le suivi des objets sont opérés par des systèmes hydrauliques puissants permettant un mouvement angulaire rapide de l'ensemble du système.

Le basculement entre le système d'émission et de réception du signal s'opère par une rotation du miroir secondaire, qui réoriente le faisceau soit du transmetteur au miroir primaire (émission) soit

du miroir primaire au récepteur (réception). Les systèmes se trouvent ainsi montés au niveau du foyer du miroir primaire. Certains nouveaux systèmes, dits Grégoriens (Magnani, 1993 et figure 2.2) ajoutent à ce système de miroirs primaires et secondaires, des miroirs tertiaires afin de minimiser la perte de flux lors du transfert du signal du miroir secondaire au récepteur et donc d'information lors de la réception.

Le signal retour après avoir été capté, est amplifié, puis filtré et comparé aux fréquences originales. De ces comparaisons est issue l'estimation du décalage de la fréquence initiale par effet Doppler, et du chronométrage entre l'instant d'émission du signal et sa réception, on en déduit la distance observée entre la planète et la Terre. Le chronométrage est assuré à une précision comprise entre 1 ms (pour les observations les plus anciennes) et $0.05 \mu s$ (pour les observations actuelles, Yeomans, 1992) par comptage des pulsations issues de l'horloge atomique du site et comparaison régulière avec les étalons de fréquences officiels (l'U.S. Frequency Standard, par exemple).

La procédure d'observation est donc la suivante:

- émission d'un faisceau pulsé vers la planète pendant une durée approximativement égale au temps aller-retour du signal
- basculement du système d'émission vers le système de réception. Ce basculement prend environ 20 à 25 secondes
- mise en route de l'enregistrement du signal retour et enregistrement de l'écho pendant une durée équivalente à celle de l'émission.

Chaque période de réception commence à la fin d'une période d'émission après un intervalle suffisamment long pour éliminer toute possibilité d'échos parasites.

L'amélioration des techniques d'observation radar au cours de ces trente dernières années s'est essentiellement axée sur l'augmentation de la puissance d'émission rendant ainsi possible, d'une part une détection plus fiable (moins bruitée) et plus pointue du signal retour, du fait de la puissance accrue du signal émis (*cf* équation du radar 2.5), et d'autre part d'atteindre des objets plus éloignés.

2.2 Algorithme de réduction

Le principe de l'algorithme de réduction est donc simple. A partir de l'intervalle de temps, τ , nécessaire au signal pour atteindre la planète et en revenir, on déduit la distance entre l'observateur et la planète. L'utilisation de cette donnée dans les ajustements d'orbite requiert une donnée différentielle. La quantité issue de ce processus de réduction sera la différence, $\Delta\tau$, entre la distance observée Terre-planète et la distance prédite. Une première estimation va donc se faire par le biais des éphémérides de position des corps mis en jeu. Cependant, l'antenne et la cible ne se trouvent plus dans le vide, comme cela a été supposé précédemment. Le signal doit traverser des milieux dissipatifs comme l'atmosphère terrestre et celle de la planète. Lors de son parcours, il subit aussi des déflexions de type gravitationnel et électronique lors de passages proches du Soleil. A cela s'ajoute la topographie de surface de la planète sur laquelle va s'effectuer l'écho ainsi que toutes les variations possibles de la localisation de l'observateur (effet de marées, dérives des continents etc.); les amplitudes de ces variations sur la localisation de l'antenne restant, d'ailleurs, du deuxième ordre par rapport aux considérations précédentes. A chaque trajet du signal, il va falloir induire ces corrections sur la longueur du parcours effectué

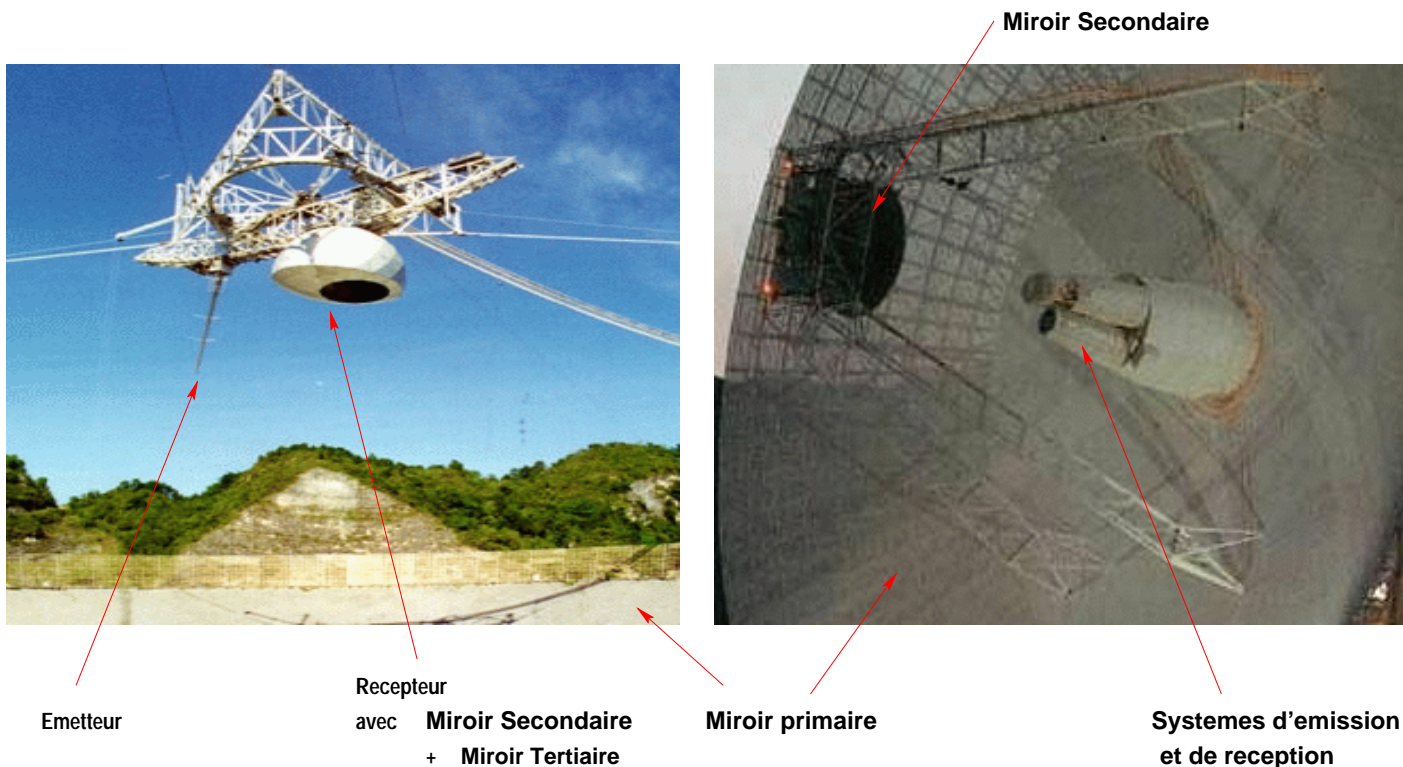


FIG. 2.2: Exemples de 2 systèmes de réception: à gauche le système MG (mini-Gregorian) de l'antenne d'Arecibo (Magnani, 1993) et à droite le système d'émission - réception de Goldstone-DSS14

par le signal. On décompose ainsi l'observation en deux solutions: la solution "aller", c'est-à-dire la partie émetteur / surface de la planète et la solution "retour", c'est-à-dire la partie surface de la planète / récepteur du trajet.

L'époque de référence de la mesure peut varier d'un site à l'autre. Ainsi, les données américaines sont données à partir de la date de réception du signal alors que les intervalles de temps fournis par les antennes russes sont comptés à partir de l'instant d'émission. Cette inversion est sans conséquence sur l'algorithme en lui-même qu'il faudra prendre dans le sens émission/planète/réception ou dans le sens opposé réception/planète/émission. Nous allons nous placer dans cette dernière configuration, comme le schématise la figure 2.3. Dans la suite, les notations utilisées seront celles de la figure 2.3.

2.2.1 Processus général

Nous allons donc supposer que nous ne connaissons que l'instant de réception du signal et nous allons calculer à partir des éphémérides un temps aller-retour théorique que nous comparerons à l'intervalle de temps observé.

Estimation de l'instant de l'impact, T_c et de la distance récepteur / point d'impact sur la surface de la planète

Nous allons mettre en place un processus itératif. Pour initialiser ce processus, on suppose que l'instant de l'impact, T_c est égal à l'instant de la réception, T_r , et que le point de contact du signal avec la surface de la planète est l'intersection de cette surface avec la direction barycentre

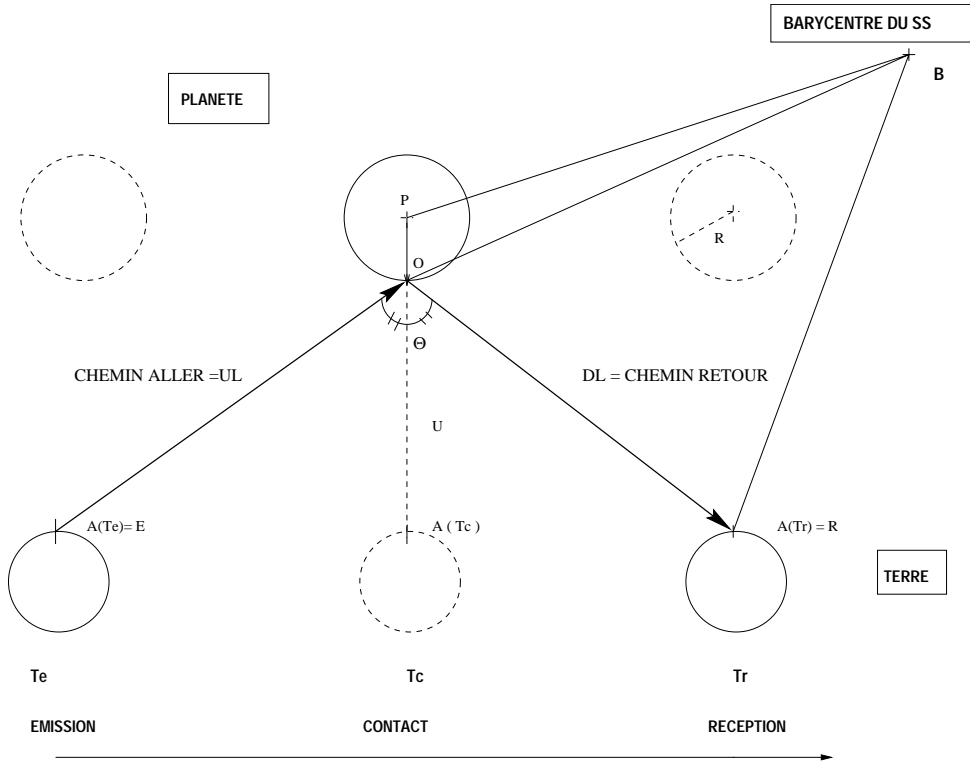


FIG. 2.3: Représentation schématique du trajet du signal

de la planète - récepteur. Dans la suite, \mathbf{BR} représente le vecteur barycentre du système solaire - récepteur, \mathbf{BP} , le vecteur barycentre du système solaire - centre de masse de la planète, \mathbf{RO} , le vecteur récepteur - surface de la planète, \mathbf{BE} correspondant au vecteur barycentrique de l'émetteur.

- Initialisation de l'itération

La première estimation, τ_D^0 du temps de parcours s'écrit:

$$\tau_D^0 = \frac{1}{c} [\|\mathbf{BP}(\mathbf{T}_r) - \mathbf{BR}(\mathbf{T}_r)\| - R] \quad (2.9)$$

On en déduit une première estimation, t_c^0 , de l'instant d'impact du signal à la surface de la planète.

$$t_c^0 = T_r - \tau_D^0 \quad (2.10)$$

- (k+1)ième itération

Se met alors en place une boucle itérative sur la distance récepteur / point d'impact à partir de la première estimation de la distance planète / récepteur, que nous écrirons, à l'étape $(k + 1)$:

$$\tau_D^{k+1} = \frac{1}{c} \|\mathbf{RO}(t_c^k)\| + \Delta\tau_{REL} + \Delta\tau_{TROP} + \Delta\tau_{Sol} \quad (2.11)$$

où $\mathbf{RO}(t_c^k)$ représente le vecteur récepteur / point d'impact à l'instant t_c^k , ce qui s'écrit.

$$\mathbf{RO}(t_c^k) = \mathbf{BP}(t_c^k) + \mathbf{PO}(t_c^k) - \mathbf{BR}(T_r) \quad (2.12)$$

$\Delta\tau_{REL}$, $\Delta\tau_{TROP}$ et $\Delta\tau_{Sol}$ sont respectivement les corrections relativiste, troposphérique et solaire que nous présenterons dans la suite.

– Estimation du point d'impact

La position du point d'impact, O , à la surface de la planète par rapport à son barycentre, s'estime en émettant l'hypothèse que la direction PA_{T_c} , à savoir entre le barycentre de la planète et l'antenne à l'instant du contact, est la bissectrice de l'angle, θ , séparant les chemins aller et retour du signal. De ce fait, O est le point d'intersection de la surface de la planète avec cette direction, que l'on peut estimer à partir des éphémérides de la planète et de la Terre à l'instant t_c^k . Le vecteur $\mathbf{PO}(t_c^k)$ s'écrit alors:

$$\mathbf{PO}(t_c^k) = R \frac{\mathbf{PA}(t_c^k)}{\|\mathbf{PA}(t_c^k)\|} \quad (2.13)$$

On en déduit ainsi la $(k+1)$ ième estimation du temps de parcours, t_c^{k+1} :

$$t_c^{k+1} = T_r - \tau_D^{k+1} \quad (2.14)$$

On arrête les itérations quand $(\tau_D^{k+1} - \tau_D^k) \leq \epsilon$ ou ϵ est la résolution limite, Δr , du radar (en général $\epsilon = 5.10^{-8}$ s).

On obtient ainsi $T_c = t_c^{k+1}$

Itération sur le chemin “aller” et estimation de l'instant d'émission

Connaissant maintenant l'instant de l'impact, T_c , on connaît aussi la position de la planète à cet instant.

$$\mathbf{BO}(T_c) = \mathbf{BP}(T_c) + \mathbf{PO}(T_c) \quad (2.15)$$

Cette quantité n'est donc plus à déterminer. L'inconnue est alors l'instant de l'émission du signal, donc la position de l'antenne, \mathbf{OE} , à cet instant. On va supposer comme précédemment pour initialiser le processus que $T_c = T_e$. D'où:

$$\Delta\tau_U^0 = \frac{1}{c} [\|\mathbf{BE}(T_c) - \mathbf{BO}(T_c)\|] \quad (2.16)$$

Ainsi $t_E^1 = T_c - \Delta\tau_U^0$.

La boucle étant ainsi initialisée, on a ensuite:

$$\Delta\tau_U^{k+1} = \frac{1}{c} [\|\mathbf{BE}(t_E^k) - \mathbf{BO}(T_c)\|] + \Delta\tau_{REL} + \Delta\tau_{TROP} + \Delta\tau_{Sol} \quad (2.17)$$

d'où:

$$t_E^{k+1} = T_c - \Delta\tau_U^{k+1} \quad (2.18)$$

On stoppe le processus quand $(\Delta\tau_U^{k+1} - \Delta\tau_U^k) \leq \epsilon$. On obtient ainsi $T_E = t_E^{k+1}$

Effets ou Corrections appliqués ou estimés	Ordres de grandeur MAXIMUM sur un trajet aller
Correction Relativiste	30 km
Topographie de surface	Vénus: 3 km. / Mercure: 1.5 km
Correction Troposphérique	60 m
Ionosphérique (Estimation)	30 cm
Correction Couronne solaire	3 m à 8.5 Ghz / 20 km à 450 Mhz
Effets des marées terrestres (Estimation)	20 cm (Borderie, 1981)
Influence de l'atmosphère vénusienne (Estimation)	< 1 cm

FIG. 2.4: *Ordre de grandeurs des correction appliquées ou estimées*

2.2.2 Topographie de surface

Dans l'algorithme précédent, on a vu que la position du point d'impact par rapport au centre de masse de la planète avait une grande importance. En première approximation, on peut estimer que ce point d'impact se trouve sur le géoïde de la planète, c'est-à-dire à une distance constante du centre de masse, distance égale au rayon de la planète. Cependant, dans le cas d'objets comme Mars ou Vénus, la topographie de surface peut aller jusqu'à atteindre des variations de l'ordre de la dizaine de kilomètres par rapport au géoïde de référence. Ainsi, ne pas introduire cette donnée dans notre calcul peut induire des incertitudes de l'ordre de plusieurs kilomètres sur la distance Terre/Vénus ou Terre/Mercure. Nous citerons en particulier le cas de Vénus car sa topographie est plus marquée que celle de Mercure de près d'un facteur 2. Il a donc paru intéressant d'inclure cette correction dans l'algorithme, en particulier dans l'utilisation des données de Vénus. Pour cela, nous avons calculé l'altitude du point sub-terrestre à la surface de la planète, à l'aide de décompositions en harmoniques sphériques du profil topographique. Le point sub-terrestre représente dans les formulaires classiques d'éphémérides physiques, " le point de la surface d'un corps céleste qui se trouve à l'intersection de la demi-droite joignant le centre de l'astre au centre de la Terre" (Introduction aux éphémérides astronomiques, 1998). Autrement dit, le point sub-terrestre à l'instant de l'impact correspond au point d'impact du signal à cet instant tel que nous l'avons décrit plus haut. A l'aide du logiciel Eproc (Berthier, 1998) de calculs d'éphémérides physiques et de positions des corps du système solaire, il a été possible de calculer les longitudes et latitudes planétocentriques des points sub-terrestres au moment des impacts. Comme représentation topographique des surfaces, nous avons donc utilisé des modèles en décompositions polynomiales ou en harmoniques sphériques. Ce qui nous a permis, pour les longitudes et les latitudes des points sub-terrestres de calculer l'altitude du point par rapport au géoïde de la planète. Dans l'algorithme de réduction des données, on substituera la valeur du

rayon de la planète par celle du rayon augmentée de l'altitude du point sub-terrestre.

Pour Vénus, nous avons choisi d'utiliser le modèle de Rappaport et Plaut (1994). Ce modèle est une décomposition en harmoniques sphériques à l'ordre 360 de la topographie de Vénus, basée sur les données altimétriques de Venera, Pioneer et Magellan et de forme:

$$R(\phi, \lambda) = R \sum_{l=1}^{360} \sum_{m=0}^l P_{lm}(\sin \phi) [C_{lm}^t \cos m\lambda + S_{lm}^t \sin m\lambda] \quad (2.19)$$

où ϕ , λ sont la latitude et la longitude respectivement, R est le rayon équatorial, C_{lm}^t et S_{lm}^t sont les coefficients normalisés de l'harmonique et P_{lm} sont les fonctions de Legendre normalisées. L'incertitude du modèle sur l'ensemble de la surface est estimée à ± 80 mètres. Le détail des calculs des coefficients de l'harmonique ainsi que des fonctions de Legendre se trouve dans Rappaport et Plaut (1994).

Pour Mercure, seul un modèle basé sur les observations en cours de réduction, à savoir les mesures de distance Terre-Mercure réalisées entre 1967 et 1990, est disponible (Anderson et al, 1996). Ce modèle est un ajustement sur les mesures de distance et d'effet Doppler d'une décomposition en polynôme de Legendre au second degré de l'altitude en fonction des longitudes et des latitudes. Il s'écrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned} r = & R + c_{10}\sqrt{3} \sin \phi + (c_{11} \cos \lambda + s_{11} \sin \lambda)\sqrt{3} \cos \phi \\ & + c_{20} \frac{\sqrt{5}}{2} (3 \sin^2 \phi - 1) + (c_{21} \cos \lambda + s_{21} \sin \lambda)\sqrt{15} \sin \phi \cos \phi + \\ & (c_{22} \cos 2\lambda + s_{22} \sin 2\lambda) \frac{\sqrt{15}}{2} \cos^2 \phi \end{aligned} \quad (2.20)$$

où ϕ , λ sont la latitude et la longitude respectivement, R est le rayon équatorial, c et s sont les coefficients issus de l'ajustement. On a donc un modèle beaucoup plus simple que celui de Vénus car d'une part aucune mesure d'altimétrie directe n'a été effectuée sur Mercure et d'autre part, l'amplitude de la topographie de Vénus est bien plus importante que celle de Mercure.

2.2.3 La correction relativiste $\Delta\tau_{REL}$

Nous allons présenter dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants, les corrections $\Delta\tau_{REL}$, $\Delta\tau_{TROP}$ et $\Delta\tau_{Sol}$ intervenant dans l'algorithme précédent.

La correction relativiste correspond à l'estimation du temps lumière dans une métrique de Schwarzschild, autrement dit dans le cadre d'une métrique relativiste. Jusqu'à présent, nous nous sommes placés dans un cadre de mécanique newtonienne, et non pas dans le cadre de la relativité générale. Nous allons résumer ici les principales étapes permettant de compléter cette approximation par l'addition du terme $\Delta\tau_{REL}$ dans l'estimation des distances. Les détails de cette démonstration peuvent être trouvés dans Shapiro (1964) ou Murray (1981).

Soient (r, θ, ψ) les coordonnées polaires d'un photon lors de son trajet dans la couronne solaire relativement au Soleil. On peut alors définir une métrique sphériquement symétrique par rapport au Soleil avec l'expression suivante:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \exp(\lambda) dt^2 - [\exp(\iota) + \exp(\kappa)] dr^2 - \exp(\kappa) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) \quad (2.21)$$

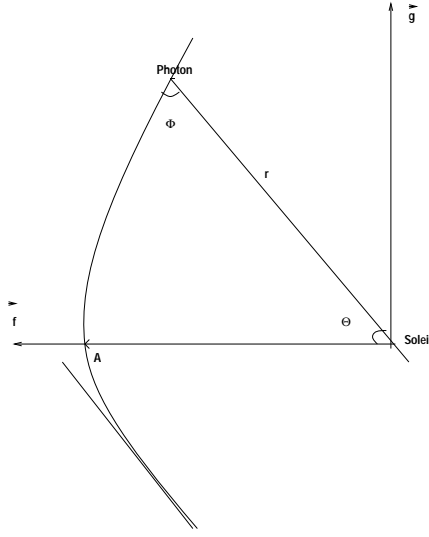


FIG. 2.5: Géométrie du problème

où $d\tau$ est un intervalle infinitésimal entre deux événements, t le temps coordonnée, c la vitesse de la lumière et ι , κ et λ des fonctions de r . Pour que cette métrique vérifie l'équation d'Einstein, il faut de plus qu'elle vérifie:

$$\exp(\lambda) = 1 - \frac{2\mu}{c^2 r} \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\right) \quad (2.22)$$

Il existe une infinité de métrique vérifiant 2.21 et 2.22. On appelle *métrique standard de Schwarzschild*, la métrique que l'on obtient en posant $\kappa = 0$. On a alors:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \exp(\lambda) dt^2 - [\exp(-\lambda)] dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) \quad (2.23)$$

avec $\exp(\lambda) = 1 - \frac{2\mu}{c^2 r}$. Soit \mathbf{r} le vecteur position du photon, on note $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$, la norme de \mathbf{r} . L'équation 2.23 devient:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \exp(\lambda) dt^2 - [\exp(-\lambda)] dr^2 - \exp(\iota) (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r})^2 - \exp(\kappa) dr^2 \quad (2.24)$$

Considérons maintenant un repère inertiel au voisinage du photon, caractérisé par (dt^*, ds^*) . Puisque ce repère est supposé inertiel, on a $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ par définition et la conservation des métriques s'écrit:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 (dt^*)^2 - (ds^*)^2 \quad (2.25)$$

On appelle *repère naturel* du photon, le repère dans lequel, si une particule a un vecteur vitesse nul dans le repère initial, le vecteur vitesse dans ce nouveau repère reste nul.

D'autre part, si on note \mathbf{f} , la direction du périhélie de la trajectoire du photon, c'est-à-dire la direction du point le plus proche du Soleil le long de la trajectoire du photon, \mathbf{g} , le vecteur tangent à la trajectoire, et $\mathbf{h} = \mathbf{f} \wedge \mathbf{g}$, et si l'on choisit la transformation qui à \mathbf{r} fait correspondre \mathbf{s} tel que:

$$\mathbf{s} = \exp\left(\frac{\kappa}{2}\right) \mathbf{r} \quad (2.26)$$

Alors la métrique de 2.21 devient une métrique de Schwarzschild:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \exp(\lambda) dt^2 - [\exp(-\lambda) - 1] (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s})^2 - d(\mathbf{s})^2 \quad (2.27)$$

avec $\exp(\lambda) = 1 - \frac{2\mu}{c^2\|\mathbf{s}\|}$

L'estimation de l'angle observé ψ mesuré dans le repère naturel, muni de la métrique de Schwarzschild définie plus haut, en un point de la géodésique nulle, d'angle polaire θ et de coordonnée radiale $\|\mathbf{s}\|$, s'écrit à partir de l'équation d'une géodésique dans le repère naturel muni d'une métrique de Schwarzschild et des propriétés liées à cette métrique:

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) [1 - \exp(\lambda)] \quad (2.28)$$

Ce qui devient en utilisant les propriétés de \mathbf{s} :

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = -1 + \frac{2\mu}{c^2\|\mathbf{s}\|} \quad (2.29)$$

Si on note p , la distance du périhélie, $\|\mathbf{s}\|$ étant la distance du point d'angle polaire θ , on peut faire l'approximation $\|\mathbf{s}\| \approx p \sec(\theta)$. On peut alors intégrer $\frac{d\Psi}{d\theta}$ et on obtient:

$$\Psi = \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{2\mu}{c^2 p} \sin \theta \quad (2.30)$$

Toujours dans le même repère naturel et les mêmes métriques, on montre que:

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \exp(\lambda) \cos \Psi \mathbf{u} + \exp\left(\frac{\lambda}{2}\right) \sin \Psi (\mathbf{h} \wedge \mathbf{u}) \quad (2.31)$$

Mais par construction, on a : $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{f} + \sin \theta \mathbf{g}$. Donc en utilisant le fait que $\|\mathbf{s}\|$ peut s'approximer par $p \sec(\theta)$ et en utilisant les propriétés des métriques de Schwarzschild, on aboutit à:

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{2\mu}{c^2 p} (\cos \theta \mathbf{g} + \sin \theta \mathbf{f}) + \frac{2\mu}{c^3} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (2.32)$$

En intégrant la dernière équation non plus le long d'un trajet rectiligne mais le long de la géodésique pour laquelle $cdt = p \sec^2 \theta d\theta$, on aboutit alors à l'équation du trajet du photon entre la source de coordonnées \mathbf{s}_1 et l'observateur de coordonnées \mathbf{s} :

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s} = c(t - t_1) \mathbf{g} + \frac{\mu}{c^2} [\mathbf{u}_1 - \mathbf{u} - 2(\sec \theta - \sec \theta_1) \mathbf{f} - 2 \ln \left[\frac{\sec \theta + \tan \theta_1}{\sec \theta + \tan \theta_1} \right] \mathbf{g}] \quad (2.33)$$

avec $\mathbf{u} = \cos \theta_1 \mathbf{f} + \sin \theta_1 \mathbf{g}$.

Ce qui s'exprime sous forme vectorielle et en revenant au système initial:

$$c\Delta\tau_{REL} = c(t - t_1) = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\| + \frac{2\mu}{c^2} \ln \left[\frac{\|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{r}_1\| + \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|}{\|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{r}_1\| - \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} \right] \quad (2.34)$$

2.2.4 La correction solaire $\Delta\tau_{SOL}$

Cette correction est rendue nécessaire lors d'un passage proche ou une traversée du signal radar de la couronne solaire. En effet lors de ces rapprochements, l'onde électromagnétique émise par le radar est perturbée par la nature électronique de la couronne solaire et ses variations de densité électronique entre 5 et 100 rayons solaires. Les perturbations subies par le signal sont de nature diverse et peuvent se résumer en trois points:

1. Déviation de la trajectoire du signal vers une direction opposée

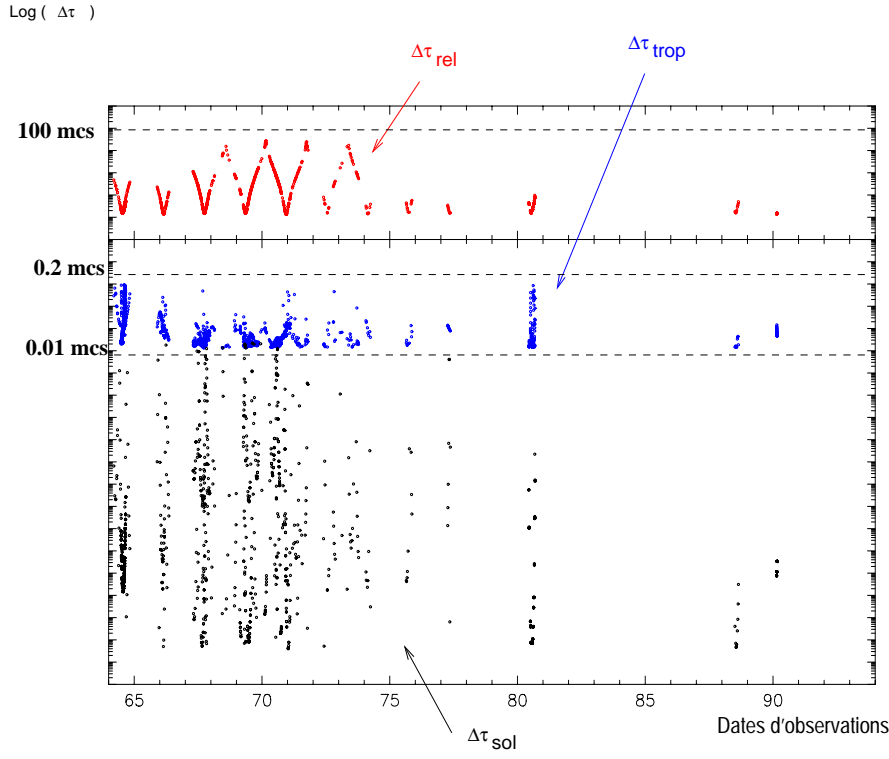


FIG. 2.6: Corrections $\Delta\tau_{REL}$, $\Delta\tau_{TROP}$ et $\Delta\tau_{SOL}$ appliquées aux observations de Vénus

2. Modifications des vitesses de propagation de l'onde: augmentation de la vitesse de phase et diminution de la vitesse de groupe.
3. Dispersion des ondes par les turbulences et les vents solaires

Pour présenter cette partie, il nous faut rappeler quelques définitions liées à la nature du signal émis. Le signal est constitué de paquets d'électrons se propageant le long d'une direction Z . Chaque électron se propage à une vitesse V_p et à une position donnée z le long de la direction de propagation, on a :

$$e = e_m \sin\left[w\left(t - \frac{z}{V_p}\right)\right] \quad (2.35)$$

Cette équation définit une onde sinusoïdale non-atténuée, dont les fronts d'onde seront des surfaces de phase uniforme à un instant donné. L'uniformité est assurée par l'hypothèse que l'amplitude e_m est constante le long du front d'onde. En général, on appelle *vitesse de phase* la quantité, V_p et on note:

$$e = e_m \cos(wt - kz) \quad (2.36)$$

où $k = \frac{w}{V_p} = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ étant la longueur d'onde du signal. k est appelé coefficient de l'onde. Considérons maintenant l'ensemble des ondes émises sous forme de paquets d'onde. Chaque paquet d'onde est composé d'un certain nombre d'électrons se déplaçant chacun à une vitesse V_p et selon une onde particulière. Cet ensemble d'ondes constitue une enveloppe, dont on peut estimer la direction et la vitesse propre de propagation, appelée *vitesse de groupe* V_g . Le paquet

d'onde $\Psi(t, z)$ va s'écrire sur l'intervalle $[k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}]$:

$$\Psi(t, z) = \exp(j[w_0 t - k_0 z]) \frac{\sin(\frac{\Delta k}{2}(z - V_g t))}{\frac{\Delta k}{2}(z - V_g t)} \quad (2.37)$$

avec $V_g = [\frac{dw}{dk}]_{k=k_0}$

Pour les données de distance, on va donc considérer la vitesse globale du signal, donc la vitesse de groupe. D'autre part, la vitesse de propagation du signal est liée à l'indice de réfraction, n , du milieu par la relation:

$$n = \frac{c}{V_p} = \frac{V_g}{c} \quad (2.38)$$

Cependant, si le milieu de propagation est un plasma de fréquence ν_p et si ν est la fréquence du signal, on peut écrire l'indice de réfraction du plasma en fonction de ces deux quantités:

$$n = [1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}]^{\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

Ce qui implique que l'on a la relation:

$$V_g = c[1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}]^{\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

Si on note e et m , la charge et la masse d'un électron alors, on exprime ν_p avec:

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi e^2 N_e}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

où N_e est la densité électronique du milieu. On intègre alors le temps de parcours le long de la trajectoire de l'onde et l'on estime alors le temps nécessaire au paquet d'électrons pour se propager de long d'un trajet de longueur L :

$$T = \int_0^L \frac{dL}{V_g} = c \int_0^L [1 - \frac{\nu_p^2}{\nu^2}]^{\frac{1}{2}} dl \quad (2.42)$$

Supposons alors que la trajectoire de l'onde à travers la couronne solaire soit rectiligne. Cette hypothèse est justifiée par le fait que l'effet de déviation angulaire par la traversée d'un plasma est faible par rapport à la modification de la vitesse de propagation (Borderies, 1981). On pose alors $T = T_0 + \Delta T$ avec $T_0 = \frac{L}{c}$.

En développant l'équation précédente et en introduisant la densité électronique, N_e , on obtient l'expression finale:

$$\Delta T = \frac{e^2}{2\pi c \nu^2 m} \int_0^L N_e dl \quad (2.43)$$

Reste donc à choisir le modèle de densité électronique de la couronne solaire. Trois modèles ont été envisagés (Muhleman, 1977, Muhleman, 1981 et Tyler, 1977). Les deux premiers modèles (Muhleman, 1977 et Muhleman, 1981) sont des modèles relativement simples, ajustés sur les données de *tracking* des sondes Mariner-6 et Mariner-7 pour le modèle de 1977 et de la sonde Viking lors de la conjonction solaire de Mars le 25 novembre 1976 pour le modèle de 1981. Notre

choix s'est finalement porté sur le modèle de (Tyler, 1977), lui aussi ajusté sur les données du passage proche de Viking en 1976 car il est apparu comme étant le plus complet des trois. En effet, ce dernier tient compte d'une décroissance de la densité électronique en allant de l'équateur solaire aux pôles, alors que les deux autres modèles font une hypothèse de symétrie sphérique sur cette densité. Le modèle finalement adopté est de la forme:

$$N_e = (\cos^2 \phi + \frac{1}{64} \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{2.99}{\rho^{16}} + \frac{1.55}{\rho^6} \right) 10^{14} + \frac{3.44}{\rho^2} 10^{11} \right] \quad (2.44)$$

où ρ est la distance au centre du Soleil en rayons solaires et ϕ est la latitude solaire. N_e est alors donné en électron par m^3 .

Pour revenir au calcul de $\Delta\tau_{SOL}$, il faut maintenant intégrer l'équation 2.43 sur le trajet aller et retour du signal. Comme nous l'avons dit, la densité électronique n'est pas homogène. Il paraît donc intéressant de diviser l'intégrale en trois parties. La première et la dernière partie consistent en l'intégration du trajet dans des régions relativement peu denses alors que la partie médiane permet d'isoler les parties plus denses.

Les notations utilisées dans la suite sont les suivantes: **EP** est le vecteur entre le centre de masse de la planète au moment de l'impact et l'antenne à l'instant de l'émission. De même **RP** est le vecteur entre le centre de masse de la planète au moment de l'impact et l'antenne à l'instant de la réception du signal. **SE** et **SR** représentent les positions héliocentriques de l'antenne à l'instant de l'émission et de la réception, respectivement.

On aura ainsi pour le trajet aller, après avoir effectué un changement de variables d'intégration où $\gamma = \frac{1}{L}$, une estimation de la correction $\Delta\tau_{SOL}^U$ de la forme:

$$\Delta\tau_{SOL}^U = K_{st} D_{ul} \left[\int_0^{\gamma_1 - \delta\gamma} N_e d\gamma + \int_{\gamma_1 - \delta\gamma}^{\gamma_1 + \delta\gamma} N_e d\gamma + \int_{\gamma_1 + \delta\gamma}^1 N_e d\gamma \right] \quad (2.45)$$

avec $D_{ul} = \|\mathbf{EP}\|$

$$\gamma_1 = -\frac{\mathbf{SE} \cdot \mathbf{EP}}{D_{ul}} \quad \text{et} \quad \delta\gamma = \frac{10R_{\odot}}{D_{dl} + D_{ul}} \quad (2.46)$$

où D_{dl} est l'équivalent de D_{ul} pour le trajet retour, à savoir: $D_{dl} = \|\mathbf{RP}\|$. $\delta\gamma$ permet de définir une zone du profil à partir duquel on estime que la densité est plus importante, ce qui va impliquer un algorithme d'intégration plus poussé. Pour le trajet retour du signal, on fait donc la même opération en substituant les distances émetteur / planète par les distances planète / récepteur et γ_1 par :

$$\gamma_2 = -\frac{\mathbf{SR} \cdot \mathbf{RP}}{D_{dl}} \quad (2.47)$$

Comme il a été conseillé dans Borderies (1981), nous effectuons une intégration en deux temps: la première et la dernière intégrales étant résolues par un algorithme d'intégration par quadrature avec un nombre limité de points (16 au total), la médiane requérant une intégration plus serrée (32 points conseillés par Borderies). A chaque point de la quadrature, N_e sera estimé par l'équation 2.44. Le calcul des latitudes héliocentriques, ϕ , des points de la trajectoire se fait par le biais des distances héliocentriques exprimées en rayons solaires (points de quadrature ramenés en unité de rayon solaire) et des coordonnées $(\alpha_{\odot}, \delta_{\odot})$ du pôle nord solaire, fournies par Davies et al (1995) pour l'équinoxe et l'équateur J2000. Si on appelle P_s ce pôle nord et si on conserve

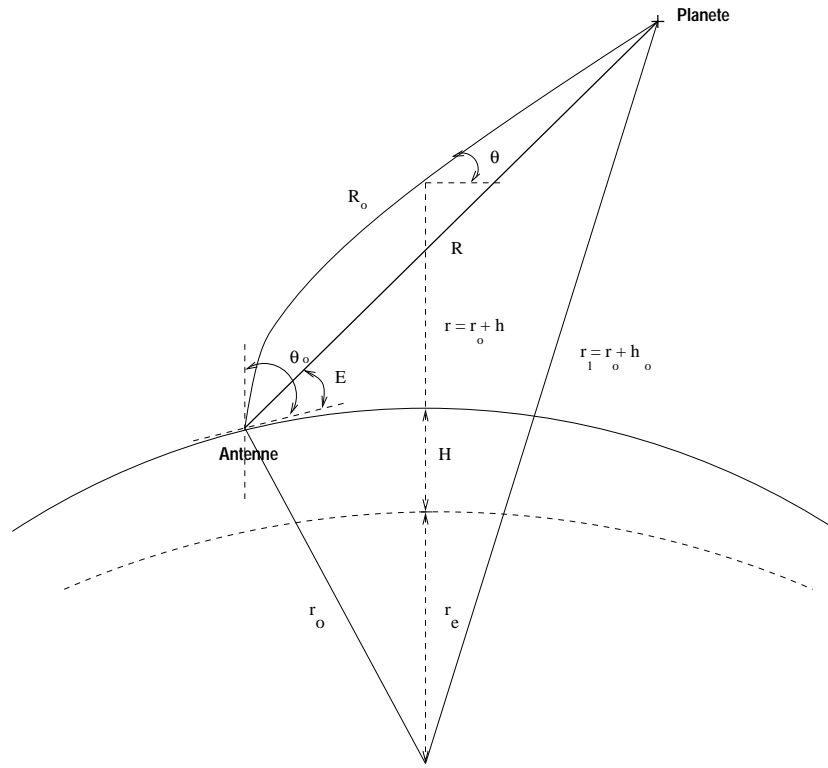


FIG. 2.7: *Parcours du signal entre l'antenne et la planète - Abshire et Gardner (1985)*

S , pour désigner le centre de masse du Soleil, alors on établit que:

$$\sin \phi = \frac{\mathbf{OAOP}_s}{\|\mathbf{OA}\|} \quad (2.48)$$

où A désigne le point de la quadrature, et plus précisément le point de la droite reliant l'antenne et le centre de masse de la planète, correspondant à la distance γ . Les coordonnées (X, Y, Z) du pôle solaire par rapport au centre de masse solaire seront représentées par les coordonnées du vecteur $\mathbf{OP}_s = (\cos \delta_\odot \cos \alpha_\odot, \cos \delta_\odot \sin \alpha_\odot, \sin \delta_\odot)$ où $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ auront les valeurs:

$$\begin{cases} \alpha_\odot = 286.13^\circ \\ \delta_\odot = 63.87^\circ \end{cases} \quad (2.49)$$

Sur l'ensemble des observations de Mercure et Vénus que nous avons traité, l'amplitude moyenne atteinte par cette correction est de 10^{-9} seconde de temps par trajet, ce qui induit une correction totale sur un trajet aller retour d'environ 0.6 mètre. Cela est essentiellement dû au fait que les observations effectuées sont assez éloignées des conjonctions Mercure-Soleil et Vénus-Soleil.

On retrouvera un exemple des différentes corrections appliquées sur les distances radar observées Vénus/Terre sur la figure 2.6.

2.2.5 Les corrections troposphérique $\Delta\tau_{TROP}$ et ionosphérique

Toute observation astrométrique au sol implique, lors de sa réduction, une correction tenant compte de la présence de l'atmosphère terrestre. Les données radar n'y font pas exception.

La caractéristique particulière à la réfraction des ondes radar et radio par l'atmosphère est

VENUS						MERCURE						
Antenne	Période	Nbr d'obs.	Résidus (km)		Résidus (km)		Période	Nbr d'obs.	Résidus (km)		Résidus (km)	
			<O-C>	σ	<O-C>	σ			<O-C>	σ	<O-C>	σ
Arecibo	1967-1970	227	3 km	10 km	-1 km	7 km	1967-1971	85	4 km	30 km	4 km	18 km
							1978-1982	157	-1 km	4 km	0 km	3 km
Goldstone												
DSS 13	1964-1970	294	5 km	8 km	-3 km	6 km						
DSS 14	1971-1990	213	0 km	5 km	0 km	4 km	1970-1994	179	0 km	6 km	0 km	4 km
+ observations bi-modales DSS13-14												
Haystack	1966-1971	217	-0 km	12 km	1 km	8 km	1966-1971	217	0 km	26 km	0.5 km	16 km
Millstone	1964-1967	101	14 km	8 km	-3 km	6 km						
Total US	1964-1990	1059	-1 km	10 km	0 km	8 km	1964-1994	640	2 km	20 km	0 km	8 km
Eupatoria												
Site 1	1975-1978	510	2 km	6 km	0 km	2 km						
Site 2	1980-1995	107	1.5 km	4 km	-0 km	1 km	1980-1992	75	-1 km	7km		

FIG. 2.8: *Résidus des observations radar réduites par l'algorithme précédent; résidus par comparaison entre les distances observées et celles déduites des solutions analytiques de Mercure et Vénus de VSOP87*

qu'elle fait intervenir en plus du terme classique de la réfraction par les basses couches de l'atmosphère, c'est-à-dire la troposphère, un terme issu de la réfraction des couches ionisées de l'atmosphère ou ionosphère. L'ionosphère englobe les régions entre 80 et 700 km. A ces altitudes, les molécules présentes dans la troposphère sont en parties ionisées par les émissions solaires et c'est cette concentration de particules chargées qui va affecter le signal émis de façon plus ou moins importante. Nous allons commencer par traiter le cas de la réfraction par les couches basses de l'atmosphère puis nous montrerons que la réfraction ionosphérique est, aux longueurs d'ondes qui nous intéressent, négligeable.

La correction troposphérique que nous allons appliquer s'appuie sur un formalisme très proche de celui utilisé dans la première partie de ce travail concernant les réductions astrométriques d'images CCD ou photographiques.

Ce formulaire est classique et est basé sur l'hypothèse d'une structure d'atmosphère sous forme d'empilement de coquilles à symétrie sphérique d'épaisseur infinitésimale. La distance apparente de la cible R_0 (longueur du chemin optique) est :

$$R_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{n}{\sin \theta} dr \quad (2.50)$$

avec n , l'indice du milieu de propagation en un point du parcours, θ , l'angle à la normale à la couche atmosphérique. Comme il a été exposé dans la première partie de ce travail, la correction

de réfraction atmosphérique ΔR , entre la distance apparente à l'objet et la distance réelle, R , peut être intégrée le long du trajet du signal et se mettre sous une forme de mapping telle que:

$$c\Delta\tau_{TROP} = \Delta R = \frac{1}{f(\Psi, H, T_0)} \cdot \frac{A + B}{\frac{f_s(\lambda)B}{\sin(E) + \frac{A+B}{\sin(E) + 0.01}}} \quad (2.51)$$

avec: E , et Ψ respectivement, la hauteur, la latitude de l'objet. H est l'altitude de l'antenne (en km) et T_0 est la température en kelvin au niveau de l'antenne. f_s et f_v sont les facteurs dissipatifs du milieu en fonction de la longueur d'onde λ .

$$\begin{aligned} A &= K_1^A \cdot f_s(\lambda) \cdot P_{a_0} + K_2^A (3.7f_v(\lambda) - 2.7f_s(\lambda)) \cdot P_{v_0} \cdot (1 + K_3^A (T_0 - 283.15)) \\ B &= K_1^B \cdot P_{a_0} T_0 \kappa + K_2^B \frac{P_{a_0}^2}{T_0} \cdot \frac{2}{3 - \frac{1}{\kappa}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

où

$$\begin{cases} \kappa = 11.63 - K_1^\kappa \cos 2\Psi - K_2^\kappa T_0 + K_3^\kappa P_{a_0} \\ f(\Psi, H, T_0) = 1 - K_1^f \cos 2\Psi - K_2^f H - K_3^f (T_0 - 283.15) \end{cases} \quad (2.53)$$

P_{a_0} et P_{v_0} représentent respectivement les pressions atmosphériques et de vapeur d'eau au niveau de l'antenne en mb. Ce formulaire est appelé *modèle de Herring-Owens*. Il diffère du modèle de Yan-Marini utilisé précédemment essentiellement par le fait qu'il est adapté aux longueurs d'onde radar et radio. En effet, les différentes couches atmosphériques ne sont pas uniformes dans leurs compositions chimiques et les concentrations en molécules diffèrent selon l'altitude. De plus, chaque composé a un impact différent sur la dissipation du signal selon sa longueur d'onde. Les profils atmosphériques diffèrent donc selon l'altitude et la concentration des composantes (Owens, 1967). Le modèle d'indice atmosphérique que nous allons choisir est un modèle simplifié permettant d'estimer le facteur dissipatif, f_s , d'un air sec contenant 0.03 % de CO_2 , et, f_v , celui de la vapeur d'eau. Cette décomposition en milieu sec à 0.03 % de CO_2 et en milieu humide permet de tenir compte des variations de comportements des différents éléments majoritaires constituant la haute atmosphère en fonction de la longueur d'onde du signal. On aura ainsi:

$$\begin{cases} f_s(\lambda) = \frac{1}{K_1^{f_s}} \left[K_2^{f_s} + \frac{K_3^{f_s} (130 + \frac{1}{\lambda^2})}{(130 + \frac{1}{\lambda^2})^2} + \frac{K_4^{f_s} (38.9 + \frac{1}{\lambda^2})}{(38.9 + \frac{1}{\lambda^2})^2} \right] \\ f_v(\lambda) = \frac{1}{K_1^{f_v}} \left[K_2^{f_v} + \frac{K_3^{f_v}}{\lambda^2} + \frac{K_4^{f_v}}{\lambda^4} + \frac{K_5^{f_v}}{\lambda^6} \right] \end{cases} \quad (2.54)$$

On retrouve les valeurs numériques des constantes K_*^x dans l'annexe D.

Ce modèle bien que basé sur l'hypothèse d'une atmosphère à symétrie sphérique, permet une bonne estimation du retard du trajet induit par sa traversée de l'atmosphère. Les modèles plus développés comme ceux de Yatsenko (1995) ou de Abshire-Gardner (1985) induisent l'utilisation de mesures in-situ des conditions atmosphériques des couches de la haute atmosphère par le

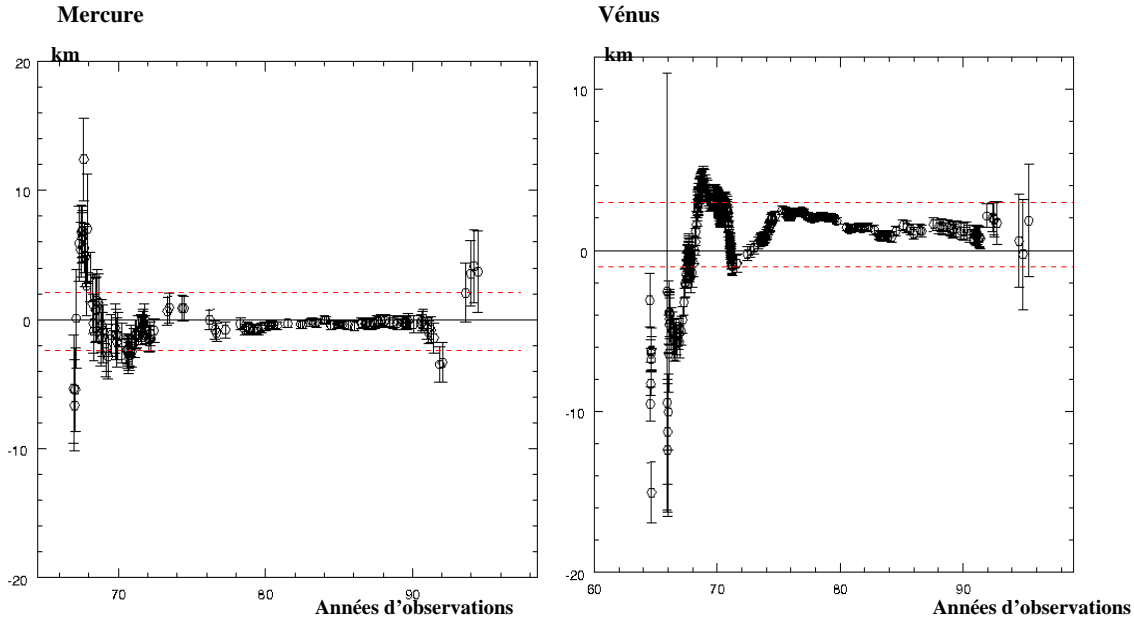


FIG. 2.9: *Résidus des observations radar de Mercure et Vénus réduites selon l'algorithme décrit dans le texte. Sont tracés ici les points moyens par jour d'observations. Les limites (droites en pointillées) indiquent les différences maximales entre VSOP87 et DE200 sur les estimations des distances géocentriques (rayons vecteurs) de Mercure et Vénus (période de calcul: 1891-2000)*

biais d'envoi de ballons-sondes ou celui d'atlas météorologiques locaux et globaux. Ces modèles sont donc très lourds à mettre en place pour un gain de précision relativement peu important.

Comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, la réfraction troposphérique n'est pas la seule à affecter les signaux radar et radio. Les couches ionosphériques affectent aussi le faisceau. La géométrie de la correction reste la même. L'indice de réfraction pour les hautes fréquences va s'écrire:

$$n^2 - 1 \approx \frac{\gamma_1}{\lambda^2} \pm \frac{\gamma_2}{\lambda^3} + \frac{\gamma_3}{\lambda^4} \quad (2.55)$$

où γ_i sont des fonctions de la densité électronique de l'atmosphère ionisée, N_e et du champ magnétique ambiant B . Pour des fréquences supérieures à 1 MHz, le dernier terme en λ^4 peut être négligé et on a fait l'approximation $\gamma_1 \approx 80.5N_e$ et $\gamma_2 \approx 2.29 \times 10^8 N_e B \cos \theta$, où θ est l'angle entre la direction du champ magnétique et la direction normale du front d'onde. Pour un champ de 0.5 Gauss et $\theta = 0$, on aura:

$$n^2 = 1 - 80.5 \frac{N_e}{\lambda^2} \pm 1.14 \times 10^8 \frac{N_e}{\lambda^3} + \Theta \frac{1}{\lambda^4} \quad (2.56)$$

Pour une activité solaire maximale, on a $(N_e)_{max} = 10^{12} m^{-3}$. Ce qui implique que pour une fréquence d'environ 5000 MHz on aboutit à un indice $(1 - n)$ de l'ordre de 1.6×10^{-6} . A titre de comparaison, dans des conditions normales de température et de pression, la contribution troposphérique est de l'ordre de 2.8×10^{-3} . Il y a donc un facteur supérieur à 1000 entre les deux types de réfraction pour une longueur d'onde correspondant à la longueur d'onde moyenne des observations, ce qui rend le terme de la réfraction ionosphérique négligeable par rapport au terme troposphérique pour les fréquences radar.

2.3 Résultats de la réduction

Dans les graphiques de la figure 2.9, sont présentés les résidus des observations de distances mutuelles Terre-Mercure et Terre-Vénus calculés par comparaison entre les positions observées déduites de l'algorithme décrit précédemment et les distances calculées à partir de VSOP87.

Les résidus issus des observations de Mercure reflètent clairement l'évolution technologique des récepteurs et émetteurs radio de ces vingt dernières années. En effet, entre des séries d'observations réalisées avant 1970 à Haystack ou à Arecibo et celles postérieures à cette date, la précision à 2σ diminue d'un facteur 3 par rapport à la série de DSS14 et d'un facteur 8 entre les séries anciennes et récentes d'Arecibo. Il en découle ainsi une distribution à base très large des résidus de Mercure, nécessitant un filtrage tout aussi large des données que l'on estimera à hauteur de 40 kilomètres.

Les résidus de Vénus ont une distribution plus homogène. Les précisions d'estimation des distances Terre-Vénus n'ont en effet pas connu les améliorations des observations de Mercure, restant de qualité astrométrique relativement constante au cours du temps. A 2σ , l'écart type des séries réalisées avant 1970 étant d'environ 8 kilomètres pour passer à 5 après 1970. Il est à signaler que seulement 20% des tirs Terre-Vénus ont été réalisés après 1970 contre 49% pour les tirs Terre-Mercure. Autrement dit, les observations des distances Terre-Vénus sont plus anciennes que celles réalisées entre la Terre et Mercure et par conséquent plus dégradées que ces dernières (*cf.* le tableau de la figure 2.8).

En conclusion, nous avons pour Mercure et Vénus deux exemples très distincts de distributions des erreurs sur l'estimation des distances. D'une part, la distribution a une base très large avec une très nette amélioration des données pour près de la moitié de l'échantillon, c'est le cas des résidus de Mercure. Et d'autre part, nous avons une distribution beaucoup plus fine, plus homogène, que la précédente.

Enfin, rappelons que la différence maximale entre l'estimation des rayons vecteurs des orbites héliocentriques de Mercure, Vénus et du barycentre Terre-Lune effectuée à partir de VSOP87 et celle déduite de la solution numérique DE200 est de l'ordre de 2.5 kilomètres sur l'orbite du barycentre, de 1.5 kilomètres et 150 mètres sur celles de Vénus et Mercure, respectivement (Bretagnon, 1982). Autrement dit, nous pouvons considérer que dans les statistiques des résidus (en distance) calculés précédemment, l'incertitude théorique liée à la qualité des solutions analytiques est un élément important de leur dispersion. Nous avons matérialisé cette limite théorique sur les graphes de la figure 2.9. Comme on peut le voir, la précision externe de la réduction des observations radar de Vénus réalisées après 1970 est inférieure à celle-ci, ainsi que celle d'une grande partie des données en distance de Mercure. Le développement d'une nouvelle solution analytique devient, dans ce cas, nécessaire.

Apport d'information

Les figures 1.5 du chapitre 1 permettent de constater que l'ensemble des tirs radar effectués sur Vénus et Mercure couvrent plusieurs orbites héliocentriques de ces objets. On peut donc estimer que ces données sont suffisamment bien réparties pour réaliser un ajustement de théories dynamiques de ces deux planètes intérieures et de celle du barycentre Terre-Lune.

Cependant, l'observation radar ne donne qu'une seule information sur l'orbite: la distance Terre-objet. Pour réaliser un ajustement complet, il manque une donnée angulaire, en général fournie par les observations optiques méridiennes ou photographiques. Mais ces observations angulaires sont entachées d'erreurs systématiques qui peuvent devenir très importantes, tout spécialement en ce qui concerne les observations des planètes intérieures. Il est donc communément conseillé

d'effectuer l'ajustement de leurs théories planétaires en limitant au maximum l'utilisation de telles données. C'est pourquoi pour compléter les séries d'observations radar de distances, on aura appel à des observations de type *tracking* VLBI de sondes, comme Magellan, qui permettront d'obtenir des positions angulaires des planètes à une très grande précision. L'inconvénient d'un tel algorithme est le nombre limité de ces observations VLBI (18 pour Vénus et 23 pour Jupiter) réalisées sur une période de temps réduite (1990-1994 et 1996-1997 respectivement). Il est donc important d'estimer l'impact de telles données sur l'ajustement des planètes intérieures et extérieures en général et sur celle du barycentre Terre-Lune en particulier.

Néanmoins, comme nous le montrerons au chapitre 8, la qualité astrométrique de l'échantillon combinant observations radar et données VLBI est indéniable et permet d'aboutir à des orbites d'une grande précision et cela malgré l'inconvénient mentionné précédemment.

Chapitre 3

Les données optiques

Dans ce chapitre, nous exposons les méthodes de réduction et les traitements post-réduction appliqués aux observations méridiennes et photographiques directes ou indirectes - via les satellites. Puis, nous présenterons les traitements communs à l'ensemble des données optiques liés, d'une part, aux erreurs systématiques des catalogues stellaires de référence et d'autre part au décalage photocentre-centre de masse.

3.1 Les observations méridiennes

3.1.1 Présentation

La technique des observations méridiennes a peu évolué jusqu'à l'apparition des récepteurs CCD. Elle consiste à mesurer la position d'un objet au moment de son passage au méridien du lieu d'observation. A cet instant, l'ascension droite de l'objet est égale au temps sidéral local (modulo 12 heures selon sa culmination). On détermine donc l'ascension droite en mesurant le temps sidéral à l'instant du passage et cela grâce à un micromètre à fil placé au foyer. La déclinaison de l'objet, par l'intermédiaire de sa distance zénithale, est, elle, dans un premier temps, approximée par le pointage de l'instrument (cercle méridien de pointage), puis déterminée plus précisément par le même micromètre à fil. Le principe de cette technique d'observation est donc simple mais requiert d'une part une très grande stabilité de l'instrument (il faut en effet, après avoir positionner l'instrument très précisément au méridien du lieu, pouvoir asservir solidement le reste du système à cette position) et d'autre part, une très grande précision dans le chronométrage du passage au méridien et la lecture de la déclinaison. Ces deux derniers points constituent l'une des difficultés de la réduction des observations méridiennes, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, surtout lorsqu'il s'agit d'observations anciennes.

Le tableau de la figure 3.1 présente en détails les différents types d'observations méridiennes dont il sera question ici, ainsi que les différents instruments et micromètres utilisés.

3.1.2 La réduction: généralités

Après avoir vu le principe des mesures méridiennes, nous allons présenter ici en détail l'ensemble de la procédure d'observation commune à tous les instruments méridiens classiques ainsi que les étapes allant de la lecture micrométrique à l'obtention de coordonnées géocentriques, apparentes de l'objet. Classiquement, les défauts d'orientation des axes des tourillons d'une part et de l'asservissement axe optique/axe des tourillons d'autre part sont éliminés par un étalonnage renouvelé du système. En général, cette détermination des constantes instrumentales encadre

	GROUPE	PERIODES	OUVERTURE	FOCALE	REFERENCES	
USNO 6-inch	JPL	1911-1971 1977-1982	1986-1994	15.2 cm	1.82 m	W10-25-50-52-52-54-55
USNO 9-inch	JPL	1935-1944	1913-1925	20.9 cm	3.66 m	W20-40
RGO -Cook Transit Circle	JPL	1957-1982		17.8 cm	2.60 m	RGO 1
Bordeaux	JPL	1985-1992		20.2 cm	2.37 m	
Tokyo Mitaka	JPL IAAS	1986 -1988 1963 -1974		13.5 cm	2.18 m	TM2
CAMC	AM + JPL	1982 - 1993		17.8 cm	2.66 m	CAMC 1
USNO 8-inch	IAAS	1866-1891				
Radcliff Observatory	IAAS	1774-1798		10.1 cm	2.43 m	RAD 1
Cape meridian circle	IAAS	1884 -1892		20.6 cm	3.53 m	CP1
Nikolaev meridian circle	IAAS	1960-1972				NK1
Greenwich	PARIS	1750 - 1907	2 instruments --- a voir			AN1-2-3
Paris	PARIS	1837 - 1873		15 cm	2.40 m	AN2-3

FIG. 3.1: *Résumé des principales caractéristiques des instruments méridiens*

une série d'observations. Elle est répétée jusqu'à 8 fois par nuit. Chaque instrument a, de plus, des corrections qui lui sont propres comme des défauts dans les vis micrométriques ou des graduations du cercle méridien. D'autre part, avant l'automatisation des systèmes de détection des instruments méridiens, comme ceux du CAMC de La Palma ou de Bordeaux, l'observation du passage au méridien était faite "à la main", l'observateur devant assurer la coïncidence entre l'image et les fils du micromètre. Une fois cette coïncidence effectuée, l'instant du passage au méridien était donné soit par le biais de contacts symétriques par rapport à la ligne de visée (cas des micromètres impersonnels - 1911) soit par l'observateur lui-même (cas des observations visuelles antérieures à 1911). Pour la déclinaison, l'observateur mesurait par l'intermédiaire du fil horizontal, le décalage nécessaire à apporter à la déclinaison de l'objet utilisé pour le pointage de l'instrument, permettant ainsi une détermination différentielle de cette déclinaison par rapport à la donnée lue sur les cercles gradués. La réalisation de cette coïncidence pouvant varier d'un observateur à l'autre, des équations personnelles vont intervenir dans la réduction de ces données, devenant de plus en plus importantes au fur et à mesure que l'on remonte dans le temps, jusqu'à devenir difficilement estimables pour les observations visuelles du XVIIIème siècle. Dans la figure 3.2, sont regroupées les principales corrections et calibrations effectuées en ascension droite et en déclinaison. Nous allons commencer par revenir sur les corrections en ascension droite.

- La correction de collimation, α_1 , corrige la non-perpendicularité de l'axe optique de l'instrument avec l'axe des tourillons. Cette constante est déterminée le plus souvent par inversion des tourillons. Il est commun d'y ajouter la correction due à l'aberration diurne. La correction à apporter à l'ascension droite est alors de l'ordre de 2 secondes de degré et s'écrit:

$$\Delta\alpha \cos\delta = \alpha_1$$

- L’horizontalité de l’axe des tourillons n’est également pas parfaite. On évalue l’inclinaison de la direction de l’axe des tourillons avec l’horizontale locale en utilisant la référence d’un bain de mercure. Par auto-collimation et réflexion sur le bain de mercure, on obtient ainsi l’angle α_2 , dont l’amplitude est de l’ordre de 3 à 4 secondes de degrés. Il peut arriver que cette valeur soit interpolée pour toutes les observations (méthode utilisée par le RGO) mais en général la mesure se fait suffisamment régulièrement (toutes les 3 heures, pour le 6-inch de l’USNO) pour supposer α_2 constant, α_2 étant alors la moyenne par nuit de ces mesures. La correction s’écrit:

$$\Delta\alpha \cos\delta = \alpha_2 \cos(\Phi - \delta)$$

où Φ est la latitude géographique du lieu d’observation, et (α, δ) sont les coordonnées sphériques de l’objet observé.

- L’alignement de l’axe des tourillons avec la direction est-ouest n’est bien sûr pas parfaite. La correction, α_3 , à apporter à cet alignement est appelée correction d’azimut et se détermine par l’observation d’étoiles circumpolaires aux culminations supérieures et inférieures. La correction s’exprime alors:

$$\Delta\alpha \cos\delta = \alpha_3 \sin(\Phi - \delta)$$

- Un décalage systématique de l’horloge servant à chronométrer l’instant du passage au méridien est modélisable par le biais d’observations d’étoiles spécifiques, appelées “Clock Stars”. Ces étoiles sont des étoiles de référence qui seront choisies une fois pour toutes et régulièrement observées. En général, on lie les corrections d’azimut et d’horloges du fait que ces deux corrections peuvent être toutes deux interprétées comme des rotations entre le grand cercle vertical d’observation (visualisation des objets observés sur la sphère céleste, une fois les corrections de collimation et de niveau effectuées) et le méridien effectif (visualisation sur la sphère céleste de la position théorique des objets). Ainsi, en notant (α_A, δ_A) , les positions observées des étoiles d’azimut et (α_C, δ_C) , les positions observées des “Clock stars”, Tucker (1972) établit que, en posant $W_* = \cos\delta^*$, $Y_* = \Delta\alpha^* \cos\delta^*$, et $X_* = \sin z_D^*$ (où z_D désigne la distance zénithale de l’objet), on a les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = \frac{\sum W_C \sum Y_A - \sum W_A \sum Y_C}{\sum W_A \sum X_C - \sum W_C \sum X_A} \\ CC = \frac{\sum X_A \sum Y_C - \sum X_C \sum Y_A}{\sum X_C \sum W_A - \sum X_A \sum W_C} \end{array} \right.$$

AC correspond à la correction en azimut, notée α_3 précédemment, et CC à la correction à appliquer aux horloges.

Ici s’achèvent les corrections générales en ascension droite auxquelles il faut ajouter les équations personnelles, souvent issues de tabulations en fonction des observateurs, de la position de l’objet, de sa magnitude, etc. et les corrections de phase. Ces dernières ont pour objectif

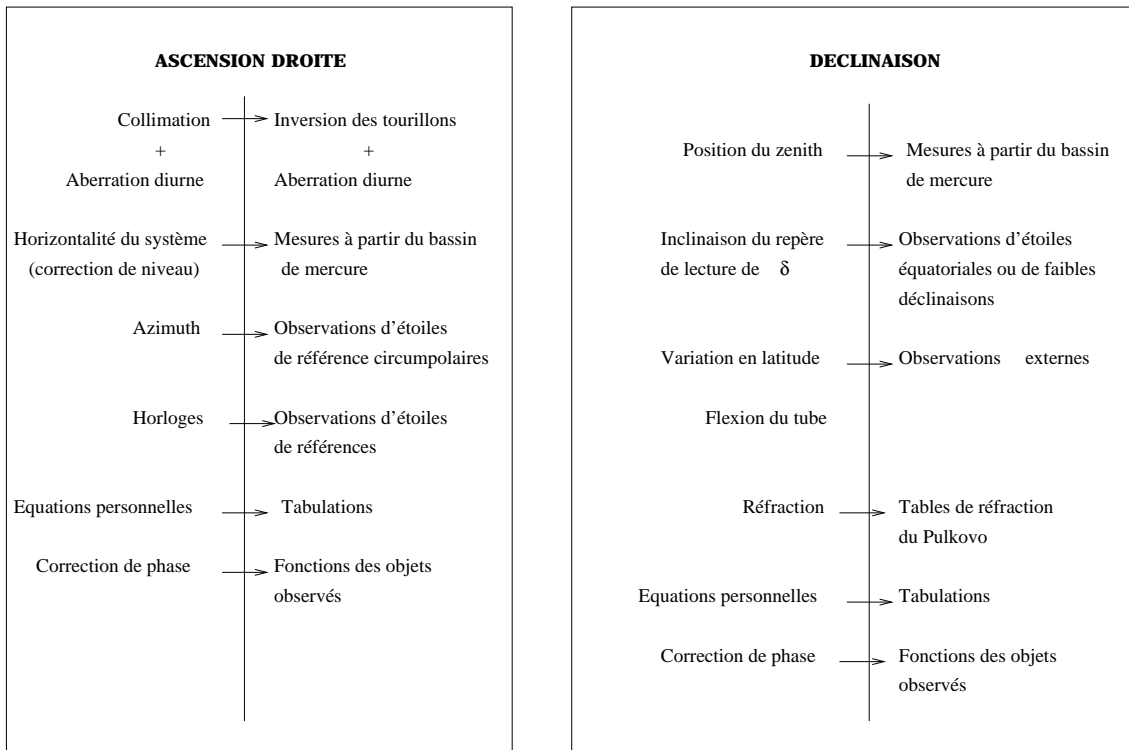


FIG. 3.2: *Résumé des principales corrections et calibrations appliquées aux observations de passage au méridien*

de ramener la position mesurée de l'objet à la position de son centre de masse, notamment lorsque celui-ci présente un angle de phase important. Ces corrections sont très délicates car elles affectent l'ensemble de la position observée (et non une seule des deux coordonnées) et font intervenir des conventions de mesure variant selon l'aspect et la nature de l'objet. On pourra par exemple mesurer plutôt les limbes nord et sud plutôt que le centre, ou un limbe seulement, etc. Le traitement de ces corrections fondamentales requérant une grande attention, nous le développerons dans un paragraphe particulier. Abordons maintenant les corrections générales en déclinaison.

- La position du zénith. Cette correction est très liée à celle de l'horizontalité, et se déduit de la mesure du niveau de mercure. En notant δ_1 l'angle par rapport à la verticale mesuré par auto-collimation sur le bain de mercure, la correction sera de la forme:

$$\Delta\delta = \frac{\pi}{2} - \delta_1 - \Phi$$

- Correction de l'inclinaison de la cible micrométrique en déclinaison. En effet, au contraire de l'ascension droite, la déclinaison est lue à partir d'une ligne de visée fixe, dont la perpendicularité par rapport à l'axe optique n'est pas assurée. Il faut donc estimer cet angle, δ_2 . Pour cela, on observe des étoiles de faible déclinaison et l'on en déduit

$$\Delta\delta = \delta_2 \cos \delta$$

- Variation en latitude. La latitude du lieu d'observation a une grande importance car elle permet de passer d'un système de coordonnées local à un système de coordonnées équato-

rial. Ces variations de latitudes, notées $\Delta\Phi$, sont issues d'études et d'observations de type géodésiques.

- Flexion du tube. Le tube de l'instrument étant en équilibre autour de l'axe des tourillons, il est évident que son poids va entraîner un couple de part et d'autre de cet axe. Si on note, δ_3 la correction de flexion, la correction s'appliquera à la déclinaison des objets observés, par la relation:

$$\Delta\delta = \delta_3 \sin z_D$$

où l'on rappelle que z_D est la distance zénithale de l'objet. L'amplitude de cette correction sera de l'ordre de 0.03 seconde de degré (9-inch de l'USNO), mais peut varier d'un instrument à l'autre.

- La réfraction. Jusqu'il y a encore quelques années, on a souvent considéré la seule réfraction atmosphérique dans les corrections apportées aux (α, δ) observées. Cependant, comme l'explique Kovalevsky (1990), la réfraction à l'intérieur même du tube a été confondue avec la première et intervient, du fait de sa proportionnalité avec $\sin z_D$, dans l'estimation de la flexion de l'instrument. Ceci engendre de petites variations de la correction de flexion essentiellement entre des mesures diurnes et nocturnes. La correction de réfraction atmosphérique classique est basée sur l'utilisation des tables de l'observatoire de Pulkovo, dans lesquelles se trouvent tabulées les déviations angulaires, $R = z_D^{corr} - z_D^0$, en fonction des conditions atmosphériques, température, pression, humidité et longueur d'onde. Jusqu'à encore récemment (RGO, 1984), la correction de réfraction était une correction au premier ordre, du type:

$$R = \tan z_D^0$$

Actuellement, l'estimation de la déviation R est faite avec beaucoup plus de précision. En particulier, on pourra se reporter aux détails des corrections utilisées par le CAMC de La Palma.

- Parallaxe. Les observations sont topocentriques. Il est donc nécessaire de les ramener au géocentre pour leur exploitation ultérieure. Pour cela, on calcule la parallaxe horizontale, P_h , de l'objet au moment de l'observation, puis en notant R_T , le rayon terrestre, Φ_G , la latitude géocentrique de l'observateur et δ_O , la déclinaison observée topocentrique, on détermine le décalage, $\Delta\delta$ entre déclinaison topocentrique et géocentrique par :

$$\Delta\delta = R_T P_h \sin(\Phi_G - \delta_O)$$

Ceci termine la présentation des effets généraux pris en compte dans la réduction des déclinaisons. Comme pour les ascensions droites, s'ajoutent à cela les équations personnelles et les corrections de phase que nous développerons plus loin. Enfin, communes aux deux coordonnées, d'autres corrections plus spécifiques aux différents instruments, comme des erreurs de graduations, interviennent aussi dans le processus de réduction. Comme ces dernières sont très nombreuses et très diverses, nous ne les présenterons pas dans ce travail.

A l'issue de cette première réduction, sont obtenues des positions géocentriques, apparentes de la date des objets observés. C'est sous cette forme qu'elles sont en général publiées et que nous les avons retrouvées dans la base du JPL et de l'IAAS.

Système planétaire	Théorie	Type	Précision Externe [secondes de degrés]
Mars			
Phobos - Deimos	ESAPHO / ESADEI (Chapront-Touzé, 1998)	Semi-Analytique	0.01
	Jacobson (1989)	Numérique	0.01
Jupiter			
Satellites Galiléens	G5 (Arlot, 1982) - E5 (Lieske, 1995)	Analytique	0.02
Petits Satellites	Jacobson (1991)	Numérique	0.5
	Chapront (1996)	Numérique	1.0
Saturne			
Satellites I-VIII	TASS (Vienne et Duriez, 1994) Jacobson (1996)	Analytique Numérique	0.01
Phoebe	Borsenberg (1997)	Analytique	0.5
	Jacobson (1996)	Numérique	0.5
Uranus			
Satellites I-V	GUST86 (Laskar et Jacobson, 1986)	Analytique	0.2
Neptune			
	Jacobson (1996)	Numérique	0.3
Mercure-Vénus-Mars			
	VSOP xxx - DE xxx	Analytique - Numérique	0.05
Jupiter-Saturne-Uranus-Neptune			
	VSOP xxx - DE xxx	Analytique - Numérique	0.1 / 0.2

FIG. 3.3: Bilan des différentes théories satellitaires et planétaires existantes

3.1.3 Mesure du photocentre

La mesure du photocentre de l'objet observé est un point délicat de tout processus de réduction de données optiques en général, et méridiennes en particulier. Comme on peut le voir sur la figure 3.9, une planète, ici Vénus, peut présenter une phase importante. Il est alors très important d'établir un protocole de mesure rigoureux afin d'estimer la position du photocentre de l'objet à partir des mesures des limbes. Dans le cas des observations méridiennes, les protocoles sont similaires d'un observatoire à un autre. Nous allons décrire ces protocoles spécifiques à chaque type d'astre observé.

– Pour Mercure et Vénus

Quand les 4 limbes sont visibles, ce qui est le cas courant pour les observations de Mercure, la mesure se fait directement sur le centre du disque lumineux. Si les limbes ne sont pas clairement visibles, ce qui est le cas dans la grande majorité des observations de Vénus, on effectue la mesure du photocentre à partir du limbe illuminé.

– pour Jupiter et Saturne

On mesure la position du photocentre à partir du limbe illuminé et du terminateur en ascension droite et en déclinaison. Les anneaux de Saturne sont mesurés s'ils occultent les limbes nord et sud.

Les limbes observés sont notés et précisés pour chaque observation publiée. D'autre part, à chaque type de mesure du photocentre est associée une correction permettant le passage de la mesure de photocentre à la position du centre de masse. Ces corrections seront décrites plus loin car elles sont communes à toutes les observations optiques.

3.2 Les observations photographiques et CCD

3.2.1 Observations directes des planètes

Nous n'avons eu accès qu'à un nombre extrêmement limité d'observations photographiques directes de planètes (275 observations de Jupiter et 306 observations de Saturne). Ces observations ont été effectuées à l'astrographe de Nikolaev entre 1969 et 1982. Ces observations sont des positions du centre de masse de la planète publiées dans un repère astrométrique B1950.

3.2.2 Astrométrie indirecte: observations des satellites

Contexte et principe

L'observation astrométrique des objets du système solaire a toujours été problématique du fait du diamètre apparent (d.a.) non négligeable de ces corps. Cependant, là où, pour Mercure (d.a. de 11 secondes de degré), Vénus (60.2 secondes de degré), Jupiter (46.8 secondes de degré) et Saturne (19.4 secondes de degré), toute réduction comme objet ponctuel est impossible quel que soit le type de récepteur, d'autres corps du système solaire (les satellites galiléens, les satellites de Saturne, les astéroïdes...) peuvent être considérés comme tels – pour la grande majorité des récepteurs utilisés – et donc permettent une réduction plus aisée des observations méridiennes et photographiques. Nous scinderons les problèmes induits par les diamètres apparents des corps lors des réductions astrométriques en deux parties: la détermination de la position du photocentre au cours de la mesure astrométrique et celle du centre de masse de l'objet observé à partir de la position mesurée du photocentre. Ce dernier point constitue ce que l'on appelle la correction de phase que nous traiterons plus loin. La première partie est plus particulièrement

Série	Nbrs. Obs.	Période	<O-C> RA	σ_{RA}	<O-C> De	σ_{De}
JUPITER - CAMC						
Ganymède	105	1992-1994	0.050	0.187	0.004	0.200
Callisto	318	1986-1995	0.033	0.207	-0.037	0.204
Moyen	299		0.040	0.188	-0.020	0.192
SATURNE - CAMC						
Titan	325	1986-1995	0.016	0.229	0.035	0.215
Japet	153	1986-1995	0.011	0.198	0.039	0.193
Moyen	321		0.016	0.180	0.035	0.174
SATURNE - Bordeaux						
Titan	180	1996-1997	0.056	0.173	0.086	0.382
Japet	91	1996-1997	0.124	0.239	0.134	0.465

FIG. 3.4: *Résidus issus des comparaisons entre positions du centre de masse des systèmes Saturne-satellites et Jupiter-satellites déduites des observations réalisées au CAM entre 1984 et 1995 et à Bordeaux entre 1996 et 1997 et celles déduites des solutions analytiques du mouvement de Jupiter et Saturne extraites de VSOP87. L'unité est ici la seconde de degré.*

liée aux types d'observations (méridienne, photographique ou CCD) mis en oeuvre et nous ne l'exposerons pas en détails. Notons cependant la complexité de cette détermination qui doit tenir compte à la fois des caractéristiques physiques du récepteur et de la nature de la surface de l'objet observé. En particulier, on se rapportera à Arlot (1981) pour les détails concernant la réduction astrométrique d'images photographiques de Jupiter. Il y apparaît clairement que cette détermination du photocentre de la planète à partir d'un cliché sur ou sous-exposé peut être biaisée d'erreurs systématiques importantes et cela malgré de multiples modélisations de la réponse photométrique des plaques photographiques utilisées. En conclusion, les observations directes de planètes présentant un diamètre apparent non négligeable nécessitent un soin complexe et particulier qu'une nouvelle méthode d'observations plus aisée permet d'éviter: la détermination du centre de masse du système planète-satellites à partir d'observations directes des satellites et non de la planète mère.

En effet, comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, des objets, comme les satellites naturels des planètes géantes, peuvent être considérés comme ponctuels pour la grande majorité des récepteurs actuels. Dans ce cas, la position du photocentre de l'objet sur le récepteur est déterminée avec une grande précision en choisissant, par exemple sur la matrice en pixels du CCD, la position du pixel le plus brillant ou celle du sommet d'une gaussienne ajustée sur le profil de l'objet. La position du centre de masse de l'objet se déduit alors facilement de la précédente par l'application de relations géométriques de type Lindegren (1977). Deux conséquences découlent de cette élimination naturelle de la principale source d'incertitudes dans l'astrométrie des objets du système solaire. En première conséquence, les théories analytiques, semi-analytiques ou numériques de ces corps ont été bâties sur des observations de grande qualité (en comparaison de celles de planètes) et permettent de calculer des orbites planétocentriques des satellites galiléens ou de Saturne avec précision. Le tableau de la figure 3.3 fait le bilan des différentes théories satellitaires et planétaires disponibles et présente la précision externe (déduite de comparaisons directes aux observations) de chacune d'elles. On peut alors affirmer que les théories des satel-



FIG. 3.5: Exemples de trois surfaces très différentes de satellites de Saturne: Dioné (surface typique des satellites naturels, d'albedo relativement uniforme (même type de surface pour Rhéa et Encelade), Japet (avec un hémisphère très brillant et un autre très sombre) et Mimas (la présence du cratère de Herschel induit une zone de fort assombrissement). Photos extraites de Maps of Solar system - JPL

lites de Jupiter ou de Saturne sont 10 fois plus précises – en terme de précision externe – que les solutions planétaires respectives, numériques ou analytiques. La deuxième conséquence est qu'il est alors possible à partir des positions observées des photocentres des satellites, et donc de leurs centres de masse, de déduire des positions du centre de masse du système dynamique planète-satellites, et cela avec une grande précision. Si (X, Y) sont des coordonnées planétocentriques différentielles de satellites galiléens (ou de Saturne) déduites des théories G5 (Arlot, 1982) (ou TASS (Vienne et Duriez, 1995)) alors par définition, on peut écrire:

$$\begin{cases} X = (\alpha_s - \alpha_p) \cos \delta \\ Y = (\delta_s - \delta_p) \end{cases} \quad (3.1)$$

où (α_s, δ_s) sont les coordonnées en ascension droite et déclinaison du centre de masse du satellite et (α_p, δ_p) , celles du centre de masse du système planète-satellites. Comme nous l'avons dit, (X, Y) sont déduits des théories satellitaires. De fait, si l'on dispose d'une base de données de positions (α_s, δ_s) de satellites, il est possible d'en déduire des positions (α_p, δ_p) du centre de masse du système dynamique planète-satellites à partir du système d'équations 3.1. Ces dernières ne seront plus affectées des effets systématiques induits par les difficultés de réduction d'images astrométriques d'objets présentant un diamètre apparent non négligeable et auront une qualité astrométrique équivalente à celles de satellites, bien que le choix des satellites intervenant dans ces estimations ne soit pas anodin et devra être discuté.

Jupiter

La théorie utilisée dans le cas du système galiléen sera la théorie analytique G5 (Arlot, 1982). La qualité des solutions analytiques de chaque satellite (Callisto, Ganymède, Io et Europe) étant équivalente et ne notant pas de difficulté de réduction particulière pour un satellite donné (contrairement au système de satellites de Saturne), nous n'avons pas fait de sélection dans les données à notre disposition en fonction des satellites observés. Là encore, contrairement à Saturne, les sources de données n'ont pas été multiples mais ce sont réduites au nombre de deux.

Satellites	1	2	3	4	5	6	7	8
TASS	0.19	0.15	0.14	0.14	0.14	0.15	0.22	0.21
H-T	0.20	0.15	0.14	0.14	0.14	0.15	0.24	0.22

TAB. 3.1: *Déviations standards des résidus (en secondes de degrés), obtenus pour chaque satellite, avec les théories TASS et avec H-T (Harper, 1992 and Harper and Taylor, 1993) (extrait de Duriez et Vienne, 1997)*

Le premier échantillon est constitué d'observations des satellites Callisto et Ganymède réalisées à La Palma entre 1987 et 1994 (Morrisson, 1997). Cet échantillon portera les dénominations de La Palma ou CAMC et sera utilisé dans la suite de notre ajustement comme échantillon-test après ajustement de la solution du mouvement de Jupiter. Dans le tableau de la figure 3.4 sont regroupées les informations concernant ces données ainsi que les statistiques liées aux positions déduites du centre de masse du système Jupiter-satellites. Notons que les positions observées de Ganymède et Callisto sont des positions géocentriques apparentes ICRF du centre de masse des satellites. Autrement dit, des corrections de phase géométrique ont été appliquées. Celles-ci correspondent aux corrections de Lindegren (1977) décrites plus loin associées à une loi de réflectivité de surface de type loi de Minnaert (Minnaert, 1941).

Le deuxième échantillon sera constitué des positions déduites d'observations photographiques réalisées à l'U.S. Naval Observatory entre 1967 et 1974. La méthode de réduction à une étoile décrite dans la suite a été appliquée à cette série de plaques photographiques permettant ainsi d'obtenir des positions de satellites galiléens, et en conséquence du centre de masse du système, directement exprimées dans l'ICRS, grâce à l'utilisation, lors de la réduction, d'étoiles de référence Hipparcos. Ces nouvelles positions du centre de masse du système jovien seront incluses dans l'échantillon d'ajustement de la solution du mouvement de ce dernier. Là encore une correction de phase géométrique (Lindegren, 1977) associée à une loi de réflectivité de surface de Minnaert pour les surfaces de type lunaire ($k=0.5$) est appliquée, permettant ainsi d'obtenir des positions géocentriques apparentes ICRF du centre de masse des satellites avant le passage au centre de masse du système planète-satellites.

Saturne

Le cas de Saturne est plus délicat que celui de Jupiter pour deux raisons: la multitude des sources d'observations et le nombre de satellites. Nous allons commencer par discuter ce dernier point.

Contrairement aux théories analytiques G5 du mouvement des satellites galiléens, la théorie TASS1.6 (Vienne et Duriez, 1995) ne fournit pas des orbites de même qualité astrométrique pour tous les satellites principaux de Saturne. Le tableau 3.1, extrait de (Duriez et Vienne, 1997), permet de mettre en lumière certaines incertitudes sur les solutions du mouvement de Mimas (satellite 1), Hyperion (satellite 7) et Japet (satellite 8). En effet, les résidus issus des

Observatoires	Nrs.Obs	Nrs.Obs rejetées (O-C)>10"	σ_{RA} (")	σ_{De} (")	Période
Pulkovo	531	6 %	0.638	0.829	1971-1975
Bordeaux	995	5 %	0.825	0.527	1966-1989
Table Mountain	12	0 %	1.286	1.854	1971
Mc Donald	254	0 %	0.707	0.414	1973-1976
R.G.O Herstmonceaux	457	0.8 %	0.409	0.489	1972-1983
Mc Cormick	605	4 %	0.950	0.602	1977-1981
Nicolaev	379	2 %	1.650	0.726	1973-1985
E.S.O	383	0.4 %	0.298	0.289	1981-1982
Zelenchuk	78	9 %	1.559	1.197	1982-1984
Abastuman	97	27 %	0.354	0.467	1982-1984
C.A.M.C La Palma	70	0.1 %	0.320	0.207	1987
Yunnan	42	0 %	1.035	1.060	1987-1988

FIG. 3.6: *Bilan des observations des satellites de Saturne extraites de la base Strugnell-Taylor par observatoires. Les σ représentent les déviations standard en ascension droite et déclinaison des distributions statistiques des résidus issus des comparaisons entre positions observées des satellites et celles déduites de TASS1.6*

comparaisons entre les positions observées entre 1874 et 1985 (utilisées dans les ajustements des constantes d'intégration des solutions TASS et Harper-Taylor) de ces trois satellites et les positions calculées à partir de la solution TASS et Harper-Taylor (Taylor, 1992) sont 30 % plus importants que ceux des autres satellites du système. Ces dégradations de la qualité des solutions du mouvement de Japet et de Mimas s'expliquent par l'aspect physique de ces objets. En effet, comme on peut le voir sur les images de la figure 3.5, ces deux satellites présentent des caractéristiques de surface très marquées: une surface très brillante et une très sombre pour Japet et une zone de fort assombrissement (correspondant au cratère de Herschel) pour Mimas. En conséquence, un modèle de phase géométrique classique associé à la loi de réflectivité de Minnaert ($k=0.5$), généralement utilisée pour modéliser des surfaces de type lunaire, ne permet pas de décrire correctement la réalité de la surface de ces corps et induit ainsi des erreurs systématiques dans les théories analytiques de leur mouvement. Dans le cas d'Hypérion, la nature chaotique de son mouvement rend la mise en place d'une solution dynamique plus complexe et explique ainsi la relative mauvaise qualité de celle-ci. Suivant les arguments précédents, nous avons fait le choix de n'utiliser que les positions observées des centres de masse de Rhéa, Dioné et Titan dans nos déterminations de positions du centre de masse du système Saturne-satellites.

D'autre part, comme nous l'avons signalé précédemment, l'origine des données est multiple.

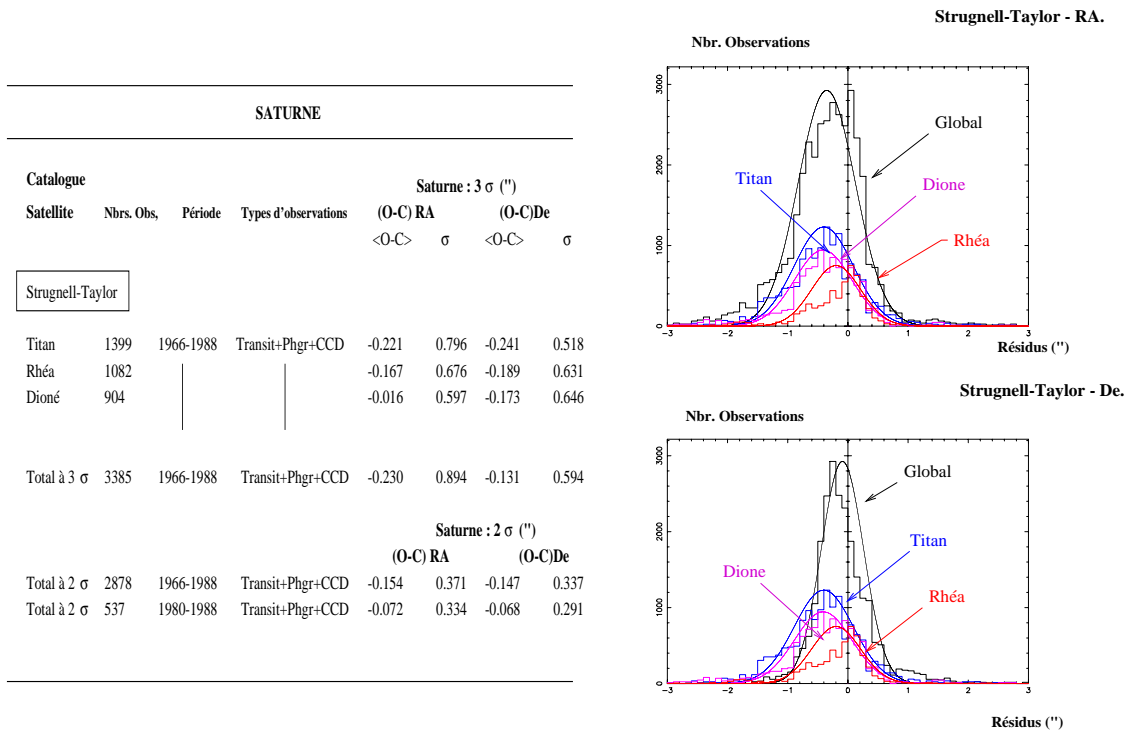


FIG. 3.7: *R siduals issus des comparaisons entre positions du centre de masse du système Saturne-satellites déduites des observations extraites de la base de Strugnell-Taylor et celles déduites de la solution analytique VSOP87.*

En effet, aux deux échantillonnages de taille réduite mais regroupant des observations très récentes (La Palma 1984-1995 et Bordeaux 1996-1997, *cf* tableau de la figure 3.4), s'est ajouté un nombre important d'observations issues de la base observationnelle de Strugnell-Taylor (Strugnell et Taylor, 1990). Cette base, mise en place en 1990, regroupe près de 51000 observations des satellites de Saturne, en majorité photographiques réalisées entre 1874 et 1989. Ces observations sont dans leur grande majorité différentielles – sous forme classique $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$ ou sous la forme d'angle de position et de séparation, (ρ, s) . Sur l'ensemble de ces observations, il existe moins de 10 % de positions (α, δ) géocentriques ou topocentriques de satellites utilisables pour des déterminations de positions du centre de masse du système Saturne-satellites. Ceci représente cependant 3385 observations de Titan, Rhéa et Dion e réalisées entre 1966 et 1989 dans quinze observatoires différents. Le tableau de la figure 3.6 détaille cette répartition des observations et donne un aperçu de la précision de chaque série d'observations. Les positions fournies par la base sont des positions du photocentre des satellites exprimées dans des repères apparents de la date FK5 géocentriques ou topocentriques. Une correction de phase de type Lindegren (1977) associ e à la loi de réflectivité de Minnaert – avec $k=0.5$ (surfaces lunaires) pour Rhéa et Dion e et avec $k=1$ (surface des corps présentant une atmosphère) pour Titan – a donc été appliqu e sur l'ensemble de ces données (voir paragraphe 3.4). Remarquons ici que les observations extraites de la base Strugnell-Taylor sont exprimées dans le FK5 alors que, jusqu'à présent, les autres positions du centre de masse des systèmes planète-satellites ont été exprimées directement ou indirectement dans l'ICRF. Nous appliquerons donc à ces données les transformations FK5-ICRF décrites dans la suite.

Discussion

Plusieurs points peuvent être soumis à la discussion. En premier lieu, l'ajustement des solutions du mouvement de Jupiter ou de Saturne s'effectuant en partie sur des échantillons observationnels obtenus après interventions d'autres solutions dynamiques (celles des satellites), n'y a-t-il pas un risque de biaiser la solution ajustée? Si les positions des centres de masse des satellites observés se répartissent uniformément le long des orbites planétocentriques de ces derniers, les effets systématiques susceptibles d'être induits par les théories satellitaires vont intervenir de façon aléatoire et pourront donc être assimilés à du bruit blanc négligeable (Morrison, 1998). Or, il est clair au vu des périodes couvertes par les observations des satellites galiléens d'une part et ceux de Saturne d'autre part, que plus d'une orbite a été observée pour chaque satellite. On peut donc répondre que les éventuels effets systématiques induits par les théories G5 ou TASS1.6 sur les déterminations des positions du centre de masses des systèmes Jupiter-satellites et Saturne-satellites, ne pourront biaiser que de façon très mineure nos ajustements.

D'autre part, nous avons fait le choix, à la suite de l'argumentation précédente, de ne pas moyenner les positions déduites de plusieurs observations de satellites réalisées à la même date afin de conserver le maximum d'informations possibles, et de pouvoir, si cela était nécessaire discriminer d'éventuelles sources d'erreurs. Ainsi, sur la figure 3.7, sont représentés les histogrammes des distributions des résidus en ascension droite et déclinaison obtenus par comparaison entre les positions du centre de masse du système Saturne-satellites déduites des observations des différents satellites, Titan, Rhéa et Dioné, et celles calculées à partir de VSOP87. On note tout d'abord que la distribution dite globale c'est-à-dire englobant l'ensemble des observations disponibles (sans moyennisation des observations) est très proche d'un schéma gaussien ainsi que les distributions correspondant aux positions déduites des observations de Titan et Dioné. On note cependant une légère tendance de la distribution des résidus issus des observations de Rhéa à *glissée* vers des lois de probabilité de type beta type II. Cet échantillon gaussien constitué de positions du centre de masse du système Saturne-satellites déduites des observations des satellites Titan, Rhéa et Dioné (sans moyennisation) sera inclu dans l'échantillon d'ajustement de la solution du mouvement de Saturne. Des corrections supplémentaires de type passage du FK5 à l'ICRF lui seront appliqués, permettant ainsi un raccordement indirect des deux repères. L'échantillon ainsi traité fournira donc des positions du centre de masse de Saturne (compris comme barycentre du système Saturne-satellites) dans le repère géocentrique astrométrique J2000 ICRS par raccordement indirect.

3.2.3 Mise en place d'une nouvelle méthode de réduction d'images astrométriques, photographiques ou CCD: la réduction à une étoile

L'estimation de l'effet de phase n'étant plus ici un facteur limitatif dans la réduction d'observations photographiques ou CCD des satellites, une amélioration importante de la précision interne au processus est alors possible. En effet, depuis l'avènement du catalogue astrométrique Hipparcos, nous disposons d'étoiles de référence de grande précision (1 mas en ascension droite et déclinaison en 1991.25 et 10 mas en 2000), mais en nombre assez faible (densité de 3 étoiles par degré carré). Cependant, nous allons montrer qu'il est possible de pallier à cet inconvénient par le développement d'un nouvel algorithme de réduction, permettant une réduction d'images CCD ou photographiques avec peu d'étoiles, voir une seule étoile de référence Hipparcos. La technique que nous avons développée peut s'appliquer à n'importe quel objet. C'est pourquoi, un logiciel de réduction appelé PRIAM a été développé à partir de cet algorithme original. On trouvera en annexe une présentation de ce logiciel, disponible sur le web et dans une version

Linux pour PC, et d'autres exemples d'utilisations et d'applications (prédiction d'occultations stellaires, astrométrie d'objets inconnus...). Dans le chapitre consacré aux perspectives, nous présenterons les applications qui pourraient découler d'une association entre un tel algorithme via PRIAM et un catalogue astrométrique comme GAIA.

Contexte

L'idée de faire de l'astrométrie stellaire à ± 1 mas s'est donc concrétisée par l'arrivée du catalogue astrométrique Hipparcos (Perryman et al, 1997, ESA 1997). Ce dernier représente un gain d'un facteur 100 sur les catalogues astrométriques précédents tels que le PPM ou l'ACRS où l'erreur sur la position est de l'ordre respectivement de 300 et 200 mas dans l'hémisphère nord. Autrement dit, les résultats de ce catalogue ont poussé la communauté scientifique à s'interroger sur les ordres de grandeur des corrections et des constantes utilisées jusqu'à présent. Par exemple, avec une précision de 1 mas sur la position d'une étoile on ne peut plus négliger les effets relativistes sur le trajet du photon allant de l'étoile à l'observateur. On a ainsi développé une astrométrie vectorielle relativiste basée sur des transformations de type transformations de Lorentz (Murray, 1981, Kaplan, 1988). D'autre part, jusqu'à présent, la précision des techniques de réduction des plaques photographiques ou des images CCD pour les objets du système solaire est de l'ordre de 100 mas. Dans cette centaine de mas d'incertitude, se retrouvent des erreurs induites par les mesures effectuées sur le récepteur, celles dues aux conditions d'observation ainsi que les incertitudes liées à la position apparente des étoiles de référence. L'idée fut donc de tirer profit au maximum du gain de précision sur la position des étoiles pour une meilleure détermination des positions des grosses planètes en général et de Jupiter en particulier. Pour cela, nous avons d'une part déduit les positions (α, δ) de la planète de celles de l'un, voire de plusieurs, satellites (suivant la méthode décrite précédemment) et d'autre part, mis en place une nouvelle méthode de réduction d'images photographiques et CCD. Dans la suite, nous allons faire un bref retour sur les techniques classiques de réductions astrométriques, puis nous exposerons notre méthode *à une étoile*.

Méthode de réduction classique

La réduction astrométrique d'une image, c'est la détermination des coordonnées absolues (α, δ) d'objets stellaires ou planétaires présents dans le champ. Cette détermination se fait relativement à des objets dont la position est connue par l'intermédiaire de catalogues astrométriques de référence (Hipparcos, ACT ...) ou d'autres catalogues stellaires (USNOA2.0, GSC ...). Deux problèmes vont donc se poser: connaître la *vraie* position des étoiles au moment de l'observation et projeter la sphère céleste sur le plan du récepteur.

Dans un premier temps, nous allons traiter le problème des éphémérides d'étoiles, autrement dit le passage des coordonnées astrométriques J2000 ou ICRS J2000, aux coordonnées apparentes. Classiquement, on considère que les modifications de direction de l'étoile observée dues au mouvement de l'observateur par rapport au barycentre du système solaire et à la présence de l'atmosphère terrestre – c'est-à-dire le passage des coordonnées astrométriques J2000 d'étoiles, aux coordonnées apparentes – peuvent se linéariser en des polynômes de degrés aussi élevés qu'il y a un grand nombre d'étoiles de référence dans le champ. Soient (ζ, η) , des coordonnées tangentielles déterminées à partir de coordonnées absolues astrométriques J2000. Si l'on considère une représentation vectorielle du champ, on repère la direction de l'étoile par un vecteur unitaire s

et le décalage en direction peut alors s'écrire:

$$d\mathbf{s} = k((\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_0)\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)$$

où \mathbf{s}_0 correspond au vertex du déplacement, c'est-à-dire le zénith pour la réfraction et l'apex du déplacement de la Terre pour l'aberration.

En différenciant cette expression, on aboutit à:

$$\begin{cases} d\zeta = d\lambda\mathbf{i}\cdot\mathbf{s} + \lambda\mathbf{i}\cdot d\mathbf{s} \\ d\eta = d\lambda\mathbf{j}\cdot\mathbf{s} + \lambda\mathbf{j}\cdot d\mathbf{s} \end{cases}$$

avec (\mathbf{i}, \mathbf{j}) représentant les vecteurs unitaires du repère tangentiel et λ , un paramètre défini par les coordonnées de l'étoile en:

$$\lambda = (1 + \zeta^2 + \eta^2)^{1/2}$$

Ce qui, en faisant intervenir le vecteur direction du point tangent, \mathbf{s}_t , se ramène à considérer l'expression générale:

$$\begin{cases} d\zeta = k\lambda(-(\mathbf{i}\cdot\mathbf{s}_0) + \zeta(\mathbf{s}_t\cdot\mathbf{s}_0)) \\ d\eta = k\lambda(-(\mathbf{j}\cdot\mathbf{s}_0) + \eta(\mathbf{s}_t\cdot\mathbf{s}_0)) \end{cases}$$

En appliquant cette formulation vectorielle à l'aberration annuelle, on aboutit, en ne conservant que les termes de second ordre, à la représentation suivante:

$$\begin{cases} d\zeta = C_2 + A_2\zeta + \frac{1}{2}C_2(\zeta^2 + \eta^2) \\ d\eta = F_2 - A_2\eta + \frac{1}{2}F_2(\zeta^2 + \eta^2) \end{cases}$$

où C_2 , A_2 , et F_2 sont des constantes inconnues (Green, 1985).

Dans les modèles simples de réduction, on ne conserve que les termes constants et du premier ordre induisant ici une erreur d'environ 6 mas sur une évaluation de l'aberration annuelle déjà tronquée à l'ordre 2. On peut déjà prendre conscience, à ce niveau, des importantes approximations faites dans ce type de modèles.

Dans un deuxième temps et dans le même formalisme que l'aberration annuelle, on peut aussi interpréter les changements de direction de l'étoile dus à la présence de l'atmosphère terrestre en terme de coordonnées tangentielles. En considérant un modèle simplifié de réfraction, c'est-à-dire en considérant uniquement l'aspect horizontal des couches atmosphériques, on aboutit, en utilisant la remarque précédente, à des corrections (Green, 1985) dont, là encore, on ne conserve que les termes constants et du premier ordre, les termes du deuxième ordre pouvant se mettre sous la forme suivante

$$\begin{cases} d\zeta = k_0\zeta_0(2\zeta^2 + 2\eta_0\eta\zeta_0\zeta + \eta^2 + \eta_0^2\eta) \\ d\eta = k_0\eta_0(\zeta^2 + 2\eta_0\eta\zeta_0\zeta + 2\eta^2 - \eta_0^2\eta + \zeta^2\zeta_0^2) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \zeta_0 = \frac{\cos \Phi \sin H}{\sin D \sin \Phi + \cos D \cos \Phi \cos H} \\ \eta_0 = \frac{\cos D \sin \Phi - \sin D \cos \Phi \cos H}{\sin D \sin \Phi + \cos D \cos \Phi \cos H} \end{cases}$$

avec H , angle horaire du point tangent et Φ , latitude du lieu d'observation.

Ces termes du second ordre, négligés dans le cadre de la réduction classique, sont de l'ordre de 10 mas et augmentent rapidement avec la distance zénithale.

Nous avons donc vu que dans les modèles simples de réduction le passage coordonnées astrométriques J2000 aux coordonnées apparentes était ramené à un système linéaire. Ces approximations sont faites dans l'optique de les intégrer dans les corrections instrumentales non modélisables *a priori* mais engendrent au minimum des incertitudes de l'ordre de 20 mas. Pour plus de détails, on pourra voir le tableau xxx de l'annexe B donnant les ordres de grandeur de diverses approximations dont il est question ici.

La projection d'une sphère sur un plan est un problème bien connu, en particulier en cartographie. En astronomie, on applique un certain type de projection appelée *gnomonique* qui permet de passer d'un système sphérique de coordonnées sphériques (α, δ) à un système plan de coordonnées, dites *tangentielles*. Il est en effet naturel de considérer le plan dans lequel s'effectuent les observations comme un plan de projection de la sphère céleste dont le centre coïncide avec le point d'intersection entre la sphère céleste et l'axe optique du système utilisé lors de l'acquisition, c'est-à-dire le point tangent entre la sphère céleste et le plan du récepteur. Ce plan sera appelé dans la suite plan *idéal* d'observations et permettra de définir un système de coordonnées *tangentiennes* (ζ, η) relatives au centre de la projection. La description détaillée de cette projection se trouve à l'annexe B. Cependant, des distorsions de natures diverses (optiques et mécaniques principalement) affectent le plan du récepteur. On ne peut alors plus assimiler le plan de ce dernier au plan théorique *idéal* d'observations, tangent à la sphère céleste. Il est donc nécessaire de modéliser ces déformations par des modèles géométriques plus ou moins simples. La forme de ces modèles varie en fonction principalement de la taille du récepteur (car plus le récepteur est grand et plus il est susceptible de subir des déformations importantes) et du nombre d'étoiles de références présentes dans le champ. Le modèle minimal comporte un terme de décalage entre centre théorique du champ et centre optique réel, un terme de rotation entre l'axe optique du récepteur et l'axe optique théorique du système, ainsi qu'un facteur d'échelle entre les secondes d'arc sur la sphère céleste et les pixels (ou millimètres) sur le récepteur. Cette modélisation minimale, appelée modèle des *constantes de plaques* s'écrit:

$$\begin{cases} d\zeta = A\zeta + B\eta + C \\ d\eta = D\zeta + E\eta + F \end{cases} \quad (3.2)$$

Rappelons que (ζ, η) sont déduits de positions astrométriques, J2000 des étoiles de référence.

Ainsi, on a établi une relation entre ces deux repères dont les échelles (des secondes d'arc sur la sphère et des millimètres sur le plan du récepteur) et les orientations diffèrent. Connaissant les positions des étoiles de référence dans ces deux systèmes, on va pouvoir mettre en place des contraintes les définissant l'un par rapport à l'autre. Les paramètres A, B, C, D, E, F sont bien sûr les constantes à déterminer et incluent toutes les corrections dont il a été question jusqu'à présent, aussi bien astronomiques qu'instrumentales. Connaissant les coordonnées sphériques des étoiles de référence ainsi que leurs mesures effectuées sur le plan du récepteur, il apparaît clairement que la détermination de ces paramètres va se faire par moindres carrés. Ce modèle restant le même quels que soient les objets dans le champ, une fois déterminé par moindres carrés, on l'applique aux mesures relatives de l'objet inconnu. Ce qui permet de déterminer ces coordonnées différentielles et donc ces coordonnées sphériques sans difficulté. Les données de sortie sont là

encore des coordonnées astrométriques J2000. L'intérêt d'un modèle à six paramètres est qu'il ne nécessite en fait que trois étoiles de référence pour sa complète détermination. D'autres modèles plus complexes – degrés de polynômes élevés (Platais et al, 1995, Urban et Corbin, 1996,...), fonctions orthogonales (Bienaymé, 1993), approche statistique (Lattanzi et al, 1991)... – existent mais nécessitent alors un grand nombre d'étoiles.

Nous avons donc vu que, classiquement, on ramenait des processus aussi complexes que la réfraction atmosphérique ou l'aberration annuelle à des modélisations plus ou moins simples.

Méthode de réduction à une étoile

Cette méthode se place dans le cadre d'une astrométrie relativiste dont le but est d'atteindre une précision d'une dizaine de mas sur des positions absolues d'objets du système solaire. Pour cela, plusieurs améliorations ont été apportées à différents stades de la réduction.

L'une des principales causes d'erreurs dans les réductions décrites précédemment provient de la linéarisation de corrections complexes telles que les aberrations annuelle et diurne ainsi que la réfraction atmosphérique. Il nous a donc semblé intéressant, dans un premier temps, d'évaluer la totalité des phénomènes intervenant lors de l'observation d'une étoile de référence, cela dans un cadre relativiste. Nous avons utilisé l'algorithme de l'Astronomical Almanach, modifié par Kaplan et al (1989) et en utilisant la loi de réfraction inverse directe de Marini-Yan-Owens (Marini, 1972, Yan, 1996). Cet algorithme comprend trois parties distinctes: le changement de direction de l'étoile dû à son propre mouvement – ce sont les corrections de mouvement propre et de vitesse radiale –, le changement de direction de l'étoile dû à la position et au mouvement de l'observateur par rapport à cette dernière, au barycentre du système solaire et au voisinage solaire – c'est-à-dire l'aberration annuelle et diurne, la parallaxe trigonométrique, la déflexion des rayons lumineux, la précession et la nutation – et la correction due à la présence d'atmosphère. Une fois ces corrections appliquées, les coordonnées obtenues refléteront les positions observées des étoiles par l'observateur dans les conditions climatiques du jour.

1. Corrections dues au mouvement de l'étoile

On estime, en supposant que les étoiles ont un mouvement uniforme par rapport à l'observateur, leur déplacement entre le jour de l'observation et l'époque du catalogue. D'autre part, les coordonnées données dans les catalogues sont données par rapport au barycentre du système solaire. On va donc ramener ce repère à l'observateur. La correction est de la forme:

$$\mathbf{EO}_0 = \mathbf{EB} + \Delta T \frac{d\mathbf{EB}}{dt}$$

ou \mathbf{EO}_0 représente la direction géométrique de l'étoile pour l'observateur O, \mathbf{EB} , la direction barycentrique de l'étoile donnée par le catalogue, ΔT marquant l'intervalle de temps entre l'époque du catalogue et la date de l'observation.

2. Corrections dues au mouvement de l'observateur par rapport à l'étoile et au soleil

– La parallaxe trigonométrique

$$\mathbf{EO}_1 = \mathbf{EO}_0 - \pi \mathbf{BO}$$

avec \mathbf{BO} , la direction barycentrique de l'observateur O et π , la parallaxe trigonométrique de l'étoile fournie dans les catalogues astrométriques tels que le catalogue Hipparcos.

- Déflexion des rayons lumineux

Cela correspond à la déviation des rayons lumineux due au voisinage plus ou moins proche du Soleil. Cette correction sera de l'ordre de 4 mas (Cowling, 1984) dans le cas d'un objet supposé à l'infini, comme une étoile de référence. Ce calcul fait intervenir \mathbf{SO} , le vecteur héliocentrique de l'observateur, \mathbf{SE} , le vecteur héliocentrique de l'étoile et deux quantités scalaires,

$$\begin{cases} g1 = \frac{2\mu}{c^2|\mathbf{SO}|} \\ g2 = 1 + \frac{\mathbf{SE} \cdot \mathbf{SO}}{|\mathbf{SE}| \cdot |\mathbf{SO}|} \end{cases}$$

La direction corrigée de ces effets s'écrit:

$$\mathbf{EO}_2 = \frac{\mathbf{EO}}{\|\mathbf{EO}\|} + \frac{g1}{g2} \left[\left[\frac{\mathbf{EO}}{\|\mathbf{EO}\|} \cdot \frac{\mathbf{SE}}{\|\mathbf{SE}\|} \right] \frac{\mathbf{SO}}{\|\mathbf{SO}\|} - \left[\frac{\mathbf{SO}}{\|\mathbf{SO}\|} \cdot \frac{\mathbf{EO}}{\|\mathbf{EO}\|} \right] \frac{\mathbf{SE}}{\|\mathbf{SE}\|} \right]$$

- Aberrations annuelle et diurne

On corrige du mouvement de la Terre sur son orbite et du mouvement de l'observateur par une seule correction en considérant non plus la vitesse de la Terre mais celle de la Terre + celle de l'observateur dans un mouvement de translation uniforme par rapport au barycentre du système. Cette correction est d'une importance majeure et peut atteindre jusqu'à 15 secondes d'arc. En posant $\beta = \sqrt{1 - (V/c)^2}$, où \mathbf{V} représente le vecteur vitesse de l'observateur par rapport au barycentre du système, on a

$$\mathbf{EO}_3 = c \frac{\beta^{-1} \cdot \mathbf{EO}_2 + (c + \frac{\mathbf{EO}_2 \cdot \mathbf{V}}{1 + \beta^{-1}}) \cdot \mathbf{V}}{c + \mathbf{EO}_2 \cdot \mathbf{V}}$$

- Précession et Nutation

Ces deux corrections sont des rotations du repère équatorial moyen J2000, au repère équatorial vrai de la date, c'est-à-dire celui par rapport auquel on se repère pendant l'observation. Quels que soient les modèles choisis et le système de constantes en vigueur, on représente ces effets par deux matrices de rotation, notées respectivement P pour la précession et N pour la nutation, et on calcule les directions apparentes des étoiles dans un repère vrai de la date avec:

$$\mathbf{EO}_4 = N P \mathbf{EO}_3$$

3. Réfraction atmosphérique

Un rappel des données générales liées au problème de la correction de la réfraction atmosphérique dans l'observation astronomique en général est effectué dans l'annexe B. Nous ne présentons ici que le modèle choisi pour notre algorithme. Les justifications de ce choix sont, elles aussi, développées dans l'annexe B. Pour cette correction, on a choisi un nouveau modèle dit de *fonction de mapping*. En effet, le problème est ici que nous voulons affecter de la réfraction des coordonnées théoriques, non observées; autrement dit, instinctivement, on va chercher à inverser la classique loi de Laplace. Or des techniques de calcul d'intégrales basées sur des développements en fractions rationnelles ont été mises en place et appliquées aux problèmes tels que ceux de la réfraction. Ainsi à partir d'une expression du décalage en distance zénithale d'un objet développée par Marini(1972) et Yan(1996), on a pu, en appliquant ces modèles de fonctions mapping, déterminer analytiquement une fonction

inverse non approximée de l'angle de réfraction. Selon que l'on veuille déterminer l'angle de réfraction à partir d'une position observée ou d'une position théorique, les fonctions diffèrent, du fait de la discontinuité de l'indice de réfraction au niveau de la tropopause. Si l'on part d'une position théorique, z_{SR} , l'angle de réfraction, Δz , s'écrit

$$\Delta z = 10^{-6} N_0 \sin z_{SR} F(z_{SR})$$

où $F(z_{SR})$ est une fraction, fonction de paramètres déterminés par ajustement aux observations, de la pression, de la température, de la pression partielle d'humidité et de z_{SR} . Si l'on part d'une position observée, z_{AR} , l'angle de réfraction devient

$$\Delta z = 10^{-6} N_0 \cos z_{AR} G(z_{AR})$$

où $G(z_{AR})$ est une fraction, fonction de paramètres déterminés par ajustement aux observations, de la pression, de la température, de la pression partielle d'humidité et de z_{AR} . Ce raisonnement est basé sur une étude de la convergence d'intégrales du type

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{p'(x)}{\sqrt{x + \alpha^2 - K(1-p)}} dx$$

où p représente le profil de l'atmosphère en fonction de l'altitude et K est une constante, $K = 10^{-6} N_0 \cos(z_{AR})^2 \frac{r_0}{H}$. En effet, au voisinage de 0, ce type d'intégrale peut se développer en puissance de α , alors qu'au voisinage de l'infini, le développement sera en $1/\alpha$. Or, les fractions rationnelles, de formes correctement choisies, répondent elles aussi à ces critères et peuvent converger vers la même limite. C'est en se basant sur cette idée, que cette écriture en fonction de mapping a été appliquée au problème de la réfraction atmosphérique. Une étude comparative entre les différents modèles de réfraction atmosphérique actuellement disponibles et leur impact sur la réduction astrométrique en longueurs d'ondes optiques a par ailleurs été effectuée (Berthier et Fienga, 1998).

La première idée pour améliorer les méthodes de réduction dites classiques a donc été de calculer tous les effets modélisables directement sur les (α, δ) d'étoiles afin de réellement commencer le processus de réduction non plus avec des coordonnées astrométriques J2000 mais avec les positions réellement observées. Les constantes qu'il restera à déterminer ne seront plus affectées de corrections autres qu'instrumentales mais représenteront des effets physiques directement matérialisables sur la plaque. En notant (X, Y) , les coordonnées en pixels (ou en millimètres) mesurées sur le récepteur et (ζ, η) les coordonnées tangentielles sur le plan *idéal* d'observation des étoiles de référence, la modélisation des effets précédents s'effectuera par ajustement d'un système minimal de la forme:

$$\begin{cases} d\zeta = AX + BY + C \\ d\eta = DY + EX + F \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi les termes croisés de l'équation 3.3, A , D sont les paramètres d'échelle de l'instrument. Ce sont des caractéristiques instrumentales supposées connues. Les termes B , E matérialisent la rotation entre l'axe optique réel du récepteur et celui théorique du télescope. Cet angle est celui réalisé entre la direction horizontale du récepteur et celle de l'équateur de la date. Des méthodes classiques (par exemple la méthode du *trail scale*) permettent d'effectuer l'alignement de ces deux axes et d'ainsi minimiser, voire annuler, la valeur de cet angle dit d'*orientation*.

Quand on utilise un modèle à 6 paramètres avec en entrée des coordonnées apparentes vraies de la date, affectées de la réfraction pour s'effectuer la réduction d'une image réalisée sur un récepteur d'échelle connue et dont l'alignement au télescope a été correctement et récemment effectué, il ne reste plus qu'un paramètre à déterminer: celui du décentrage. Ce qui rend la réduction à une étoile tout à fait réalisable bien qu'en pratique, du fait de la corrélation entre les différents paramètres, il faut s'assurer d'avoir choisi un point tangent très près du vrai point tangent. Pour cela, on prend comme référence l'objet le plus au "centre" de la plaque.

Application et résultats

Les résultats dont il est question ici ont été publiés dans (Fienga, 1998) et sont donc présentés plus en détail dans cette publication. On a donc appliqué ces deux méthodes, classique et à une étoile, à 28 observations réparties sur 9 plaques photographiques réalisées entre 1967 et 1974 à la lunette méridienne de l'USNO.

En moyenne, on a pu compter au moins quatre étoiles PPM par plaque et une étoile Hipparcos. Certaines plaques comptaient deux étoiles Hipparcos ce qui nous a permis de mettre en évidence des effets dus, soit à des déformations locales du champ qui n'apparaissent pas dans les méthodes à plus de 3 étoiles, soit, et cela semble être le plus probable, à une mauvaise évaluation des paramètres d'échelle. Comme on l'a dit précédemment, ces données sont caractéristiques de l'instrument et sont donc communiquées à chaque utilisateur *a priori*. Leur détermination a été faite par calibration sur un amas ou un groupe d'étoiles et dans le cas présent, une seule détermination selon l'axe des x a été réalisée et on a supposé que le facteur d'échelle était le même pour l'axe y , ce qui est loin d'être vérifié. Les résultats présentés dans (Fienga, 1998) sont des (O-C) sur des positions indirectes de Jupiter. En effet, la réduction donne des positions des satellites de cette planète dont on sait déterminer avec précision la position par rapport au centre de masse du système jovien. Connaissant ainsi leurs positions relatives par rapport à Jupiter, on en déduit facilement la position de celui-ci.

De plus, comme nous l'avons déjà signalé, un logiciel de réduction astrométrique a été réalisé sur la base de l'algorithme décrit précédemment. On retrouvera dans l'annexe B la présentation détaillée de cet outil.

Conclusion

Dans cette étude, nous avons essayé de mettre en évidence les nombreuses possibilités qu'offre un catalogue tel qu'Hipparcos pour la réduction astrométrique des objets stellaires ou du système solaire. En allant à l'encontre de ce qui est prôné jusqu'à présent dans le domaine de la réduction astrométrique, à savoir avoir un nombre le plus important possible d'étoiles d'une précision très moyenne pour développer des modèles très complexes avec des degrés de liberté très importants, on a montré par ces résultats qu'il est possible de faire de l'astrométrie à 10 mas avec une seule étoile et un modèle très simplifié à trois degrés de liberté. En d'autres termes, en se concentrant sur la précision d'une seule étoile, on a pu faire découler cet apport directement sur les positions des satellites du système galiléen et ainsi atteindre une précision sur la position d'une planète géante encore jamais atteinte.

Nous abordons maintenant la partie commune à l'ensemble des données optiques et qui présente les traitements appliqués aux observations méridiennes et photographiques.

3.3 Homogénéisation des repères

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer l'algorithme choisi pour transformer des positions apparentes, Boss GC, FK3, FK4 ou FK5 dans un repère utilisable dans l'ajustement, à savoir le repère astrométrique J2000 de l'ICRF.

3.3.1 Terminologie

Nous allons préciser quelques termes qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.

Le système de référence

Un système de référence est un concept matérialisé par un repère de référence, un système de coordonnées et un ensemble recommandé de constantes, théories et procédures de réductions d'observations. Dans le cas idéal, le système de référence *dynamique* donne un cadre dans lequel les équations du mouvement des objets célestes peuvent s'écrire sans faire intervenir de termes de Coriolis ou d'accélération linéaires induits par le système de référence. Si l'on utilise une définition *cinématique* du système de référence idéal, alors celui-ci correspond à un système dans lequel les objets très lointains n'ont pas de rotation globale. Un système de référence dynamique est caractérisé par un équateur, un écliptique et un équinoxe déterminés à partir des théories planétaires, ainsi que la donnée des masses des objets du système solaire, des paramètres de rotation de la Terre et de théories de précession et de nutation. Dans le cas d'un système de référence cinématique, la liste des sources extra-galactiques pour établir le plan de référence du système et l'origine du système de coordonnées ainsi que la définition exacte des axes de ce système en donnent les principales caractéristiques. L'ensemble de ces définitions est extrait des recommandations de l'UAI 1990 (Kovalevsky, 1991).

Système de coordonnées et repère de référence

Un repère de référence est un ensemble de points de réalisations primaires dont les coordonnées matérialisent le système de référence conventionnel. Ce repère est alors aussi appelé réalisation primaire du système de référence. Par exemple, le repère ICRF (VLBI) est une réalisation primaire du système de référence ICRS dont le catalogue astrométrique Hipparcos est une réalisation primaire dans les longueurs d'ondes optiques (Feissel, Mignard, 1998). A partir de ces points de réalisation primaire, on peut définir l'origine et les axes d'un système de coordonnées. Dans le cas de l'ICRS, l'origine du système de coordonnées est le barycentre du système solaire. Son plan de référence est proche de l'équateur moyen J2000 FK5. Enfin l'origine des ascensions droites du système de référence ICRS a été défini à partir de celle de sa réalisation primaire. Cette origine correspond à l'ascension droite de la source extragalactique 3C273B raccordée avec une incertitude de ± 10 mas à l'origine conventionnelle du FK5 (Arias, 1995 et Folkner, 1994).

3.3.2 Systèmes de référence dynamiques: rappels historiques

Des débuts de l'astrométrie aux premiers catalogues de positions

L'histoire des repères de référence et des catalogues fondamentaux se confond avec celle de l'observation astronomique. En effet, dès l'antiquité et la découverte de la précession par Hipparque, la nécessité d'établir un repère céleste est apparue. La compréhension de la dynamique stellaire connut un essor important avec la découverte par Halley en 1718 de la notion de mouvement propre des étoiles, confirmée par Cassini en 1738.

Mais c'est avec Bradley et ses 60 000 observations de 3200 étoiles effectuées entre 1750 et 1765 à Greenwich que naquit véritablement l'astrométrie moderne, même s'il faudra attendre 1830 et les *Tabulae Regiomontanae* de Bessel pour voir apparaître le premier catalogue fondamental. Entre ces deux époques, émerge la notion de système de référence, appelé système fondamental, système dans lequel on peut décrire les mouvements des objets du système solaire par les lois de la mécanique céleste en accord avec les observations. C'est pourquoi la version achevée et améliorée par Bessel du catalogue d'observations de Bradley (Bessel, *Tabulae Astronomiae*, 1818) fut complétée d'observations diurnes du Soleil en présence de 36 étoiles zodiacales réalisées depuis 1765 par Maskelyne à Greenwich et par Bessel, lui-même, à Königsberg. Ces observations ont permis des déterminations de la position de l'équateur et de celle de l'équinoxe étonnamment proches des valeurs publiées environ vingt-cinq ans plus tard par Newcomb. A ces tables, est jointe une nouvelle détermination de la précession en longitude, améliorant celle de Laplace par l'utilisation d'une nouvelle masse de Vénus.

Entre 1842 et 1872, Peters améliore encore ces estimations ainsi que celle de la nutation en longitude. Il faut attendre 1872 et l'utilisation par Newcomb d'observations de 1098 étoiles zodiacales provenant de sources très diverses et regroupant des observations aussi bien contemporaines qu'issues des observations de Bradley, pour voir l'émergence d'un nouveau système fondamental matérialisé par le *Fundamental Catalogue* de Newcomb (1899) et basé sur une nouvelle valeur de l'équinoxe et une nouvelle estimation de la théorie de la précession. Ce système restera en place jusqu'en 1984 avec l'entrée en vigueur du FK5.

Les catalogues astrométriques modernes: FK3 - FK4 - FK5

Après analyse, il apparaît que l'estimation de l'équinoxe faite par Newcomb était affectée d'erreurs observationnelles importantes notamment dues aux techniques d'enregistrement des instants de passage au méridien avant 1900 et l'apparition des micromètres impersonnels (Kahrstedt, 1931). En ne tenant compte que des observations postérieures à 1900, Kahrstedt obtint une correction sur la valeur de l'équinoxe de Newcomb qui lui permit de recalculer ce système d'un terme constant (égal à 0.050 seconde de degré en 1913) et de pouvoir ainsi en redéfinir l'origine des ascensions droites. Ce système corrigé admet de plus une nouvelle matérialisation, le FK3. Ce catalogue, publié en 1938, comptant un total de 1535 étoiles, est une extension et une amélioration des divers catalogues de l'école astrométrique allemande, notamment du NFK (Peters, 1907), dans lequel les erreurs systématiques provenant d'observations anciennes, essentiellement des équations en magnitude, sont éliminées. Malgré la correction apportée par Kahrstedt à l'équinoxe de Newcomb, la position de l'équateur et les théories de la précession et de la nutation restent inchangées.

Le FK4 s'inscrit dans la continuité du FK3 mais y apporte des compléments non négligeables. En effet, le FK4 est constitué de 1535 étoiles du FK3 révisées auquel est ajouté un catalogue supplémentaire de 1987 étoiles issues principalement du N30 de Morgan (Morgan, 1952) et du Boss GC (Boss, 1937). A partir du FK3 original, ont été identifiées des erreurs systématiques en ascension droite et en déclinaison qui, après correction, permettent la mise en place de la base du FK4. A cette base sont donc ajoutées les 1987 étoiles précédentes. Cette nouvelle réalisation ne modifie pas en profondeur le système fondamental révisé de Newcomb, rendant le système de référence matérialisé par le FK4 compatible avec les théories de la précession, de la nutation et la position de l'équateur déterminées par ce système fondamental.

On voit donc que jusqu'à l'avènement du FK5 aucune grande modification ne fut apportée au système défini par Newcomb. C'est en 1973 que l'amélioration et l'extension du FK4 à des objets de magnitude plus faible – la magnitude visuelle moyenne du FK4 étant de 7.5 – sont

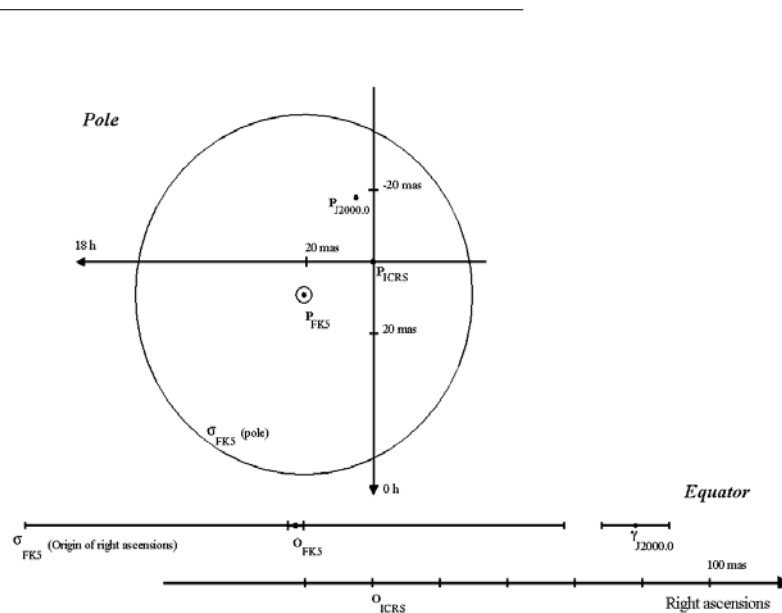


FIG. 3.8: ICRS - Définition de la direction du pôle moyen et de l'équinoxe moyen J2000. Comparaisons avec les valeurs du FK5

officiellement recommandées par l'UAI (UAI transactions, 1974). En fait, cette recommandation reflète l'accélération prodigieuse qu'ont connu les techniques d'observations photographiques et méridiennes entre 1950, 1970 et 1980. Le FK5 sera donc une compilation d'un nombre important de catalogues intermédiaires en plus du FK4, permettant d'atteindre la valeur de 9.5 en magnitude visuelle moyenne par l'addition de 3117 étoiles supplémentaires. On peut citer en exemple, l'AGK3 (catalogue d'étoiles faibles dans l'hémisphère nord) et le SRS (l'équivalent de l'AGK3 dans l'hémisphère sud). C'est dans le cadre du développement du FK5 qu'a été utilisée pour la première fois une écriture analytique des erreurs systématiques d'un catalogue, et cela afin d'utiliser un FK4 "nettoyé" lors de la compilation du FK5. Il faut, de plus, ajouter que les positions issues du FK4 sont affectées par l'effet d'aberration elliptique. Cet effet sera lui aussi éliminé lors de la compilation du FK5.

De cette nouvelle compilation, est issu un nouveau système de référence qui diffère des précédents de façon importante puisqu' y sont liées de nouvelles théories de précession, de nutation ainsi que des nouvelles positions de l'équateur et de l'équinoxe. Fricke montre en 1982 que l'équinoxe varie linéairement avec le temps, ce qui implique une correction non seulement sur les positions mais aussi sur les mouvements propres des étoiles. La théorie de précession de Lieske et al (1977) remplace celle de Newcomb.

ICRS - premier système de référence inertiel

Avec la découverte des quasars dans les années soixante, est apparue la notion d'objets ayant un mouvement propre non détectable, ou tout au moins du même ordre de grandeur que la vitesse d'expansion de l'univers, et donc permettant la mise en place du premier système de référence dont la matérialisation ne serait affectée d'aucune rotation résiduelle. L'ICRF a ainsi été construit sur la base d'observations VLBI de 608 sources extra-galactiques, et a été recommandé en 1991 puis adopté en 1997 comme le nouveau repère du système de référence standard ICRS (International Celestial Reference System), dont le catalogue astrométrique Hipparcos constitue la matérialisation optique. Cette nouvelle réalisation est la première à pouvoir être considérée

comme totalement inertielle (non tournante), contrairement aux réalisations précédentes pour lesquelles des rotations résiduelles induisent le caractère rotationnel. Conformément aux recommandations de l'UAI (Kovalevsky, 1991), l'ICRS est compatible avec le système de référence précédent matérialisé par le FK5. La figure 3.8 permet de visualiser cette compatibilité.

En effet, le plan de référence de l'ICRS est défini par l'intermédiaire de son pôle céleste, P_{ICRS} , dérivé de l'analyse d'observations VLBI (Steppe et al, 1990) avec une précision d'environ 0.1 milliseconde de degré (Feissel, 1990). Il apparaît clairement sur cette figure que cette nouvelle position du pôle est incluse dans le cercle d'incertitude autour de la position du pôle céleste J2000 FK5. Plus qualitativement, le décalage entre la direction du pôle céleste choisi dans ce nouveau repère et celle du pôle moyen J2000 FK5 est inférieur à 20 millisecondes de degré, c'est-à-dire inférieur aux incertitudes du FK5 (de l'ordre de 50 millisecondes de degré) (Arias, 1995). Il y a donc continuité entre ces deux valeurs.

L'autre élément important est l'origine des ascensions droites. Là encore, l'axe horizontal de la figure montre clairement la continuité des valeurs entre l'origine donnée à ± 10 mas (Folkner, 1994) et issue d'observations VLBI et la valeur conventionnelle du FK5 dont l'incertitude atteint ± 80 mas, pour les valeurs les plus optimistes (Fricke, 1982).

L'ICRS est le premier système de référence inertiel cinématique, puisque basé sur un repère non tournant. De ce fait, il a été possible d'estimer avec plus de précision les défauts des systèmes précédents, essentiellement le FK5, non dépourvus de rotations résiduelles. Ces rotations ont deux raisons principales: en premier lieu, grâce à l'analyse de données VLBI et Laser-Lune (LLR) (Charlot, 1995), une erreur de (-3.00 ± 0.05) mas/an sur la constante de précession utilisée dans le FK5 a été mise à jour. Deuxièmement, l'incertitude de 1.5 mas/an sur l'élément dépendant du temps de la correction d'équinoxe apportée par Fricke (1982) induit là encore une rotation résiduelle.

3.3.3 Corrections régionales, zonales et équation en magnitude

Comme nous l'avons vu précédemment, les positions méridiennes sont déterminées à partir d'étoiles de référence, et donc dans un repère dynamique réalisé par le catalogue stellaire utilisé. En un sens, nous pouvons parler de réduction différentielle des données méridiennes, par rapport à la réalisation optique d'un système de référence qu'elle soit faite par l'intermédiaire du Boss GC, du FK3, du FK4 ou du FK5. Nous sommes donc en présence de coordonnées apparentes mais reliées à un référentiel. En fait, ce lien réside dans des erreurs systématiques propres à chaque catalogue. Ce sont donc ces erreurs systématiques qu'il s'agit, dans un premier temps, d'éliminer afin de transformer ces données et de les ramener dans un système de référence plus contemporain.

Par nature, tous les catalogues compilés sont sujets à des erreurs systématiques. En effet, regrouper un grand nombre de positions d'objets stellaires – chacun observé à une fréquence et dans des conditions différentes – dans un seul et unique repère demande une homogénéisation de toutes ces observations. Or cette homogénéisation n'étant pas parfaite, il apparaît des erreurs systématiques sur les (α, δ) des étoiles de référence que nous classerons en trois groupes: les erreurs zonales, qui se définissent comme des erreurs apparaissant uniquement dans une des deux coordonnées, α ou δ , les erreurs régionales, qui transparaissent dans les deux coordonnées, α et δ , et enfin les équations en magnitude qui se définissent comme des erreurs systématiques variant en fonction de la magnitude de l'objet. Ces définitions sont données, par exemple, par Stone (Stone, 1997). Ce sont ces trois types d'erreurs qu'il s'agit d'éliminer.

La méthode la plus efficace est une méthode analytique développée par Schwan (1977, 1988) basée sur le développement en série des différences entre le catalogue d'origine et le catalogue de comparaison (FK4 ou FK5). Voici la description de cette méthode que l'on peut retrouver dans les deux publications de Schwan citées précédemment. Soient Δ , les différences en positions ($\Delta\alpha \cos \delta$, $\Delta\delta$) ou en mouvements propres ($\Delta\mu \cos \delta$, $\Delta\mu'$), moyennes pour une époque de référence donnée. La méthode analytique permet de représenter Δ sous la forme d'un développement de séries:

$$\Delta = \sum_{j=1}^g b_j Y_j$$

où Y_j est le produit normalisé de polynômes d'Hermite, H_p , de Legendre, L_n , et des termes de série de Fourier, F_{ml} .

$$Y_j = R_{pnm} H_p(y(m)) L_n(x(\delta)) F_{ml}(\alpha)$$

$y(m)$ et $x(\delta)$ sont des formes linéaires en magnitude et en déclinaison respectivement:

$$y(m) = c_0 + c_1 m \quad \text{et} \quad x(\delta) = d_0 + d_1 \sin \delta$$

Ces coefficients c_0 , c_1 , d_0 , et d_1 sont directement fonction des distributions en magnitude ($\langle m \rangle$, σ_m) et en déclinaison (δ_{min} , δ_{max}) des étoiles utilisées pour la comparaison des deux catalogues. Ainsi la représentation analytique des différences systématiques entre deux catalogues, sera fonction de ces distributions, mais aussi du degré du développement en terme polynômial et des coefficients b_j de ce même développement. L'intérêt d'une telle méthode est de pouvoir décrire les erreurs systématiques d'un catalogue comme des fonctions des positions et des magnitudes des étoiles de comparaison et non plus comme des valeurs tabulées pour chaque α , δ et m (écriture classique), de pouvoir moduler la précision de l'estimation par le degré de développement des termes polynômiaux et enfin de permettre un calcul rapide et adaptable à n'importe quel catalogue, puisque une fois les différences entre les catalogues calculées, la procédure reste la même.

C'est cette méthode qui fut utilisée par l'USNO pour transformer les données du 6-inch et du 9-inch exprimées dans les repères des catalogues de l'USNO dans le FK4. De même, les données fournies par l'IAAS le sont dans le FK4. Nous avons appliqué cette méthode pour éliminer les erreurs systématiques du FK4 par rapport au FK5 dans les observations méridiennes (et photographiques) exprimées dans le FK4, en prenant soin d'encadrer l'algorithme précédent, d'un passage repère apparent - repère moyen B1950 (choisi comme époque de comparaison) et inversement, passage nécessaire pour la comparaison entre deux systèmes de référence.

3.3.4 Correction d'équinoxe

Par ailleurs, le passage du système de référence réalisé par le FK4 à celui du FK5 n'induit pas uniquement une correction d'erreurs systématiques, comme se fut en général le cas pour les systèmes de référence antérieurs. Il faut aussi tenir compte de corrections liées à la définition même d'un système par rapport à l'autre. En effet, nous savons que pour définir un système de référence dynamique, il faut se donner un équateur moyen à une époque de référence, un équinoxe ainsi qu'une théorie de la précession et de la nutation de l'ensemble. Ainsi, si l'on veut passer d'un système de référence à un autre, il faut revenir à la définition de chacun des systèmes afin de tenir compte d'éventuelles différences. Dans le cas des coordonnées apparentes, donc définies dans un repère vrai de la date, seules les différences entre les équinoxes et leurs

déplacements au cours du temps interviennent. Dans le cas du passage FK4 / FK5, le décalage entre l'équinoxe du FK4 et celui du FK5, ΔE , et son mouvement, $\Delta \dot{E}$, a été évalué par Fricke (1985), après compilation de plusieurs autres déterminations, à $\Delta E = 0.525$ seconde de degré et $\Delta \dot{E} = 1.275$ seconde de degré par siècle.

Dans ce cas, on passe de coordonnées apparentes FK4, notées $(\alpha_{FK4}^A, \delta_{FK4}^A)$, aux coordonnées $(\alpha_{FK5}^A, \delta_{FK5}^A)$, par les relations:

$$\begin{cases} \alpha_{FK5}^A = \alpha_{FK4}^A + \Delta E + \Delta \dot{E} T \\ \delta_{FK5}^A = \delta_{FK4}^A \end{cases}$$

avec $T = (JD_{obs} - B1950)$, (Fricke, 1985). On obtient ainsi des coordonnées apparentes FK5, dégagées des erreurs systématiques du FK4.

Dans le cas des données photographiques, qui sont à l'origine exprimées dans les repères astrométriques J2000 FK5 ou B1950 FK4, il faudra rajouter dans le passage FK4 / FK5, les termes liés au changement de théories de la précession et de la nutation opéré entre ces deux systèmes. Nous utiliserons pour cela l'algorithme de Yallop (1989) comme nous le verrons plus loin.

3.3.5 Passage entre repère apparent FK5 et repère astrométrique J2000 FK5

On applique à ce niveau les rotations classiques de précession et de nutation, ainsi que les corrections d'aberrations annuelle et diurne, et de déflexion des rayons lumineux détaillées dans la première partie de ce travail.

3.3.6 Passage du repère J2000 FK5 au repère ICRF 2000

Là encore, cette transformation va se faire en deux temps.

Rotations globales

Une étude basée sur les différences (FK5 - Hipparcos / ICRS) en position et en mouvement propre entre les étoiles du FK5 et les mêmes étoiles issues du catalogue Hipparcos, réalisation optique de l'ICRF, a permis d'établir un double système de rotations permettant le raccordement du FK5 à l'ICRS. Ce double système a été obtenu par décomposition de ces vecteurs différences en harmoniques orthogonales, dont il constitue le premier degré, les degrés supérieurs modélisant les effets de zones. Le premier niveau de ce système correspond au passage de la direction du pôle céleste défini par le FK5 à celle du pôle de l'ICRF, ainsi que le passage de la direction de l'origine des ascensions droites du FK5 à celle de l'ICRF. Ces deux rotations constituent une rotation directe d'un repère vers l'autre. De plus, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, des rotations résiduelles ont été mises en évidence dans le FK5. Ceci constitue le deuxième niveau de rotation (Mignard, Froeschlé, 1997). Les angles de ce système de rotation et leur dérivées par rapport au temps sont présentées dans la table 3.2 (Feissel et Mignard, 1998). Grâce à ces deux rotations, on peut considérer que le FK5 est raccordé à l'ICRF et donc que les positions observées sont exprimées dans un système de référence cinématique inertiel.

Erreurs régionales et zonales

A ces modifications globales, s'ajoutent des corrections plus locales à savoir la détection d'erreurs systématiques régionales ou zonales. Grâce à des observations CCD de 689 étoiles FK5 et

	Orientation (mas)		Spin (mas/an)	
	J2000	σ		σ
ϵ_X	-19.9	2.3	ω_X	-0.30 0.27
ϵ_Y	-9.1	2.3	ω_Y	0.60 0.27
ϵ_Z	22.9	2.3	ω_Z	0.70 0.27

TAB. 3.2: *Orientation et Spin entre le FK5 et l'ICRF issus de Feissel et Mignard (1998)*

des réductions par rapport à des sources extra-galactiques, références de l'ICRF, Stone (1997) a pu estimer ces erreurs. Les estimations ainsi produites sont en accord avec celles déduites de la réduction du catalogue Hipparcos que l'on pourra retrouver entre autres dans Lindegren et Kovalevsky (1995). Nous en avons extrait les grandes tendances et avons appliqué les corrections qui en découlent

Les erreurs zonales extraites de Stone (1997) sont:

- Pour $2^h \leq \alpha \leq 8^h$, $\langle \Delta\alpha \cos \delta \rangle = 55$ millisecondes de degré
- Pour $-30^\circ \leq \delta \leq 30^\circ$, $\langle \Delta\delta \rangle = 65$ millisecondes de degré
- Pour $\delta \sim 50^\circ$, $\langle \Delta\delta \rangle = 50$ millisecondes de degré

L'estimations des erreurs régionales est présentée ci-dessous:

1. Dans la région délimitée par $5^h \leq \alpha \leq 9^h$:
 - pour $-30^\circ \leq \delta \leq -20^\circ$, on a $\langle \Delta\alpha \cos \delta \rangle = 100$ mas et $\langle \Delta\delta \rangle = 100$ mas.
 - pour $-20^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$, on a $\langle \Delta\alpha \cos \delta \rangle = 100$ mas et $\langle \Delta\delta \rangle = 75$ mas.
2. Dans la région délimitée par $10^h \leq \alpha \leq 12^h$, on a :
 - pour $-30^\circ \leq \delta \leq -20^\circ$, on a $\langle \Delta\alpha \cos \delta \rangle = -75$ mas et $\langle \Delta\delta \rangle = 125$ mas.
 - pour $-20^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$, on a $\langle \Delta\alpha \cos \delta \rangle = -30$ mas et $\langle \Delta\delta \rangle = 125$ mas.
3. Dans la région délimitée par $5^h \leq \alpha \leq 8^h$ et $0^\circ \leq \delta \leq +10^\circ$, on a $\langle \Delta\alpha \cos \delta \rangle = 100$ mas et $\langle \Delta\delta \rangle = 75$ mas.
4. Dans la région délimitée par $9^h \leq \alpha \leq 18^h$ et $0^\circ \leq \delta \leq +10^\circ$, on a $\langle \Delta\delta \rangle = 150$ mas.
5. Dans la région délimitée par $12^h \leq \alpha \leq 18^h$ et $+10^\circ \leq \delta \leq +30^\circ$, $\langle \Delta\delta \rangle = 50$ millisecondes de degré

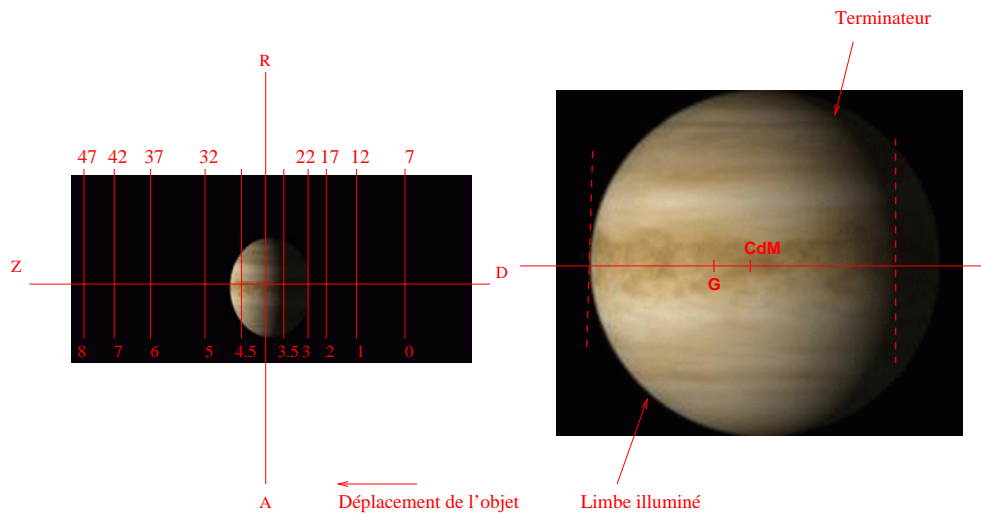


FIG. 3.9: *A droite: Vénus observée au travers d'un micromètre type Cooke TC installé sur l'instrument méridien du Royal Greenwich Observatory. Le système observe vers le Sud. A gauche, configuration géométrique de la phase de Vénus*

3.4 Effet de phase

Le but d'une observation de planète est d'obtenir la position apparente du centre de masse de l'objet. Malheureusement, on n'observe pas ce point directement, mais, dans le cas d'objets présentant un diamètre apparent, une surface. Le point observé correspond alors au barycentre photométrique, appelé *photocentre* de l'objet. Or, pour un angle de phase non nul, les contours de l'objet ne sont pas clairement définis du fait de l'assombrissement du limbe, de la dégradation du *seeing* et autres. De ce fait, il devient nécessaire d'estimer la correction permettant de passer de la position P du photocentre, mesurée par des techniques spécifiques à chaque type d'observations, à celle P_o du centre de masse de la planète.

Ici, seront exposées les différentes corrections d'effets de phase à proprement parler, c'est-à-dire de déplacement photocentre-centre de masse de l'objet dû, d'une part, aux configurations planète-Terre-Soleil et d'autre part, aux inhomogénéités et aux caractéristiques des surfaces planétaires, ces corrections étant *a priori* indépendantes du type d'observations utilisé pour l'obtention de la position du photocentre. Enfin, par le biais d'analyses en fréquence des résidus, on montrera sur un exemple concret, les observations méridiennes réalisées à l'U.S. Naval Observatory, que les corrections classiques sont insuffisantes. D'autres corrections seront alors appliquées en complément ou à la place des modèles classiques.

Passage photocentre - centre de masse : correction classique

La correction de phase géométrique classique est basée sur la méthode exposée dans l'Explanatory Supplement of to the Astronomical Ephemeris (1961) et consiste en une estimation tabulée du diamètre apparent de l'objet au moment de l'observation corrigée de la phase géométrique. Empiriquement, ces corrections tabulées que l'on peut retrouver dans les appendices

des publications de l'USNO, notamment dans le volume IV, appendice II, s'écrivent:

1. Pour des mesures directes du photocentre de Mercure et Vénus, on a:

– Pour Mercure:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -\frac{s}{r} \sin \Theta (1 - \cos i) \frac{(5 + \cos i)}{12} \\ \Delta\delta = -\frac{s}{r} \cos \Theta (1 - \cos i) \frac{(5 + \cos i)}{12} \end{cases}$$

où $\frac{s}{r}$ représente le diamètre apparent de l'objet, i est l'angle de phase, et Θ est telle que si l'on appelle Q l'angle de position de l'équateur d'intensité alors $Q = \Theta + \pi$.

– Pour Vénus:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -\frac{s}{r} \operatorname{sgn}(\sin \Theta) [1 - \sqrt{1 - (\sin i \sin \Theta)^2}] / 2 \\ \Delta\delta = -\frac{s}{r} \operatorname{sgn}(\cos \Theta) [1 - \sqrt{1 - (\sin i \cos \Theta)^2}] / 2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Cette formule permet de calculer le décalage entre le centre de masse, CdM, et le point G de la figure 3.9, c'est-à-dire le milieu du segment reliant les tangentes au terminateur et au limbe illuminé. Nous rappelons que sgn indique le signe de l'expression qui lui est affectée. Par exemple, si $\cos \Theta$ est négatif alors $\operatorname{sgn}(\cos \Theta) = -1$.

2. Si seul le limbe illuminé est mesuré, alors la correction de phase géométrique s'écrit:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -\frac{s}{r} \operatorname{sgn}(\sin \Theta) \\ \Delta\delta = -\frac{s}{r} \operatorname{sgn}(\cos \Theta) \end{cases}$$

3. Dans le cas où le limbe illuminé et le terminateur sont observés pour des planètes autres que Vénus, en particulier Jupiter et Saturne, la géométrie reste identique à celle de la figure 3.9 et donc la forme de la correction est la même que celle de l'équation 3.4, à ceci près qu'un facteur d'échelle est ajouté afin d'inclure dans la correction de la phase géométrique celle du diamètre apparent observé.

Dans les cas d'observations du photocentre, les corrections décrites précédemment, n'ayant qu'un caractère purement géométrique, sont aussi utilisées dans le cas d'observations photographiques du photocentre, c'est-à-dire pour lesquelles une correction de phase photographique - traitement de la sous-exposition ou de la sur-exposition de la plaque photographique dans la détermination du photocentre - a déjà été effectuée. Nous avons analysé l'efficacité de ces corrections par le biais d'analyses spectrales des résidus des observations. Ceci nous a permis, dans un premier temps, de mettre en évidence les insuffisances des divers algorithmes utilisés et, dans un deuxième temps, de compléter ou de remplacer ces corrections par des modèles de phase plus adaptés à la nature des objets observés.

Correction des effets de phase: quelques autres modèles possibles

Nous ne présenterons pas ici l'ensemble des corrections de phase existantes mais nous essaierons de présenter celles les plus susceptibles de s'appliquer au cas des planètes d'une part et des satellites d'autre part.

En général, les corrections appliquées aux observations du photocentre des planètes sont basées sur des considérations purement géométriques, sur la taille et la forme du croissant. Peu de cas

est fait des défauts de brillance de la surface lumineuse.

Pour une sphère homogène, les caractéristiques de surface sont données par la fonction de diffusion S , liant l'intensité I du flux réfléchi et la densité F du flux incident par la relation :

$$I(\mu, \mu_0, \Psi - \Psi_0) = \frac{F}{4\mu} S(\mu, \mu_0, \Psi - \Psi_0)$$

où μ, Ψ sont, respectivement, les cosinus de l'angle de réflexion et d'azimut des rayons réfléchis, les quantités μ_0 et Ψ_0 étant leurs équivalents pour les rayons incidents. Sous l'hypothèse que la planète est une sphère homogène, on peut estimer le décalage entre le photocentre P et le centre de masse P_0 par (Lindgren, 1977):

$$|P - P_0| = C s \sin \frac{i}{2}$$

Ce qui revient à :

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -C s \sin \frac{i}{2} \sin Q \\ \Delta\delta = -C s \sin \frac{i}{2} \cos Q \end{cases} \quad (3.5)$$

avec s , le rayon apparent de l'objet, C , une fonction de l'angle de phase i dérivée de la fonction de diffusion S et Q , l'angle de position de l'équateur d'intensité par rapport à la direction du pôle nord céleste. A chaque type de corps réfléchissant, il peut correspondre une loi de diffusion.

- Pour les corps très brillants et très diffusants, en général les corps possédant une atmosphère, comme Vénus, une loi de type loi de Lambert est conseillée. Cette loi s'écrit :

$$S = \mu_0$$

C s'écrit:

$$C = \frac{3\pi}{4} \frac{\cos^3(\frac{i}{2})}{\sin i + (\pi - i) \cos i}$$

- Pour les corps à surface lunaire, comme Mercure, on préférera la loi de Lommel-Seeliger qui à partir d'une loi de diffusion de forme:

$$S = \frac{R\mu\mu_0}{\mu + \mu_0}$$

où R est une fonction de i permet d'écrire:

$$C = \frac{2}{3\pi} [\sin i + (\pi - i) \cos i] \left[\cos(\frac{i}{2}) - \sin^2(\frac{i}{2}) \ln(\cot(\frac{i}{4})) \right]$$

- La loi de Minnaert traite le problème de la phase des satellites. C'est une loi empirique générale à deux paramètres, B_0 et k , fonctions de l'angle de phase et de la longueur d'onde. Elle s'exprime sous la forme:

$$S = B_0(i) \mu_0^{k(i)} \mu^{k(i)-1}$$

et

$$C = \frac{2k+1}{2k+2}$$

k est le paramètre de Minnaert d'assombrissement du limbe. Pour $k = 0.5$, la surface du corps correspond à une surface de type lunaire ne présentant pas d'assombrissement à phase nulle et $k = 1$ correspond à des surfaces diffusantes comme Jupiter ou Saturne présentant un fort assombrissement du limbe. Cependant, pour des angles de phase supérieurs à 30 degrés (ce qui est souvent le cas pour les planètes intérieures) le paramètre k n'est plus unique (Goguen, 1981). Ce qui limite l'application de cette loi à Jupiter et Saturne pour lesquelles $C = 0.843$ dans le visible, et plus particulièrement à leur satellites pour lesquels les coefficients de Minnaert commencent à être bien connus. C'est cette loi que nous utilisons dans notre correction de phase des satellites de Jupiter et Saturne.

Malheureusement, dans le cas des planètes, une correction du type de l'équation 3.5 est insuffisante et des résidus d'effets de phase sont encore détectables (Clemence, 1943, Ash, 1967). On ajoute alors au système initial des termes harmoniques du type:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -C s \sin Q [C_1 \sin \frac{i}{2} + C_2 \sin^2 \frac{i}{2} + \dots] \\ \Delta\delta = -C s \cos Q [C_1 \sin \frac{i}{2} + C_2 \sin^2 \frac{i}{2} + \dots] \end{cases} \quad (3.6)$$

Les paramètres C_1, C_2, \dots, C_n sont à calculer, soit directement dans les équations de conditions de l'ajustement de l'orbite de la planète, soit, et cela sous l'hypothèse que les coefficients de corrections de phase sont non corrélés avec les autres paramètres de l'orbite (Lindgren, 1977, Hough, 1915), dans un ajustement local sur les résidus entre les positions observées et les positions issues de la théorie VSOP87, par exemple. On justifie l'équivalence des deux méthodes par le fait que les observations choisies pour l'ajustement sont suffisamment nombreuses et bien réparties pour assurer la non-corrélation entre les paramètres C_1, C_2, \dots, C_n et les paramètres d'orbites.

Pour Jupiter, l'hypothèse d'un corps sphérique n'est plus acceptable. C'est pourquoi, un élément d'aplatissement $e = 0.34$ est ajouté à l'équation 3.5 et sous l'hypothèse que l'inclinaison de Jupiter sur son orbite est faible, on a:

$$\begin{cases} -\Delta\alpha \cos \delta = C s \sin Q \sin \frac{i}{2} + 0.015 s \sin 2\delta_E \sin P \\ -\Delta\delta = C s \cos Q \sin \frac{i}{2} + 0.015 s \sin 2\delta_E \sin P \end{cases}$$

où δ_E est la déclinaison planétocentrique de la Terre et P l'angle de position du pôle nord de la planète par rapport à la direction du pôle nord céleste. A cette correction, sont susceptibles d'être ajoutés des développements du type de l'équation 3.6.

Dans le cas de Jupiter, les modèles développés par Toulmonde (Toulmonde, 1994) et Chollet (Chollet, 1984) ont été testés. Ces modèles, développés à l'occasion d'observations planétaires à l'astrolabe, font appel principalement à des considérations géométriques, à la nature de l'assombrissement du limbe et à un ajustement des paramètres du modèle de Jupiter sur des observations. Ces observations ont été réalisées à l'astrolabe en décembre 1965 et janvier 1967 (Débarbat et Grudler, 1973). Si on note d , l'abscisse du photocentre de la planète sur l'équateur d'intensité par rapport au centre de masse de l'objet, cette abscisse peut s'écrire:

$$d = \frac{\int \int_D x \cdot I \, dx \, dy}{\int \int_D I \, dx \, dy}$$

où I est l'intensité réfléchiée en un point $M(x, y)$ à la surface de la planète dans un repère planétocentrique, dont l'axe Oz est orienté vers la Terre et est perpendiculaire au plan de l'équateur d'intensité décrit par Ox et Oy . Après analyse des isophotes issues d'observations photographiques (Lecacheux, 1969), un modèle d'intensité, dit MT4, a été développé sous la forme:

$$I = (\cos s \cdot \cos t)^k$$

L'idée est ici d'ajuster le paramètre k aux observations précédentes. Pour cela, les deux intégrales précédentes sont calculées numériquement, puis d . Dans le cas de Jupiter, une expression très bien approchée de d est donnée par un polynôme de degré 3 en i de la forme:

$$d = s \sin\left(\frac{i}{2}\right) + (C_1 + C_2i + C_3i^2 + C_4i^3)$$

avec C_1, C_2, C_3, C_4 fournis par ajustement sur les observations de Débarbat et Grudler. Ce formalisme est proche de celui utilisé par le JPL. Pour Saturne, les déplacements photocentre-centre de masse semblent être corrélés à la position planétocentrique des anneaux du fait des ombres portées sur la sphère ou des intersections des anneaux avec les limbes nord et sud. De ce fait, seul un ajustement du type de l'équation 3.6 est envisageable.

3.4.1 Analyse Spectrale: théorie

Pour effectuer les analyses spectrales des résidus, nous avons utilisé le logiciel de réduction astronomique MIDAS, et sa librairie TSA (Time Series Analysis). Cette librairie contient un ensemble de programmes destinés à l'origine à l'analyse spectrale des images CCD mais dont les applications sont nombreuses, notamment sur l'analyse de résidus issus de comparaisons entre les positions observées et les positions calculées à partir de VSOP87. Plusieurs méthodes d'analyse sont proposées, allant du calcul de périodogramme classique aux algorithmes d'analyse de variance des phénomènes catastrophiques. Pour nos données, caractérisées essentiellement par une distribution non également répartie des observations au cours du temps, la détection est ciblée sur des signaux périodiques et se place dans l'espace des fréquences. L'algorithme répondant le mieux à ces caractéristiques est celui développé par Scargle (1982) qui est une version plus élaborée de l'analyse classique en périodogramme. La statistique de Scargle fait appel à une représentation purement sinusoïdale du signal et utilise la statistique de l'analyse en fréquence classique normée par la variance des données originales.

Rappelons les principes de la transformée de Fourier discrète sur des données également réparties. Soit un échantillon de données, $X(t_j)$, $j = 1..N_0$. La transformée de Fourier discrète calculée pour une fréquence ω est définie par:

$$FT_X(\omega) = \sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \exp(-i\omega t_j)$$

Le périodogramme classique est alors:

$$P_X(\omega) = \frac{1}{N_0} |FT_X(\omega)|^2 = \frac{1}{N_0} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \cos \omega t_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \sin \omega t_j \right)^2 \right]$$

Il peut être estimé pour chaque fréquence ω . Ainsi, si l'échantillon contient une composante sinusoïdale de fréquence ω_0 alors à $\omega = \omega_0$, les termes en X et en exponentielle sont en phase et apportent une contribution majeure à la somme et engendrent un pic dans le périodogramme. Les principaux inconvénients de ce type d'algorithme résident dans la propagation extrêmement rapide du bruit et de l'apparition d'*aliasing* (ou pics fantôme) dans le périodogramme due essentiellement à la grille de l'échantillonnage. Le passage à une analyse spectrale sur des données non également réparties se fait par l'intermédiaire de l'algorithme de Scargle qui consiste à remplacer le périodogramme vu précédemment par la forme:

$$P_X(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \cos[\omega(t_j - \tau)])^2}{(\sum_{j=1}^{N_0} \cos^2[\omega(t_j - \tau)])} + \frac{(\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \sin \omega(t_j - \tau))^2}{(\sum_{j=1}^{N_0} \sin^2[\omega(t_j - \tau)])} \right]$$

où τ est défini par :

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_{j=1}^{N_0} \sin(2\omega t_j)}{\sum_{j=1}^{N_0} \cos(2\omega t_j)}$$

Ce nouveau périodogramme conserve les mêmes propriétés statistiques et d'invariance que le périodogramme classique. De plus, il correspond à la minimisation des carrés lors de l'ajustement par moindres carrés d'un signal sinusoïdal sur un échantillon quelconque de données. En effet, soit $X_f(t_j) = A \cos \omega(t_j - \tau) + B \sin \omega(t_j - \tau)$ et soit $X(t_j)$, un ensemble de données à l'instant t_j . Le principe de l'ajustement par moindres carrés de $X_f(t)$ à $X(t)$ consiste alors à minimiser la quantité $E(\omega) = \sum_{j=1}^{N_0} [X(t_j) - X_f(t_j)]^2$. A et B sont déterminés par des moindres carrés linéaires, contrairement à ω . En effet, après le calcul de A et B , on obtient une quantité $E_{min}(\omega)$ qui doit être alors minimisée en fonction de ω . Cela revient à chercher le maximum de :

$$\Delta E(\omega) = \sum_{j=1}^{N_0} [X(t_j)]^2 - E_{min}(\omega)$$

Supposons que l'on puisse trouver τ tel que $\sum_{j=1}^{N_0} \cos[\omega(t_j - \tau)] \sin[\omega(t_j - \tau)] = 0$ alors $\Delta E(\omega)$ s'écrit (Lomb, 1976) :

$$\Delta E(\omega) = \frac{(\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \cos[\omega(t_j - \tau)])^2}{\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \cos^2[\omega(t_j - \tau)]} + \frac{(\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \sin[\omega(t_j - \tau)])^2}{\sum_{j=1}^{N_0} X(t_j) \sin^2[\omega(t_j - \tau)]}$$

Autrement dit, le maximum de $\Delta E(\omega)$ est atteint avec la fréquence qui minimise la somme des moindres carrés des résidus de l'ajustement des données à la sinusoïde.

On a donc bien détection d'un signal sinusoïdal par maximisation du nouveau périodogramme. Les effets de fenêtrage ont été analysés avant chaque détection de signal par analyse spectrale de la grille de fenêtrage.

La détermination précise des fréquences se fait par déconvolution du signal. On effectue un ajustement itératif de séries de Fourier par moindres carrés non linéaires. Autrement dit, on minimise la statistique calculée par l'algorithme de Scargle. On obtient ainsi un ajustement de la fréquence et des coefficients de Fourier: une estimation de la signification de la détection par l'intermédiaire de l'erreur sur la fréquence ajustée et une table de résidus permettant une analyse spectrale du signal déconvolué. De nouvelles détections sont alors possibles. Ces algorithmes de déconvolution et de détection des fréquences sont issus des travaux de Lomb (1976) et Scargle (1982) sur l'ajustement par moindres carrés non linéaires de signaux sinusoïdaux sur des données non également réparties. Les périodogrammes présentés dans la suite seront donc issus d'une analyse spectrale réalisée à l'aide de l'algorithme de Scargle et les estimations des fréquences ainsi que les erreurs sur ces estimations seront calculées selon la méthode de Lomb.

3.4.2 Résultats

Nous avons appliqué la méthode d'analyse spectrale décrite précédemment aux résidus issus de comparaisons entre les observations réalisées entre 1914 et 1994 et les positions calculées à partir de la théorie planétaire VSOP87. Le choix de ces séries d'observations est justifié par la qualité de ces données et l'étendue de la période d'observations. De plus, l'effet de phase ayant

Sans Unite

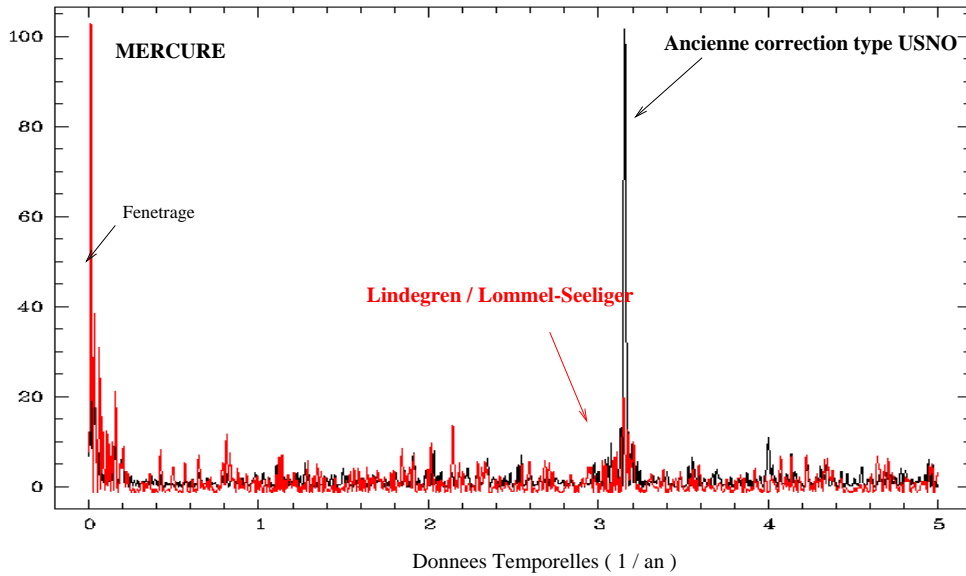


FIG. 3.10: Périodogrammes des résidus en ascension droite obtenus par comparaison entre les positions de Mercure calculées à partir de VSOP87 et celles observées à l'U.S. Naval Observatory puis corrigées, d'une part, par la méthode classique de l'Explanatory Supplement of American Ephemeris (en noir) et, d'autre part, avec les modèles de Lindegren et Lommel-Seeliger (en rouge)

un impact significatif principalement en ascension droite, nous avons porté un intérêt particulier aux périodogrammes des résidus en α . D'autre part, différents modèles et solutions étaient possibles : conserver ou enlever les corrections originales, utiliser un modèle d'ordre plus ou moins important, etc. La stratégie que nous avons suivie a été de ne conserver que les corrections permettant d'éliminer au maximum les pics de fréquences correspondant aux fréquences synodiques des planètes. Voici les solutions que nous avons obtenues.

Mercure

L'analyse spectrale des résidus calculés à partir de positions dont la phase géométrique a été estimée par la méthode classique de l'USNO fait apparaître un pic important de fréquence $3.15437 \pm 6.10^{-4} \text{ an}^{-1}$, correspondant à 115.79 ± 0.022 jours. Ce pic de fréquence correspond bien à la période synodique de Mercure et donc à un effet de phase géométrique mal corrigé.

A la vue de l'importance de cette erreur systématique et des variations importantes de l'angle de phase de Mercure sur son orbite, nous avons fait le choix de supprimer les corrections appliquées à l'origine par les observateurs et d'appliquer une autre correction de phase. Cette correction de phase géométrique est tirée des travaux de Lindegren (Lindegren, 1977) sur les observations méridiennes des planètes par micromètre photoélectrique décrits au paragraphe précédent. Dans le cas de Mercure, nous avons utilisé un modèle ajusté d'ordre 2, c'est-à-dire de la forme :

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -C s \sin \frac{i}{2} \sin Q [1 + C_1 + C_2 \sin^2(\frac{i}{2})] \\ \Delta\delta = -C s \sin \frac{i}{2} \cos Q [1 + C_1 + C_2 \sin^2(\frac{i}{2})] \end{cases}$$

où C est l'indice de réflectivité de surface et C_1, C_2 sont ajustés sur les résidus issus des com-

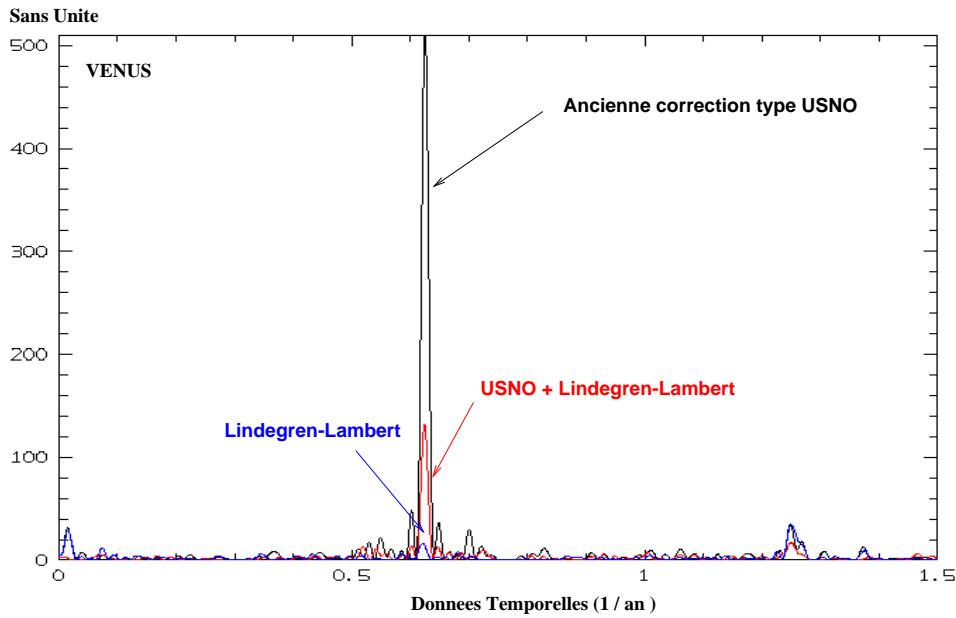


FIG. 3.11: Périodogrammes des résidus en ascension droite obtenus par comparaison entre les positions de Vénus calculées à partir de VSOP87 et celles observées à l'U.S. Naval Observatory puis corrigées, d'une part, par la méthode classique de l'Explanatory Supplement of American Ephemeris (en noir) et, d'autre part, avec les modèles de Lindegren et Lambert (en rouge)

paraisons entre les observations réalisées entre 1914 et 1982 et les positions calculées à l'aide de VSOP87. Nous avons choisi comme loi de réflectivité de surface, la loi de Lommel-Seeliger, qui correspond à une surface sans atmosphère, très proche de la surface lunaire, comme c'est le cas de la surface de Mercure.

Nous avons ensuite effectué une analyse spectrale de ces mêmes résidus obtenus à partir des positions corrigées uniquement de l'effet de phase géométrique par le modèle de Lindegren et la réflectivité de Lommel-Seeliger et nous avons comparé, figure 3.10, ce périodogramme à celui issu de l'analyse précédente. Nous voyons clairement que le pic correspondant à la fréquence synodique est nettement diminué grâce à la nouvelle correction de phase. L'ordre du modèle est choisi égal à 2 car utiliser un ordre supérieur n'ajoute, ici, rien à la diminution du pic de fréquence.

Vénus

L'analyse spectrale des résidus calculés à partir de positions dont la phase géométrique a été estimée par la méthode classique de l'USNO fait apparaître un pic important de fréquence $0.62500 \pm 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ an}^{-1}$, ce qui correspond à 584.4 ± 0.022 jours. Ce pic de fréquence correspond bien à la période synodique de Vénus et donc à un effet de phase géométrique mal corrigé.

Là encore, et pour les mêmes raisons que pour Mercure, nous avons fait le choix de supprimer les corrections appliquées à l'origine par les observateurs et d'appliquer une autre correction de phase. Dans le cas de Vénus, nous avons utilisé un modèle ajusté d'ordre 4, c'est-à-dire de la

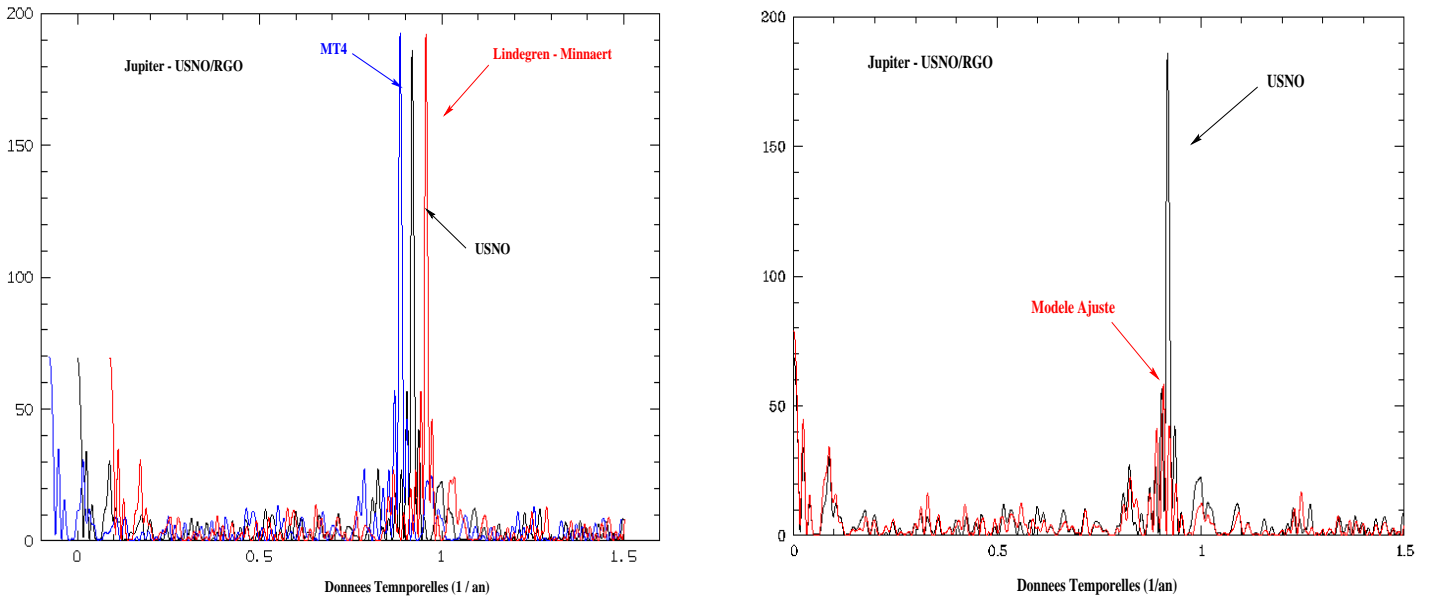


FIG. 3.12: Périodogrammes des résidus en ascension droite obtenus par comparaison entre les positions de Jupiter calculées à partir de VSOP87 et celles observées à l'U.S. Naval Observatory et au Royal Greenwich Observatory puis corrigées, par la méthode classique de l'Explanatory Supplement of American Ephemeris (en noir), avec les modèles de Lindegren-Minnaert (en rouge), le modèle de Toulmonde-Chollet, MT4, et notre modèle ajusté.

forme:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = -C s \sin \frac{i}{2} \sin Q \left[1 + C_1 + C_2 \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + C_3 \sin^3\left(\frac{i}{2}\right) + C_4 \sin^4\left(\frac{i}{2}\right) \right] \\ \Delta\delta = -C s \sin \frac{i}{2} \cos Q \left[1 + C_1 + C_2 \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) + C_3 \sin^3\left(\frac{i}{2}\right) + C_4 \sin^4\left(\frac{i}{2}\right) \right] \end{cases}$$

où C est l'indice de réflectivité de surface et C_1, C_2 sont ajustés sur les résidus. Nous avons choisi comme loi de réflectivité de surface, la loi de Lambert, qui correspond à une surface très diffusante, en général avec atmosphère. Le même processus a ensuite été suivi et une comparaison de périodogrammes, *cf.* fig 3.11, nous permet de montrer qu'une correction d'ordre 4 avec un indice de réflectivité issu de la loi de Lambert assure une très bonne correction des effets de phase de Vénus. Nous avons testé l'intérêt d'enlever les corrections appliquées par les observateurs en partant de l'idée que si l'on utilisait un modèle comme celui de Lindegren, un ajustement de ce modèle sur des données mal corrigées permettrait d'*absorber* les erreurs systématiques présentes. Or, comme on le voit sur la figure 3.11, dans le cas de Vénus, il n'en est rien et il est plus efficace d'enlever l'ensemble des corrections réalisées précédemment et d'appliquer une nouvelle correction. Nous verrons que cette remarque n'est plus vraie en ce qui concerne les planètes géantes.

Jupiter

L'analyse spectrale des résidus calculés à partir de positions dont la phase géométrique a été estimée par la méthode classique de l'USNO fait apparaître un pic important de fréquence $0.9187 \pm 2.89 \cdot 10^{-4} \text{ an}^{-1}$, ce qui correspond à 397.552 ± 0.125 jours. Ce pic de fréquence correspond, au bruit près, à la période synodique de Jupiter et donc à un effet de phase géométrique mal corrigé.

Dans le cas de Jupiter, le problème diffère de celui des planètes intérieures. En effet, l'amplitude des angles des phases est limitée à 11 degrés, ce qui en conséquence limite celle des décalages systématiques entre photocentre et centre de masse. Cette limitation d'amplitude a donc rendu moins nécessaire l'élimination des corrections initiales qui, à ce degré de correction, en sont de bonnes approximations. Nous avons cependant testé plusieurs modèles en complément et en substitution des corrections initiales par analyse spectrale des résidus. D'autre part, la nature des observations est plus variée que dans le cas des observations de Mercure et Vénus. En effet, dans le cas de Jupiter, mais aussi de Saturne, sont incluses dans nos données des observations photographiques.

Dans un premier temps, dans le cas des observations méridiennes, nous avons éliminé les corrections appliquées par les observateurs et avons appliqué deux modèles indépendants: le modèle de Lindegren adapté à Jupiter sans terme polynômial, et le modèle de Toulmonde et Chollet d'ordre 4 décrit plus haut.

Le résultat de l'analyse spectrale dans le cas des observations méridiennes réalisées à l'USNO et au RGO est présenté sur la figure 3.12 regroupant les périodogrammes issus des comparaisons entre VSOP87 et les positions originales (en noir), les positions corrigées par le modèle de Lindegren (en rouge) et celui de Toulmonde-Chollet en bleu. On voit, sur les graphes 3.12 que quel que soit le modèle utilisé, si l'on ne fait intervenir aucun élément d'ajustement dans le modèle, les résultats sont sensiblement identiques. Et donc l'efficacité des deux modèles alternatifs à la correction classique n'est pas démontrée.

Face à ce résultat, l'alternative a donc été de conserver la correction appliquée à l'origine et d'appliquer une correction complémentaire empirique de la forme:

$$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta = \cos Q B_k \sin 2i \\ \Delta\delta = \sin Q B_k \sin 2i \end{cases}$$

Cette expression est identique à celle utilisée par le Jet Propulsion Laboratory dans son traitement des effets de phase des planètes géantes (Standish, 1990). D'autre part, elle présente l'avantage de pouvoir être ajustée aussi bien sur des résidus issus d'observations méridiennes que d'observations photographiques. Le résultat de l'analyse spectrale réalisée sur les observations méridiennes après l'application de ce formulaire est présenté dans la figure 3.12. On voit sur cette figure l'amélioration apportée par ce formalisme empirique. Cette amélioration peut s'expliquer par le fait que l'angle de phase étant moins important que dans le cas des planètes intérieures, un soin moins grand a pu être apporté à ces observations ce qui expliquerait pourquoi il est plus difficile d'ôter la correction originale pour en appliquer une autre. Le même ajustement a été effectué sur les données photographiques dont nous ne présentons pas d'analyse spectrale vu le faible nombre d'observations (275).

Saturne

Pour Saturne, peu de modèles alternatifs sont proposés et nous avons adopté le modèle empirique en complément de la correction de phase originale. L'angle de phase de Saturne étant limité au maximum à 7 degrés, les effets systématiques de la phase sont d'assez faible amplitude, comme on peut le voir sur le périodogramme de la figure 3.13. L'efficacité de la nouvelle correction est bien moins grande que dans les cas précédent car les effets y sont beaucoup plus difficilement modélisables que dans le cas où des modèles approximatifs permettent déjà d'améliorer les corrections antérieures du fait d'erreurs systématiques de plus grande amplitude. Là encore, nous présentons le périodogramme issu de l'analyse spectrale opérée sur les observations

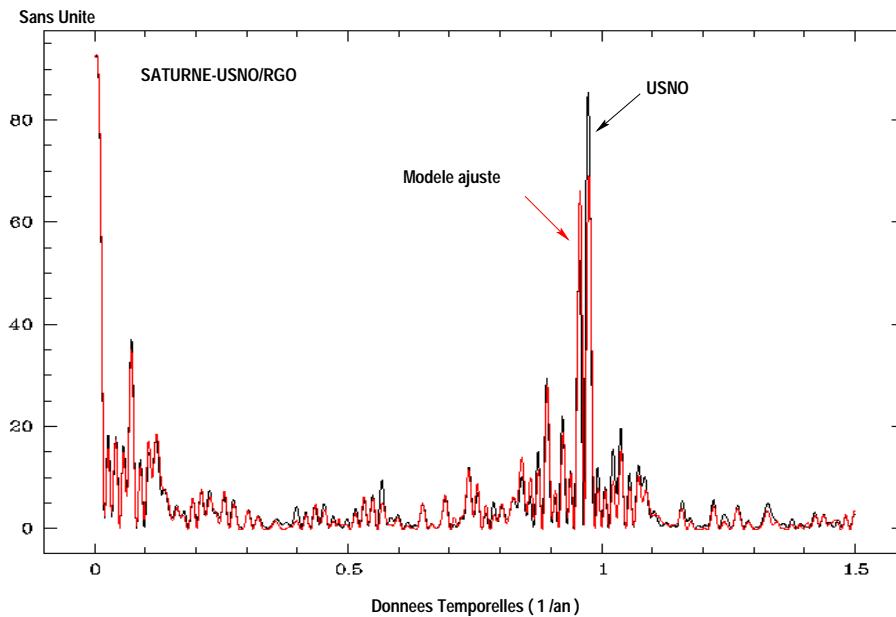


FIG. 3.13: Périodogrammes des résidus en ascension droite obtenus par comparaison entre les positions de Saturne calculées à partir de VSOP87 et celles observées à l'U.S. Naval Observatory et au Royal Greenwich Observatory puis corrigées, par la méthode classique de l'Explanatory Supplement of American Ephemeris (en noir) et notre modèle ajusté.

méridiennes de l'USNO et du RGO. Le même modèle a été ajusté sur les données photographiques réalisées à l'astrogaphe de Nikolaev, mais, vu le faible nombre de données (310), une analyse spectrale n'a pas vraiment de sens.

Remarque

Dans les cas où aucune correction de phase n'a été appliquée, comme c'est le cas des observations réalisées à Oxford entre 1774 et 1798, ou qu'aucune précision sur le type ou la forme de celles-ci n'est fournie (cas des observations du Cape), aucun terme visant à éliminer un modèle de correction de phase erroné ou insuffisant n'a été appliqué. Les nouveaux modèles, ajustés sur les échantillons de l'USNO post-1911 et RGO, ont été directement appliqués sur ces données "brutes".

Après analyse spectrale des résidus, il s'est avéré que ces données étaient trop bruitées pour permettre la détection d'un signal correspondant à une détection de période synodique.

3.5 Cas des observations de Paris

Comme nous l'avons présenté dans l'introduction, l'échantillon des données de Paris a été constitué à partir de documents originaux couvrant une période de 1876 à 1913. Les observations sont exprimées dans les repères et les échelles de temps de l'époque et nécessitent donc une actualisation des constantes et des modèles de précession et de nutation utilisés.

3.5.1 Echelle de temps

La datation des observations est donnée en temps moyen de Paris, TMP , qui correspond au temps solaire moyen à Greenwich, $GMST$, augmenté du décalage en longitude entre Greenwich et Paris (à savoir 9 minutes et 21 secondes de temps). De plus, après la conférence de Washington de 1884, a été définie la notion de Temps universel, UT , tel que: $UT = GMST + 12h$.

Ainsi à partir du temps moyen de Paris, il est possible d'exprimer les dates d'observations en UT par la relation:

$$UT = (TMP - 0.15583333h) + 12h$$

On précise que le $GMST$ est une grandeur directement liée à l'angle horaire du centre du Soleil, appelé temps solaire vrai, et donc aux irrégularités de la rotation de la Terre.

Le passage entre Temps universel et Temps universel coordonné, UTC , s'effectue alors en corrigeant les irrégularités de la rotation. L' UTC est une échelle de temps, créée en 1972, et définie par rapport au Temps atomique, TAI de la manière suivante $UTC = TAI + n$ secondes, les n secondes (n est un nombre entier) étant choisies de telle sorte que UTC ne diffère pas de $UT1$ de plus de 0.9 seconde. $UT1$ est le temps calculé *a posteriori* par l'IERS. Depuis la mise en place d'un système de référence supposé stable, l'ICRS, l'IERS publie chaque semaine les décalages entre $UT1$ et UTC issus du raccordement et de l'entretien de ce système de référence. De plus, il a été possible de tabuler les irrégularités de la rotation de la Terre dans le passé et notamment à mieux que 2 secondes pour les deux siècles précédents. Il est donc possible d'estimer pour les dates de nos observations le décalage $UT1 - UTC$. Cependant, les dates d'observations fournies à l'époque n'étant données qu'avec une précision d'une seconde, on assimile la notion d'échelle de Temps universel, UT , définie précédemment à celle de $UT1$, le décalage ($UTC - UT1$) n'excédant pas plus de 0.9 seconde.

3.5.2 Changement de repères

Les observations sont exprimées dans un repère apparent géocentrique dans les systèmes de coordonnées (ascension droite, distance au pôle) ou (longitude, latitude). Les expressions dans le système (longitude, latitude) ont été utilisées pour les observations les plus anciennes réalisées à Greenwich, à savoir entre 1750 et 1830. Le reste des observations sont données en ascension droite et distance au pôle.

Passage (longitude, latitude) / (ascension droite, déclinaison)

Le passage entre les systèmes longitudinal et sphérique est décrit par Le Verrier dans le volume I des Annales de l'observatoire de Paris. Le formulaire utilisé par Le Verrier est le suivant: Si on note L et λ , la longitude et la latitude de la planète, l'ascension droite A et la déclinaison D s'obtiennent par l'intermédiaire de l'angle Ψ tel que:

$$\tan \Psi = \frac{\tan \lambda}{\sin L}$$

et on a :

$$\begin{cases} \tan A = \frac{\cos(\epsilon + \Psi)}{\cos \Psi} \tan L \\ \tan D = \sin A \tan(\epsilon + \Psi) \end{cases}$$

où ϵ représente l'argument d'obliquité de l'écliptique vrai de la date. La notion d'écliptique vrai faisant intervenir celles de précession et nutation, nous avons appliqué ce formulaire en

utilisant les constantes et les modèles permettant de ramener ces observations dans le repère de la théorie de Le Verrier remise à jour en 1964. Plus précisément, nous avons utilisé la théorie de précession d'Andoyer (1911) B1900 et celle de Woolard (1953) pour la nutation. L'obliquité de l'écliptique moyen B1900 correspondant a pour valeur $23^{\circ} 27' 8.26''$.

Ce choix se justifie par le fait que ces observations ayant été utilisées par Le Verrier dans l'ajustement de ses théories planétaires, une étude des résidus issus de la comparaison entre ces observations et une des théories de Le Verrier paraissait intéressante. De ce fait, nous avons dès le départ, choisi d'exprimer ces observations dans un repère susceptible de servir de repère de référence aux théories de Le Verrier.

Passage coordonnées apparentes / coordonnées astrométriques

Comme nous l'avons dit précédemment, nous avons choisi d'exprimer les observations dans un repère permettant une comparaison avec la plus contemporaine des théories de Le Verrier. Les coordonnées apparentes de la date observée ont donc été réexprimées dans le repère B1950 du FK4 dans lequel a été transposée la théorie de Le Verrier, compatible avec le repère B1900 défini à partir des expressions ou théories de Newcomb - Andoyer (Systèmes de références, page 34).

En résumé, nous avons donc appliqué les modèles de précession de Newcomb-Andoyer (1911) et de nutation de Woolard (1953) aux coordonnées apparentes observées. Les nouvelles positions obtenues sont des positions astrométriques B1950 dans un repère compatible avec le FK4. A ce niveau, on se retrouve dans le cas général et l'on applique l'ensemble des corrections décrites précédemment.

Cependant, n'ayant que peu d'informations sur les catalogues stellaires utilisés pour la calibration de l'instrument et dont nous savons l'importance, nous n'avons pas appliqué de corrections d'erreurs zonales ou régionales. Cette approximation peut se justifier en examinant les résidus présentés dans les tableaux des figures 3.14 et 3.15 et pour lesquels les ordres de grandeurs présentés sont bien supérieurs à ceux de ces erreurs de catalogue.

3.6 Conclusions

Bilan des corrections appliquées

Nous avons donc appliqué les différentes corrections vues précédemment à diverses séries d'observations. Chaque série a été traitée selon ces spécificités. En effet, certaines d'entre elles avaient déjà été transformées afin de les faire passer d'un repère "ancien", type Boss et FK3 à un repère plus moderne de type FK4, FK5; d'autres au contraire étaient encore sous leur forme brute. L'ensemble des corrections appliquées sont regroupées dans la table 3.3.

Résidus

Dans les tables des figures 3.14 et 3.15 se retrouvent présentés les résidus des différentes séries d'observations méridiennes que nous avons traitées d'une part pour Mercure et Vénus (*cf.* 3.14) et d'autre part pour Jupiter et Saturne (*cf.* 3.15). Ne sont donc pas incluses dans ce tableau les observations radar, VLBI et d'astrométrie indirecte ou photographique. Sont listés dans ce tableau les résidus en ascension droite et en déclinaison pour différentes valeurs de filtre ainsi que les indices de normalité de chaque échantillon (colonne "Kolmogorov"). Le filtrage (ou le choix des observations) est une donnée très importante dans l'ajustement car il conditionne d'une part, la qualité de l'ajustement (la normalité de l'échantillon est-elle encore garantie s'il

Vénus Mercure	Repères Origine - FK4	Repères FK4/FK5 - ICRF	Erreurs Zonales/Régionales	Modèle Antérieur	Modèle Nouveau
USNO					
1866-1982		✓ (FK4)	✓ (FK4)	✓	✓
1914-1982		✓ (FK4/FK5)	✓ (FK4/FK5)	✓	✓
RGO					
1957-1982		✓ (FK5)	✓ (FK5)	✓	✓
Oxford - Cape 1774 - 1892		✓ (FK4)	✓ (FK4)	Pas de correction	✓
Jupiter Saturne	Repères Origine - FK4	Repères FK4/FK5 - ICRF	Erreurs Zonales/Régionales	Modèle Antérieur	Modèle Nouveau
USNO					
1866-1982		✓ (FK4)	✓ (FK4)	✓	✓
1914-1982		✓ (FK4/FK5)	✓ (FK4/FK5)	✓	✓
RGO					
1957-1982		✓ (FK5)	✓ (FK5)	✓	✓
Oxford 1774 - 1798		✓ (FK4)	✓ (FK4)	Pas de correction	✓
Greenwich 1750 - 1869	✓	✓	✓	Pas de correction	✓
Paris 1837 - 1867	✓	✓	✓	Pas de correction	✓

TAB. 3.3: Ensemble des corrections appliquées aux observations méridiennes présentées par observatoires et par périodes d'observations

VENUS											
Observatoires		2 σ (")						3 σ (")			
Periodes	Nbr.Obs	Kolmogorov		(o-c) RA		(O-c) De		(o-c) RA		(O-c) De	
		α	δ	<O-C>	σ	<O-C>	σ	<O-C>	σ	<O-C>	σ
USNO											
1866-1891	1211	1.02	1.12	0.102	1.180	-0.237	1.141	-0.373	1.121	-0.210	0.984
1914-1982	4230	0.80	0.78	0.170	0.871	-0.061	0.821	-0.450	0.548	-0.045	0.456
RGO											
1957-1982	815	1.05	0.42	-0.153	0.791	0.042	0.723	-0.150	0.911	0.032	0.779
Oxford											
1774- 1892	1277	1.59	1.95	-0.006	1.672	-0.49	1.741	-0.081	2.081	-0.612	2.043
MERCURE											
USNO											
1866-1891	776	1.03	1.12	0.033	1.012	-0.106	0.983	0.050	1.134	-0.149	1.207
1914-1982	2743	0.64	0.69	0.087	0.729	-0.080	0.682	0.155	1.011	-0.104	0.856
RGO											
1957-1982	361	0.93	0.44	-0.131	0.684	0.083	0.709	-0.290	1.035	0.149	0.923
Oxford											
1774- 1892	739	1.10	1.73	0.183	1.013	-0.168	0.988	-0.222	1.412	-0.420	0.376

FIG. 3.14: Résidus présentés pour Vénus et Mercure, par observatoires et périodes d'observations issus des comparaisons entre les positions observées et celles calculées à partir de VSOP87

y a suppression de données?) et d'autre part, la qualité de l'orbite ajustée (par ces filtrages, n'éliminons-nous pas des observations apportant une information importante sur la géométrie de l'orbite?) Cette question de la sélection des observations mérite une étude approfondie. D'autre part, les observations réunies sous l'appellation des données de Paris, seront utilisées afin de tester, autant que les erreurs observationnelles le permettent, la qualité des orbites ajustées sur plus de deux siècles d'observations.

Distribution des erreurs et apport d'information

On peut cependant dire au vu des histogrammes de distributions des résidus utilisés lors de l'ajustement (*cf.* figures 3.16 à 3.19), que ces distributions sont, dans la plus grande majorité des cas, gaussiennes avec des largeurs à mi-hauteur plus ou moins importantes et des queues de distribution en général assez fines. Ceci nous permet de dire que l'ensemble des observations traitées ne comportent pas d'effets systématiques détectables et que l'on peut considérer que la distribution des erreurs en ces points est optimale en terme d'application du principe du maximum de vraisemblance.

L'écart à la distribution normale, représentée sur les histogrammes, est systématiquement induit par l'apport des données anciennes dans la distribution et tout particulièrement celles d'Oxford et du Cape. En effet, comme le montrent les valeurs des indices de normalité de Kolmogorov-

JUPITER											
Observatoires		2 σ (")						3 σ (")			
Periodes	Nbr.Obs	Kolmogorov		(o-c) RA		(O-c) De		(o-c) RA		(O-c) De	
		α	δ	<O-C>	σ	<O-C>	σ	<O-C>	σ	<O-C>	σ
USNO											
1866-1891	334	1.37	1.18	-0.302	0.954	-0.207	0.915	-0.373	1.121	-0.210	0.984
1914-1982	2053	0.34	0.61	-0.046	0.443	0.041	0.411	-0.450	0.548	-0.045	0.456
RGO											
1957-1982	465	0.48	0.27	-0.031	0.419	0.109	0.423	-0.038	0.515	-0.132	0.479
Oxford											
1774- 1892	505	2.32	1.75	-0.403	1.298	-0.073	1.321	-0.500	1.742	-0.226	1.757
Tokyo-Mittaka											
1963 - 1973	186	0.31	0.64	0.068	0.673	-0.059	0.612	0.132	0.796	-0.081	0.725
SATURNE											
USNO											
1866-1891	390	2.02	0.95	-0.342	0.913	0.001	0.958	-0.611	1.134	-0.001	0.997
1914-1982	1422	0.19	0.40	-0.011	0.519	0.019	0.441	0.006	0.616	0.009	0.506
RGO											
1957-1982	405	0.49	0.23	0.015	0.391	-0.156	0.425	0.060	0.458	-0.181	0.483
Oxford											
1774- 1892	261	2.10	1.70	-0.088	1.047	-0.005	1.023	-0.271	1.471	-0.065	1.356
Tokyo-Mittaka											
1963 - 1973	191	0.62	0.82	-0.042	0.743	0.260	0.778	-0.062	0.859	0.280	0.889

FIG. 3.15: *Résidus présentés pour Jupiter et Saturne, par observatoires et périodes d'observations issus des comparaisons entre les positions observées et celles calculées à partir de VSOP87*

Smirnov et les histogrammes de ces échantillons, ces derniers sont fortement bruités et présentent des distributions à la limite de la normalité. Il serait alors justifié, dans une certaine mesure, d'éliminer ces données de l'ajustement. Cependant, bien que ces observations semblent induire une dégradation de la qualité de ce dernier, il n'en demeure pas moins qu'elles sont porteuses d'informations sur les géométries des orbites, comme on peut le voir sur les figures représentant les orbites géocentriques des planètes correspondant aux différentes dates d'observations présentées en introduction.

On rappelle que le test de Kolmogorov-Smirnov, présenté au chapitre 6 s'interprète comme suit: si $P(D_n) < 0.895$, on peut dire que la distribution est gaussienne à 95 %, mais si $P(D_n) > 1.035$, on rejette l'hypothèse "X suit une distribution gaussienne" au seuil 0.01. Prenons l'exemple des observations de Vénus. Dans le cas de l'échantillon constitué par les observations du XIXème siècle "Cape-Oxford", l'indice du test de Kolmogorov-Smirnov est bien supérieur à 1.035 (1.6 en ascension droite et 1.95 en déclinaison). Autrement dit, on peut estimer que la distribution de cet échantillon n'est pas gaussienne au seuil 0.01. Ce qui confirme ce qui avait été supposé

sur les histogrammes. Cela s'explique facilement par le fait que l'on a très peu d'information sur les corrections appliquées lors des réductions astrométriques de ces observations. Il est donc très difficile d'estimer ce qu'il serait bon de modifier dans les données afin d'améliorer leur précision. Pour estimer l'impact réel de ces données sur la stabilité à court et moyen termes des orbites ajustées, il est nécessaire de mettre en place des métriques spécifiques et adaptées à ce problème. Ces métriques devront quantifier en quoi et comment les éléments osculateurs sont affectés par les différents échantillons dont il est question ici.

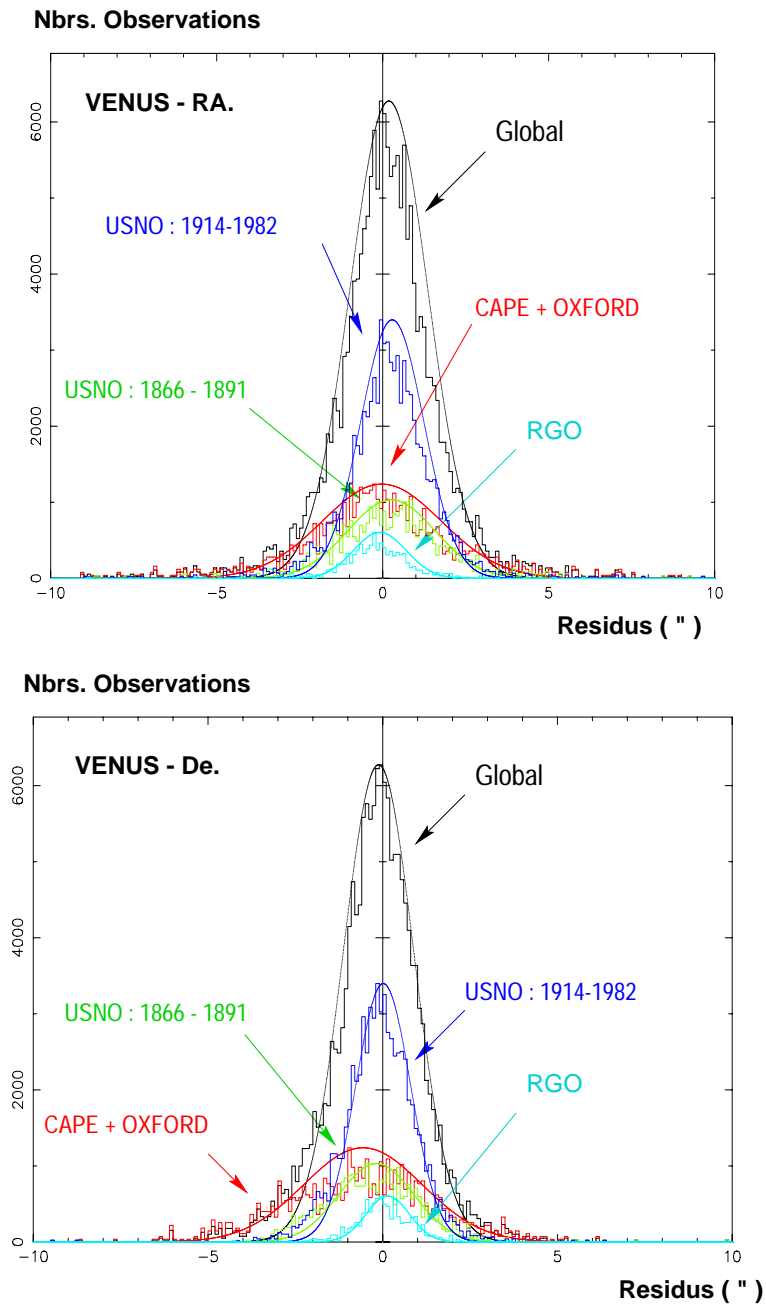


FIG. 3.16: *Histogrammes en ascension droite et en déclinaison de l'ensemble des observations méridiennes de Vénus*

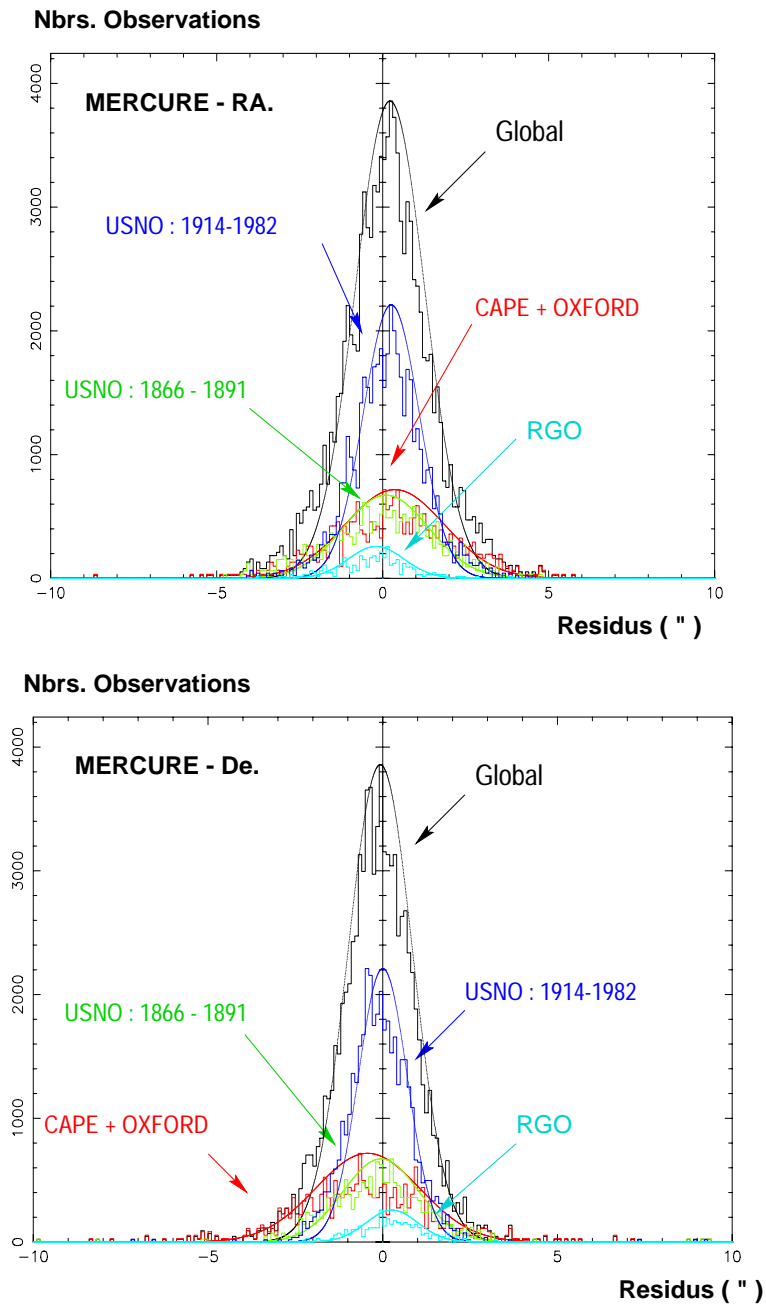


FIG. 3.17: *Histogrammes en ascension droite et en déclinaison de l'ensemble des observations méridiennes de Mercure*

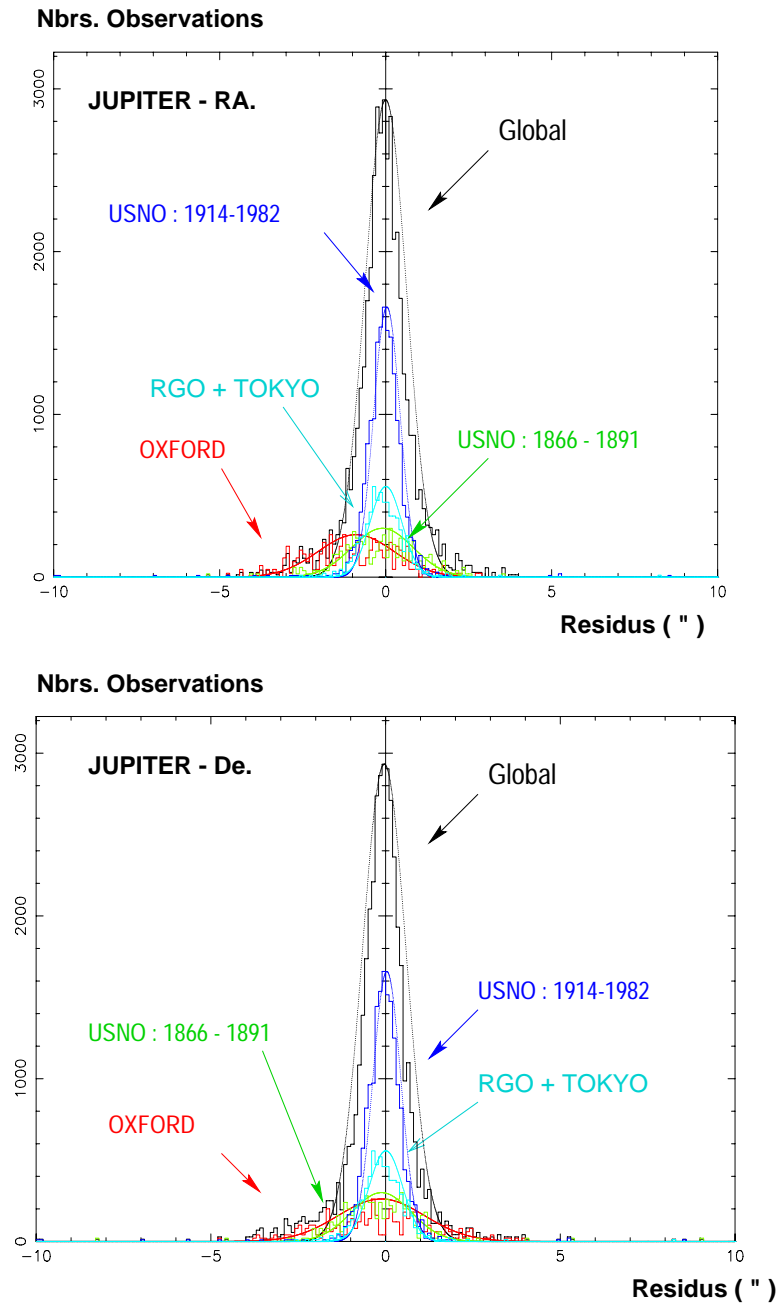


FIG. 3.18: *Histogrammes en ascension droite et en déclinaison de l'ensemble des observations méridiennes de Jupiter*

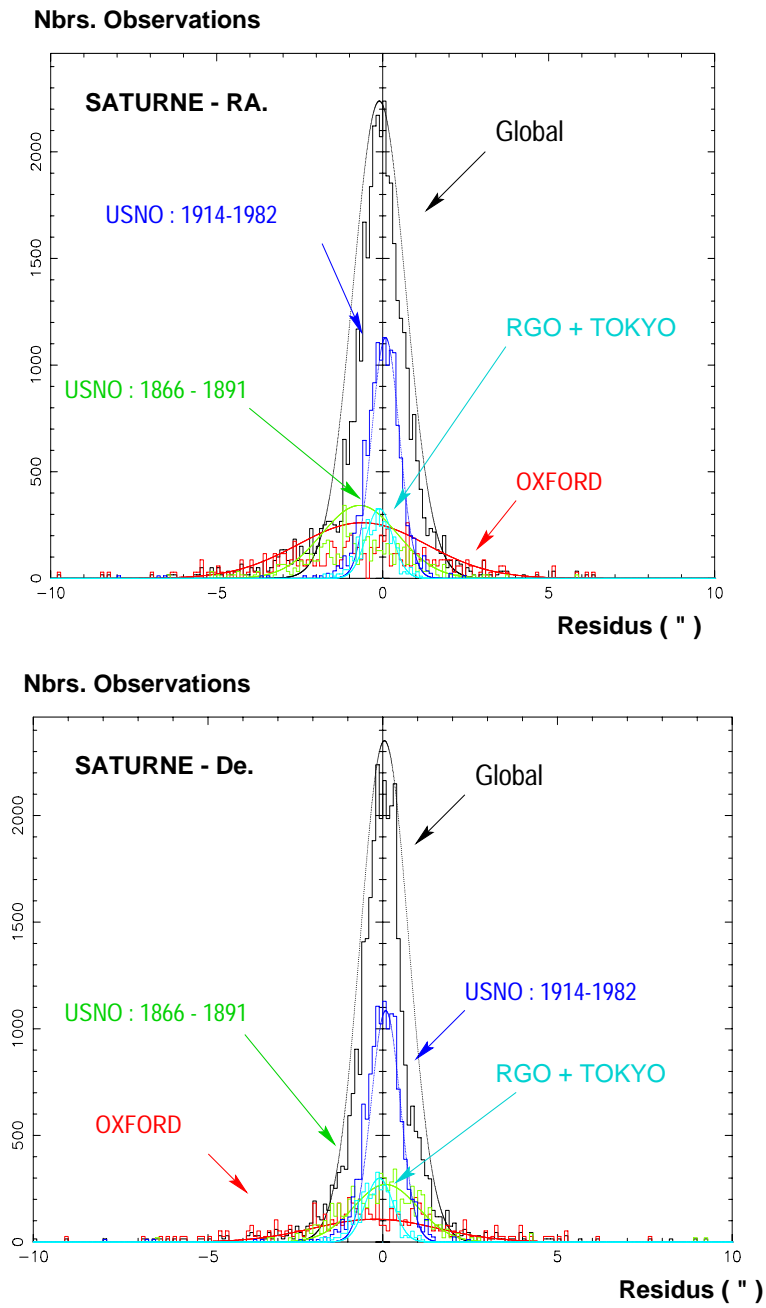


FIG. 3.19: *Histogrammes en ascension droite et en déclinaison de l'ensemble des observations méridiennes de Saturne*

Chapitre 4

Données VLBI et sondes spatiales

Sont réunies ici l'ensemble des observations permettant, à partir d'observations de suivis de sondes spatiales ou de satellites, de déterminer des positions indirectes des planètes. Ces techniques vont s'appliquer, dans le cas des suivis de sondes, à Vénus et Jupiter. Nous allons exposer ici les grandes lignes des méthodes utilisées dans le suivi de sonde par analyse interférométrique de l'émission radio de ces sondes. En particulier, nous allons traiter ici les cas des sondes Magellan et Galileo au cours de leur voyage interplanétaire vers Vénus et Jupiter.

4.1 Principe du VLBI en astrométrie

Le développement et l'application de la technique d'interférométrie longue base remonte à la fin de années soixante-dix avec en particulier les premières observations VLBI astrométriques conduites par le JPL en 1978. Le principe des observations en interférométrie radio est basé sur la notion de retard d'un signal émis à grande longueur d'onde et capté par des récepteurs éloignés les uns des autres. La figure 4.1 schématise le protocole d'observations et de traitements de données. Au moins deux antennes collectent le signal émis par une source ponctuelle ou étendue, ces signaux sont enregistrés en temps réel puis traités en temps différé. Le traitement de ces données permet d'estimer le décalage du signal reçu par l'antenne 2 par rapport à celui reçu par l'antenne 1. C'est ce retard, τ , d'un signal par rapport à l'autre qui nous permet pour une base connue, représentée par le vecteur directeur \mathbf{B} , de déterminer la position angulaire de la source par le biais du vecteur position \mathbf{k} , avec:

$$\tau = -\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{c} \quad (4.1)$$

Plus précisément, nous allons reprendre chaque étape de ce protocole.

4.1.1 L'acquisition

L'acquisition est donc effectuée par le biais d'antennes munies de systèmes d'amplification de types miroirs secondaires, tertiaires (*cf.* chapitre 2) et de type électronique. Le signal reçu et amplifié est alors converti en signal binaire dans lequel sont insérés des signaux de synchronisation émis par les horloges atomiques du site. L'ensemble est alors enregistré sur bandes magnétiques pour être traité par le corrélateur central avec d'autres signaux captés par d'autres collecteurs.

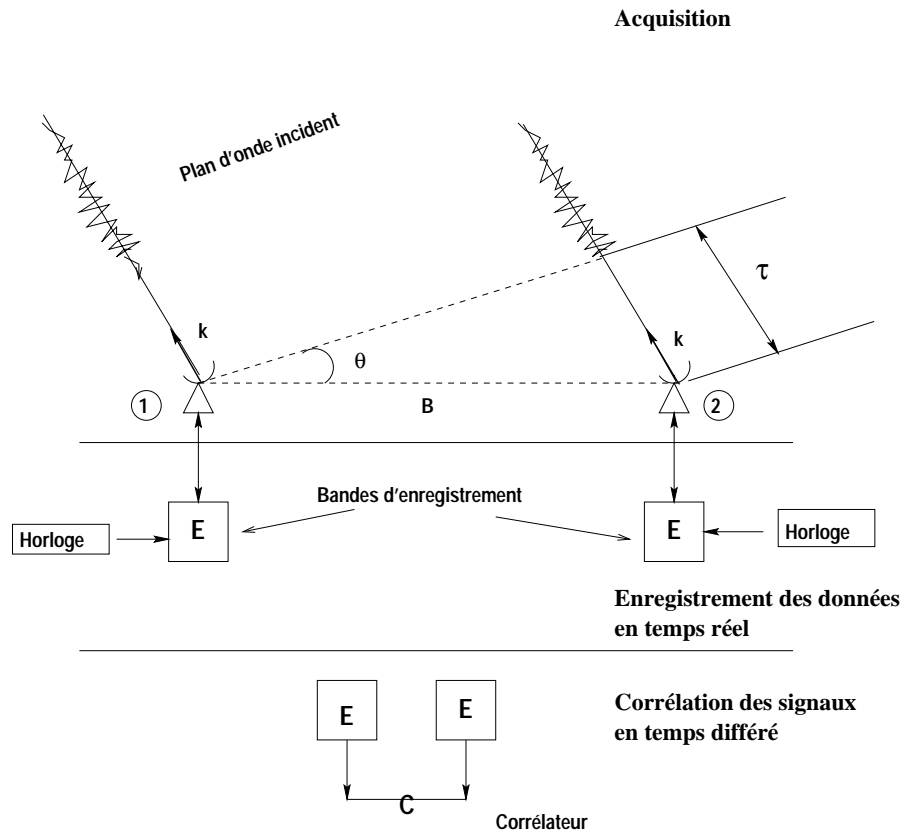


FIG. 4.1: Schéma de principe de l'observation VLBI d'une source par 2 antennes.

4.1.2 Corrélation des signaux

L'étape la plus délicate consiste en la corrélation des signaux collectés. En effet après avoir réuni l'ensemble des enregistrements disponibles pour une même source, il s'agit de comparer les multiples signaux et de déduire les retards de chaque signal les uns par rapport aux autres. Prenons le cas d'observations ne faisant intervenir que deux antennes. Les signaux reçus sont affectés d'erreurs observationnelles plus ou moins systématiques, rendant la simple addition des signaux impropre à répondre à la question de la détermination du retard. Il faut donc appliquer un processus de réduction plus complexe, et itératif.

En premier lieu, est calculé un retard théorique entre le signal reçu par l'antenne 1 et celui reçu par l'antenne 2, τ_t à partir des positions calculées de l'objet observé, et des antennes dans un repère céleste instantané, des modèles atmosphériques et des calibrations instrumentales. Le signal capté par l'antenne 2 est alors décalé d'autant puis multiplié par le signal de l'antenne 1. On dit alors que le signal produit est la corrélation des deux signaux précédents.

Une fois la corrélation effectuée, on étudie le comportement moyen du produit de ces deux signaux au moyen d'une fonction appelée *fonction de cross-corrélation*, $R(t, \tau_t)$, obtenue par :

$$R(t, \tau_t) = \frac{\langle E_1(t) \cdot E_2(t + \tau_t) \rangle}{\sqrt{\langle E_1^2 \rangle \cdot \langle E_2^2 \rangle}}$$

E_1 est le signal reçu par l'antenne 1, $E_2(t + \tau_t)$, celui reçu par l'antenne 2 décalé, du terme τ_t et $\langle . \rangle$, est la moyenne arithmétique sur quelques secondes. On montre que cette fonction est une fonction sinusoïdale se décomposant en franges d'amplitude A_f et de phase ϕ_f , dépendant

	Période	Nbr.Obs	$(O - C)_\alpha$	$(O - C)_\delta$
Magellan - Vénus	1990-1992	4	-1.247 ± 1.512	-0.691 ± 0.579
	1993-1994	14	0.580 ± 3.099	-0.117 ± 2.394
	Total	18	0.858 ± 2.895	0.022 ± 2.148
Galileo - Jupiter	1996-1998	23	-142.0 ± 123.0	-108.0 ± 184.0

TAB. 4.1: *Distribution des données par période et sonde observée. A titre indicatif, nous indiquons les résidus en ascension droite et déclinaison (ce qui n'est pas la meilleure représentation possible - cf. texte) et en milliseconde de degré de Vénus et de Jupiter obtenus par comparaison entre les positions déduites du tracking VLBI des sondes Magellan et Galileo et celles déduites de VSOP87*

des paramètres, $\Delta \tau$, l , où $\Delta \tau$ est le décalage entre les deux signaux restant car non corrigé par le τ_t théorique et d'autres paramètres instrumentaux comme la largeur de la bande d'enregistrement ou les températures des antennes et l est la visibilité des franges, c'est-à-dire le rapport entre le flux corrélé et le flux total. Ainsi, si la source est ponctuelle, $l = 1$. $R(t, \tau_t)$ a la propriété d'atteindre son amplitude maximale pour $\Delta \tau = 0$. L'intérêt de cette fonction sera donc de permettre une détermination précise par itération sur τ_t , du retard observé entre les deux signaux. Les lignes de bases utilisées sont Goldstone-Canberra, dans la majorité des cas et Goldstone-Madrid.

Cependant, pour le calcul de $R(t, \tau_t)$, il faut d'une part, accumuler des données sur quelques secondes, mais d'autre part, s'assurer de la stabilité de la phase des franges présentes dans le signal corrélé. Or, du fait de la rotation de la Terre, la phase des franges varie en fonction du temps. Il est donc nécessaire de ralentir le signal d'une quantité équivalente, par multiplication du signal avec une sinusoïdale numérisée dont la fréquence est calculée à partir de τ_t . La phase de la fonction de cross-corrélation est donc modifiée et on estime la phase résiduelle, $\phi_r = \phi_f - \phi_t = 2\pi \gamma \Delta \tau + \Psi$ ainsi que la fréquence de franges résiduelle $\dot{\phi}_r = 2\pi \gamma \dot{\Delta \tau} + \dot{\Psi}$. Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, on ajuste les paramètres A_f , ϕ_r , $\dot{\phi}_r$ et $\Delta \tau$, appelé *retard monobande*, afin de rendre la fonction de cross-corrélation maximale par moindres carrés ou transformée de Fourier. On en déduit alors le retard τ_o , à partir duquel on détermine la position angulaire de l'objet, avec $\tau_o = \tau_t + \Delta \tau$ ainsi que $\phi_o = \phi_t + \phi_r$.

Synthèse de bande

En astrométrie, on utilise la méthode dite de *synthèse de bande* qui consiste à calculer non pas τ_t mais

$$\tau_{bws} = \frac{\delta \phi}{\delta \omega}$$

Ceci permet de calculer le retard sur plusieurs canaux distribués sur une grande largeur de bande et de, par exemple, mieux moyennner des effets de type atmosphérique mal modélisés. Le retard de synthèse de bande permet un gain d'un facteur 1000 sur la précision par rapport aux

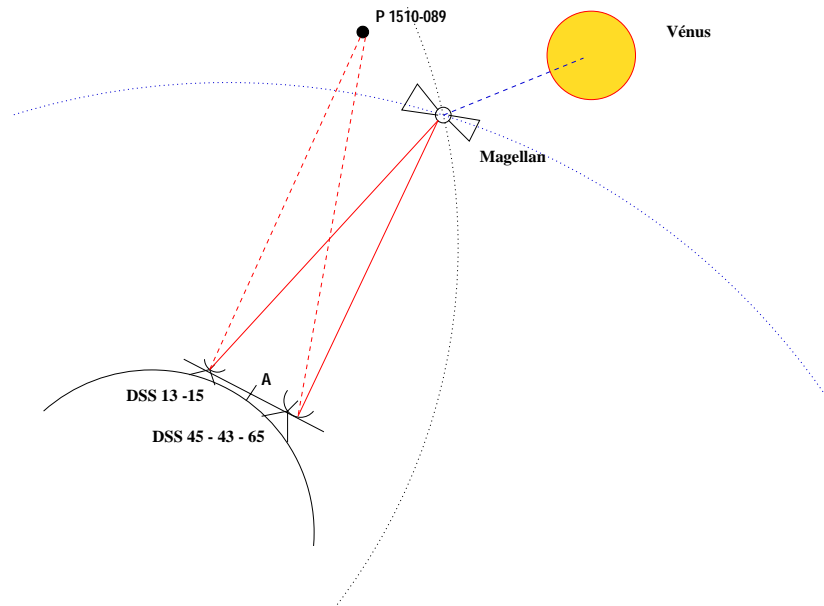


FIG. 4.2: Schéma de principe du tracking VLBI de la sonde Magellan

déterminations monobandes.

Nous venons donc de voir comment à partir de deux signaux émis par la même source, il est possible de déterminer la position angulaire de cette source à mieux que 0.3 mas (Charlot, 1995). Cette technique extrêmement précise a donc été appliquée aux sondes spatiales et en particulier, Magellan, lors de son voyage vers Vénus et de son orbite autour de cette planète.

4.2 Application au suivi des sondes Magellan et Galileo

C'est cette dernière méthode d'observation astrométrique par synthèse de bande qui est utilisée pour le suivi des sondes spatiales comme Magellan (Folkner, 1994) et Ulysses (Folkner, 1996). La méthode d'observation suit le processus décrit précédemment, avec un encadrement de l'observation de la sonde par des observations de calibration de radio sources cataloguées dans l'IERS, et donc ayant des positions connues à mieux d'1 mas, comme le schématise la figure 4.2. A partir d'une position angulaire de la sonde, il est alors possible de déterminer la position de la planète par rapport à celle-ci par le biais de l'orbite journalière de la sonde. L'orbitographie de ces sondes étant de très bonne qualité (0.4 km d'incertitude pour Magellan), on atteint des précisions de l'ordre de 1 mas sur la position finale de Vénus. Nous présentons dans le tableau 4.1, la distribution des données traitées par sonde observée et périodes de suivi. D'autre part, à titre indicatif, nous présentons les résidus moyens en ascension droite et déclinaison - bien que ce ne soit pas la représentation la plus adéquate aux observables VLBI - sur les deux périodes d'observations 1990-1992 et 1993-1994, calculés par comparaison entre les positions observées et celles déduites de VSOP87 et ceux issus de la mission Galileo vers Jupiter entre 1996 et 1998.

Comme nous l'avons vu dans l'équation 4.1, la quantité τ déduite de l'observation représente le produit entre le vecteur position topocentrique de la source et celui de la ligne de base reliant les deux antennes réceptrices. Autrement dit, il est important de garder à l'esprit que cette quantité observée ne permet pas de déterminations indépendantes des coordonnées angulaires de la source dans un repère de référence céleste tel que l'ICRF. Ainsi chaque estimation des

coordonnées (α, δ) de Vénus ou de Jupiter est liée à la géométrie de la base constituée par le système des antennes réceptrices. Par exemple, dans le cas de Jupiter, la base Goldstone-Madrid induit une très bonne détermination de l'ascension droite observée, le vecteur \mathbf{B} est alors parallèle à la direction des ascensions droites alors que la base Goldstone-Canberra permet une détermination aussi bonne en ascension droite qu'en déclinaison, \mathbf{B} étant dans ce cas à 45 degrés des directions des ascensions droites et des déclinaisons. Le graphe 4.3, issu de Kaplan(1998) illustre cette corrélation entre les directions d'observations et les positions α, δ de la source.

Afin de tenir compte de cet effet observationnel, lors de l'ajustement, nous avons affecté chaque composante d'un poids

$$w_{\alpha}^j = \frac{\tilde{k}_{\alpha}}{\sigma_j} \text{ et } w_{\delta}^j = \frac{\tilde{k}_{\delta}}{\sigma_j}$$

où σ_j est l'écart type individuel de chaque observation et $\tilde{k}_{\alpha}, \tilde{k}_{\delta}$ sont tels que, par exemple, dans les cas où la ligne de base favorise les observations dans la direction des ascensions droites croissantes, l'ascension droite observée soit surpondérée au détriment de la déclinaison. Ainsi, si on note θ l'angle entre la ligne de base et l'axe des ascensions droites dans le plan de l'observation, on définit $\tilde{k}_{\alpha} = 1/\cos\theta$ et $\tilde{k}_{\delta} = 1/\sin\theta$. On se reportera à la figure 4.3. Cette pondération vient en complément de la pondération globale appliquée à l'ensemble des observations et décrite au chapitre 5 présentant la mise en place et la résolution du système d'équations de conditions pour l'ajustement des constantes d'intégration des orbites des planètes intérieures.

Conclusion

Par ces données issues du suivi des sondes spatiales par la technique d'interférométrie à très longue base, il est possible d'obtenir une estimation précise des positions de Vénus et de Jupiter directement dans le repère de l'ICRS. Ces observations sont très précieuses puisqu'elles sont les seules qui nous garantissent un raccordement direct entre les systèmes de référence dynamique - issu de VSOP - et cinématique. Ces positions angulaires ne sont cependant pas des données indépendantes, et il faut veiller, par le biais d'une pondération adéquate, à la prise en compte de la géométrie de l'observation et de son impact sur les quantités observées.

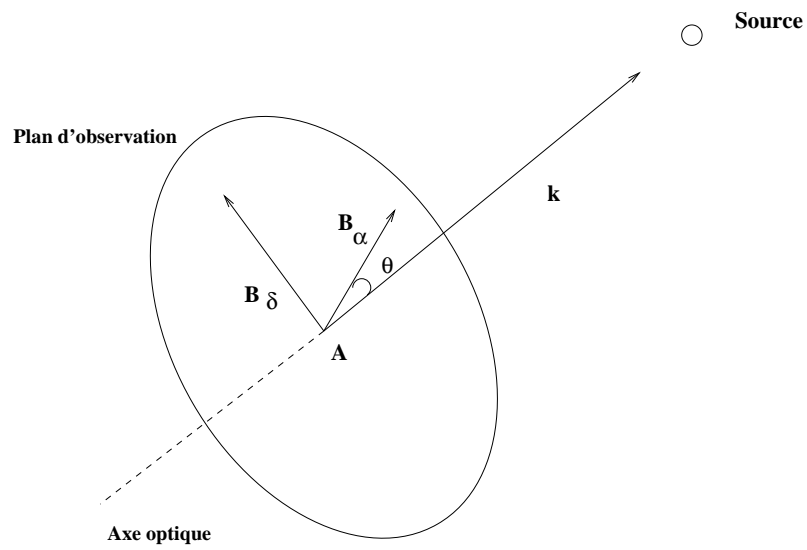


FIG. 4.3: Géométrie des lignes de bases utilisée dans l'astrométrie par technique VLBI. B_α et B_δ indiquent les directions des ascensions droites croissantes et des déclinaisons croissantes respectivement, vues d'un point A (Kaplan, 1998)

L'ajustement des théories analytiques: les problèmes à résoudre

Dans cette partie, nous allons présenter et mettre en place l'algorithme d'ajustement.

Dans un premier chapitre, nous rappellerons les caractéristiques principales des théories analytiques et numériques en précisant les systèmes de référence induits par chacune de ces éphémérides et nous établirons le formulaire des dérivées partielles.

Dans le deuxième chapitre, nous exposerons quelques rappels de méthodes statistiques, les deux algorithmes d'ajustement utilisés et divers tests de qualité.

Dans le troisième chapitre, nous mettrons en place le profil de l'algorithme en deux points: l'écriture matricielle des équations de condition et la connexion entre le repère des observations et le repère de la théorie.

Enfin, nous conclurons par un schéma général de l'ajustement.

Chapitre 5

Théories planétaires

Dans un premier temps, nous allons présenter dans ce chapitre les deux grands types de solutions planétaires, numérique et analytique. Dans ces deux présentations, nous mettrons en lumière les différences fondamentales de ces approches, et leurs impacts sur la méthode d'ajustement. Dans un deuxième temps, les calculs des dérivées partielles nécessaires à l'ajustement, issues de la théorie analytique VSOP87, seront expliqués en détail.

5.1 Présentation des théories planétaires

5.1.1 Les théories numériques

L'approche numérique des calculs d'intégration des équations du mouvement des corps du système solaire en général, et de celui des planètes en particulier, a pris son essor avec celui des ordinateurs et de leur puissance de calcul. C'est en 1972, qu'Oesterwinter et Cohen (Oesterwinter et al, 1972) développèrent la première théorie numérique complète des planètes du système solaire, Lune comprise. Cette théorie basée sur l'algorithme d'intégration de Cowell et Adams (Cohen et Hubbard, 1961 et Korgh, 1972), constitue la base des théories numériques actuellement développées au Jet Propulsion Laboratory. Les équations sont établies dans l'équateur et l'équinoxe B1950 ou J2000, centré au barycentre du système solaire. Des modifications importantes ont été apportées à cette première solution – notamment la prise en compte plus systématique et plus précise d'effets relativistes et des potentiels astéroïdaux – mais la méthode de calcul reste très similaire et peut se décrire de la manière suivante.

Equations du mouvement

Les mouvements des neuf planètes du système solaire et de la Lune, modélisées sous forme de masses ponctuelles m_i , sont décrits dans une métrique isotropique PPN du problème des n corps. L'ensemble des perturbations mutuelles y est décrit, ainsi que les phénomènes de libration de la Lune et des interactions Lune - Terre (effets de marées). Le système subit d'autre part, des perturbations induites par les astéroïdes, ces dernières étant modélisées dans une métrique newtonienne classique. Le nombre d'astéroïdes inclus dans ces calculs était de cinq dans DE102 – Cérès, Pallas, Vesta, Iris et Bamberga – pour atteindre 300 dans DE405.

Si l'on se place dans un repère cartésien centré au barycentre du système solaire tel que le plan de référence de ce système soit l'équateur terrestre moyen B1950 ou J2000 – selon les versions –

les équations du mouvement s'écrivent pour une planète i :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{r_{ij}^3} A + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} B (\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i) + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} + C \quad (5.1)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1 - \frac{2(\beta+\gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta-1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c}\right)^2 + (1+\gamma) \left(\frac{v_j}{c}\right)^2 \\ \quad - \frac{2(1+\gamma)}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left\{ \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \dot{\mathbf{r}}_i}{r_{ij}} \right\}^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \ddot{\mathbf{r}}_i \\ B = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \{ 2(1+\gamma) \ddot{\mathbf{r}}_i - (1+2\gamma) \ddot{\mathbf{r}}_j \} \\ C = \sum_{m=1}^{xxx} \frac{\mu_m (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_i)}{r_{im}^3} \end{array} \right.$$

Les paramètres μ_j correspondent à Gm_j , où m_j est la masse de la planète j et G la constante de gravitation. La notation r_{ik} équivaut à $|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|$. β et γ sont des constantes liées à la métrique relativiste choisie pour décrire le mouvement. Dans le cas d'une métrique PPN isotropique classique – c'est-à-dire issue de la théorie de relativité générale – $\beta = \gamma = 1$. Enfin, on précise que c est la vitesse de la lumière et que $v_i = |\dot{\mathbf{r}}_i|$. Le terme C de l'équation 5.1 correspond à la contribution du potentiel gravitationnel des xxx astéroïdes inclus dans la modélisation. Selon les théories, les trajectoires de ces astéroïdes sont intégrées soit à l'extérieur du système par des modélisations indépendantes – comme dans le cas des éphémérides DE102 – soit comme parties intégrantes du système – comme dans DE405. A ces perturbations s'ajoutent des perturbations propres à l'orbite lunaire, et tout particulièrement les effets dits de figure, de marées terrestres et de libration.

Intégrations numériques

Une fois les équations du mouvement mises en place, leur intégration est effectuée à l'aide de l'algorithme de Adams et Cowell (Krogh, 1972). Les paramètres choisis pour l'intégration permettent un contrôle des erreurs d'intégration de l'ordre de $2 \cdot 10^{-6}$ UA par jour pour chaque composante. A l'issue de l'intégration, sont calculées des positions, vitesses et accélérations également tabulées dans le temps sur une période d'intégration choisie au départ. C'est à partir de ces positions (x,y,z) que sont calculées les dérivées partielles nécessaires à l'ajustement des constantes d'intégration. Cet ajustement est effectué à partir de constantes préliminaires pour chaque élément orbital que l'on corrige par comparaison aux orbites observées. L'algorithme utilisé dans le cas des théories numériques est celui développé par Brouwer et Clemence (1961) dans le formalisme des paramètres orbitaux classiques $a, e, i, \Omega, \omega, l_0$.

Ce formulaire classique fait apparaître dans l'algorithme d'ajustement des problèmes de conditionnement de la matrice des équations normales, propres à ces paramètres orbitaux. Ce ne sont alors plus ces variables qui sont ajustées mais des combinaisons linéaires de ces paramètres aboutissant à l'estimation des différentielles suivantes $\Delta l + \Delta r, \Delta p, \Delta q, e \Delta r, \frac{\Delta a}{a}$ et Δe .

5.1.2 Les théories analytiques

L'approche des théories analytiques est basée sur un développement de Taylor des équations du mouvement afin d'identifier chaque terme des perturbations à un certain ordre de développement du second membre de ces équations par rapport aux masses. Ainsi plusieurs générations de

théories notamment TOP82 (Simon, 1983), VSOP82 (Bretagnon, 1982), VSOP87 (Bretagnon et Francou, 1988) et VSOP98 (Moisson, 1999), ont été développées à l'ordre 3 par rapport aux masses pour l'ensemble des planètes et à l'ordre 6 pour les planètes géantes. Les équations du mouvement et leur résolution sont effectuées dans le formulaire des variables équinoxiales, dans l'écliptique et l'équinoxe inertiel B1950 ou J2000, rapporté au centre de masse du soleil.

Equations du mouvement

Classiquement, les équations du mouvement sont mises sous forme:

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_\sigma(x_i)$$

où σ est l'un quelconque des éléments orbitaux de la planète considérée et $x_i = x_i^{(0)} + \Delta^{(1)}x_i + \Delta^{(2)}x_i + \dots$ est l'un des douze éléments orbitaux de la planète perturbée et de la planète perturbatrice. $x_i^{(0)}$ représente la solution képlérienne, $\Delta^{(1)}x_i$, l'ensemble des perturbations de l'élément x_i au premier ordre par rapport aux masses, et $\Delta^{(2)}x_i$, l'ensemble des perturbations au deuxième ordre. Dans ce formalisme, le développement de Taylor au troisième ordre du deuxième membre de l'équation 5.1.2, permet d'écrire cette dernière de la façon suivante:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \underbrace{f_\sigma(x_i^{(0)})}_A + \underbrace{\sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(1)}x_i}_B + \underbrace{\sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(2)}x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta^{(1)}x_i \Delta^{(1)}x_j}_C \quad (5.2)$$

Pour calculer les dérivées partielles nécessaires à l'écriture de l'équation 5.2, la fonction f_σ s'écrit, pour un élément σ quelconque, et en utilisant \mathbf{V} et \mathbf{V}' les vecteurs de positions héliocentriques de la planète perturbée, P et de la planète perturbatrice, P' :

$$f_\sigma = D_\sigma \mathbf{V} (R_1 \mathbf{V} + R_2 \mathbf{V}')$$

avec $R_1 = -\frac{nam'}{1+m} \frac{1}{\Delta^3}$ et $R_2 = \frac{nam'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$ où n et a sont respectivement le moyen mouvement et le demi-grand axe de l'orbite de la planète perturbée. Δ y représente la distance mutuelle des planètes, r' le rayon vecteur de la planète perturbatrice et m, m' les masses des planètes P et P' . Le calcul des dérivées utilise un formulaire fermé (Chapront et al, 1975 et Bretagnon, 1980) permettant un contrôle pas à pas de la précision des calculs. Au finale, chaque dérivée partielle se met sous la forme:

$$T_0 + T_1 \frac{1}{\Delta^3} + T_2 \frac{1}{\Delta^5} + T_3 \frac{1}{\Delta^7}$$

où T_0, T_1, T_2 et T_3 sont des séries dépendant de la solution du problème des deux corps pour les deux planètes perturbée et perturbatrice.

Résolution des équations de Lagrange

La méthode consiste à intégrer chaque perturbation ordre par ordre. La perturbation du premier ordre $\Delta^{(1)}x_i$ est obtenue par intégration du terme A de l'équation 5.2, les perturbations du second ordre, $\Delta^{(2)}x_i$, par intégration de B et celles du troisième ordre par intégration de

C. La solution de l'intégration des équations de Lagrange est donnée sous forme de séries de Poisson du temps t , d'ordre 3. Ainsi pour l'élément σ ,

$$\sigma = \sum_{m=0}^3 t^m P_m$$

où P_m est une série - définie à partir des réels $(A_{m,j}, B_{m,j})$ et de J un intervalle fini d'entiers - de la forme:

$$P_m = \sum_{j \in J} A_{m,j} \sin(\Phi_{m,j}) + B_{m,j} \cos(\Phi_{m,j})$$

Les arguments $\Phi_{m,j}$ sont des combinaisons linéaires des longitudes moyennes $\lambda_i = \lambda_i^0 + N_i t$, les paramètres N_i et λ_i^0 sont des constantes d'intégration issues directement de l'ajustement aux observations.

Jusqu'à présent l'ensemble des constantes d'intégration des théories analytiques modernes développées au Bureau des longitudes était déterminé par comparaison et ajustement aux théories numériques disponibles, DE200 et DE403. Le but de notre travail est de mettre en place un ajustement direct aux observations.

Choix des variables

L'une des spécificités des théories analytiques de type VSOP est l'utilisation des variables dites *équinoxiales*. Ces variables ont été introduites par Lagrange dans ses études sur l'apparition d'effets séculaires dans les perturbations planétaires. Ce formulaire est constitué du demi-grand axe, a , de la longitude moyenne, λ et des variables, (k, h) et (q, p) définies comme suit:

$$\begin{cases} k = e \cos \varpi ; h = e \sin \varpi \\ q = \gamma \cos \Omega ; p = \gamma \sin \Omega \end{cases} \quad (5.3)$$

où $\gamma = \sin \frac{i}{2}$, avec i , l'inclinaison de l'orbite, e , l'excentricité, ϖ , la longitude du périhélie et Ω la longitude du noeud. L'intérêt de ces variables est au moins double. En premier lieu, elles permettent d'éviter les particularités ou les singularités dans les équations de Lagrange pour les excentricités ou les inclinaisons faibles ou nulles. D'autre part, dans le calcul des dérivées partielles nécessaire à l'ajustement des constantes, le système d'équations déduit de l'écriture précédente est un système direct et fini alors que celui issu du formulaire classique est différentiel et non intégrable (Broucke, 1972, Goldstein, 1950). De plus, il est primordial de remarquer que les variables ainsi définies sont deux à deux commensurables. De ce fait, les problèmes liés aux mauvais conditionnements de matrices d'équations normales, décrits dans le cadre des ajustements des théories numériques, pourront être évités ou extrêmement limités dans l'algorithme d'ajustement par moindres carrés.

5.1.3 Systèmes de référence dynamiques

Les théories planétaires permettent de définir le repère dans lequel évoluent les corps du système solaire à partir de la détermination de l'orbite héliocentrique du barycentre Terre-Lune. De cette orbite, est déduit un système de référence dans lequel seront exprimées les orbites des planètes intérieures et extérieures. Ce système est appelé système de référence dynamique. Il se caractérise par un équateur, un équinoxe et un écliptique dynamiques moyens à une époque

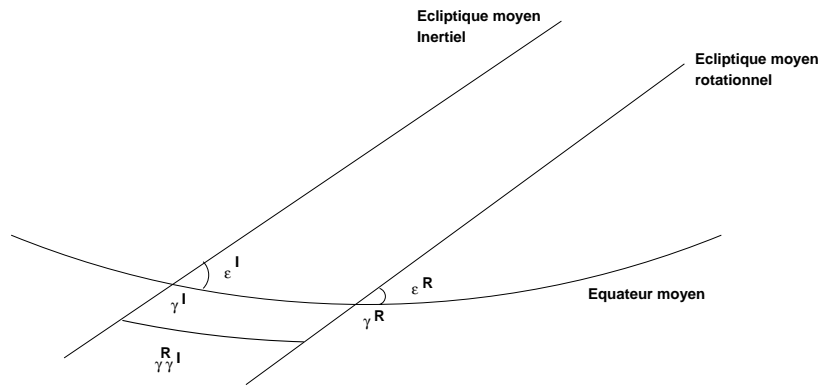


FIG. 5.1: *Ecliptiques et équinoxes dynamiques moyens inertiels et rotationnels à une date donnée*

donnée (cf figure 5.1) et diffère selon que l'on considère les théories DE_{xxx} ou VSOP_{xx}. On définit d'une part l'équinoxe et l'écliptique dynamiques moyens inertiels et d'autre part l'équinoxe et l'écliptique dynamiques moyens rotationnels à une époque de référence.

- L'écliptique inertiel est l'écliptique naturel de la théorie. En effet, il correspond au plan de référence du système idéal tel que nous l'avons défini au chapitre 3, c'est-à-dire qu'il permet d'écrire les équations du mouvement des planètes sans avoir à considérer des effets de Coriolis ou d'accélération linéaire dus au repère. Plus précisément, *l'écliptique inertiel est tel que son plan est perpendiculaire au moment cinétique moyen du barycentre Terre-Lune dans son mouvement héliocentrique lorsque sa vitesse est calculée dans un système de référence non tournant. Ce moment moyen est obtenu en enlevant aux composantes du moment cinétique vrai issu d'une théorie analytique les termes dépendant des longitudes moyennes des planètes et des arguments de la Lune* (Introduction aux éphémérides astronomiques, 1998). Une écriture mathématique a été proposée par Standish (1981), puis validée par Kinoshita et Aoki (1983). Le moment angulaire instantané s'écrit : $\mathbf{h} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ où \mathbf{r} et $\dot{\mathbf{r}}$ sont les vecteurs position et vitesse héliocentriques du barycentre Terre - Lune dans le repère inertiel de la théorie et \mathbf{h} est le vecteur de moment angulaire instantané. Comme nous l'avons dit, pour obtenir le moment angulaire moyen à l'époque du système de référence, $\bar{\mathbf{h}}$, on élimine les termes périodiques et séculaires présents dans \mathbf{h} . Ces termes pourront être détectés, par exemple, en effectuant une analyse en fréquence de ce vecteur ou des éléments instantanés déduits de ce vecteur (Standish, 1982). A partir de $\bar{\mathbf{h}}$, on en déduit l'équinoxe et l'obliquité moyens à l'époque de référence:

$$\begin{cases} \gamma^I = -\tan^{-1}\left(-\frac{\bar{h}_x}{\bar{h}_y}\right) \\ \varepsilon = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{h}_z}{|\bar{\mathbf{h}}|}\right) \end{cases}$$

Cette notion est directement issue des théories analytiques du type Newcomb, Le Verrier ou VSOP. C'est d'ailleurs dans ce plan que sont construites l'ensemble des théories VSOP, contrairement aux théories numériques qui sont elles construites dans l'équateur moyen de l'époque de référence.

- L'écliptique rotationnel, contrairement à l'écliptique inertiel, inclut dans sa définition tous les effets dynamiques induits par la nature du repère choisi. Suivant la mise en équation précédente, on calcule le moment angulaire instantané du barycentre Terre-Lune dans un

Théories	Méthodes	$\gamma^R \gamma^I$	$\Delta\varepsilon$
$DE200^R - VSOP^I$ (Bretagnon, 1982)	Ajustement	$-0.0930''$	$0.0028''$
$DE200^R - ELP2000^I$ (Chapront-Touzé et Chapront, 1983)	Ajustement	$-0.09245'' \pm 0.00016''$	$0.00307'' \pm 0.00006''$
$DE200^R - DE200^I$ (Standish, 1981)	Calcul direct	$-0.09366''$	$0.00334''$

TAB. 5.1: Différences entre équinoxes et écliptiques rotationnels et inertiels

repère tournant par $\mathbf{h}' = \mathbf{r}' \wedge \dot{\mathbf{r}}'$ où \mathbf{r}' et $\dot{\mathbf{r}}'$ sont les vecteurs position et vitesse héliocentriques du barycentre Terre - Lune dans ce nouveau repère. Si \mathbf{B} représente le vecteur décrivant la rotation d'angle θ et de vitesse $\dot{\theta}$ d'un écliptique tournant par rapport à l'écliptique inertiel, on estime que:

$$\mathbf{h}' = \mathbf{h} - \mathbf{r} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r})$$

Le terme supplémentaire de cette équation ne s'annule pas lors de la moyennisation du moment angulaire instantané et on conserve donc une différence entre les deux moments angulaires moyens. Les valeurs de l'angle et de la vitesse de rotation de l'écliptique sont déterminées par les théories de nutation. On estimera par exemple que pour une Terre ayant une orbite circulaire à 1 UA, et un moyen mouvement ω , les différences entre écliptiques et obliquités rotationnels et inertiels ont pour forme et valeur à l'époque J2000:

$$\begin{cases} \gamma^R \gamma^I = -\dot{\theta} \sin \varepsilon \cos(\frac{\theta}{2\omega}) \\ \Delta\varepsilon = \varepsilon^R - \varepsilon^I = \dot{\theta} \sin(\frac{\theta}{2\omega}) \end{cases}$$

Des comparaisons entre ces deux définitions de l'écliptique ont été réalisées, soit par l'écriture et la comparaison des moments cinétiques inertiel et rotationnel, comme nous l'avons vu ci-dessus, soit au cours de l'ajustement des orbites exprimées dans un système inertiel du type VSOP aux orbites données dans le système rotationnel de type DE102 ou DE200. Entre autres, on citera les valeurs issues de l'ajustement de VSOP82 à DE200 et celles issues de l'ajustement aux observations de la théorie de la Lune, ELP 2000. Ces différentes valeurs, ainsi que celles déterminées directement par Standish sont regroupées dans le tableau 1.1 de ce chapitre.

Dans le chapitre 3 de la première partie de ce travail, nous avons choisi d'effectuer le raccordement entre le FK5, dans lequel est exprimée la totalité des observations optiques, et l'ICRF. Nous avons exposé en quoi le repère du FK5 était un repère rotationnel, et comment ce raccordement, nous permet d'affirmer que les données optiques nouvellement raccordées à l'ICRF sont exprimées dans un repère inertiel. De fait, l'ajustement que nous allons effectuer a pour but de raccorder la théorie dynamique VSOP87 exprimée dans un repère héliocentrique inertiel à des séries d'observations optiques, radar et VLBI toutes exprimées dans un repère inertiel dont on choisira arbitrairement le centre.

Remarque

Les systèmes de référence dynamiques précédents ont été déterminés relativement à l'une des réalisations primaires du système de référence conventionnel. Ainsi, le système déduit des éphémérides DE200 est issu de l'ajustement de cette théorie à des observations raccordées au FK4. De même, l'ajustement que nous allons effectuer en utilisant entre autres des données optiques raccordées à l'ICRF, via Hipparcos, induira un système de référence lié à l'ICRF.

Cependant, il est possible de construire un système dynamique indépendamment de tout système de référence conventionnel. Comme l'ont montré Williams et Standish (1989), un ajustement des orbites de la Lune, du barycentre Terre-Lune et des planètes intérieures à des observations de distances de type LLR (Lunar Laser Ranging) et radar suffit pour déterminer complètement un système de référence dynamique. En effet, les données laser Lune permettent un ajustement des perturbations induites par les interactions gravitationnelles du Soleil sur l'orbite de la Lune et ainsi permettent une détermination du plan de l'écliptique. D'autre part, l'orientation de la Terre a une très grande importance dans la réduction de ces données lunaires, à tel point qu'il est possible d'en déduire la position du pôle nord terrestre et par suite celle de l'équinoxe. Par ailleurs, les observations radar des planètes intérieures permettent de contraindre très précisément la géométrie relative de l'ensemble du système interne devenant ainsi un système de référence dynamique à part entière par ajustement aux observations LLR.

Dans le cas qui nous préoccupe, n'incluant pas l'orbite de la Lune, nous allons étudier la mise en place de deux systèmes de références dynamiques, l'un regroupant l'ensemble des observations disponibles, optiques, VLBI et radar, l'autre basé uniquement sur les observations radar et VLBI, c'est-à-dire les observations indépendantes ou directement reliées à l'ICRF.

5.2 Les dérivées partielles

5.2.1 Mise en place des équations

Il s'agit ici de calculer les $\frac{\partial X}{\partial C_i}$, $i=1\dots 6$ présents dans le développement de Taylor du chapitre 6. Pour cela, on part de l'écriture des coordonnées rectangulaires de P en fonction des paramètres orbitaux a, λ, k, h, q, p (cf. équation 5.3). On rappelle d'autre part que $r = \|\mathbf{V}\|$ avec \mathbf{V} , vecteur position héliocentrique de la planète. Les coordonnées rectangulaires (X, Y, Z) d'une planète s'écrivent :

$$\begin{cases} X = r \cos w - 2p^2 r \cos w + 2pqr \sin w \\ Y = r \sin w + 2pqr \cos w - 2q^2 r \sin w \\ Z = -2p\chi r \cos w + 2q\chi r \sin w \end{cases}$$

où $\chi = \sqrt{1 - p^2 - q^2}$, et où w est la longitude vraie. Si l'on prend par exemple le cas de la composante X , elle est une fonction de a, λ, k, h, q, p et on a :

$$dX = 2(-2pr \cos w + qr \sin w)dp + 2pr \sin w dq + (1 - 2p^2)d\sigma_1 + 2pq d\sigma_2$$

où $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ s'écrivent :

$$\begin{cases} d\sigma_1 = \sum_{\sigma=a,\lambda,k,h} \frac{\partial(r \cos w)}{\partial \sigma} d\sigma \\ d\sigma_2 = \sum_{\sigma=a,\lambda,k,h} \frac{\partial(r \sin w)}{\partial \sigma} d\sigma \end{cases}$$

Dans ces conditions, chercher les dérivées partielles de (X, Y, Z) par rapport aux paramètres de la théorie, revient à chercher les dérivées partielles de $r \cos w$ et $r \sin w$ par rapport à a, λ, k, h . De même on a :

$$dY = 2(-2qr \sin w + pr \cos w)dq + 2qr \cos w dp + (1 - 2q^2)d\sigma_2 + 2pq d\sigma_1$$

et

$$dZ = 2\chi [qd\sigma_2 - pd\sigma_1] + 2 \left[-\chi r \cos w + \frac{p^2}{\chi} r \cos w - \frac{pq}{\chi} r \sin w \right] dp + 2 \left[\chi r \sin w + \frac{pq}{\chi} r \cos w - \frac{q^2}{\chi} r \sin w \right] dq$$

On calcule ainsi les dérivées partielles de toutes les planètes dans le repère inertiel héliocentrique de la théorie. La dérivée partielle de la distance Terre-planète, $\Delta_{P/T}$, s'écrit :

$$d\Delta_{P/T} = \frac{1}{\Delta_{P/T}} [(X_p - X_t)(dX_p - dX_t) + (Y_p - Y_t)(dY_p - dY_t) + (Z_p - Z_t)(dZ_p - dZ_t)]$$

En conclusion, on peut dire qu'à partir des calculs de $d\sigma_1$ et de $d\sigma_2$ il est possible de déduire les autres dérivées partielles nécessaires.

5.2.2 Calculs de $d\sigma_1$ et de $d\sigma_2$

L'écriture des équations du mouvement du problème à deux corps nous permet d'écrire la relation $r = a(1 - e \cos E)$ où E est l'anomalie excentrique. De cette équation, on tire directement :

$$\frac{\partial(r \cos w)}{\partial a} = \frac{r}{a} \cos w$$

$$\frac{\partial(r \sin w)}{\partial a} = \frac{r}{a} \sin w$$

Si on note M l'anomalie moyenne, on a :

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{\partial r}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M}$$

Or

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial M} = \frac{a}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial E} = ae \sin E = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} r \sin v \end{cases}$$

où v est l'anomalie vraie telle que, si w est la longitude vraie et ϖ la longitude du périhélie, alors $w = v + \varpi$. On a donc :

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = a \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin v$$

D'autre part, en dérivant l'équation du mouvement $\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$, on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial E} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos v)$$

Ce qui, en rappelant que $w = v + \varpi$, permet d'aboutir à :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = \frac{\partial w}{\partial M} = \frac{\partial w}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial M} = \frac{a}{r} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (1 + e \cos v)$$

Toutes ces égalités nous permettent d'écrire les premières dérivées :

$$\begin{cases} \frac{\partial(r \cos w)}{\partial \lambda} = \cos w \frac{\partial r}{\partial \lambda} - r \sin w \frac{\partial w}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial(r \sin w)}{\partial \lambda} = \sin w \frac{\partial r}{\partial \lambda} + r \cos w \frac{\partial w}{\partial \lambda} \end{cases}$$

sous les formes suivantes en posant $\varphi = \sqrt{1 - h^2 - k^2}$ et $\psi = \frac{1}{1+\varphi}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(r \cos w)}{\partial \lambda} = -\frac{a}{\varphi}(h + \sin w) \\ \frac{\partial(r \sin w)}{\partial \lambda} = \frac{a}{\varphi}(k + \cos w) \end{cases}$$

Par les mêmes méthodes, on en déduit les autres dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial(r \cos w)}{\partial k} = -a - \frac{1}{\varphi^2} [h + \sin w] r \sin w - a \frac{\psi}{\varphi} [h + \sin w] h \\ \frac{\partial(r \sin w)}{\partial k} = \frac{1}{\varphi^2} [h + \sin w] r \cos w + a \frac{\psi}{\varphi} [k + \cos w] h \\ \frac{\partial(r \cos w)}{\partial h} = \frac{1}{\varphi^2} [k + \cos w] r \sin w + a \frac{\psi}{\varphi} [h + \sin w] k \\ \frac{\partial(r \sin w)}{\partial h} = -a - \frac{1}{\varphi^2} [k + \cos w] r \cos w - a \frac{\psi}{\varphi} [k + \cos w] k \end{cases}$$

5.2.3 Ecriture complète

Soient $H = h + \sin w$ et $K = k + \cos w$. Les dérivées partielles de (X, Y, Z) par rapport aux éléments a, λ, k, h, q, p s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial a} = (1 - 2p^2) \frac{r}{a} \cos w + 2pq \frac{r}{a} \sin w \\ \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -(1 - 2p^2) \frac{a}{\varphi} H + 2pq \frac{a}{\varphi} K \\ \frac{\partial X}{\partial k} = (1 - 2p^2) \left(-a - \frac{1}{\varphi^2} H r \sin w - a \frac{\psi}{\varphi} H h \right) + 2pq \left(\frac{1}{\varphi^2} H r \cos w + a \frac{\psi}{\varphi} K h \right) \\ \frac{\partial X}{\partial h} = (1 - 2p^2) \left(\frac{1}{\varphi^2} K r \sin w + a \frac{\psi}{\varphi} H k \right) + 2pq \left(-a - \frac{1}{\varphi^2} K r \cos w - a \frac{\psi}{\varphi} K k \right) \\ \frac{\partial X}{\partial q} = 2pr \sin w \\ \frac{\partial X}{\partial p} = 2r(q \sin w - 2p \cos w) \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial a} = 2pq \frac{r}{a} \cos w + (1 - 2q^2) \frac{r}{a} \sin w \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -2pq \frac{a}{\varphi} H + (1 - 2q^2) \frac{a}{\varphi} K \\ \frac{\partial Y}{\partial k} = 2pq \left(-a - \frac{1}{\varphi^2} H r \sin w - a \frac{\psi}{\varphi} H h \right) + (1 - 2q^2) \left(\frac{1}{\varphi^2} H r \cos w + a \frac{\psi}{\varphi} K h \right) \\ \frac{\partial Y}{\partial h} = 2pq \left(\frac{1}{\varphi^2} K r \sin w + a \frac{\psi}{\varphi} H k \right) + (1 - 2q^2) \left(-a - \frac{1}{\varphi^2} K r \cos w - a \frac{\psi}{\varphi} K k \right) \\ \frac{\partial Y}{\partial q} = 2r(p \cos w - 2q \sin w) \\ \frac{\partial Y}{\partial p} = 2rq \cos w \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial a} = -2p\chi \frac{r}{a} \cos w + 2q\chi \frac{r}{a} \sin w \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 2p\chi \frac{a}{\varphi} H + 2q\chi \frac{a}{\varphi} K \\ \frac{\partial Z}{\partial k} = -2p\chi \left(-a - \frac{1}{\varphi^2} H r \sin w - a \frac{\psi}{\varphi} H h \right) + 2q\chi \left(\frac{1}{\varphi^2} H r \cos w + a \frac{\psi}{\varphi} K h \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial h} = -2p\chi \left(\frac{1}{\varphi^2} K r \sin w + a \frac{\psi}{\varphi} H k \right) + 2q\chi \left(-a - \frac{1}{\varphi^2} K r \cos w - a \frac{\psi}{\varphi} K k \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial q} = 2\left(\chi - \frac{q^2}{\chi}\right)(r \sin w) + \frac{2pq}{\chi}(r \cos w) \\ \frac{\partial Z}{\partial p} = -2\left(\chi - \frac{p^2}{\chi}\right)(r \cos w) - \frac{2pq}{\chi}(r \sin w) \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Chapitre 6

Méthodes statistiques

6.1 Généralités sur la régression

Nous allons ici exposer ce qui a motivé la construction de l'algorithme d'ajustement utilisé dans ce travail. Le problème de l'ajustement des éléments osculateurs d'une planète aux observations est similaire au problème suivant:

Soit un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) de n mesures indépendantes de s grandeurs physiques $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$. On note X le vecteur aléatoire constitué des valeurs prises par l'échantillon et $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, la distribution de probabilité de X , appelée fonction de vraisemblance de l'échantillon. La question est: comment, à partir de cet échantillon, estimer au mieux les s grandeurs physiques précédentes? Ou encore, quels critères utiliser pour former s fonctions des observations, $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, telles que ces s fonctions soient des estimateurs de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$?

Un exemple classique: dans le cas d'une distribution normale des erreurs, on montre que l'estimateur de la moyenne expérimentale, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, est un très bon estimateur.

Nous allons expliquer maintenant les notions de 'distribution normale des erreurs' surtout de 'très bon estimateur' afin d'établir des conditions sur le choix de l'estimateur ou des estimateurs utilisés par la suite.

6.1.1 Normalité asymptotique - Théorème central-limite

Il existe de nombreuses lois de probabilité aussi bien continues que discrètes, bien que dans notre cas nous ne considérons que des distributions continues. En statistique, on rencontre fréquemment des distributions sensiblement normales c'est-à-dire que l'on a affaire à une variable qui peut être considérée comme la somme d'un très grand nombre de causes indépendantes. C'est le cas en astronomie dans les cas d'erreurs observationnelles vérifiant l'hypothèse dite des erreurs élémentaires de Bessel. La justification théorique de cette hypothèse de l'effet global d'un grand nombre de causes indépendantes se trouve dans le théorème central limite de A. M. Liapounov.

Théorème central limite 1 Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes pas forcément de même loi et d'espérance m_i et de variance σ_i^2 . Soit $S_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ et $F_i(x)$ la fonction de répartition de $(X_i - m_i)$. On note :

$$L_n = \frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > S_n} x^2 dF_i(x)$$

Si la condition suivante est réalisée:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$$

alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m_i)}{S_n} \rightarrow ULG(0;1) \quad \text{uniformement}$$

La limite ' $L_n \rightarrow 0$ ' pour n grand est la traduction analytique de la condition qui veut qu'aucun des termes de S_n n'ait un effet prépondérant dans cette somme. D'autre part, il est important de noter que dans le cas de suites de variables aléatoires suivant des distributions discrètes de type loi binomiale (théorème de De Moivre-Laplace) et loi de Poisson, on démontre que ces suites convergent vers la loi normale. Ces théorèmes permettent de justifier l'emploi abondant de la loi normale comme modèle. Cependant, un échantillonnage d'observations réalisées sur un ensemble hétérogène ou biaisé par une mauvaise réduction des données brutes suffit à produire une distribution non normale ou non asymptotiquement normale. Dans le cas d'un ensemble hétérogène, c'est-à-dire par exemple dans le cas de mesures d'une même grandeur physique réalisées sur des populations différentes, on considère la distribution de l'échantillon comme une somme de distributions normales. Dans ces cas-là, nous verrons quelle conséquence entraîne la *non-normalité* de tels échantillons.

6.1.2 Les estimateurs

Comme nous l'avons vu en introduction, l'estimateur d'une grandeur physique α est fonction des variables aléatoires, (x_1, \dots, x_n) . En tant que tel, il est lui-même une variable aléatoire. D'autre part, d'après le théorème central limite, on montre que pour un nombre assez grand d'observations, la distribution des observations est asymptotiquement normale. De même, l'estimateur aura lui aussi une distribution asymptotiquement normale. En conclusion, on peut considérer que dans la plupart des cas d'estimation de paramètres à l'aide de grands échantillons, on aura affaire à des estimateurs qui suivent asymptotiquement une loi normale à une ou plusieurs dimensions.

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

L'idée est ici de trouver des estimateurs des grandeurs physiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ rendant maximum $L(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Ainsi, si on donne à $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ la valeur prise par les estimateurs ainsi définis, nous obtenons le maximum de la densité de probabilité de l'échantillon.

La condition d'optimisation de L va s'appeler équation de vraisemblance et s'écrit de façon générale:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0$$

Sous certaines conditions d'existence et d'unicité [Linnik], il est possible de démontrer l'efficacité voir l'unicité d'une solution issue du principe du maximum de vraisemblance.

Application importante

Supposons que l'échantillon des observations de la grandeur physique α soit entaché d'erreurs aléatoires, Δ_i . Dans le cas où $\Delta_i \sim LG(0; \sigma)$, alors la fonction de vraisemblance s'écrit:

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha) \quad \text{avec} \quad f(x_i, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x_i - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Si on applique le principe de maximum de vraisemblance pour une estimation efficace de α , l'équation de vraisemblance devient équivalente à :

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \text{Max} \iff \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 = \text{Min}$$

Cette dernière condition constitue la base du calcul des moindres carrés.

Conclusion: Pour une distribution normale des erreurs, l'estimateur rendant maximum la densité de probabilité de l'échantillon n'est autre que la solution issue des moindres carrés.

Autrement dit, l'estimation des moindres carrés sera conditionnée par la normalité des erreurs de l'échantillon. Plus l'échantillon aura une distribution normale, plus la solution obtenue par moindres carrés sera un estimateur efficace de la vraie quantité.

Ces remarques ont deux conséquences importantes. La première est que nous nous sommes attachés dès le début de l'ajustement à quantifier la normalité des échantillons utilisés, afin de veiller à l'opportunité d'une estimation par moindres carrés. La deuxième est que dans le cas d'échantillons biaisés ou hétérogènes (donc non gaussiens), l'estimation par moindres carrés n'est pas le meilleur estimateur possible. L'utilisation d'estimateurs moins dépendants de la nature de la distribution devient alors nécessaire.

Estimation par intervalles de confiance

Il est souvent plus intéressant et plus réaliste de fournir non seulement une estimation d'une grandeur physique mais aussi un renseignement du type $a < \hat{\alpha} < b$ plutôt que $\alpha = \hat{\alpha}$. Nous nous plaçons dans le cas d'une distribution normale - nous verrons par la suite comment calculer ces intervalles pour d'autres distributions - et nous utilisons 3 propriétés des estimateurs \bar{x} et s^2 :

1. pour un échantillon gaussien, \bar{x} est le meilleur estimateur possible et $\bar{x} \text{ LG}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
2. l'estimateur de variance expérimentale, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, est une variable aléatoire statistiquement indépendante de \bar{x} , et $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ est distribué selon la loi du χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté.
3. la quantité $t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \alpha}{s} \sqrt{n-1}$ suit une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.

Connaissant la loi de Student, on peut estimer l'intervalle de probabilité de t_{n-1} pour une valeur $(1-a)$ et γ quelconques. Cela revient à calculer:

$$P\{|t_{n-1}| \leq \gamma\} = (1-a)$$

Ce qui s'écrit aussi:

$$P\{\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}} \leq \alpha \leq \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}\} = (1-a)$$

Autrement dit, la probabilité pour que l'intervalle aléatoire

$$I = [\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}]$$

recouvre la quantité inconnue α est de ...%, selon le γ choisi. Par le point 2, on peut calculer l'intervalle de confiance autour de σ . En effet, puisque $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ suit une loi de χ^2_{n-1} , il est alors possible de calculer les bornes l_1 et l_2 telles que:

$$P\{l_1 \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq l_2\} = (1-a)$$

$I = \left[\frac{ns^2}{l_2}, \frac{ns^2}{l_1} \right]$ est alors l'intervalle de confiance autour de l'estimation de σ , $(1 - a)$ étant le coefficient de confiance.

Comme nous l'avons vu précédemment le choix de l'estimateur n'est pas anodin. Par exemple, l'efficacité de l'estimation par moindres carrés est fortement conditionnée par la normalité de l'échantillon. On va donc ici chercher à introduire des classes d'estimateurs d'une part relativement insensibles à la distribution de l'échantillon et d'autre part aux valeurs aberrantes.

6.2 Premières applications à l'algorithme d'ajustement

En suivant tout ce qui vient d'être dit, nous pouvons déjà profiler notre choix d'estimateurs dans le problème de l'ajustement des paramètres orbitaux des planètes du système solaire.

La première conclusion du chapitre précédent est que ce choix sera conditionné par la normalité de l'échantillon. Rappelons que l'hypothèse d'un comportement normal, voir asymptotiquement normal, n'est pas aberrant pour un échantillon de grande taille, du fait du théorème central limite. Autrement dit, la première étape sera constituée de tests de normalité afin d'estimer l'erreur commise sur la nature de la distribution de l'échantillon quand on suppose que celle-ci est normale. Toujours d'après le théorème central limite, nous pouvons estimer que, dans nos cas d'analyse de données observationnelles et pour un échantillon de grande taille, l'écart à la normalité sera essentiellement dû à des biais issus d'une part de l'observation ou du processus de réduction, et d'autre part à la nature hétérogène de la population sur laquelle a été prélevé l'échantillon.

La deuxième conclusion relève du principe du maximum de vraisemblance. Toujours sur la base d'une hypothèse de normalité, on a montré qu'un estimateur efficace possible est celui des moindres carrés. L'application de l'algorithme des moindres carrés à un échantillon dont la normalité a été quantifiée dans la première étape permet une première estimation des paramètres. Dans le cas où l'échantillon n'est biaisé par aucune erreur systématique ou par une population hétérogène, cette estimation peut suffire. Mais dans tous les cas, nous allons procéder à une deuxième estimation issue de la troisième conclusion.

La troisième conclusion du chapitre précédent est qu'il existe des estimateurs permettant d'atténuer les biais, et d'aboutir à partir d'une première estimation biaisée par moindres carrés par exemple à une estimation non biaisée des paramètres. C'est ce genre d'estimateurs que nous allons utiliser en complément de l'algorithme des moindres carrés.

6.2.1 Tests de normalité

Au préalable, il est impératif de s'assurer que l'échantillon a une distribution au moins proche de celle d'une loi normale, et de quantifier cette proximité. Pour une distribution fortement non gaussienne, on pourra alors envisager d'autres hypothèses (distributions exponentielle, de Lorentz et autres) et d'autres algorithmes d'estimation (les méthodes de type simplex notamment). Nous allons ici essayer soit de caractériser la distribution de l'échantillon par son histogramme ou ses moments soit de tester l'hypothèse selon laquelle cette distribution serait normale. L'une des premières approches possibles est donc celle des méthodes empiriques, comme l'étude de la forme d'un histogramme ou bien celle de certaines propriétés caractéristiques, comme un coefficient d'aplatissement proche de 3 et un facteur d'asymétrie nul pour une distribution gaussienne. Ces différentes observations ne sont que des indicateurs de la nature de l'échantillon mais ne quantifient en aucune manière la probabilité qu'à la fonction de distribution de l'échantillon d'être gaussienne.

Ajustement graphique: Droite de Henry

L'idée d'un ajustement graphique est basée sur le fait qu'il est toujours possible d'estimer une fonction de répartition empirique d'un échantillon et qu'alors cette dernière diffère peu de la fonction théorique. Grâce à des ajustements graphiques, on vérifie l'adéquation des données au modèle. Cela peut s'appliquer aussi bien à des lois de probabilité de type exponentielle, de Weibull...et bien sûr de Laplace-Gauss.

On note F_i les valeurs de la fonction de répartition empirique.

$$F_i = \frac{\text{effectif} < x_i}{n} \quad \text{et} \quad u_i = \frac{(x_i - m)}{\sigma}$$

A ces valeurs empiriques, on fait correspondre par le biais de tables de fractiles, les valeurs de la variable centrée réduite correspondantes, \tilde{u}_i . C'est-à-dire qu'en partant de l'hypothèse que la distribution de l'échantillon est normale, on cherche à faire correspondre à cette densité une variable centrée réduite. Si l'hypothèse de normalité est juste alors les valeurs obtenues doivent peu différer des u_i , et il doit exister une relation linéaire entre \tilde{u}_i et x_i . Cette droite reliant x_i et \tilde{u}_i , coupant l'axe des abscisses en m et de pente $1/\sigma$, est appelée la droite de Henry.

Test d'ajustement non paramétrique de Kolmogorov

Cette méthode est basée sur la théorie de l'échantillonnage de Glivenko-Kolmogorov qui stipule ceci:

Si F_n représente une fonction de répartition empirique d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire de distribution $\tilde{F}(x)$, alors on montre que

$$D_n = \text{SUP} | F_n(x) - \tilde{F}(x) |$$

est asymptotiquement distribué comme:

$$P(\sqrt{n}D_n < y) \rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 y^2) = K(y)$$

Connaissant $K(y)$ par calcul ou tabulation, on peut tester les hypothèses de normalité à partir de D_n .

test de Cramer-Von Mises

Ce test permet de quantifier précisément la différence entre distribution empirique et distribution théorique, en calculant $n\omega_n^2$ tel que:

$$n\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - \tilde{F}(x)]^2 d\tilde{F}(x)$$

$n\omega_n^2$ est une variable aléatoire dont la distribution tabulée est indépendante de $\tilde{F}(x)$. On montre de plus que

$$n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(2i-1)}{2n} - \tilde{F}(x_i) \right]^2$$

Grâce à la tabulation de $n\omega_n^2$, on pourra tester l'hypothèse $H: F_n(x) = \tilde{F}(x)$. En effet, si la quantité calculée est supérieure à une valeur que la variable tabulée n'a qu'une probabilité α de

dépasser, alors H peut être rejeté avec une probabilité α . On peut ainsi affirmer qu'un échantillon est normal à α %

Ces 3 tests ont été appliqués avec succès sur un échantillon de nos observations, un échantillon aléatoire uniforme et un échantillon aléatoire normal

Le test d'ajustement graphique étant d'exécution plus longue que les tests non paramétriques, nous n'utiliserons dans la pratique que le test de Kolmogorov, principalement, et le test de Cramer-Von Mises en tant qu'appui.

6.2.2 Algorithme des moindres carrés

Présentation du problème

Dans le cas qui nous préoccupe, le but est de relier des quantités observées, $y = y_1, y_2, \dots, y_n$, à des dérivées partielles $X = x_1^1, \dots, x_p^n$ issues des théories dynamiques, par le biais des coefficients $\beta = b_1, \dots, b_p$, appelés souvent coefficients de régression. Les quantités observées sont affectées d'erreurs $e = e_1, \dots, e_n$. e sera appelé vecteur des résidus et sera la réalisation d'une variable aléatoire ϵ d'espérance nulle et de variance σ^2 . Autrement dit, on cherche à estimer le vecteur β tel que:

$$y = X\beta + e$$

Soit b une estimation de β et y^* tel que $y^* = Xb + e$. On va alors chercher b tel que y^* soit le plus proche de y .

Interprétation géométrique

- Rappels sur les projecteurs D-orthogonaux

Soit P un projecteur M -orthogonal sur un sous-espace W , muni de la métrique M . On rappelle que le produit scalaire sur W s'écrit $\langle u, v \rangle = u^t M v$ et qu'alors,

$$\forall y \langle Py, y - Py \rangle = 0.$$

Supposons que W soit engendré par p vecteurs linéairement indépendants x_1, \dots, x_p et soit X la matrice constituée par cette base indépendante. Dans ce cas, tout vecteur de W va s'écrire sous la forme Xu . $y - Py$ est par définition orthogonal à tout vecteur de W , et on peut donc écrire:

$$\langle Xu; y - Py \rangle = 0, \forall u$$

ceci aboutit à: $X^t M y = X^t M P y$

Py étant lui aussi un vecteur de W , Py peut s'écrire: $Py = Xb$. D'où:

$$X^t M y = X^t M X b$$

D'autre part, la dimension de W étant égale à p , la matrice $X^t M X$ est inversible, alors l'écriture précédente devient

$$Py = X(X^t M X)^{-1} X^t M y$$

D'où l'écriture classique de tout projecteur M -orthogonal:

$$P = X(X^t M X)^{-1} X^t M$$

- Application

Si l'espace des variables est muni de la métrique classique du produit scalaire, la condition du choix de b s'écrira:

$$\|y - y^*\|^2 \text{ minimale}$$

Ceci s'interprète en disant que y^* est alors la M-projection de y sur le sous-espace W de l'espace des variables; M étant par exemple la métrique du produit scalaire. Or d'après le rappel précédent, on sait que l'on peut écrire y^* tel que:

$$y^* = X(X^tMX)^{-1}X^tMy$$

Par hypothèse, $y^* = Xb$, donc b s'écrit:

$$b = (X^tMX)^{-1}X^tMy$$

En particulier, dans le cas où $M = Id$, c'est-à-dire dans le cas de la métrique du produit scalaire, on a:

$$b = (X^tX)^{-1}X^ty \quad \text{et} \quad y^* = X(X^tX)^{-1}X^ty$$

Estimation par moindres carrés

– Cas général

Comme nous l'avons vu précédemment, la solution des moindres carrés est:

$$b = (X^tX)^{-1}X^ty$$

On montre que b est un estimateur sans biais de β , et que de tous les estimateurs sans biais de la forme By , il est de variance minimale. De plus on montre que:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - y^*\|^2}{n - p - 1}$$

est un estimateur sans biais de σ^2

– Normalité de la distribution des erreurs

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, dans ce cas, l'estimation par moindres carrés correspond à celle du maximum de vraisemblance:

$$b = (X^tX)^{-1}X^ty \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - y^*\|^2}{n}$$

b est alors est un estimateur efficace de β . Autrement dit, b est l'estimateur le plus précis possible pour un échantillon donné. La normalité de la distribution des erreurs nous permet donc d'atteindre la limite de précision pour des estimateurs non biaisés, de variance minimale de β . On notera cependant que $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 . L'estimation du vecteur des coefficients de régression se fera donc par l'intermédiaire du calcul de $(X^tX)^{-1}X^t$. Reste donc à calculer cette quantité.

– Stabilité des coefficients de régression

Le calcul par moindres carrés fait intervenir l'inverse de la matrice X^tX et cela n'est pas sans conséquence. En effet, si cette matrice est mal conditionnée - avec un déterminant proche de 0 - alors son inverse aura des termes élevés. Comme on sait que $V(b) = (X^tX)^{-1}\sigma^2$, les paramètres, b , seront alors estimés avec imprécision et les prédictions pourront être entachées d'erreurs considérables. Pour éviter cet effet, différents algorithmes ont été développés, notamment la décomposition de la matrice X^tX par la méthode de Householder et analyse de la matrice diagonale issue de cette décomposition (méthode SVD,

de décomposition en valeurs singulières) et la méthode de l'analyse en composantes principales, ACP, qui bien qu'aboutissant à une écriture équivalente de la matrice précédente, permet une analyse plus aisée et plus "physique" des coefficients et des techniques mis en œuvre. C'est par la mise en place de cet algorithme que nous allons de plus montrer la nécessité d'une sélection au niveau des paramètres de la régression, permettant une optimisation du processus.

6.3 Analyse en composantes principales

Dans ce paragraphe, nous allons exposer en détail la méthode de l'analyse d'un problème de régression par le biais de l'estimation de ses composantes principales. Les intérêts d'une telle analyse sont multiples comme nous allons le voir. Entre autres, elle permet au cours de la régression d'estimer les multi-corrélations entre les paramètres, leurs impacts sur la solution et enfin d'établir un choix cohérent parmi ces paramètres permettant une plus grande stabilité de la solution.

Tout d'abord, nous allons revenir sur les notions de projection, d'inertie et de métrique vues plus haut, mais cette fois sous un point de vu beaucoup plus géométrique. Puis, après l'exposé de la théorie de l'analyse en composantes principales (ACP), nous exposerons l'algorithme mis en place pour la résolution de notre problème.

6.3.1 Description multidimensionnelle

Comme nous l'avons vu précédemment, la régression de n'importe quel système peut se ramener à la projection de l'espace des individus (les observations) sur l'espace des variables, projection, qui minimise la distance, au sens de la métrique choisie, entre les deux espaces (critère du maximum de vraisemblance).

- Espaces des variables et des individus

Notons E , l'espace des variables défini par l'ensemble des vecteurs \vec{x}_j , vecteurs colonnes de la matrice des dérivées partielles, X , et F l'espace des individus, défini par l'ensemble des vecteurs \vec{f}_i , vecteurs lignes de X . \vec{x}_j représente les n observations du j^{e} paramètre et \vec{f}_i , la i^{e} observation des p paramètres. Chaque vecteur individu est donc un point défini par p coordonnées dans l'espace F . L'ensemble des n individus, constituant X , est alors un "nuage" de points de F et si on note \vec{g} , le vecteur des moyennes arithmétiques de chaque variable, il en sera le centre de gravité.

- Inertie du "nuage"

Après avoir fait le choix d'une métrique, M , nous pouvons introduire la notion de distance dans les deux espaces précédents et ainsi définir, l'*inertie globale* du nuage, I_g , par:

$$I_g = \sum_i p_i \|\vec{f}_i - \vec{g}\|_M^2 \quad (6.1)$$

où p_i est le vecteur pondération du système et $\|\cdot\|_M$, la norme associée à la métrique M . En un point quelconque, \vec{a} , du nuage, l'inertie en ce point sera:

$$I_a = \sum_i p_i {}^t(\vec{f}_i - \vec{a}) M (\vec{f}_i - \vec{a}) \quad (6.2)$$

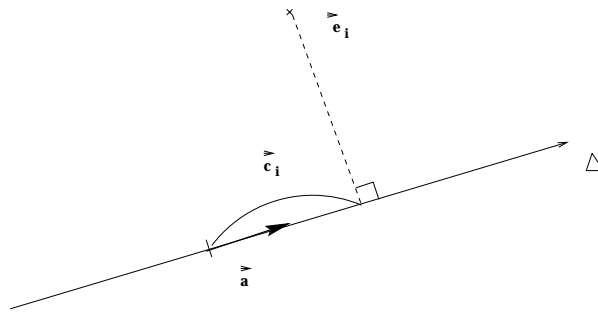


FIG. 6.1: Exemple en 2-D de la projection espace des individus / espace des variables

On montre que si l'on note V , la matrice de variance-covariance, définie par:

$$V = {}^tXDX - \bar{g} {}^t\bar{g} \quad (6.3)$$

alors on a la relation, dans le cas de données centrées et réduites:

$$I_g = \text{Trace}(MV) = \text{Trace}(VM) \quad (6.4)$$

L'inertie est indépendante des individus et n'est fonction que des variables.

6.3.2 ACP: théorie

Nous allons supposer dans la suite, sans perte de généralité, que les données sont centrées-réduites, c'est-à-dire que X devient une matrice dont chaque élément s'écrit:

$$\tilde{x}_i^j = \frac{x_i^j - \bar{x}^j}{s_j} \quad (6.5)$$

La matrice de variance-covariance, V , devient alors:

$$V = {}^tXDX \quad (6.6)$$

Exemple de projection

On peut associer, à chaque variable, \tilde{x}_i^j , un axe de F sur lequel on projette des individus. Ainsi, par combinaison linéaire de $\tilde{x}_1^j, \dots, \tilde{x}_p^j$, on peut déduire de nouvelles variables, ce qui revient à projeter des individus sur de nouveaux axes de F . Soit Δ un axe engendré par la variable \vec{a} . Projétons l'individu, \vec{f}_i orthogonalement sur Δ (cf. figure 2.1). Soit \vec{c}_i , les nouvelles coordonnées de \vec{f}_i après la projection sur Δ . Alors, par définition de la projection orthogonale basée sur la métrique M , on a:

$$\vec{c}_i = {}^t\vec{a}M\vec{f}_i = \langle \vec{a}, \vec{f}_i \rangle_M = XM\vec{a} \quad (6.7)$$

Il apparaît clairement que l'ensemble des variables \vec{c}_i que l'on peut engendrer par combinaisons linéaires des colonnes de X , forme un sous-espace vectoriel de E de dimension inférieure ou égale à p .

Projection des individus sur un sous-espace

L'idée est ici d'obtenir une représentation approchée du nuage de n individus dans un sous-espace de dimension faible. Pour cela, on choisit un sous-espace, F_k , sur lequel on projette les individus, tel que *l'inertie de nuage soit maximale*. Si on note P l'opérateur de projection M-orthogonal, alors chaque individu, \vec{f}_i , se projette sur F_k selon le vecteur $P\vec{f}_i$. La matrice X devient sur F_k , $X {}^tP$. Il en découle l'écriture de l'inertie totale du nuage projeté sur F_k , en utilisant les propriétés d'orthogonalité de P :

$$I_g = \text{Trace}(VMP) \quad (6.8)$$

La question va donc être de trouver l'opérateur, P , projecteur M-orthogonal de rang k , rendant $I_g = \text{Trace}(VMP)$ maximale. Or on peut démontrer la propriété suivante:

Propriété 1 *Soit F_k un sous-espace portant l'inertie maximale. Alors le sous-espace de dimension $(k + 1)$ portant l'inertie maximale est la somme directe de F_k et du sous-espace de dimension 1 M-orthogonal à F_k portant l'inertie maximale.*

Pour obtenir F_k , on pourra donc procéder de proche en proche en cherchant d'abord le sous-espace de dimension 1 d'inertie maximale, puis le sous-espace de dimension 1 M-orthogonal au précédent d'inertie maximale, en calculer la somme directe et ainsi de suite. On voit donc qu'il suffit de déterminer complètement le sous-espace de dimension 1 et d'inertie maximale.

Axes principaux

D'après ce qui vient d'être dit, on va donc chercher la droite de IR^p passant par \vec{g} et maximisant l'inertie du nuage projeté. Par analogie avec l'exemple donné plus haut, on note \vec{a} le vecteur directeur M-unitaire de la droite de IR^p cherchée. Le projecteur M-orthogonal, P , sur cette droite va s'écrire:

$$P = \vec{a}({}^t\vec{a}M\vec{a})^{-1} {}^t\vec{a}M \quad (6.9)$$

L'inertie du nuage projeté s'écrit, d'après ce que nous avons vu $I_g = \text{Trace}(VMP)$, ce qui devient ici:

$$I_g = \text{Trace}(VM\vec{a}({}^t\vec{a}M\vec{a})^{-1} {}^t\vec{a}M) \quad (6.10)$$

Or ${}^t\vec{a}M\vec{a}$ étant un scalaire, on a:

$$I_g = \frac{1}{{}^t\vec{a}M\vec{a}} \text{Trace}(VM\vec{a} {}^t\vec{a}M) \quad (6.11)$$

or, $VM\vec{a} {}^t\vec{a}M = {}^t\vec{a}MVM\vec{a}$, qui est aussi un scalaire. D'où:

$$I_g = \frac{{}^t\vec{a}MVM\vec{a}}{{}^t\vec{a}M\vec{a}} \quad (6.12)$$

Maximiser I_g revient à annuler sa dérivée par rapport à \vec{a} . Mais:

$$\frac{dI_g}{d\vec{a}} = \frac{({}^t\vec{a}M\vec{a})(2MVM\vec{a}) - ({}^t\vec{a}MVM\vec{a})(2M\vec{a})}{{}^t\vec{a}M\vec{a}} \quad (6.13)$$

donc annuler $\frac{dI_g}{d\vec{a}}$ revient à choisir \vec{a} tel que:

$$({}^t\vec{a}M\vec{a})(MVM\vec{a}) = ({}^t\vec{a}MVM\vec{a})(M\vec{a}) \quad (6.14)$$

Ce qui revient à dire que $VM\vec{a} = \lambda\vec{a}$ avec $\lambda = \frac{{}^t\vec{a}MV\vec{a}}{{}^t\vec{a}M\vec{a}}$.

Autrement dit, si l'on veut projeter le "nuage" en maximisant son inertie, il faut le projeter sur les vecteurs propres de VM. On appellera *axes principaux* d'inertie ces vecteurs propres, M-normés. Il y a donc par définition, p axes principaux notés \vec{a}_i avec $i=1, \dots, p$.

Facteurs principaux

Sur chaque axe principal, \vec{a}_i , on définit un système de coordonnées caractérisé par la forme linéaire \vec{u}_i telle que $\vec{u}_i = M\vec{a}_i$. Par définition, \vec{u}_i est un élément du dual de \mathbb{R}^p . \vec{a}_i étant vecteur propre de VM, on a :

$$MVM\vec{a}_i = \lambda_i M\vec{a}_i \quad (6.15)$$

et donc naturellement, on déduit que, $MV\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$.

Les *facteurs principaux* sont donc les vecteurs propres de MV, M^{-1} -normés, puisque si \mathbb{R}^p est muni de la métrique M, alors son dual est muni de la métrique M^{-1} .

Composantes principales

Si l'on suit, là encore, l'exemple donné plus haut, il nous reste à calculer les coordonnées du "nuage" après projection sur l'axe principal, \vec{a}_i . On va pour cela utiliser le système de coordonnées construit précédemment avec les facteurs principaux.

On définit alors *les composantes principales*, éléments de \mathbb{R}^n tels que $\vec{z}_i = X\vec{u}_i$, chaque vecteur \vec{z}_i regroupant les coordonnées des projections M-orthogonales des individus sur l'axe défini par \vec{a}_i . On montre, de plus, que la variance d'une composante principale, \vec{z}_i , est égale à la valeur propre λ_i correspondante.

Choix de la métrique et applications

Nous avons donc mis en place les bases de l'analyse en composantes principales. Dans ce qui suit, nous avons choisi d'utiliser la métrique I sur un système centré réduit impliquant la division par l'écart type des variables. Cette combinaison permet d'une part les simplifications de calculs, la matrice de variance-covariance est égale à la matrice de corrélation de X et axes et facteurs principaux sont confondus, sans perte de généralité et d'autre part de rendre les distances entre les individus invariantes par transformation linéaire séparée de chaque variable et de s'affranchir des unités de mesures.

Dans ce cas, on sait que la matrice de variance-covariance des données centrées réduites est la matrice de corrélation, R . Les facteurs principaux, \vec{u}_i , en seront les vecteurs propres successifs rangés selon l'ordre décroissant des valeurs propres correspondantes, λ_i . On a ainsi $R\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$. D'autre part, on montre que \vec{z}_i est la variable la plus liée aux \vec{x}^j , j variant de 1 à p, au sens de la somme des carrés des corrélations et on a :

$$\sum_{j=1}^p \text{corr}^2(\vec{z}_i; \vec{x}^j) \text{ est maximale} \quad (6.16)$$

On trouvera cette démonstration dans (Saporta, 1990) et on a plus précisément (Saporta, 1990) :

$$\text{corr}(\vec{z}_i; \vec{x}^j) = \sqrt{\lambda} u_{i,j} \quad (6.17)$$

où $u_{i,j}$ est la j^{e} composante du facteur principal, u_i , associé à \vec{z}_i .

En conclusion, on peut dire que l'analyse en composante principale permet de transformer les variables \vec{x}^j en variables \vec{z}^i , combinaisons linéaires des variables initiales, mais non corrélées entre elles, de variance maximale et les plus liées aux \vec{x}^j au sens de la somme des carrés des corrélations. Nous allons du fait de leur non-corrélation pouvoir étudier leur impact sur la régression.

6.3.3 Algorithme et application à la régression

Retour à la régression

On a donc un système à résoudre de type $y = bX$, où b sont les inconnues. Si on effectue une analyse en composantes principales de la matrice des individus X , cela revient à la remplacer par la matrice des composantes principales, Z , telle que l'on ait des relations linéaires entre les vecteurs individus classiques et les nouvelles variables du type:

$$z_j = \sum_{i=1}^p u_{j,i} x_i \quad (6.18)$$

On résout alors la régression non plus en utilisant X , mais Z comme variables. On obtient alors des relations de la forme, $y = cZ$. Comme nous l'avons déjà dit, la non-corrélation entre les \vec{z} permet d'étudier leur apport à la solution et d'identifier les paramètres induisant le plus d'instabilité dans la solution. Le retour aux régresseurs de départ se fait en remplaçant Z par X dans les solutions précédentes. On détermine $B = (b_i)_{i=1,p}$ tel que:

$$b_i = \sum_{j=1}^p c_j u_{j,i} \quad (6.19)$$

La variance de la solution est alors:

$$\text{var}(b_i) = \frac{\sigma^2}{n-1} \sum_{j=1}^p \frac{u_{j,i}^2}{\lambda_j} \quad (6.20)$$

On voit ici tout l'intérêt d'une telle régression. Dans l'expression ci-dessus, l'importance des valeurs propres λ_j dans la stabilité des solutions de la régression apparaît clairement. En effet, une valeur très faible de λ_j entraîne une augmentation de la variance de b_i et est donc une source d'instabilité potentielle de la solution. De plus, on voit que plus on limite la dimension du sous-espace sur lequel on projette les variables de départ, et donc le nombre de terme λ_j , plus on diminue la variance de b_i . L'étude de chacune des composantes principales nous permettra d'établir un équilibre entre stabilité et signification de la solution.

Algorithme

Voici l'algorithme d'analyse en composante principale que nous avons appliqué lors de la résolution de notre problème.

1. Transformations des variables X en Z .

On détermine en premier lieu les vecteurs propres, \vec{u}_j , et les valeurs propres, λ_j , de la matrice de corrélation, R , de X . Puis en effectuant le produit $X\vec{u}_j$, on obtient les composantes principales \vec{z}_j associées aux valeurs propres.

2. Corrélations entre les composantes principales et les variables d'origine

Comme nous l'avons vu plus haut, la corrélation entre la composante principale, \vec{z}_j et la variable \vec{x}_i s'obtient par l'intermédiaire des valeurs et des vecteurs propres de R (équation 6.17). L'étude de ces corrélations permet déjà de visualiser, par le biais de graphes de type cercle de corrélations, des liens potentiels entre les différentes variables en présence.

3. Régression sur les composantes principales

Cette étape est importante car elle va permettre de classer les composantes principales par ordre de signification dans la régression. En effet, par le calcul du test de Student pour chaque paramètre estimé, on établit la signification des composantes principales associées. L'idée étant de diminuer au maximum la dimension du sous-espace sur lequel on projette les variables par l'élimination de composantes principales, il va être naturel de vouloir éliminer en premier lieu les composantes n'ayant pas une forte signification dans l'ajustement afin de n'en conserver que celles fortement significatives.

4. Retour à la régression originale

Le fait d'introduire dans la régression de départ le détour des composantes principales, nous permet d'une part d'améliorer la stabilité des solutions par un choix motivé des variables d'analyse et d'autre part de faire une décomposition de la variance des coefficients de régression en fonction de la contribution apportée dans cette régression par chaque variable initiale et cela par l'intermédiaire de variables non-corrélées. En effet, la contribution de la composante j à la variance de b_i est donné par :

$$imp(x_j, b_i) = \frac{corr(\vec{z}_i; \vec{x}^j)^2}{\lambda_j^2} \quad (6.21)$$

On peut donc étudier les proportions de variances des b_i induits par chacune des variables.

5. Suppression de composantes principales

La suppression des composantes principales est une étape délicate car même si un critère objectif de sélection existe, la signification de chaque composante principale dans la régression sur Z , aucun critère ne donne le nombre exact de composantes à supprimer.

La méthode utilisée est une méthode graphique consistant en la représentation en abscisse du nombre de composantes supprimées et en ordonnée la valeurs des coefficients b_i . Ce graphe permet de suivre l'évolution des valeurs prises par ces coefficients au fur et à mesure de la suppression des composantes. On utilise d'ailleurs le terme de "branches", pour désigner ces courbes d'évolution. Ainsi on peut visualiser plus ou moins aisément le nombre limite de composantes à partir duquel les valeurs des b_i changent radicalement des valeurs calculées à l'étape précédente. Ce nombre correspond au nombre maximum de composantes non significatives, ou non indispensables, pour la régression. Le graphe 2.2 est un bon exemple. En effet, on peut voir que l'évolution des coefficients devient rapidement chaotique à partir de la cinquième composante enlevée, l'ordre de la suppression étant celui issu des tests de significations. Mais considère-t-on qu'il y a encore stabilité des coefficients alors que la valeur du coefficient b_4 semble affectée par la suppression de la quatrième composante? Il y a ici plusieurs écoles. Certains considèrent qu'il n'y a plus stabilité des solutions dès que l'évolution des coefficients n'est plus rectiligne. D'autres acceptent qu'il y ait au plus une, voir deux, intersections entre branches. C'est ce qui se passe sur notre graphe, à partir de la suppression de la quatrième composante. Notre position a été de favoriser la stabilité des solutions au détriment d'un éventuel gain en nombre de

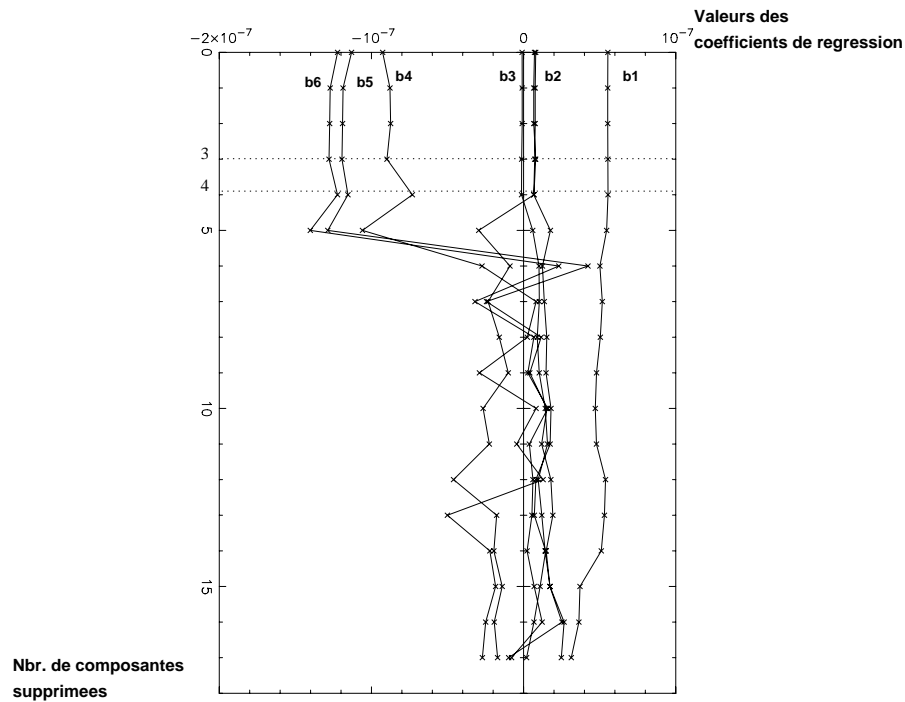


FIG. 6.2: Exemple de graphe en “branche”: Evolution des coefficients de régression en fonction de la suppression des composantes principales

composantes supprimées. En conséquence, dans l'exemple donné, notre choix sera celui de ne supprimer que 3 composantes.

Dans les chapitres 8 et 9 consacrés à la présentation détaillée des résultats de l'ajustement, nous aurons l'occasion de voir plus en détail les différents aspects de l'ACP et l'on pourra mieux juger de son efficacité dans le cadre de l'ajustement planétaire.

6.3.4 Conclusion

L'ACP apparaît comme une méthode puissante permettant des analyses poussées de plusieurs aspects d'un même problème de régression. En effet, nous avons vu que d'une part nous pouvions identifier les corrélations et les multi-colinéarité qui existent entre les régresseurs et d'autre part estimer l'impact de chacun des régresseurs sur la variance des coefficients issus de la régression. De plus, par le détour des composantes principales, il devient possible d'identifier les causes d'instabilité des solutions et de les réduire par la suppression de certaines des composantes principales. Grâce à cette méthode d'analyse, il a été possible de diminuer la variance sur les paramètres orbitaux des planètes et tout particulièrement ceux de l'orbite terrestre.

6.4 Tests de qualité

6.4.1 Qualité de l'ajustement

Après cette parenthèse dédiée à la présentation de la méthode d'analyse en composantes principales, revenons aux descriptions plus générales des processus de régression linéaire ou

multiple. De nombreux indices statistiques plus ou moins sophistiqués permettent de quantifier la qualité d'un ajustement. Certains testent la validité du modèle ajusté (caractère significatif des coefficients de regression), de l'hypothèse de normalité de l'échantillon observationnel etc... Grâce à la mise en oeuvre de la méthode d'analyse en composantes principales, les tests sur le caractère significatif des coefficients de regression ont déjà été effectués tout comme ceux, présentés plus haut, sur la normalité de la distribution des résidus, base de la régression.

D'autre part, comme nous le verrons au paragraphe suivant, des tests plus spécifiques à la nature dynamique de notre problème vont être mis en place afin de quantifier directement sur les solutions des mouvements des planètes considérées l'impact de tel ajustement par rapport à tel autre.

Autrement dit, il nous reste à estimer si, à partir d'un échantillon d'observations donné, le modèle ajusté représente au mieux ces diverses quantités observées et à quantifier cette représentation. C'est ce que nous effectuons quand nous calculons le coefficient de regression, R^2 . Ainsi, si on note y_1, \dots, y_n , les résidus constituant l'échantillon des quantités à estimer, et y_1^*, \dots, y_n^* , les quantités calculées à partir de la solution ajustée, dans le cas d'ajustement parfait, il y a égalité entre y_1, \dots, y_n et y_1^*, \dots, y_n^* . On peut dire aussi que le rapport entre la variance expliquée par l'ajustement est égale à celle de la série y_1, \dots, y_n . Naturellement, on va donc définir le coefficient d'ajustement, R^2 , par le rapport suivant:

$$R^2 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2 - \sum_i (y_i - y_i^*)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

Dans le cas d'un ajustement parfait, on a $R^2 = 1$.

6.4.2 Qualité de l'orbite à court et moyen terme - Prévision

En général, on considère que la matrice de variance des éléments osculateurs issue d'un ajustement ou d'une intégration numérique, caractérise la qualité de l'orbite déterminée. Cependant, des métriques permettant d'estimer la qualité réelle de la dégradation de l'orbite au cours du temps ont été développées indépendamment de la position de l'observateur (comme c'est le cas pour les métriques classiques exprimées dans le plan d'observation) et sans dimension (contrairement à l'utilisation des matrices de covariances multidimensionnelles des éléments osculateurs classiques). Ces études ont été motivées par l'actuelle explosion du nombre d'observateurs potentiels et les questions liées aux périodes d'observations efficaces pour l'amélioration des orbites des objets connus et l'identification définitive des orbites de nouveaux objets.

Ces métriques sont définies à partir des variables (a, λ, k, h, q, p) . Si n est le moyen mouvement, et si l'on suppose que la dégradation de l'anomalie moyenne est linéaire au cours du temps, alors on identifie le taux de dégradation de l'orbite au cours du temps à l'erreur sur le moyen mouvement, σ_n , donnée par la relation:

$$\sigma_n = \frac{3n}{2a} \sigma_a$$

où σ_a est l'incertitude sur le demi-grand axe. A partir de cette première estimation - nous qualifierons dans la suite cette métrique *métrique de stabilité temporelle* - on définit d'autres métriques de type *temps de vie observationnel* et qui permettent d'estimer à partir de quel moment, pour une incertitude sur le moyen mouvement donnée, l'objet pourra être considéré comme perdu.

En complément de cette métrique *temporelle*, des métriques plus révélatrices de la dégradation

de la géométrie (inclinaison, excentricité...) de l'orbite ont été mises en place (Muinonen et Bowell, 1993). On citera par exemple la métrique dite de *fuite* simplifiée, ι définie à partir de (k, h) et (q, p) par:

$$\iota^2 = \text{tr } \Sigma_{\mathbf{I}=(k,h)} + \text{tr } \Sigma_{\mathbf{m}=(q,p)} + \Sigma_{(a,a)} \frac{1}{4a^2}$$

où $\text{tr } \Sigma_{\mathbf{I}}$ et $\text{tr } \Sigma_{\mathbf{m}}$ représentent les traces des matrices de variance des vecteurs $\mathbf{I} = (k, h)$ et $\mathbf{m} = (q, p)$. Si l'on utilise la métrique L^2 pour l'estimation des matrices de variances, cette métrique ι est indépendante du temps et permet d'estimer la stabilité géométrique d'une orbite pour la période moyenne de l'intégration numérique ou de la couverture observationnelle dans le cas d'un ajustement d'orbites aux observations. Les métriques σ_n et ι vont nous servir d'indices de qualité de nos orbites ajustées. En particulier, ces indices nous permettront de choisir les échantillons d'observations induisant après ajustement des conditions initiales une qualité d'orbite optimale en terme de taux de dégradation et de métrique de *fuite*.

Chapitre 7

L'algorithme d'ajustement

7.1 Ecriture matricielle des équations de conditions

Avec les dérivées partielles que nous avons calculées dans le chapitre précédent, il est alors possible de mettre en place les équations qui vont constituer la base de l'ajustement des conditions initiales des solutions du mouvement des planètes. Nous allons différencier l'ajustement au travers d'une mise en équation des observations angulaires d'une part et en distance d'autre part.

7.1.1 Cas général

Equations de conditions en positions

Soit \mathbf{V}_o , le vecteur positions observées d'une planète, P , centré au barycentre Terre-Lune, noté T . Si on appelle, C_j , $j=1\dots 6$, les constantes d'intégration de la théorie dynamique de cette planète et \tilde{C}_j , $j=1\dots 6$, celles de la théorie du barycentre Terre-Lune, on peut écrire en faisant intervenir les vecteurs héliocentriques observés, \mathbf{SP}_o et \mathbf{ST}_o de chacun de ces corps et ces mêmes vecteurs mais issus des théories planétaires \mathbf{SP} et \mathbf{ST} :

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{SP}_o - \mathbf{ST}_o = \mathbf{SP}(C_1 + \Delta C_1, \dots, C_6 + \Delta C_6) - \mathbf{ST}(\tilde{C}_1 + \Delta \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_6 + \Delta \tilde{C}_6) \quad (7.1)$$

où ΔC_6 et $\Delta \tilde{C}_6$ sont les corrections à apporter aux constantes d'intégration des théories afin de les ajuster aux observations. Ce qui revient à considérer que:

$$\mathbf{V}_o = P(C_1, \Delta C_1, \dots, C_6, \Delta C_6, \tilde{C}_1, \Delta \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_6, \Delta \tilde{C}_6)$$

Si l'on effectue un développement de Taylor de chacun des éléments de l'équation 7.1, on a alors:

$$\mathbf{V}_o = \left[\mathbf{SP}(C_1, \dots, C_6) + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{SP}}{\partial C_i} \Delta C_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \mathbf{SP}}{\partial C_i} \frac{\partial \mathbf{SP}}{\partial C_j} \Delta C_i \Delta C_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial^2 \mathbf{SP}}{\partial C_i^2} \Delta C_i^2 + \dots \right] \\ - \left[\mathbf{ST}(\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_6) + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{ST}}{\partial \tilde{C}_i} \Delta \tilde{C}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \mathbf{ST}}{\partial \tilde{C}_i} \frac{\partial \mathbf{ST}}{\partial \tilde{C}_j} \Delta \tilde{C}_i \Delta \tilde{C}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial^2 \mathbf{ST}}{\partial \tilde{C}_i^2} \Delta \tilde{C}_i^2 + \dots \right]$$

Connaissant des valeurs des coefficients C_i et \tilde{C}_i proches des valeurs définitives, les ΔC_i et $\Delta \tilde{C}_i$ sont des "petites quantités". On justifie ainsi l'approximation classique qui permet d'écrire, si

l'on appelle \mathbf{V}_c , le vecteur positions calculées de la planète P, centré au barycentre Terre-Lune:

$$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_c + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{SP}}{\partial C_i} \Delta C_i - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{ST}}{\partial \tilde{C}_i} \Delta \tilde{C}_i$$

Ainsi pour chaque observation k , le calcul des différences entre vecteurs positions calculées et observées revient à écrire:

$$(\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^k = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_i} \Delta C_i - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_i} \Delta \tilde{C}_i \quad (7.2)$$

La mise en place du système pour un ensemble de n observations est alors évident et on a:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^k \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{SP}^1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^1}{\partial C_6} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial \tilde{C}_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial \tilde{C}_6} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_6} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_6} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{SP}^n}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^n}{\partial C_6} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^n}{\partial \tilde{C}_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^n}{\partial \tilde{C}_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_1 \\ \vdots \\ \Delta C_6 \\ \Delta \tilde{C}_1 \\ \vdots \\ \Delta \tilde{C}_6 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Equations de conditions en distances

On procède de même pour les distances. Ce qui nous permet décrire pour une observation notée k :

$$D_c (D_o - D_c)^k = \sum_{i=1}^6 A_i^k \Delta C_i - \sum_{i=1}^6 \tilde{A}_i^k \Delta \tilde{C}_i \quad (7.4)$$

avec

$$A_i^k = \left\{ (X - \tilde{X}) \frac{\partial X}{\partial C_i} + (Y - \tilde{Y}) \frac{\partial Y}{\partial C_i} + (Z - \tilde{Z}) \frac{\partial Z}{\partial C_i} \right\} \Delta C_i \quad (7.5)$$

et

$$\tilde{A}_i^k = \left\{ (X - \tilde{X}) \frac{\partial X}{\partial \tilde{C}_i} + (Y - \tilde{Y}) \frac{\partial Y}{\partial \tilde{C}_i} + (Z - \tilde{Z}) \frac{\partial Z}{\partial \tilde{C}_i} \right\} \Delta \tilde{C}_i \quad (7.6)$$

Récapitulation

Ainsi si l'on a n observations de positions en (X, Y, Z) et m observations en distances d'une planète P , il nous faudra résoudre le système général suivant en utilisant les notions précédentes:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^k \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)^n \\ D_c^1 (D_o - D_c)^1 \\ \vdots \\ D_c^m (D_o - D_c)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{SP}^1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^1}{\partial C_6} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial \tilde{C}_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial \tilde{C}_6} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_6} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_6} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{SP}^n}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^n}{\partial C_6} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^n}{\partial \tilde{C}_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^n}{\partial \tilde{C}_6} \\ A_1^1 & \cdots & A_6^1 & -\tilde{A}_1^6 & \cdots & -\tilde{A}_6^6 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ A_1^m & \cdots & A_6^m & -\tilde{A}_1^m & \cdots & -\tilde{A}_6^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_1 \\ \vdots \\ \Delta C_6 \\ \Delta \tilde{C}_1 \\ \vdots \\ \Delta \tilde{C}_6 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

avec A_i^k et \tilde{A}_i^k définies par les équations 7.5 et 7.6. C'est le système que nous allons résoudre par moindres carrés, sachant que nos inconnues sont les variables ΔC_i .

7.1.2 Cas du barycentre Terre-Lune et des planètes intérieures

Comme on l'aura compris l'ajustement de la théorie analytique du barycentre Terre-Lune va se faire par le biais des observations des planètes intérieures et extérieures. Cependant afin de limiter les sources d'erreurs, il nous est apparu intéressant de limiter le nombre d'objets impliqués dans cet ajustement qui nous permettra d'effectuer le raccordement entre les systèmes de référence cinématique de l'ICRS et dynamique de VSOP.

Pour cette sélection, en gardant à l'esprit que nous ne traiterons pas ici le cas de Mars, nous avons choisi de ne faire intervenir que les corps susceptibles d'être observés avec une très grande précision. Or, par la qualité des observations radar et des données angulaires issues du suivi de la sonde Magellan autour de Vénus, nous avons choisi d'effectuer notre raccordement à partir des observations de Mercure et Vénus. Nous avons ajusté ces deux orbites en même temps. En utilisant les indices V , M pour tous paramètres rattachés aux orbites de Vénus et de Mercure respectivement, et pour un échantillon de n_V observations optiques et m_V observations radar de Vénus, et un échantillon d'observations de Mercure constitué de n_M optiques et m_M radar, on a le système suivant:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)_V^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)_V^{n_V} \\ D_c^1 (D_o - D_c)_V^1 \\ \vdots \\ D_c^{m_V} (D_o - D_c)_V^{m_V} \\ \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)_M^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c)_M^{n_M} \\ D_c^1 (D_o - D_c)_M^1 \\ \vdots \\ D_c^{m_M} (D_o - D_c)_M^{m_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_V & 0 \\ 0 & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_1^V \\ \vdots \\ \Delta C_6^V \\ \Delta \tilde{C}_1 \\ \vdots \\ \Delta \tilde{C}_6 \\ \Delta C_1^M \\ \vdots \\ \Delta C_6^M \end{pmatrix}$$

avec

$$M_V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{SV}^1}{\partial C_1^V} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SV}^1}{\partial C_6^V} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial C_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial C_6} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \frac{\partial \mathbf{SV}^k}{\partial C_1^V} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SV}^k}{\partial C_6^V} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial C_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial C_6} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \frac{\partial \mathbf{SV}^{n_V}}{\partial C_1^V} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SV}^{n_V}}{\partial C_6^V} & -\frac{\partial \mathbf{ST}^{n_V}}{\partial C_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^{n_V}}{\partial C_6} \\ (A_1^1)_V & \cdots & (A_6^1)_V & -(\tilde{A}_1^6)_V & \cdots & -(\tilde{A}_6^6)_V \\ \vdots & & \vdots & & & \\ (A_1^{m_V})_V & \cdots & (A_6^{m_V})_V & -(\tilde{A}_1^m)_V & \cdots & -(\tilde{A}_6^m)_V \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

et

$$M_M = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial C_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^1}{\partial C_6} & \frac{\partial \mathbf{SM}^1}{\partial C_1^M} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SM}^1}{\partial C_6^M} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial C_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial C_6} & \frac{\partial \mathbf{SM}^k}{\partial C_1^M} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SM}^k}{\partial C_6^M} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ -\frac{\partial \mathbf{ST}^{n_M}}{\partial C_1} & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{ST}^{n_M}}{\partial C_6} & \frac{\partial \mathbf{SM}^{n_M}}{\partial C_1^M} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SM}^{n_M}}{\partial C_6^M} \\ -(\tilde{A}_1^6)_M & \cdots & -(\tilde{A}_6^6)_M & (A_1^1)_M & \cdots & (A_6^1)_M \\ \vdots & & \vdots & & & \\ -(\tilde{A}_1^m)_M & \cdots & -(\tilde{A}_6^m)_M & (A_1^{m_M})_M & \cdots & (A_6^{m_M})_M \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

7.1.3 Cas des planètes extérieures

L'orbite du barycentre Terre-Lune est déjà ajustée à ce niveau de l'algorithme, donc $\Delta \tilde{C}_i$ du système 7.7 sont connus. De fait, si on note \mathbf{V}_c' le nouveau vecteur position calculée de la planète tel que:

$$\mathbf{V}_c' = \mathbf{V}_c - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_i} \Delta \tilde{C}_i \quad (7.10)$$

le calcul des constantes d'intégration à partir d'un échantillon de n observations de positions de la planète P se déduit du système d'équations:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c')^1 \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c')^k \\ \vdots \\ (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_c')^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{SP}^1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^1}{\partial C_6} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_6} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{SP}^n}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{SP}^n}{\partial C_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta C_1 \\ \vdots \\ \Delta C_6 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

En appliquant à ce nouveau système, une résolution par moindres carrés, on aboutit à la détermination des corrections ΔC à apporter aux conditions initiales des solutions du mouvement

des planètes extérieures. Pour chaque solution du barycentre Terre-Lune ajustée par le biais des observations des planètes intérieures, et donc pour chaque nouveau système de référence dynamique, sera associé un jeu de paramètres ΔC pour les planètes extérieures, dont les solutions du mouvement seront de fait exprimées dans les nouveaux repères dynamiques.

7.2 Connexion des repères

7.2.1 Mise en place des quantités observées

La mise en équations matricielles précédente fait appel à un formalisme vectoriel aussi bien au niveau des quantités calculées à l'aide des théories analytiques que des quantités observées. Dans le cas des observations de distances, les données issues de la réduction sont directement utilisables dans l'ajustement, sans changement de forme ni de système de coordonnées. Ce n'est pas le cas des observations optiques. En effet, à l'issue des réductions de données méridiennes, nous obtenons des quantités angulaires, ascension droite et déclinaison, et non les vecteurs positions nécessaires à l'écriture matricielle de l'ajustement telle que nous l'avons mise en place précédemment. Il nous faut alors, pour opérer ce changement de variables classique, introduire la distance entre l'objet et le barycentre Terre-Lune. Cette distance sera la distance théorique issue des solutions analytiques, l'erreur commise ici sur la position induite par une telle approximation étant du deuxième ordre.

D'autre part, toutes les quantités observées le sont à la surface de la Terre. De fait, après le passage entre coordonnées topocentriques et géocentriques effectué en amont de la réduction, il reste à effectuer le passage entre repère géocentrique et celui centré au barycentre Terre-Lune. Pour cela, il suffit d'ajouter au vecteur géocentrique de position de la planète dans le repère moyen J2000 ICRS corrigé des effets de zone et de régions du FK5, le vecteur géocentrique du barycentre Terre-Lune pondéré par le rapport des masses de ces deux objets. Nous estimons que l'orbite de la Lune est connue et les vecteurs positions, vitesses et accélérations du barycentre sont déduits de la théorie lunaire ELP2000, dans le repère équatorial FK5, puis ramené à l'ICRS. On obtient alors un vecteur centré au barycentre Terre-Lune dans le repère équatorial J2000 ICRS. De même, pour toutes les planètes possédant des satellites naturels, en particulier les planètes extérieures, les solutions dynamiques de ces corps ne représentent pas directement le mouvement de leur centre de masse mais celui du barycentre du système satellitaire (ou planétaire), composé de la planète mère et de ses principaux - en terme de masse - satellites. Il est donc nécessaire qu'après une réduction au centre de masse des positions observées, on effectue une translation de la position du centre de masse déduite vers le barycentre du système planétaire. Cette translation s'effectue de la même manière que celle opérée entre la position du géocentre et celle du barycentre Terre-Lune. Nous avons ainsi considéré essentiellement pour Jupiter les influences des quatre satellites galiléens et pour Saturne, celle de Titan et avons utilisé les théories G5 et TASS pour les galiléens et Titan respectivement.

7.2.2 Raccordement des repères dynamique et cinématique

A partir des éléments osculateurs de l'orbite du barycentre Terre-Lune, on conçoit assez aisément que l'on puisse raccorder d'une part l'équateur par rapport auquel sont effectuées l'ensemble des observations au sol et d'autre part l'écliptique, c'est-à-dire le plan de l'orbite héliocentrique du barycentre Terre-Lune.

L'équateur observationnel dont il est question peut être plus ou moins assimilé à l'équateur

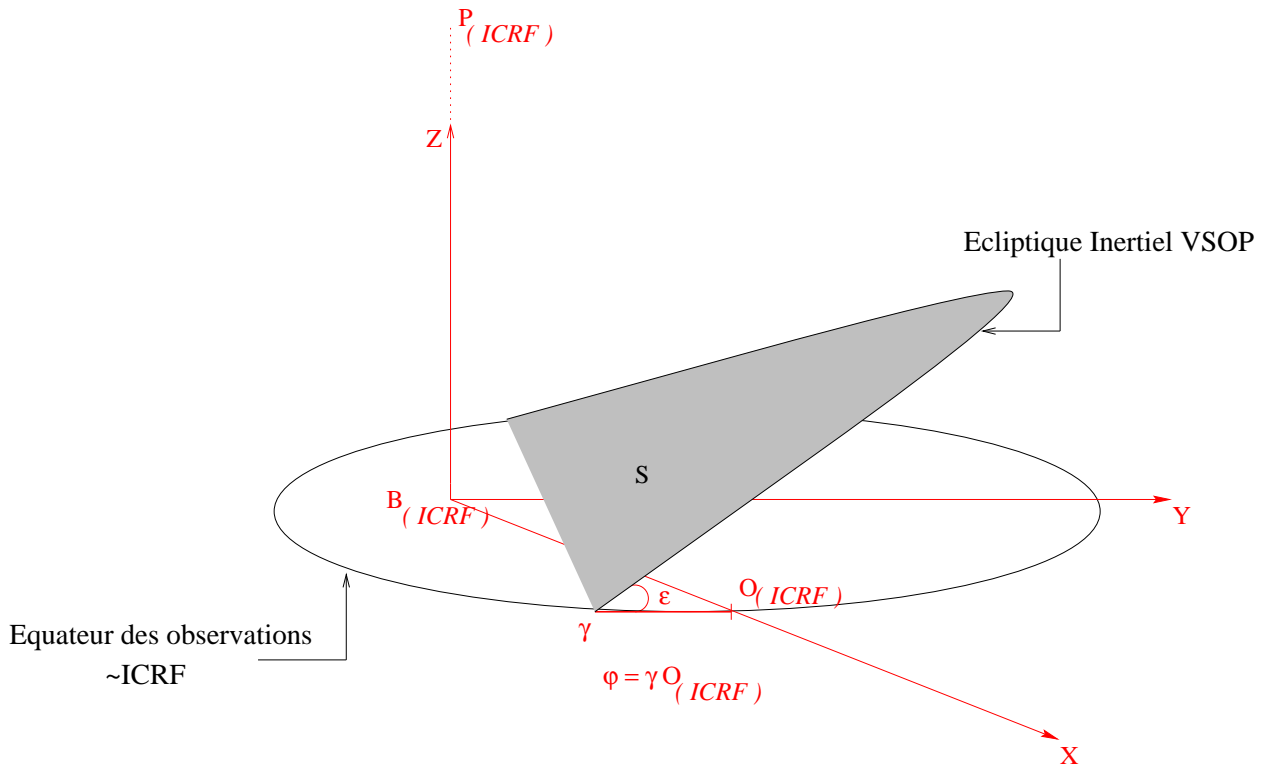


FIG. 7.1: Raccordement des systèmes dynamique de VSOP et cinématique de l'ICRS

cinématique défini par convention comme celui de l'ICRS. L'erreur commise lors de cette identification est liée au processus de réduction des observations. Comme on l'a vu dans le chapitre 3 concernant les observations optiques en général et méridiennes en particulier, le passage à l'ICRS se fait à l'ordre de grandeur des incertitudes du FK5. Autrement dit, le basculement du repère FK5 vers celui de l'ICRF n'est pas significatif en comparaison des erreurs induites de fait par les définitions du FK5. Dans ce cas, il est hasardeux d'identifier l'équateur observationnel à celui de l'ICRF. Cependant, et comme nous l'avons déjà souligné, certaines observations permettent un raccordement direct à l'ICRS via des observations de sources extra-galactiques. Ce sont les observations de suivi de sondes par technique VLBI et les observations photographiques réduites à l'aide d'étoiles Hipparcos, matérialisation dans les longueurs d'onde optique de l'ICRS. Grâce à ces deux types de données, nous pouvons considérer avec moins d'incertitude que l'équateur dans lequel sont exprimées les observations est effectivement assimilable à celui de l'ICRF.

D'autre part, les quantités déduites directement de VSOP87 sont exprimées dans le repère de la théorie analytique à savoir l'écliptique dynamique inertiel au sens classique.

Ajuster les deux membres de l'équation 7.7 revient donc à estimer, par le biais des corrections aux conditions initiales de l'orbite du barycentre Terre-Lune, les angles ϵ et γ , représentés sur la figure 7.1, d'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur ICRF et de position de l'équinoxe par rapport à l'origine des ascensions droites de l'ICRS. A partir du formulaire des variables équinoxiales, on estime classiquement que ces quantités peuvent s'écrire en fonction de Δq , Δp par:

$$\begin{cases} \Delta\epsilon = -2 \Delta q \\ \Delta\gamma = \frac{-2 \Delta p}{\sin\epsilon} \end{cases} \quad (7.12)$$

Ainsi donc à partir de l'estimation des corrections à apporter aux variables p et q de l'orbite du barycentre Terre-Lune après résolution par moindres carrés du système matriciel 7.7, on en déduit l'obliquité de l'écliptique issue des solutions ajustées par rapport à l'équateur de l'ICRS et la position de la position de l'équinoxe par rapport à l'origine des ascensions droites de l'ICRS. Dans la pratique afin d'effectuer un ajustement plus efficace du système, on effectue une première rotation du repère des observations pour ramener l'équateur de l'ICRS à un écliptique proche de celui de la théorie, puis on détermine les quantités Δq , Δp par moindres carrés avec le reste des conditions initiales. Ce processus en deux étapes garantit une plus grande commensurabilité des variables d'ajustement et donc une plus grande stabilité des solutions.

7.3 Calcul de nouvelles positions angulaires

A partir des corrections ΔC à apporter aux conditions initiales des solutions du mouvement des planètes intérieures et extérieures, il est possible de déterminer de nouvelles positions de ces objets à partir des solutions ajustées. Il suffit pour cela de calculer de nouvelles dérivées partielles aux dates considérées et d'ajouter aux vecteurs positions théoriques déduits des solutions non-ajustées des termes correctifs de la forme :

$$COR = - \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{ST}^k}{\partial \tilde{C}_i} \Delta \tilde{C}_i + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \mathbf{SP}^k}{\partial C_i} \Delta C_i \quad (7.13)$$

Le premier élément de l'équation 7.13 correspond aux corrections à appliquer à l'orbite héliocentrique du barycentre Terre-Lune par rapport à l'estimation de cette orbite fournie par la théorie analytique précédente (non ajustée), VSOP87, et le deuxième terme indique les corrections à appliquer à l'orbite héliocentrique de la planète par rapport à celle déterminée par VSOP87. On en déduit ainsi de nouveaux vecteurs positions de la planète centrés au barycentre Terre-Lune décrits dans un nouveau système de référence dynamique *a priori* plus proche du système de référence de l'ICRS, dans lequel sont exprimées les quantités observées.

A partir de ces nouveaux vecteurs positions, on effectuera des analyses des résidus, dits *après ajustement*, c'est-à-dire des quantités issues des comparaisons entre positions observées et utilisées dans l'ajustement et nouvelles positions calculées, et des tests de prévision des solutions ajustées à partir de l'étude des résidus issus des comparaisons entre des positions observées qui n'ont pas servi à l'ajustement, les solutions ajustées et les intégrations numériques DE403, DE405 et la théorie analytique VSOP87.

Nous venons donc de décrire le processus d'ajustement adopté au cours de ce travail. Dans la suite, les résultats énoncés seront issus d'un tel processus.

L'ajustement des théories planétaires: les premiers résultats

Chapitre 8

Planètes intérieures

8.1 Choix des observations

Comme nous l'avons dit en conclusion du chapitre 3 consacré aux observations optiques, le choix des observations constituant l'échantillon expérimental de la régression est un point très important et cela pour deux raisons principales.

La première est que le principe du maximum de vraisemblance sur lequel est basée la méthode des moindres carrés nécessite une distribution aléatoire des erreurs observationnelles (cf. chapitre 6). On devra donc s'assurer de la normalité de l'échantillon et choisir parmi plusieurs lots d'observations celui qui se rapproche le plus d'une distribution gaussienne.

La deuxième raison est la qualité des données. Nous venons d'évoquer l'importance de la qualité statistique de la distribution des erreurs, mais il est aussi important que ces observations constituent un échantillon le plus représentatif possible de la variable observée. De ce fait, il est assez naturel d'éliminer des observations qui nous semblent biaisées ou affectées d'erreurs observationnelles trop importantes. Mais, ces observations ne sont-elles pas, d'autre part, porteuses d'informations? Quel est le meilleur critère de choix? Nous avons étudié ces deux questions plus spécialement sur les observations optiques qui sont les plus sujettes à des erreurs observationnelles et nous dirons quelques mots sur les données radar.

8.1.1 Observations optiques

Approche graphique

Nous avons tout d'abord abordé ces questions d'un point de vue graphique, par l'analyse des histogrammes présentés au chapitre 3. Les observations de Mercure post-1900 (histogramme 3.17) présentent une distribution gaussienne avec plus de 80% d'observations regroupées dans la bande des 2σ autour de la valeur moyenne et cela aussi bien en α qu'en δ . Par cette constatation, on peut estimer que limiter nos observations à 2σ ne remet pas en cause le caractère gaussien de la distribution.

Le cas de Vénus post-1900 (histogramme 3.16) est un peu plus délicat mais, là encore, environ 80% des observations se trouvent dans la zone des 2σ autour des valeurs moyennes. Cette approche graphique nous garantit certes la normalité de l'échantillon mais ne permet pas de dire si les observations supprimées ne sont pas porteuses d'informations et si leur suppression ne va pas au contraire biaiser notre solution.

C'est pourquoi nous avons complété cette approche, par une approche plus mathématique, l'approche bayésienne.

Venus Mercure	2" V: 3956	2.5" V: 4101	3" V: 4180	4" V: 4965
2" M: 3032	Observations σ_α 0.819 σ_δ 0.740 KS α 0.48 KS δ 0.53	Observations σ_α 0.855 σ_δ 0.765 KS α 0.47 KS δ 0.51	Observations σ_α 0.879 σ_δ 0.789 KS α 0.49 KS δ 0.53	
	Orbite σ_n 0.09561 $\Delta\chi^2$ 0.92 ι 0.21420	Orbite σ_n 0.09559 $\Delta\chi^2$ 0.0 ι 0.21418	Orbite σ_n 0.09560 $\Delta\chi^2$ 2.9 ι 0.21414	
	Fit R_α 99.37 R_δ^2 99.39	Fit R_α 99.53 R_δ 99.52	Fit R_α 98.86 R_δ^2 99.19	
2.5" M: 3212	Observations σ_α 0.861 σ_δ 0.786 KS α 0.47 KS δ 0.53	Observations σ_α 0.894 σ_δ 0.809 KS α 0.48 KS δ 0.55	Observations σ_α 0.916 σ_δ 0.830 KS α 0.47 KS δ 0.56	
	Orbite σ_n 0.09560 $\Delta\chi^2$ 0.5 ι 0.21420	Orbite σ_n 0.09559 $\Delta\chi^2$ 1.4 ι 0.21413	Orbite σ_n 0.09560 $\Delta\chi^2$ 1.2 ι 0.21420	
	Fit R_α 99.59 R_δ^2 99.52	Fit R_α 99.33 R_δ^2 99.47	Fit R_α 99.57 R_δ^2 99.58	
3" M: 3315	Observations σ_α 0.890 σ_δ 0.819 KS α 0.49 KS δ 0.54	Observations σ_α 0.921 σ_δ 0.840 KS α 0.47 KS δ 0.57	Observations σ_α 0.942 σ_δ 0.860 KS α 0.48 KS δ 0.61	
	Orbite σ_n 0.09558 $\Delta\chi^2$ 1.56 ι 0.21410	Orbite σ_n 0.09561 $\Delta\chi^2$ 1.05 ι 0.21420	Orbite σ_n 0.09561 $\Delta\chi^2$ 1.0 ι 0.21421	
	Fit R_α 99.07 R_δ^2 99.42	Fit R_α 99.42 R_δ^2 99.47	Fit R_α 99.51 R_δ^2 99.48	
4" M: 3580				Observations σ_α 1.109 σ_δ 0.931 KS 0.64 KS 0.70
				Orbite σ_n 0.09561 $\Delta\chi^2$ 1.160 ι 0.21423
				Fit R_α 97.92 R_δ 98.54

FIG. 8.1: Critères de sélection des observations de Mercure et Vénus à partir de critères liés aux observations (“Observations”), à l’orbite du barycentre Terre-Lune issue de l’ajustement (“Orbite”), et de la qualité de l’ajustement (“Fit”). σ_α , σ_δ de même que ι sont donnés en secondes de degré. σ_n est en secondes de degré par siècle. $\Delta\chi^2$, KS_α et KS_δ sont sans unité et R_α^2 , R_δ^2 sont les taux de variance (en %) expliqués par l’ajustement.

L'approche bayésienne

Pour cette étude, nous nous sommes basés sur les travaux de Muinonen et Howell (1993) et les notions de métrique de qualité d'orbites présentées au chapitre 6. Pour établir notre sélection, nous avons utilisé trois types de critères:

- les critères liés directement aux données, c'est-à-dire les déviations standard des résidus en α, δ et les indices de normalité de Kolmogorov-Smirnov pour ces deux distributions;
- les critères liés à la qualité de l'orbite ajustée et à l'impact de la suppression d'observations sur l'orbite. Pour cela, nous avons utilisé d'une part les métriques de qualité ι (dégradation de la géométrie de l'orbite) et σ_n (dégradation en moyen mouvement) et d'autre part, la métrique $\Delta\chi^2$. Cette dernière permet d'estimer les déviations des orbites par comparaison à une orbite de référence. Dans les cas de suppressions d'observations, $\Delta\chi^2$ indique si celles-ci ont modifié l'orbite de façon significative;
- les critères de qualité de l'ajustement et plus particulièrement le taux de variance expliquée par l'ajustement, R^2 . On rappelle qu'un ajustement est parfait quand $R^2 = 1$. Ce dernier critère permettant de discriminer deux solutions proches, en indiquant l'échantillon observationnel pour lequel on trouve une solution ajustée reflétant au mieux ce dernier.

Nous avons donc effectué un premier ajustement du système Mercure-Vénus-Barycentre Terre-Lune, en filtrant nos observations à 2.0, 2.5 et 3.0 secondes de degré. L'intérêt premier de notre ajustement étant le raccordement des repères dynamique et cinématique, nous avons plus particulièrement étudié l'évolution de l'orbite du barycentre Terre-Lune ajustée à des échantillons d'observations de Vénus et Mercure filtrés à 2.0, 2.5 ou 3.0 secondes de degré.

Le tableau de la figure 8.1 regroupe l'ensemble des résultats. Ce tableau se décompose en trois parties. La première ligne du tableau indique les filtres appliqués aux observations de Vénus, la première colonne indique ceux appliqués aux observations de Mercure, ainsi que le nombre d'observations non supprimées. Enfin le corps du tableau regroupe l'ensemble des critères décrits précédemment correspondant à l'orbite du barycentre Terre-Lune ajustée sur les échantillons de Vénus et Mercure de la ligne (Mercure) et de la colonne (Vénus) correspondantes. Par exemple, la solution encadrée correspond à l'ensemble des critères calculés sur une orbite du BTL ajustée sur un échantillon d'observations de Vénus filtrées à 2.5 secondes de degré et à un échantillon de données de Mercure filtrées à 2 secondes de degré.

Nous avons choisi l'orbite issue de ce dernier ajustement (Vénus à 2.5" et Mercure à 2") comme orbite de référence à partir de laquelle sont calculées les autres $\Delta\chi^2$. Ainsi, nous allons pouvoir estimer si la suppression ou l'apport d'observations change l'orbite plus ou moins radicalement. Cette solution a été choisie car elle permet d'obtenir une orbite de bonne qualité au sens des métriques ι et σ_n , tout en conservant un échantillon gaussien (non - ou peu - biaisé) et une bonne qualité d'ajustement.

Les différentes orbites sont très proches les unes des autres et n'échappent pas à la zone de un σ d'incertitude autour de l'orbite de référence, comme l'indique $\Delta\chi^2$. En effet, on rappelle que pour un ajustement à 6 degré de liberté et des valeurs de $\Delta\chi^2$ inférieures à 7 (cf Press et al, 1987), l'orbite considérée est encore confinée dans la zone des "1 σ " autour de l'orbite de référence. Ce qui montre une grande homogénéité des observations: aucune d'entre elles, même à 4 secondes de degré n'entraînant de grosses instabilités. De plus, les qualités aussi bien géométriques (ι) qu'en moyen mouvement (σ_n) des orbites sont assez équivalentes d'un échantillon à l'autre, soulignant là encore la stabilité des solutions ajustées. On peut noter par ailleurs les cas d'orbites de qualité supérieure à celle de l'orbite de référence en terme de métriques ι et σ_n ,

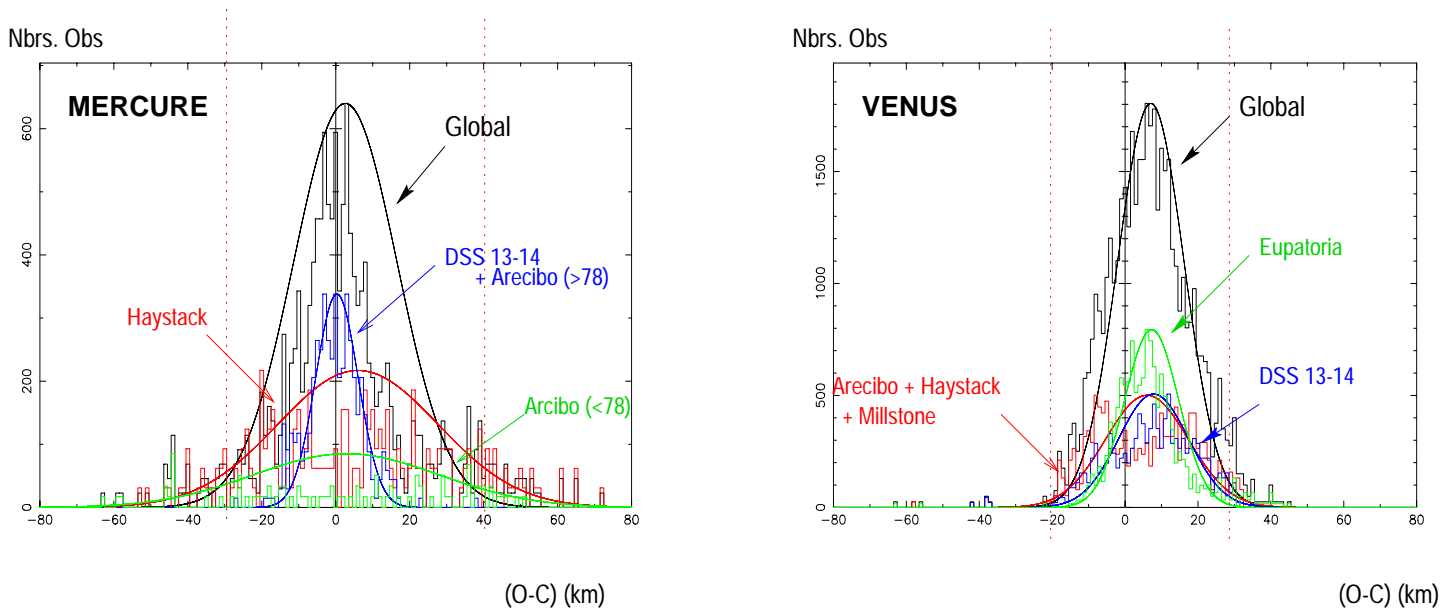


FIG. 8.2: Histogrammes des données radar de Mercure et Vénus. En noir, est tracée la densité de répartition théorique des erreurs issues d’une loi normale.

s’accompagnent d’une dégradation de la qualité d’ajustement et de la normalité de l’échantillon. Pour s’en convaincre, il suffit de prendre l’exemple de la solution (Mercure: 3” et Vénus: 2”). Nous avons ajouté dans cette présentation les éléments issus d’un ajustement réalisé sur un échantillon d’observations de Mercure et de Vénus filtré à 4 secondes de degré. Ces tests nous montrent que ces observations n’apportent pas plus d’information sur l’orbite du barycentre Terre-Lune et au contraire dégradent la qualité de l’algorithme. Nous avons choisi ici de favoriser la normalité de l’échantillon et la qualité de l’ajustement afin de pouvoir ajouter d’autres types d’observations VLBI et radar sur une base d’observations non biaisées. De ce fait, et après l’analyse précédente, nous avons choisi de conserver l’échantillon de référence (Vénus à 2.5” et Mercure à 2”) comme base optique de notre ajustement.

Remarque

Il est intéressant ici de noter que l’ensemble des observations anciennes de Vénus sélectionnées sur une méthode purement statistique n’est constitué que des données réalisées à l’USNO entre 1866 et 1904. Autrement dit, les observations les plus anciennes (Oxford) et celles pour lesquelles nous avons le moins d’informations (Cape) ont été rejetées.

8.1.2 Les données radar

Ce paragraphe est un complément aux résultats décrits au chapitre 2 consacré à l’analyse des données radar et résumés dans le tableau de la figure 2.8 de ce même chapitre. Nous avons alors remarqué que pendant que les observations de Vénus s’amélioraient lentement et de façon continue, les données de Mercure présentaient de grands écarts entre les données précédant les années 70 et les décennies suivantes. Ces modifications profondes transparaissent dans l’histogramme des résidus des observations de Mercure présenté sur la figure 8.2. Il apparaît alors clairement que ces données, réalisées à Haystack et à Arecibo avant 1970, sont les causes principales du “bruitage” des ailes de la distribution des erreurs. Un filtrage des données à 2σ , c’est-à-dire à 40

kilomètres est alors justifié afin de limiter la propagation des erreurs entraînée par la présence de ces observations. D'autre part, l'histogramme de distribution des erreurs sur les distances Vénus-Barycentre Terre-Lune confirme l'homogénéité de ces données et un filtre à 2σ , c'est-à-dire à 20 kilomètres nous permet d'inclure dans notre ajustement la grande majorité de ces données.

En conclusion, seront utilisées dans l'ajustement 87% des observations de Vénus, données d'Eupatoria incluses, et 91% des données de Mercure. Les tirs radar sur la surface de Vénus constituent 74% de l'échantillon en distance. On voit d'ores et déjà la sur-représentation des données vénusiennes au détriment des 26% d'observations de Mercure.

8.2 Les résultats

8.2.1 Mise en place des résultats

Les différents échantillons

Nous avons donc appliqué l'algorithme décrit dans le chapitre 7, aux échantillons d'observations suivants:

1. L'échantillon complet. Celui-ci est constitué de l'ensemble des données présentées et traitées dans ce mémoire, à savoir des observations méridiennes de 1750 à 1994, des données de distance par tirs radar et des données de poursuite de sondes spatiales par la technique du VLBI. On parlera dans ce cas, d'ajustement global.
2. L'échantillon complet sans les observations de transit anciennes, c'est-à-dire réalisées entre 1750 et 1911.
3. L'échantillon englobant l'ensemble des observations autres qu'optiques.
4. L'échantillon regroupant les observations méridiennes récentes et radar et permettant d'estimer l'impact des données VLBI sur la solution complète.

Ces observations ont donc été traitées, analysées et filtrées par le biais des méthodes exposées précédemment. Nous rappelons que l'ajustement s'opère par le biais d'une analyse en composantes principales et que les résultats présentés ici sont issus de cette analyse. Une discussion sur le choix des composantes éliminées lors de l'analyse sera effectuée ainsi que sur les différentes valeurs des corrélations entre ces paramètres.

Pondération des équations de conditions

Nous avons utilisé un système de pondération très proche de celui utilisé par Chapront-Touzé (Chapront-Touzé, 1990) dans le cadre des ajustements des théories semi-analytiques des satellites de Mars. Les observations utilisées dans ces ajustements sont aussi diverses que celles dont il est question ici, puisqu'elles regroupent des observations de suivis des sondes Viking, Mariner, et des observations optiques.

Classiquement, on pondère chaque observation et donc chaque équation de condition, d'un poids w_j , tel que $w_j = \frac{1}{\sigma_j}$, où σ_j est la déviation standard individuelle de chaque observation.

La difficulté de la pondération pour ce genre d'échantillonnage hétérogène réside dans la nature même de ces données. Ce système de pondération permet une régulation naturelle de la propagation des erreurs observationnelles dans l'ajustement, mais a tendance à favoriser les

Type	Nbr.obs	σ	w [k=1]	k	w
Radar	2081	5 km	0.20	5	1
VLBI	18	0.002''	500	0.0026	1.3
Optiques 1911-1992	4823	0.8''	1.25	0.32	0.4
Optiques 1750-1911	1484	1.5''	0.66	0.03	0.02

TAB. 8.1: *Pondérations moyennes - et donc indicatives - des observations selon les types d'observations. Le σ présenté ici représente la déviation standard moyenne par types d'observations et n'est donc qu'une indication des écarts-types par observations utilisées dans l'algorithme. D'autre part, l'indice R^2 correspond aux taux de variance expliquée pour chaque type de données considérées par l'ajustement global.*

observations de distance au détriment des observations angulaires. Nous avons donc adopté un système faisant intervenir un coefficient k tel que $w_j = \frac{k}{\sigma_j}$, permettant d'atténuer ou de renforcer l'impact de tel type d'observations par rapport à tel autre. Dans le tableau 8.1, on retrouvera les valeurs prises par le paramètre k pour chaque type d'observations. Le critère de sélection du paramètre k est purement statistique puisqu'il consiste en l'optimisation du taux de variance expliquée par l'ajustement global et donc, du taux de variance des résidus après ajustement par rapport aux résidus de départ. Ainsi, on peut considérer que la pondération choisie est optimale au sens, non pas des moindres carrés, mais du coefficient de détermination, R^2 . Comme on aura pu le remarquer, la pondération indiquée ici n'est pas présentée par objet - Mercure et Vénus - puisque par nature, elle tient compte des différences observationnelles de chacun de ces corps. Nous rappelons que dans le cas des observations VLBI, un système de pondération permettant de tenir compte des corrélations entre les quantités observées est appliqué, comme cela a été décrit au chapitre 4. Cette pondération s'ajoute à celle décrite précédemment.

Nous avons donc, après avoir filtré et pondéré nos échantillons, effectué l'ajustement par le biais de la méthode de l'analyse en composante principale. Nous rappelons que cette méthode a été présentée en détail au chapitre 6 et nous ne présenterons ici que les solutions finales.

8.2.2 Solution Radar - VLBI

Analyse en composantes principales

Dans le tableau de la figure 8.3, sont regroupés les paramètres statistiques de cette solution. On y voit que les nombres de conditionnement de chaque valeur propre de la matrice de corrélation sont peu élevés, ce qui permet de dire que le système est bien conditionné. D'autre part, on peut remarquer que les indices correspondant au test de signification de Student, notés t_i dans le tableau, sont importants. Ce qui signifie que chaque composante a un taux de signification non négligeable. Nous verrons que dans le cas d'échantillons de plus grosse taille et de nature plus hétérogène, comme ceux incluant les données optiques, les indices des tests de Student auront

Terre + Mercure + Venus / Radar + VLBI											
i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i
1	0.041	8.506	1.70	7	0.096	5.590	6.19	13	0.198	3.886	22.92
2	2.999	1.000	72.09	8	1.410	1.458	73.45	14	1.065	1.677	44.23
3	0.077	6.213	35.09	9	2.111	1.197	64.23	15	0.990	1.740	9.49
4	0.394	2.760	34.53	10	0.320	3.061	20.78	16	0.660	2.131	9.57
5	0.070	6.556	2.19	11	1.663	1.343	66.12	17	0.249	3.471	1.94
6	2.818	1.316	17.36	12	1.993	1.227	140.33	18	0.841	1.888	19.17

FIG. 8.3: Statistiques de l'analyse en composantes principales des ajustements sur l'échantillon radar+VLBI

La première colonne indique l'indice des composantes. Dans la colonne "Z_i", se trouvent les valeurs propres de la matrice de corrélation de l'ajustement, à savoir les composantes principales du système. La colonne intitulée "C_i" regroupe les nombres de condition correspondants et dans la dernière colonne, "t_i", se trouvent les valeurs du test de signification de Student pour chaque composante.

des valeurs moins importantes.

La deuxième étape est alors d'éliminer les composantes ayant les taux de signification les plus faibles, jusqu'à ce que le système ne soit plus stable. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 6, la notion de stabilité du système est floue et dépend beaucoup des auteurs. Pour notre part, nous arrêterons notre analyse quand il y aura soit un changement de signe d'un des paramètres ajustés soit plus d'un "croisement" dans le graphe par branches issu de l'étude, comme celui représenté sur la figure 8.4.

Il apparaît clairement sur cette figure que l'ajustement basé sur l'échantillon des données radar filtrées par l'analyse graphique précédente et les 18 observations VLBI de Vénus est assez stable pour l'ensemble des paramètres. En effet, il faut attendre l'élimination de la troisième composante principale pour qu'apparaissent des zones d'instabilité pour les solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune, mais aussi de Mercure et de Vénus.

Dans le tableau 8.2, est rassemblé l'ensemble des solutions des orbites de Mercure, Vénus et de la Terre issues des analyses et des remarques précédentes.

Etude des variances et des corrélations

Nous rappelons quelques éléments utiles de l'analyse en composantes principales. Grâce au changement de variables d'ajustement effectué au cours de cet algorithme, nous aboutissons à un système orthogonal qui nous permet d'étudier l'impact de chaque composante principale sur la variance des coefficients ajustés. Cette étude est rendue possible grâce à l'orthogonalité du système, les composantes principales étant indépendantes deux à deux.

Nous pouvons alors calculer – pour plus de détails, chapitre 6 – d'une part le taux de variance induite par chaque composante et d'autre part, les corrélations entre les paramètres de régression initiaux et les composantes. Si plusieurs termes de la solution voient leur variance fortement affectée par la même composante principale, on peut conclure d'une part, de manière naturelle, sur leur forte corrélation et d'autre part sur des colinéarités non négligeables entre les colonnes de la matrice de conditions.

	La Terre	Mercure	Vénus
Radar + VLBI - 0 composante enlevée			
ΔN	(8 ± 2)	(-0 ± 2)	(-1 ± 1.5)
$\Delta \lambda$	(190 ± 2)	(-213 ± 2)	(-181 ± 4)
Δk	(7 ± 1)	(8 ± 1)	(-5 ± 3)
Δh	(-66 ± 2)	(101 ± 2)	(86 ± 2)
Δq	(-0.6327 ± 0.0335) mas	(64 ± 2)	(67 ± 1)
Δp	(0.1450 ± 0.0347) mas	(11 ± 2)	(-9 ± 2)
Radar + VLBI - 2 composantes enlevées			
ΔN	(8 ± 2)	(-0 ± 2)	(-1 ± 1.5)
$\Delta \lambda$	(191 ± 2)	(-215 ± 2)	(-182 ± 4)
Δk	(6 ± 1)	(10 ± 1)	(-5 ± 2)
Δh	(-66 ± 2)	(102 ± 2)	(87 ± 2)
Δq	(-0.6228 ± 0.0333) mas	(69 ± 2)	(67 ± 1)
Δp	(0.1344 ± 0.0345) mas	(13 ± 2)	(-8 ± 2)

TAB. 8.2: Corrections aux conditions initiales de VSOP87 des solutions analytiques du mouvement de la Terre, Mercure et Vénus issues de l'ajustement Radar + VLBI et (Radar - observations bi-modales) + VLBI. Les unités sont 10^{-10} pour k, h, q et p , 10^{-10} radians pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} radian par an pour N .

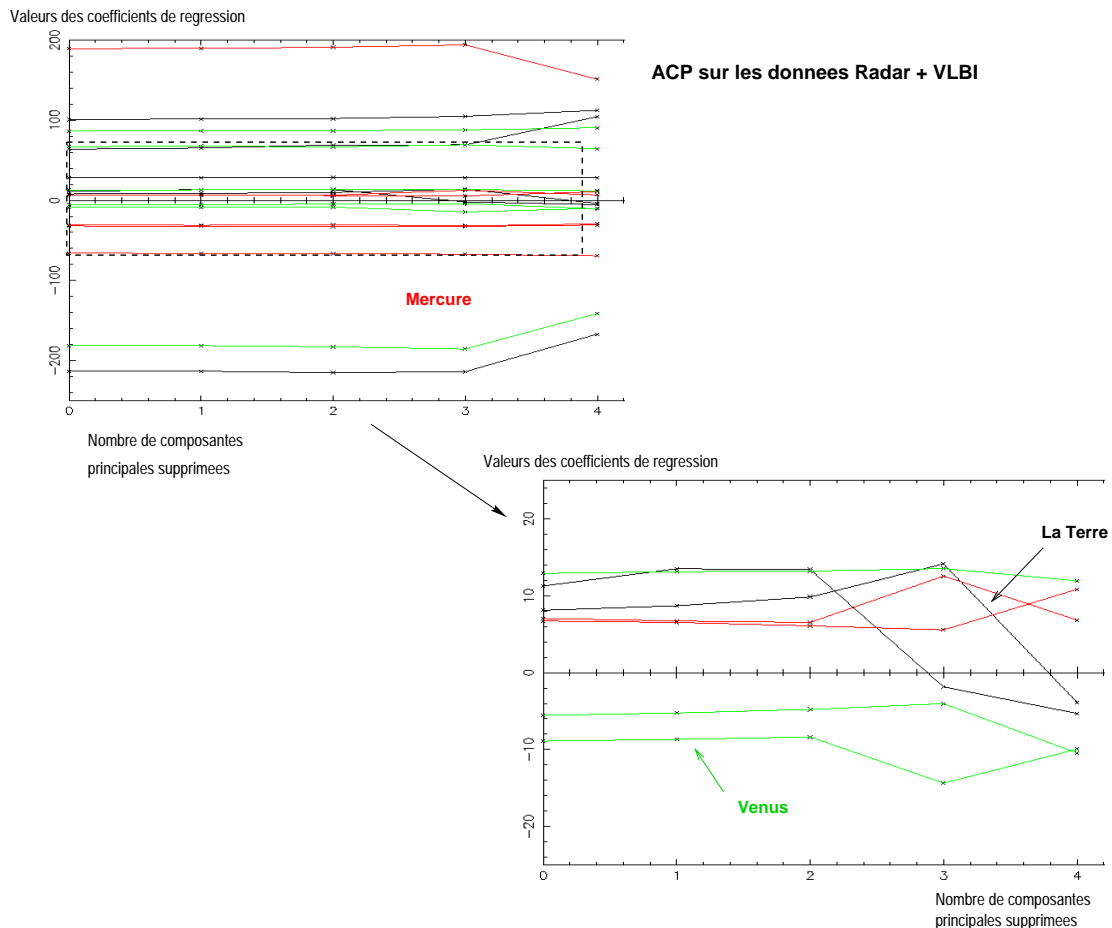


FIG. 8.4: Graphes en branches issus de l'analyse en composantes principales de l'ajustement des orbites de Mercure, de Vénus et de la Terre sur l'échantillon radar + VLBI.

Il en ressort alors trois informations importantes:

1. quel régresseur induit le plus de variance dans les coefficients ajustés;
2. les corrélations entre les coefficients ajustés;
3. les colinéarités entre les colonnes de la matrice de conditions.

Ce sont ces trois informations que nous allons étudier dans le cas de l'ajustement radar - VLBI à partir du graphique 8.5. Ce graphe représente la proportion de variance, exprimée en pourcentage, induite par chaque composante principale (axe des abscisses) sur les 18 coefficients de régressions. Les composantes induisant plus de 50% de variance sont indiquées en gras sur le graphique. Comme on peut le voir, aucune composante n'intervient plus d'une fois. Autrement dit, il n'y a pas dans ce système de corrélations fortes entre les coefficients de régression ou de colinéarités notables entre les colonnes de la matrice de conditions. Cette remarque est d'ailleurs confirmée par un calcul direct des corrélations à l'issue de l'ajustement classique par moindres carrés (annexe D) .

D'autre part, il est intéressant à la vue de ces histogrammes d'étudier les corrélations entre les composantes principales ayant le plus d'influence dans la régression et les paramètres de régression de départ. Pour cela, nous avons tracé ces corrélations à droite des histogrammes de

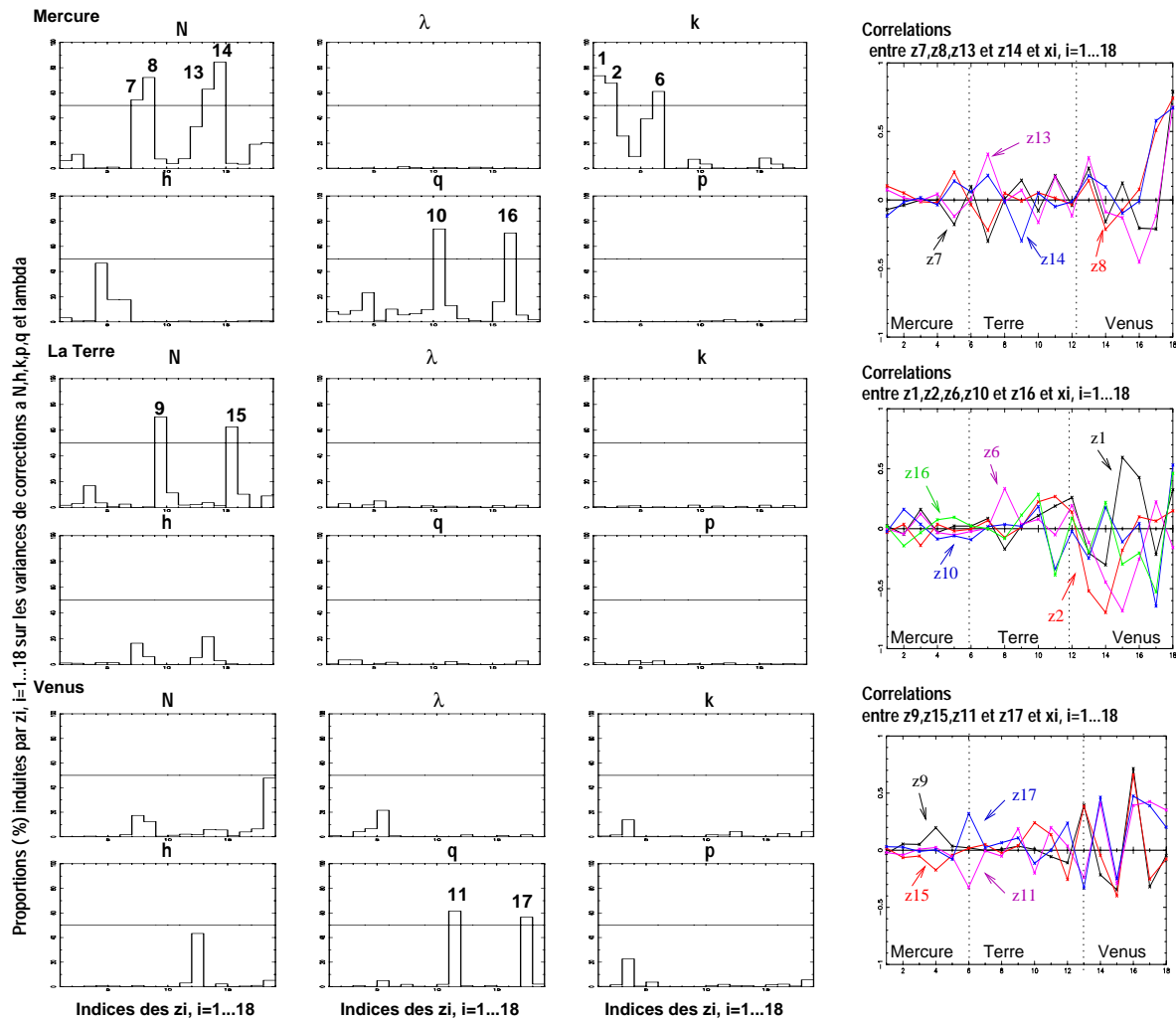


FIG. 8.5: *A gauche: Histogrammes de proportions de variances des ΔC_i par composantes principales. A droite: Courbes de corrélations des paramètres de régression d'origine pour chaque composante principale.*

la figure 8.5. Il apparaît alors que l'ensemble des paramètres significatifs de la régression sont assez fortement corrélés aux paramètres initiaux 16, 17, 18 et dans une moindre mesure 14 et 15. Ces paramètres correspondent aux dérivées partielles du vecteur Soleil-Vénus par rapport à h , q , p et k , λ respectivement. Autrement dit, et comme on aurait pu s'en douter, les deux solutions proposées ici sont fortement liées aux données de Vénus [qui devient ici l'objet de référence du système].

8.2.3 Solutions Radar - VLBI - Optiques

Nous allons présenter ici les deux ajustements effectués sur l'échantillon complet d'une part, c'est-à-dire comprenant l'ensemble des données radar, VLBI et optiques, et sur l'échantillon radar, VLBI et n'incluant que les observations optiques en 1914 et 1982. Nous mènerons ces deux études en parallèle.

Terre + Mercure + Venus / Radar + VLBI + Optiques modernes et anciennes											
i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i
1	0.148	3.765	3.41	7	1.389	1.230	2.78	13	1.047	3.886	2.13
2	1.869	1.061	0.07	8	0.183	3.387	0.51	14	0.159	1.677	1.25
3	0.265	2.814	0.70	9	1.670	1.122	2.10	15	0.986	1.740	0.32
4	0.470	2.115	0.49	10	0.684	1.754	0.69	16	0.842	2.131	4.02
5	2.103	1.000	0.23	11	1.336	1.254	0.92	17	1.116	3.471	1.14
6	1.548	1.165	11.55	12	1.250	1.296	5.53	18	0.931	1.888	0.81

Terre + Mercure + Venus / Radar + VLBI + Optiques modernes											
i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i
1	0.146	3.742	3.78	7	1.391	1.212	0.48	13	0.977	1.446	0.48
2	1.868	1.046	0.35	8	0.183	3.340	0.82	14	0.158	3.959	1.42
3	0.302	2.600	0.82	9	1.675	1.105	3.19	15	1.049	1.396	1.85
4	0.488	2.046	0.53	10	0.676	1.738	0.03	16	0.933	1.480	0.82
5	2.044	1.000	0.08	11	1.376	1.219	2.63	17	1.111	1.357	1.41
6	1.555	1.146	13.50	12	1.243	1.282	6.14	18	0.817	1.581	4.34

FIG. 8.6: *Statistiques de l'analyse en composantes principales des ajustements sur l'échantillon radar + VLBI + Optiques modernes (1914-1982) et anciennes (1774-1911)*

Le première colonne indique l'indice des composantes. Dans la colonne "Z_i" se trouvent les valeurs propres de la matrice de corrélation de l'ajustement, à savoir les composantes principales du système. La colonne intitulée "C_i" regroupe les nombres de conditions correspondants et dans la dernière colonne, "t_i", se trouvent les valeurs du test de signification de Student pour chaque composante.

Analyse en composantes principales

Nous avons procédé de la même manière que dans le cas de l'ajustement aux données radar et VLBI. Dans le tableau de la figure 8.6 sont présentés les éléments statistiques de l'analyse en composantes principales. On note immédiatement que les indices des tests de Student sont beaucoup plus faibles que ceux des solutions hors-optiques. La solution en sera d'autant plus stable puisqu'il sera possible de supprimer un plus grand nombre de composantes donc d'éléments d'instabilité. Les indices de conditionnement indiquent là encore, que le système est bien conditionné, puisque tous les indices restent inférieurs à quatre. La suppression des données optiques anciennes affectent beaucoup ces statistiques, aussi bien en terme d'indice de conditionnement que de signification des paramètres. Ainsi, on pourra remarquer que les deux composantes principales supprimées dans ce cas sont bien moins significatives que celles supprimées dans le premier ajustement, c'est-à-dire sur l'ensemble des données. On peut ainsi s'attendre à ce que l'impact de cette suppression sur les variances des coefficients ajustées soit plus important dans le cas d'un ajustement radar - VLBI - Optiques modernes.

Pour chaque solution - avec et sans les observations optiques anciennes - on a tracé les graphes-branches. On pourra voir, par exemple, le graphe 8.7 correspondant à l'échantillon radar - VLBI et Optiques modernes. Il apparaît clairement une zone de stabilité jusqu'à la suppression de la

	La Terre	Mercure	Vénus
Radar + VLBI + Optiques modernes et anciennes - 0 composante enlevée			
ΔN	(7 ± 28)	(-0 ± 27)	(-0 ± 27)
$\Delta \lambda$	(192 ± 28)	(-229 ± 28)	(-193 ± 27)
Δk	(-12 ± 33)	(50 ± 33)	(13 ± 33)
Δh	(9 ± 33)	(-26 ± 33)	(-8 ± 34)
Δq	(-0.242 ± 0.561) mas	(75 ± 27)	(26 ± 27)
Δp	(0.242 ± 0.574) mas	(19 ± 28)	(-2 ± 21)
Radar + VLBI + Optiques modernes et anciennes - 2 composantes enlevées			
ΔN	(-7 ± 26)	(-0 ± 27)	(-1 ± 26)
$\Delta \lambda$	(188 ± 28)	(-223 ± 28)	(-190 ± 27)
Δk	(-11 ± 32)	(49 ± 32)	(11 ± 33)
Δh	(8 ± 32)	(-25 ± 32)	(-7 ± 34)
Δq	(-0.366 ± 0.561) mas	(73 ± 27)	(31 ± 18)
Δp	(0.191 ± 0.554) mas	(13 ± 27)	(1 ± 17)

TAB. 8.3: Corrections aux conditions initiales de VSOP87 des solutions analytiques du mouvement de la Terre, Mercure et Vénus issues de l'ajustement Radar + VLBI + Optiques modernes et anciennes. Les unités sont 10^{-10} pour k, h, q et p , 10^{-10} radians pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} radian par an pour N .

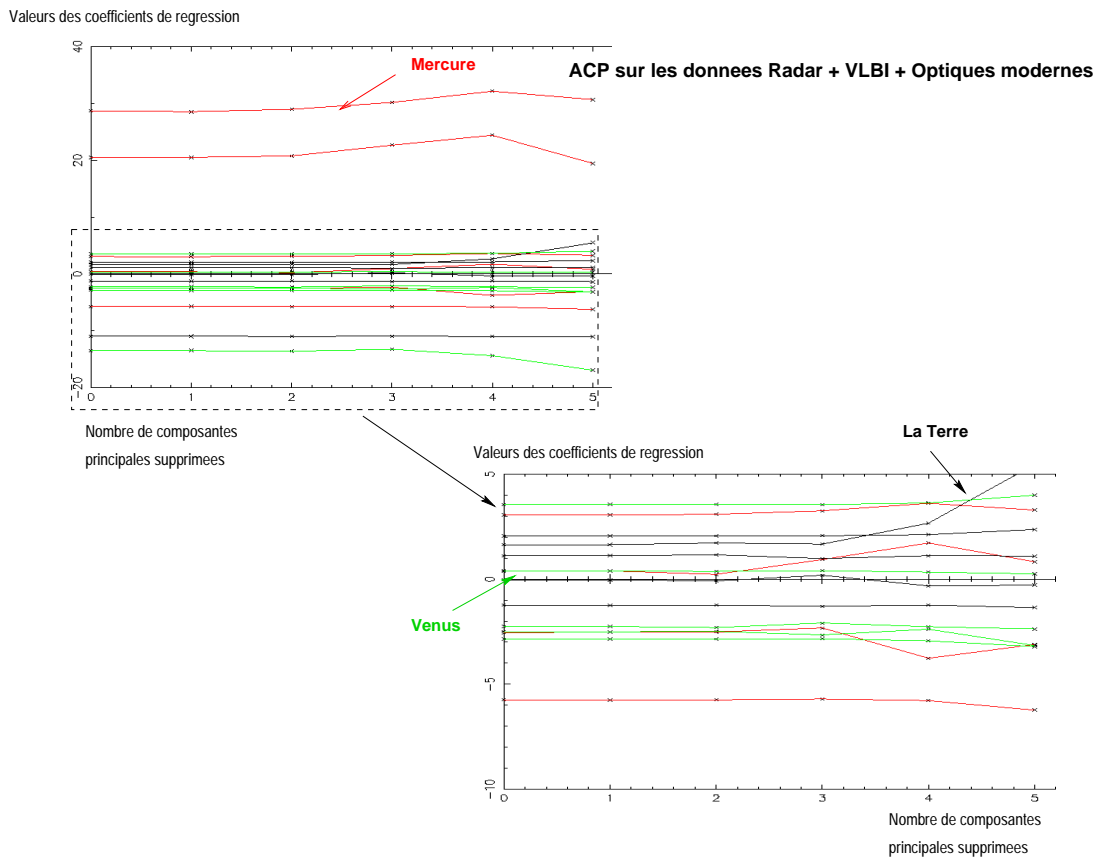


FIG. 8.7: Graphes en branches issus de l'analyse en composantes principales de l'ajustement des orbites de Mercure, de Vénus et de la Terre sur l'échantillon radar + VLBI + optiques modernes.

troisième composante, et cela dans les deux cas considérés. Les solutions à conserver au sens de l'ACP sont donc les solutions obtenues après suppression des deux premières composantes. Nous avons mis dans les tableaux 8.3 et 8.4, les solutions obtenues après ajustement sur les deux échantillons ainsi que celles obtenues sans suppression et avec deux composantes principales supprimées.

Ce que l'on peut noter tout de suite, c'est l'accroissement - de plus d'un facteur 10 - des incertitudes sur les solutions par rapport aux solutions non-optiques, c'est-à-dire ajustées sur un échantillon radar - VLBI, pour l'ensemble des trois orbites considérées. Si l'on compare les solutions issues d'un ajustement complet à celles en observations optiques modernes, on constate que les barres d'erreurs de ces dernières sont réduites en moyenne de 4% par rapport aux premières, justifiant ainsi l'abandon des données optiques anciennes restant dans l'échantillon, à savoir les observations réalisées à l'USNO entre 1866 et 1911.

D'autre part, dans les deux solutions - avec et sans optiques anciennes - l'intérêt de la suppression des composantes principales les moins significatives apparaît par la baisse *mécanique* des déviations standard de tous les paramètres issus d'un ajustement effectué sur cette nouvelle écriture du système des équations normales et après suppression des composantes. Comme nous l'avions prévu, cette baisse est moins importante pour les solutions complètes que pour les solutions à optiques modernes.

	La Terre	Mercure	Vénus
Radar+ VLBI + Optiques modernes - 0 composante enlevée			
ΔN	(7 ± 27)	(-0 ± 27)	(-0 ± 27)
$\Delta \lambda$	(136 ± 28)	(-174 ± 28)	(-137 ± 26)
Δk	(-10 ± 32)	(33 ± 32)	(10 ± 31)
Δh	(11 ± 31)	(-28 ± 31)	(-10 ± 32)
Δq	(-0.248 ± 0.551) mas	(64 ± 27)	(23 ± 26)
Δp	(0.013 ± 0.562) mas	(27 ± 27)	(7 ± 28)
Radar + VLBI + Optiques modernes - 2 composantes enlevées			
ΔN	(7 ± 27)	(-0 ± 27)	(-1 ± 26)
$\Delta \lambda$	(193 ± 25)	(-215 ± 25)	(-193 ± 26)
Δk	(-9 ± 28)	(55 ± 28)	(10 ± 30)
Δh	(2 ± 30)	(-13 ± 30)	(0 ± 1)
Δp	(-0.608 ± 0.504) mas	(47 ± 25)	(40 ± 26)
Δq	(0.104 ± 0.539) mas	(-7 ± 26)	(5 ± 26)

TAB. 8.4: Corrections aux conditions initiales de VSOP87 des solutions analytiques du mouvement de la Terre, Mercure et Vénus issues de l'ajustement Radar + VLBI + Optiques modernes. Les unités sont 10^{-10} pour k, h, q et p , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} radian par an pour N .

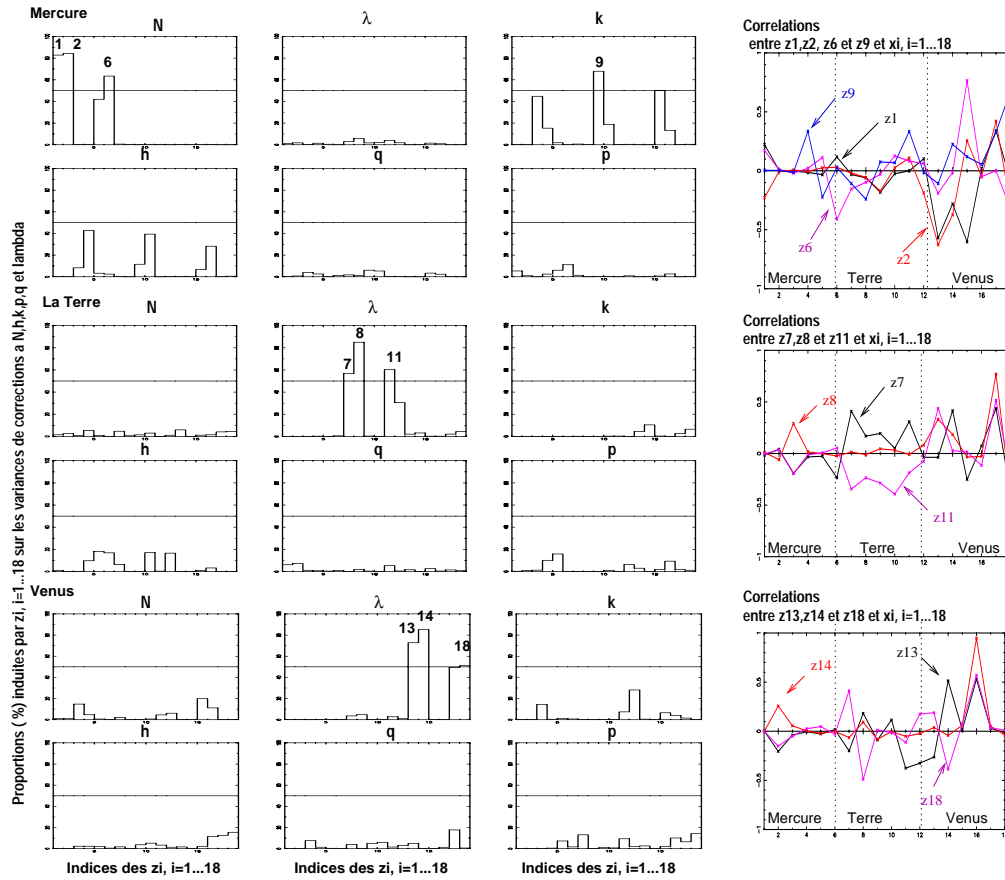


FIG. 8.8: *A gauche: Histogrammes de proportions de variances des ΔC_i par composantes principales. A droite: Courbes de corrélations des paramètres de régression d'origine pour chaque composante principale.*

Etude des variances et des corrélations

Au niveau des proportions de variances induites par chaque composante sur les solutions, il n'y a pas de différences notables entre les solutions ajustées sur l'échantillon complet – radar+VLBI+optiques anciennes et modernes – et celles sans les optiques anciennes. La figure 8.8 regroupe les histogrammes de ces dernières solutions. Comme on peut le voir, et comme dans le cas des solutions radar+VLBI, aucune composante n'induit plus de 50% de variance dans l'estimation de deux coefficients ajustés. Il n'y a donc pas dans ce système, comme dans le précédent, de corrélations importantes entre les coefficients ajustés ou de colinéarités notables entre les colonnes de la matrice de conditions.

D'autre part, les graphes des corrélations entre les régresseurs originaux et les composantes principales montrent que les paramètres les plus influents sont encore ceux liés aux dérivées partielles du vecteur héliocentrique de Vénus, mais de façon moins flagrante que dans l'étude précédente.

La Terre

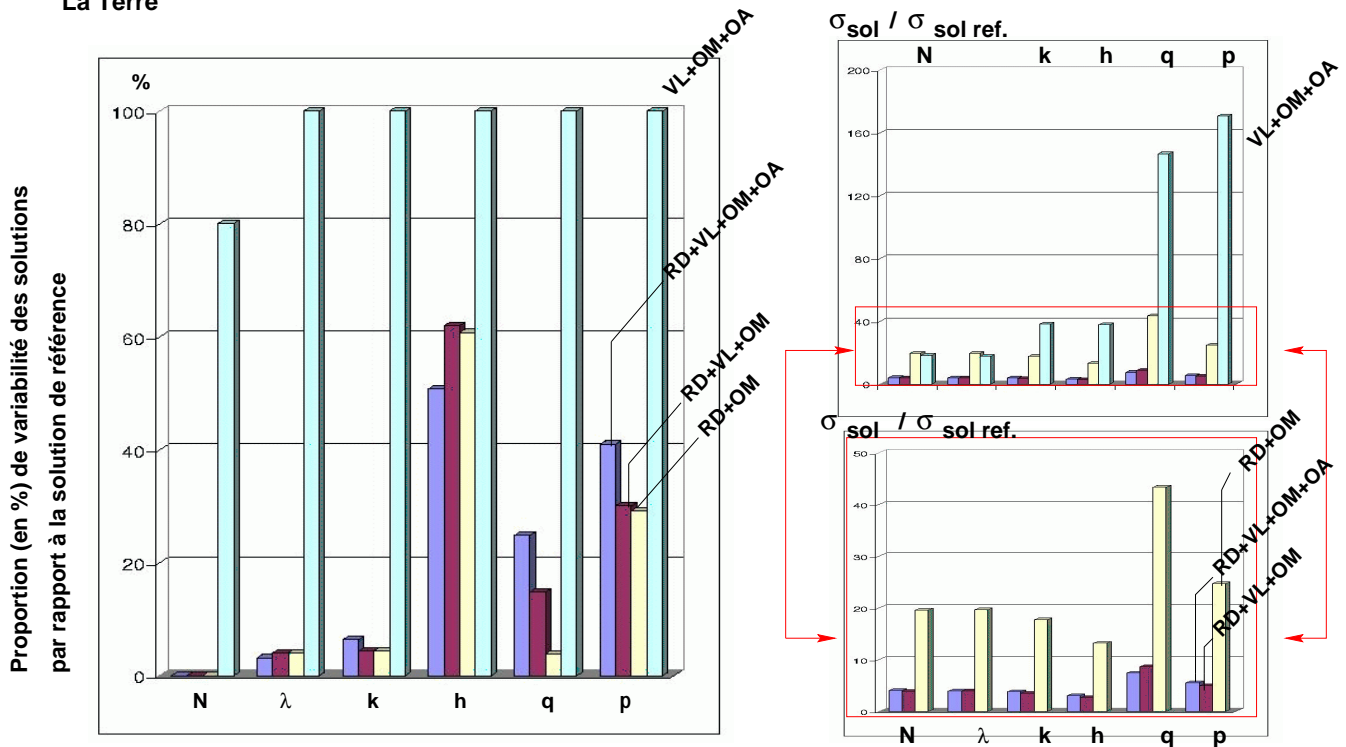


FIG. 8.9: Etudes des variabilités des solutions ajustées pour le mouvement du barycentre Terre-Lune.

Mercure

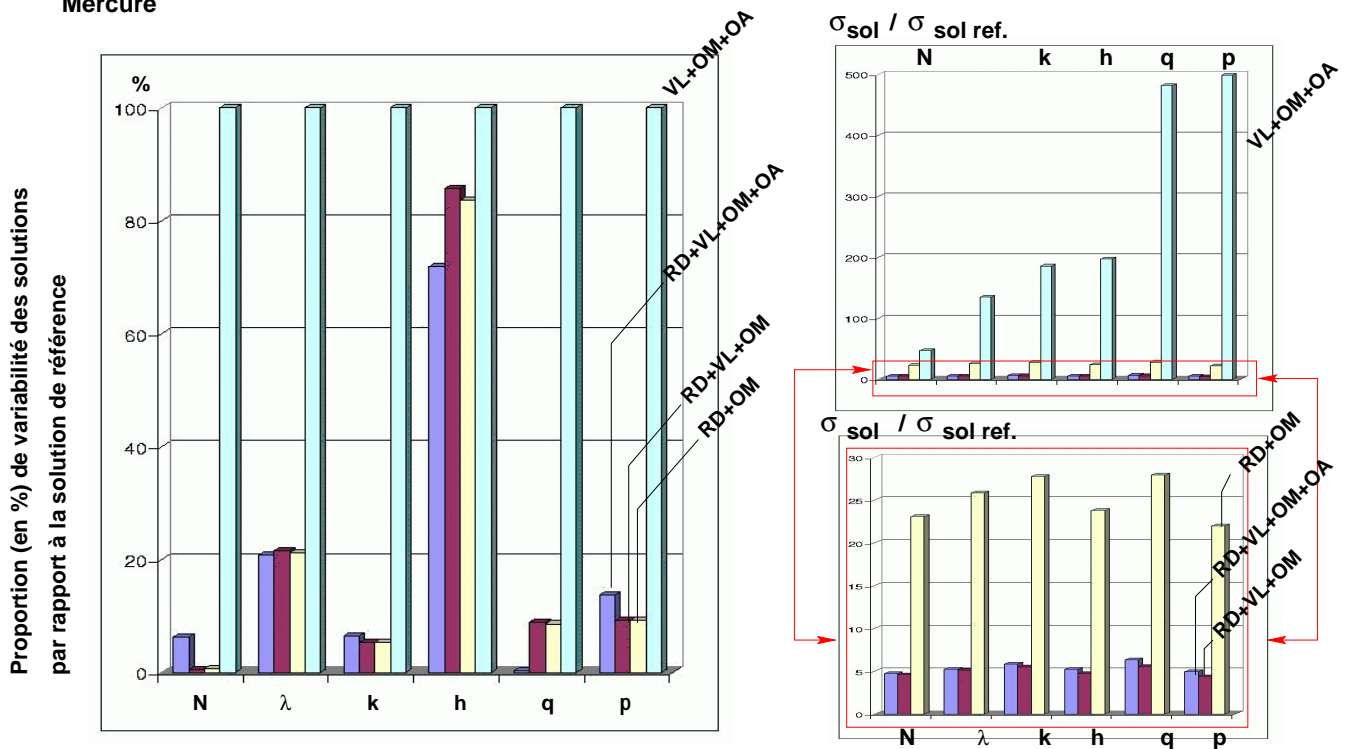


FIG. 8.10: Etudes des variabilités des solutions ajustées pour le mouvement de Mercure.

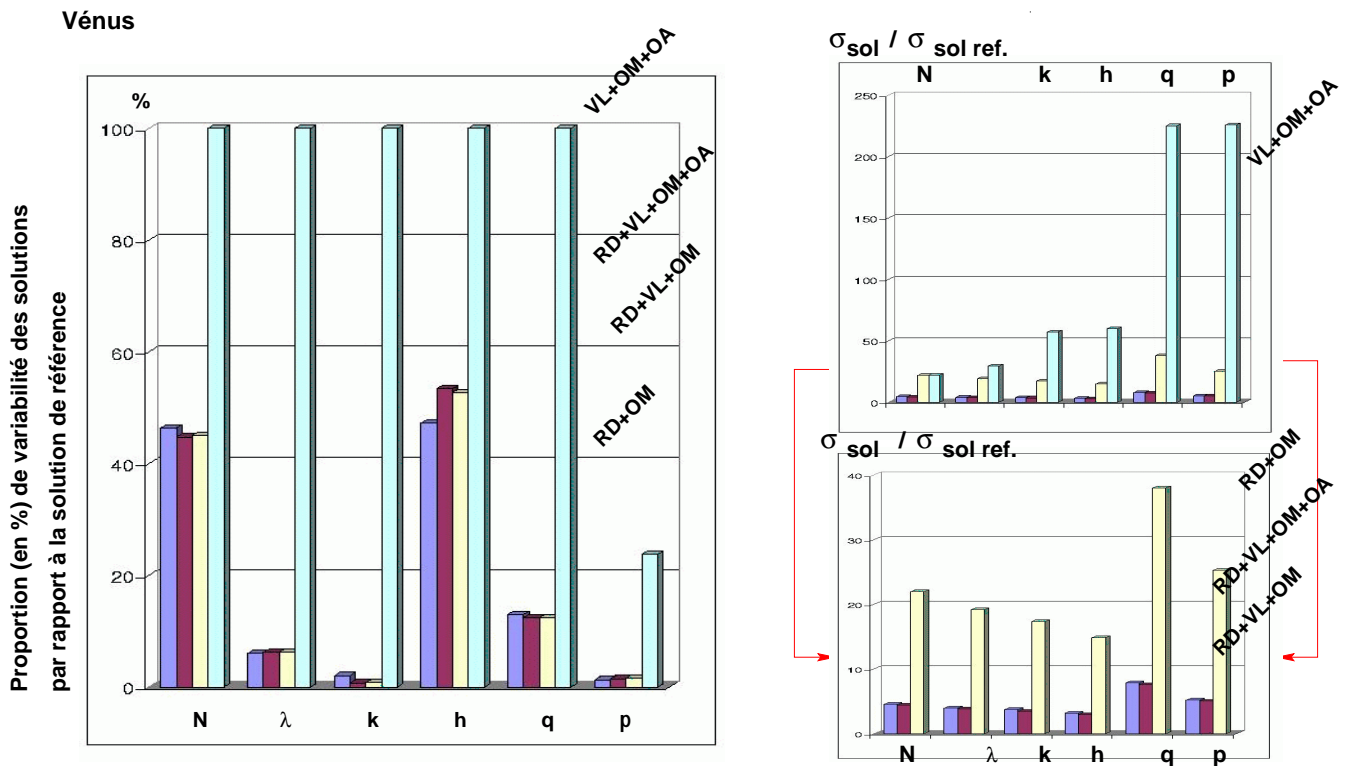


FIG. 8.11: *Etudes des variabilités des solutions ajustées pour le mouvement de Vénus.*

8.2.4 Discussion

Comparaison des solutions inter-échantillons

Cette analyse a pour but d'estimer chaque type d'observations: radar, VLBI, optiques modernes et anciennes, l'impact sur l'estimation des corrections, ΔC_i , à apporter aux conditions initiales des solutions analytiques du mouvement de Mercure, Vénus et de la Terre et sur les incertitudes avec lesquelles sont déterminés ces termes correctifs. Pour cette étude, nous avons calculé plusieurs solutions en supprimant successivement les observations radar, VLBI, optiques modernes et anciennes de l'échantillon d'ajustement. Dans les histogrammes 8.9, 8.10 et 8.11, sont représentés les taux de variations (%) de chaque paramètre calculé relativement à la solution de référence, c'est-à-dire radar -VLBI et induits par l'élimination des données radar, VLBI et par l'ajout des observations optiques modernes et anciennes dans l'échantillon d'ajustement. Ainsi un taux de variation de 100% permet de dire, pour un paramètre ΔC_i , que celui-ci est entièrement déterminé par le type d'observations supprimé, alors qu'un taux de variation de 0% indique que celui-ci est insensible aux observations éliminées. Les histogrammes 8.9, 8.10 et 8.11 correspondent aux orbites de la Terre, Mercure et Vénus respectivement.

D'un point de vue général, on fait la même constatation que précédemment à savoir d'une part que les observations radar sont les données les plus influentes de l'ajustement et que, d'autre part, l'apport des données optiques entraîne une augmentation des corrections ΔC_i et une détérioration importante - d'un facteur 5 - des incertitudes sur la détermination de ces termes correctifs. On note de plus la nette dégradation découlant de la suppression des données VLBI d'un facteur 5, de la précision sur la détermination des ΔC_i , pour l'ensemble des paramètres, y compris ceux liés à l'orbite de Mercure. On aurait pu s'attendre à ce que les données VLBI de

Vénus n'aient pas d'influence sur l'orbite de Mercure. Il n'en est rien. Cela s'explique par le fait que celle-ci est directement liée à celle de Vénus, via les positions du barycentre Terre-Lune. C'est pourquoi les observations VLBI de Vénus ont un impact sensible sur la géométrie de cette orbite.

Les variations des valeurs des paramètres ajustés et de leurs incertitudes diffèrent selon les planètes étudiées. Cependant, on peut noter que les corrections Δq des trois orbites sont très sensibles aux données VLBI. Par exemple, après suppression de ces dernières, l'incertitude de Δq de l'orbite terrestre croît d'un facteur 9.

Les termes correctifs à apporter aux paramètres de l'orbite de Mercure semblent moins stables que ceux des deux autres orbites. Ainsi, la moyenne des rapports entre les incertitudes issues de l'ajustement aux divers échantillons et celles de référence est de 23.8 pour Mercure, de 22.6 pour la Terre et de 22.3 pour Vénus et l'on remarque que la croissance des incertitudes sur les paramètres de Mercure se répartit de façon homogène sur l'ensemble des paramètres alors que dans les deux autres cas - orbites de la Terre et de Vénus - il y a une forte augmentation des erreurs pour un paramètre particulier, q , induisant une moyenne élevée des rapports d'incertitudes. Il y a donc un "bruit" moyen sur les paramètres liés à l'orbite de Mercure. La présence de ce "bruit" peut s'expliquer par le nombre limité d'observations de Mercure (453 observations radar) face aux 1646 observations radar et VLBI de Vénus. D'autre part, on peut noter la variabilité des paramètres h des trois orbites qui paraissent assez sensibles aux données optiques et en particulier anciennes.

En conclusion de cette première analyse, on peut estimer que les paramètres ajustés sont essentiellement déterminés par les données radar et VLBI. Les données VLBI ont une importance primordiale dans le calcul des incertitudes, tout particulièrement en ce qui concerne les paramètres liés à l'orbite terrestre. Enfin, les paramètres de l'orbite de Mercure sont relativement instables du fait du manque relatif d'observations.

Afin de mieux estimer l'impact des erreurs observationnelles sur la détermination de chacune des corrections ΔC_i , deux méthodes sont classiquement utilisées. La première a été présentée par Williams et Standish (1989) et consiste en un développement des variables observées (distances, ascensions droites, déclinaisons) en éléments osculateurs de l'orbite, de différencier ce développement et d'étudier les variations des paramètres de l'orbite induites par les erreurs observationnelles. Cette méthode permet de souligner l'impact de la qualité astrométrique de chaque type d'observations sur des combinaisons linéaires d'éléments orbitaux mais présente l'inconvénient de ne pas tenir compte des corrélations entre les orbites, puisque ce système d'équations est mis en place orbite par orbite. La deuxième méthode est numérique et consiste à volontairement dégrader un type d'observations après l'autre d'un terme équivalent à l'erreur observationnelle estimée après réduction du sous-échantillon correspondant. Ceci permet d'estimer par exemple quel paramètre va être le plus sensible aux 0.5 seconde de degré d'incertitude sur les observations optiques modernes sans pour autant écarter l'impact des corrélations entre les orbites. Les trois histogrammes réunis sur la figure 8.12 illustrent les résultats obtenus en présentant les taux de variations des solutions affectées par des erreurs observationnelles. On voit ainsi que le terme Δh de l'orbite de Mercure est fortement affecté par les observations optiques en général. Le reste des corrections est beaucoup plus stable et ne varie que légèrement en fonction des erreurs. Dans le cas de l'orbite terrestre, on voit que les paramètres les plus sensibles aux erreurs observationnelles, et en particulier optiques, sont les termes Δq et Δp . Dans le cas de Vénus, les corrections semblent plus stables puisque les variations induites par l'observation

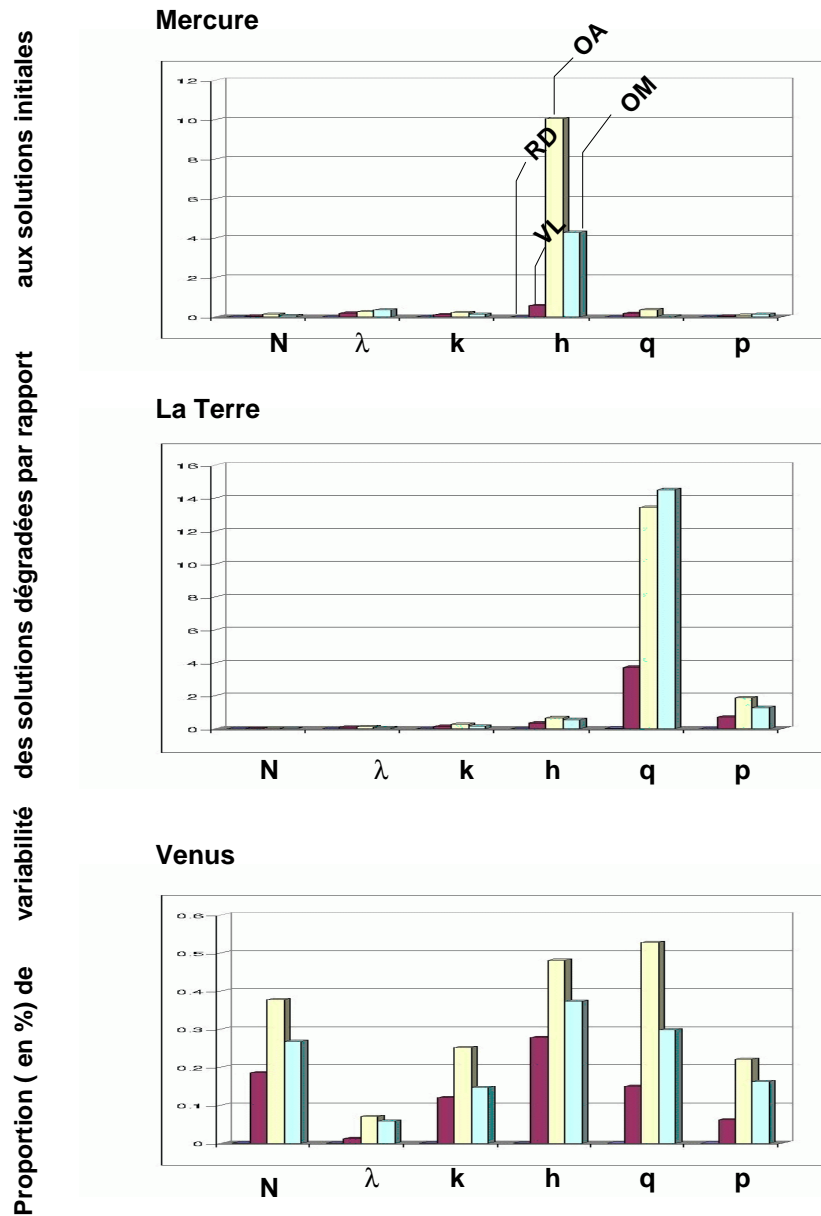


FIG. 8.12: Influences des erreurs observationnelles sur la détermination des corrections à apporter aux conditions initiales des orbites de Mercure, La Terre et Vénus. Variations des nouvelles solutions ajustées sur des échantillons dégradés par rapport aux solutions de départ.

sont beaucoup plus limitées. On note cependant l'influence notable des erreurs optiques sur la détermination de Δq et l'impact des erreurs induites par les observations VLBI sur le paramètre Δh . De manière générale, on note que ces dernières ont un effet dominant par rapport à l'impact quasiment inexistant des erreurs en distances issues des tirs radar.

Si l'on cherche à quantifier plus précisément ces fluctuations, on peut estimer la sensibilité du terme Δq pour l'orbite du barycentre Terre-Lune à 0.027 mas, pour une erreur angulaire de 2.5 mas, et de 0.2 mas, pour une erreur en distance de 3.5 kilomètres. En différenciant les relations de définition des paramètres k , h , q , et p , nous avons calculé les impacts des incertitudes

	Mercure			La Terre			Vénus		
	σ_D	σ_A		σ_D	σ_A		σ_D	σ_A	
N	0.003	0.100	(mas/an)	0.0006	0.017	(mas/an)	0.0002	0.048	(mas/an)
λ	0.007	0.599	(mas)	0.0005	0.120	(mas)	0.0007	0.046	(mas)
e	0.0013	0.101		0.0010	0.018		0.00008	0.0089	
ω	0.0014	0.171	(mas)	0.046	1.87	(mas)	0.144	7.82	(mas)
Ω	0.077	10.54	(mas)	0.004	0.053	(mas)	0.010	3.212	(mas)
i	0.057	0.263	(mas)	0.009	0.015	(mas)	0.0002	0.0145	(mas)

FIG. 8.13: *Influences des erreurs observationnelles sur la détermination des corrections à apporter aux conditions initiales des orbites de Mercure, La Terre et Vénus. Pourcentages de variations des nouvelles solutions ajustées sur des échantillons dégradés par rapport à la solution de référence. σ_A correspond à l'incertitude angulaire induite par les erreurs sur les observations VLBI de 2.5 mas et σ_D à celle de 3.5 kilomètres en distance induite par les données radar.*

précédentes sur les éléments osculateurs classiques des orbites de Mercure, la Terre et Vénus. Le formulaire est de la forme:

$$d e = \cos \varpi dk + \sin \varpi dh \quad ; \quad d \varpi = -\frac{1}{e} [\sin \varpi dk - \cos \varpi dh]$$

$$d i = \frac{2}{\cos \frac{\Omega}{2}} [\cos \Omega dq + \sin \Omega dp] \quad ; \quad d \Omega = -\frac{1}{\sin \frac{\Omega}{2}} [\sin \Omega dq - \cos \Omega dp]$$

Ces résultats sont réunis dans le tableau de la figure 8.13. On y voit l'impact important des erreurs observationnelles de la technique VLBI sur la détermination de la longitude du périhélie de Vénus et sur la longitude du noeud de Mercure. Ces incertitudes n'ont pas la même conséquence sur ces deux orbites car dans le cas de Vénus, il y a corrélation directe entre ces erreurs et les paramètres d'orbite ajustés alors que dans le cas de Mercure, ces variations sont induites par les corrélations entre orbites via le barycentre Terre-Lune. On peut noter que la longitude du périhélie de l'orbite terrestre est l'argument le plus sensible aux incertitudes sur les distances et les angles observés.

Comparaison à d'autres raccordements: DE403, ELP2000 et VSOP98

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre 5, à partir des Δq et Δp de l'orbite terrestre, on raccorde les plans de l'écliptique dynamique inertiel moyen J2000 de la théorie à celui de l'équateur des observations par la détermination de l'angle d'obliquité ϵ et de l'équinoxe dynamique inertiel moyen J2000, γ . Ce dernier est construit, par définition, par rapport à l'origine des ascensions droites, o , du système de référence observationnel, c'est-à-dire l'ICRS et donc matérialisé par l'arc $\varphi = \gamma o_{ICRS}$. Ces angles nous permettent de caractériser le plan de référence de notre théorie ajustée par rapport à l'équateur moyen J2000 des observations. On rappelle que ce calcul s'effectue par itération en prenant des valeurs initiales pour ϵ et γ et que nous avons

	Obliquité ϵ	γO_{ICRS}
Radar + VLBI	23° 26' 21.4102" ± 0.0002"	-0.0544" ± 0.0005"
Radar + VLBI + Optiques	23° 26' 21.410" ± 0.001"	-0.055" ± 0.003"
Radar + VLBI + Optiques modernes	23° 26' 21.410" ± 0.001"	-0.054" ± 0.003"
Radar + Optiques modernes	23° 26' 21.409" ± 0.001"	-0.054" ± 0.003"
Standish (ICRF, 1992)	23° 26' 21.4120"	
Chapront <i>et al</i> (1999) - LLR / ICRF	23° 26' 21.41081" ± 0.00007"	-0.05760" ± 0.00020"
Chapront <i>et al</i> (1999) - DE403	23° 26' 21.40928" ± 0.00000"	-0.05294" ± 0.00001"
Moisson (1999) - VSOP98 / DE403	23° 26' 21.40872"	-0.05340"

TAB. 8.5: *Raccordements entre divers systèmes de références dynamiques et le système de référence inertiel cinématique de l'ICRS.*

choisi d'initialiser le processus en prenant $\epsilon_0 = 23^\circ 26' 21.409''$ et $\gamma_0 = -0.05372''$. On a alors les relations:

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon &= -2\Delta q \\ \Delta\varphi &= -2\frac{\Delta p}{\sin\epsilon}\end{aligned}\tag{8.1}$$

A partir des solutions précédentes pour l'orbite terrestre, on a donc déduit divers raccordements possibles présentés dans le tableau 8.5 et nous les avons comparés à d'autres valeurs disponibles dans la littérature. Nous avons ainsi rajouté dans notre tableau les valeurs déterminées par Standish (ICRF, 1992), Chapront *et al* (1999) et Moisson (1998). Tout d'abord, les valeurs extraites de Standish (1992) sont les angles de position issus de DE403 et choisis pour localiser l'écliptique de l'ICRF par rapport à l'équateur de ce même système. On considère dans ce cas-là qu'il y a identité entre l'équinoxe et l'équateur issus de l'intégration numérique DE403 et ceux de l'ICRS (ICRF convention, 1992). Les angles issus de Chapront *et al* (1999) ont été déterminés à partir des théories lunaires semi-analytiques ELP 2000-96 et de leurs ajustements d'une part aux tirs laser-Lune (LLR) et d'autre part à l'intégration DE403. Nous présentons dans notre tableau ces deux solutions accompagnées, en dernière ligne, des valeurs issues de l'ajustement de VSOP98 à DE403 (Moisson, 1999).

La première constatation à la lecture de ce tableau est que les solutions issues de notre ajustement sont cohérentes entre elles aux erreurs près. On retrouve l'accroissement des incertitudes sur les paramètres d'orbites induites par les données optiques. D'autre part, notre solution de référence, c'est-à-dire celle issue d'un ajustement radar-VLBI, est proche des solutions numériques ou semi-analytiques ajustées aux observations que ces dernières soient des observations de

type planétaires (Standish, 1992) ou lunaires (Chapront, 1999). On note la bonne concordance des raccordements entre le repère cinématique conventionnel (ICRS) et les différents repères dynamiques – semi analytique (mouvement lunaire), numériques et analytiques pour l’ensemble des planètes – déterminés à partir d’ajustements directs aux observations.

8.2.5 Conclusions

Rotation de repère et solutions définitives

Il est conventionnel d’exprimer les constantes d’intégration des solutions planétaires dans un repère tel que q et p soient nuls. Pour cela, on effectue une rotation du repère d’angles Δq et Δp dans lequel sont calculées les dérivées partielles de la théorie. On effectue à nouveau un ajustement sur les observations et on obtient l’ensemble des conditions initiales définitives. Cette ultime étape de l’ajustement permet, après avoir estimé le décalage entre le plan équatorial des observations et celui de la théorie, de ramener ce dernier sur le plan de référence observé. Il nous est paru intéressant pour la suite de l’ajustement c’est-à-dire pour l’ajustement des orbites des planètes extérieures de conserver les quatre solutions proposées précédemment et réunies dans le tableau 8.6. Ce sont ces solutions de l’orbite terrestre qui seront réinjectées dans les solutions de Jupiter et Saturne.

Résidus après ajustement

Nous avons calculé à partir des solutions précédentes du mouvement de nouveaux vecteurs en position et vitesse des trois planètes et nous les avons comparés aux positions observées et utilisées dans l’ajustement. Les quantités ainsi décrites sont appelées résidus *après ajustement*. Dans la figure 8.14, sont présentés ces résidus.

Il apparaît que les nouvelles constantes d’intégration induisent naturellement des améliorations particulièrement dans le cas de l’estimation des distances géocentriques de Vénus. Cette tendance générale se retrouve dans les statistiques de ces résidus, réunies dans le tableau de la figure 8.15. Pour Vénus, on note une amélioration de plus d’un facteur 3.5 sur l’estimation des distances Vénus-barycentre Terre-Lune par notre solution en comparaison de VSOP87 sur la période post-1980. L’amélioration des résidus en distance pour les périodes d’observations 1970-1980 et pré-1970 est moins importante que la précédente du fait du caractère légèrement dégradé de ces observations. Pour Mercure, on note le même schéma avec cependant une moins grande efficacité dans l’estimation des positions post-1980, puisqu’ici le décalage des résidus vers une valeur moyenne nulle n’est diminué que d’un facteur 2.6. Ce résultat est à mettre sur le compte de la sur-représentation des données vénusiennes (plus de 74% de l’échantillon radar) au détriment des données de distance Mercure-Terre (moins de 26%) de l’ajustement. De plus, on rappelle que les données VLBI de Vénus jouent un rôle primordial dans les solutions, comme nous l’avons vu dans les analyses précédentes et accentuent cet effet. L’apport des données de Mars pourrait être un facteur d’amélioration important car il permettrait de contrebalancer l’influence importante des données de Vénus et ainsi d’obtenir une solution plus indépendante, comme c’est le cas pour les solutions numériques telles que DE200, DE403 et DE405. Enfin notons que nous n’atteignons pas, même après ajustement, des valeurs moyennes pour les distributions des résidus nulles ou proches de 0. Cela implique donc qu’un élément théorique intervenant dans l’estimation des positions de ces deux corps reste inaccessible par le biais d’un simple ajustement des constantes d’intégration de la solution dynamique. Cette remarque est, là encore, à mettre en parallèle avec l’idée d’une nécessaire amélioration des solutions analytiques de l’ensemble des planètes du système solaire en général et des planètes intérieures en particulier. Rappelons à ce propos que

	La Terre	Mercure	Vénus
Radars + VLBI - 2 composantes enlevées			
ΔN	(8 ± 2)	(-0 ± 2)	(-1 ± 2)
$\Delta \lambda$	(189 ± 2)	(-212 ± 2)	(-180 ± 4)
Δk	(7 ± 1.5)	(8 ± 1.5)	(-5 ± 3)
Δh	(-66 ± 5)	(100 ± 2)	(86 ± 2)
Δp	0.0	(64 ± 2)	(67 ± 1)
Δq	0.0	(11 ± 2)	(-9 ± 2)
Radars + VLBI + Optiques modernes - 2 composantes enlevées			
ΔN	(7 ± 27)	(-0 ± 27)	(-1 ± 27)
$\Delta \lambda$	(136 ± 28)	(-174 ± 28)	(-138 ± 27)
Δk	(-10 ± 32)	(33 ± 32)	(10 ± 31)
Δh	(11 ± 32)	(-29 ± 31)	(-10 ± 32)
Δp	0.0	(64 ± 27)	(23 ± 26)
Δq	0.0	(27 ± 27)	(7 ± 27)
Radars + VLBI + Optiques modernes et anciennes - 2 composantes enlevées			
ΔN	(7 ± 27)	(-0 ± 27)	(-1 ± 27)
$\Delta \lambda$	(229 ± 28)	(-115 ± 44)	(-193 ± 27)
Δk	(-12 ± 33)	(50 ± 33)	(13 ± 33)
Δh	(9 ± 33)	(-26 ± 33)	(-8 ± 34)
Δp	0.0	(75 ± 27)	(26 ± 27)
Δq	0.0	(19 ± 28)	(-2 ± 21)
Radars + Optiques modernes - 2 composantes enlevées			
ΔN	(7 ± 27)	(-0 ± 27)	(-1 ± 26)
$\Delta \lambda$	(155 ± 28)	(-193 ± 28)	(-157 ± 27)
Δk	(-11 ± 32)	(39 ± 32)	(11 ± 31)
Δh	(10 ± 31)	(-28 ± 31)	(-10 ± 32)
Δp	0.0	(68 ± 26)	(25 ± 27)
Δq	0.0	(25 ± 27)	(3 ± 27)

TAB. 8.6: Corrections aux conditions initiales de VSOP87 des solutions analytiques du mouvement de la Terre, Mercure et Vénus issues de l'ajustement après rotation du système. Les unités sont 10^{-10} pour k, h, q et p , 10^{-10} radians pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} radian par an pour N .

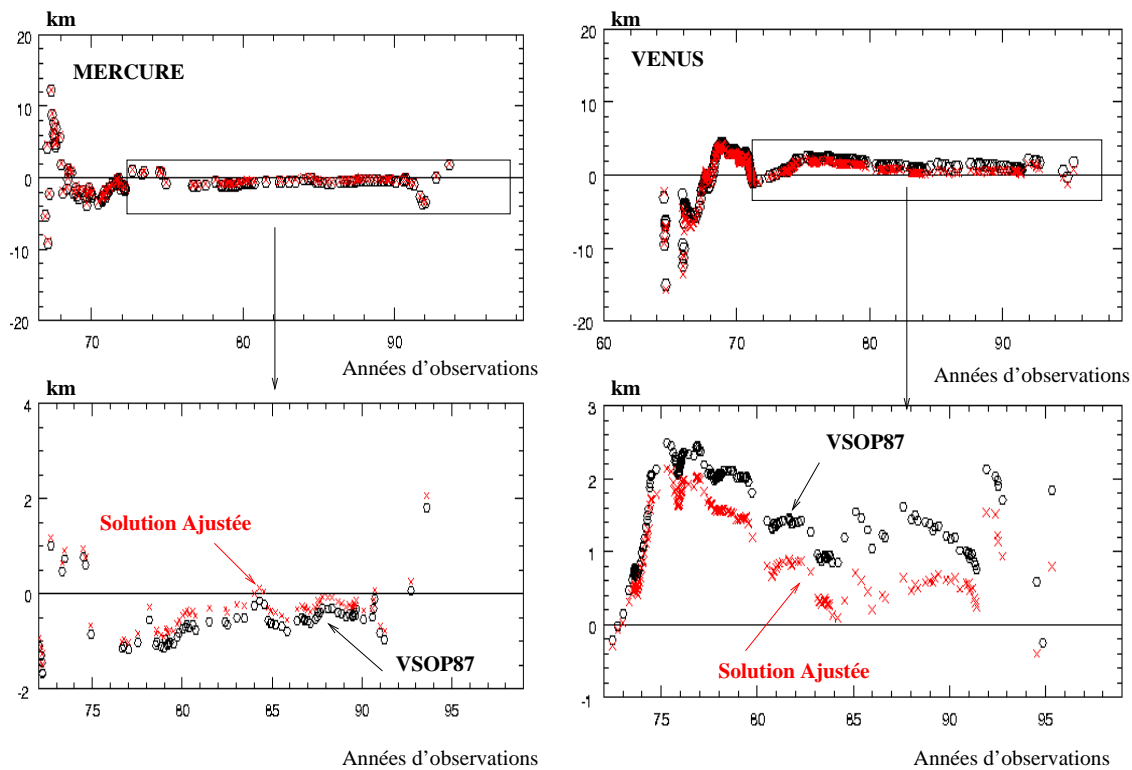


FIG. 8.14: *Comparaison entre distance observée et distance calculée à partir de VSOP87 et notre solution ajustée radar+VLBI. Graphes des points moyens par jour d'observation.*

la précision externe de VSOP87 estimée par comparaison à DE200 est de l'ordre de 4 kilomètres sur les distances Terre-Vénus et de 2.5 kilomètres sur les distances Terre-Mercure (Bretagnon, 1982). Aux erreurs de réduction près (inférieures au kilomètre) et aux incertitudes observationnelles, on constate que la dispersion de nos résidus après ajustement se place dans l'ordre de grandeur de ces incertitudes.

Les résidus optiques sont quasiment insensibles aux changements de conditions initiales. Cela s'explique du fait de la faible pondération associée à ce type de données quand celles-ci sont prises en compte dans l'échantillon d'ajustement.

Conclusion

Nous avons donc effectué un ajustement aux observations des planètes intérieures, Mercure, Vénus et en avons déduit un nouveau raccordement entre les plans moyen J2000 équatorial observationnel et écliptique, ce dernier étant le plan dans lequel sont exprimées les solutions analytiques du mouvement des planètes issues de la théorie dynamique VSOP87.

Nous avons vu, par le biais des résidus *après ajustement*, que notre solution de Vénus permettait une nette prise en compte de l'information contenue dans les observations de type tirs radar, mais que d'autre part, du fait du déficit relatif d'observations de Mercure, cette dernière solution semble moins efficacement améliorée que la précédente. L'apport des observations de Mars serait un élément majeur afin de résoudre ce problème.

Mercure				Vénus				
Radar : résidus en kilomètres								
	$\langle O-C \rangle$	σ	σ_p		$\langle O-C \rangle$	σ	σ_p	
Après ajustement : Radar+VLBI	-0 km	8 km	0.94 km	Après ajustement : Radar+VLBI	0 km	8 km	0.5 km	
< 1970	0.91	13.38	1.57	< 1970	-1.34	11.07	0.57	
1970-1980	-0.79	5.46	0.64	1970-1980	1.13	5.57	0.28	
> 1980	-0.15	3.73	0.44	> 1980	0.27	4.51	0.23	
Avant ajustement	-0.5 km	8 km	4 km	Avant ajustement	0.5 km	8 km	0.5 km	
< 1970	0.62	13.36	1.53	< 1970	-1.57	11.05	0.57	
1970-1980	-1.00	5.47	0.64	1970-1980	1.46	5.90	0.30	
> 1980	-0.39	4.07	0.48	> 1980	1.00	4.54	0.23	
Optiques modernes et anciennes: résidus en secondes de degré								
	$\langle O-C \rangle_\alpha$	σ_α	$\langle O-C \rangle_\delta$	σ_δ	$\langle O-C \rangle_\alpha$	σ_α	$\langle O-C \rangle_\delta$	σ_δ
Avant ajustement	0.058	0.854	-0.102	0.798	0.101	0.864	-0.082	0.808
Radar+VLBI	0.056	0.854	-0.100	0.798	0.100	0.864	-0.081	0.808
Radar+VLBI +OM	0.056	0.853	-0.100	0.798	0.100	0.864	-0.081	0.808
Radar+VLBI +OM+OA	0.056	0.853	-0.100	0.798	0.100	0.864	-0.081	0.808

FIG. 8.15: Tableau récapitulatif des résidus avant et après ajustement. Sont récapitulées ici les statistiques des comparaisons effectuées entre positions observées et utilisées dans l'ajustement et positions déduites des nouvelles solutions ajustées (Radar+VLBI, Radar+VLBI+OM, Radar+VLBI+OM+OA). La quantité $\langle O - C \rangle$ représente la valeur moyenne de l'échantillon des résidus, σ son écart type et σ_p l'écart type pondéré de la série, la pondération de cet échantillon correspondant à celle utilisée dans l'ajustement.

En ce qu'il concerne l'orbite du barycentre Terre-Lune, sont déduites de cet ajustement, des corrections à apporter aux conditions initiales de la solution analytique. Nous avons abouti à quatre jeux de corrections, chaque jeu correspondant à un échantillon d'ajustement différent. Parmi ces quatre solutions, il en est une qui permet une détermination précise des termes correctifs: c'est celle basée sur les observations radar et VLBI uniquement de Mercure et Vénus. Une comparaison à d'autres solutions publiées nous permet de constater la cohérence de nos solutions avec celles déterminées par diverses méthodes et divers auteurs. Nous conservons néanmoins les autres solutions afin d'étudier l'impact de chaque jeu de constantes sur l'orbitographie des planètes extérieures. Cette dernière étape sera présentée et développée au chapitre suivant et constituera un test de validité supplémentaire de notre ajustement de l'orbite du barycentre Terre-Lune.

Chapitre 9

Planètes extérieures

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats relatifs aux ajustements des orbites de Jupiter et Saturne. Nous nous sommes attachés à déterminer l'impact des solutions du barycentre Terre-Lune (BTL), calculées au chapitre précédent et réinjectées dans les orbites de Jupiter et Saturne à estimer sur la qualité de prévision des solutions ainsi construites. Pour cela, nous avons fait le choix de ne pas inclure dans les ajustements deux échantillons très espacés dans le temps afin de tester la stabilité et la qualité des nouvelles orbites sur des périodes plus ou moins éloignées de la période moyenne d'ajustement. Ainsi, après une description du processus d'ajustement et des nouvelles conditions initiales issues de ces ajustements, nous utiliserons ces deux solutions afin d'établir de nouvelles positions de Jupiter et Saturne que nous comparerons aux positions observées d'une part entre 1986 et 1995 à l'Observatoire de La Palma et d'autre part entre 1774 et 1799 à Oxford.

9.1 Mise en place des solutions

Avant toute description de l'ajustement et des nouvelles solutions obtenues pour les orbites de Jupiter et Saturne, nous allons faire le bilan des observations astrométriques de ces deux planètes rencontrées dans les chapitres précédents et que nous allons utiliser d'une part dans la détermination des nouvelles conditions initiales des solutions du mouvement et d'autre part comme échantillons-test *après ajustement*.

9.1.1 Les observations

Les échantillons utilisés dans les ajustements de Jupiter et Saturne, sont constitués en grande partie par les observations méridiennes dont il a été question au chapitre 3. D'autre part, des observations photographiques directes de ces objets, notamment réalisées à Nikolaev, complètent ces données. Dans le tableau de la figure 3.15 du chapitre 3 sont regroupées l'ensemble de ces observations. A cela s'ajoute un nombre plus ou moins important de données astrométriques indirectes découlant de positions (α, δ) de satellites par l'utilisation des théories dynamiques de ces derniers par rapport au centre de masse de la planète.

Pour Jupiter, notons l'ensemble de positions de Jupiter déduites d'observations photographiques de satellites galiléens réduites à l'aide d'étoiles Hipparcos. Ces positions, au nombre de 137, permettent, comme nous l'avons dit au chapitre 3, non seulement de bénéficier de positions astrométriques d'une précision de l'ordre de 40 mas, mais aussi d'un raccordement direct à la matérialisation optique de l'ICRS, à savoir le catalogue astrométrique Hipparcos.

JUPITER								SATURNE											
Observatoires		Types d'	2.5 σ (")				Pondérations		Observatoires		Types d'	2.5 σ (")				Pondérations			
Periodes	Nbr.Obs	observations	(o-c) RA		(O-c) De		$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{\langle w \rangle}$	Periodes	Nbr.Obs	observations	(o-c) RA		(O-c) De		$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{\langle w \rangle}$		
			$\langle O-C \rangle$	σ	$\langle O-C \rangle$	σ						$\langle O-C \rangle$	σ	$\langle O-C \rangle$	σ				
USNO									USNO										
1866-1891	334	Transit	-0.302	0.954	-0.207	0.915	7.5	6	1866-1891	260	Transit	-0.407	0.923	-0.021	0.909	7.5	6		
1914-1982	2053	Transit	-0.046	0.443	0.041	0.411	37.5	6	1914-1982	1110	Transit	0.006	0.591	0.012	0.487	37.5	6		
RGO									RGO										
1957-1982	465	Transit	-0.031	0.419	0.109	0.423	37.5	5	1957-1982	327	Transit	-0.077	0.497	-0.194	0.503	37.5	5		
Tokyo-Mittaka									Tokyo-Mittaka										
1963 - 1973	186	Transit	0.068	0.673	-0.059	0.612	22	8	1963 - 1973	163	Transit	0.049	0.743	0.256	0.771	22	8		
Nikolaev	275	Photographique	0.005	0.480	-0.067	0.406	37.5	6	Nikolaev	304	Photographique	0.117	0.444	-0.247	0.432	37.5	6		
1963-19773									1963-1973										
Hipparcos	137	Photographique	-0.056	0.072	-0.001	0.091	150	1	Strugnell-Taylor	Transit +		-0.072	0.334	-0.068	0.291	51.5	5		
1967-1974									1980-1995	537	Photographique								
Galileo	23	VLBI					42.5	1	Paris+RGO	Transit		-0.147	1.382	0.175	1.227	7.5	11		
1996-1997									1840-1869	386									
Paris+RGO	860	Transit	0.006	1.340	-0.265	1.241	7.5	11											
1750-1869																			
CAMC	408	Transit	0.041	0.200	-0.019	0.210			CAMC	478	Transit	-0.013	0.217	-0.034	0.200				
1986-1995									1986-1995										
Oxford	416	Transit	-0.350	1.589	-0.438	1.782			Oxford	238	Transit	-0.879	1.825	-0.409	1.963				
1774-1799									1774-1799										

FIG. 9.1: *Jupiter et Saturne: Bilan des observations utilisées dans l'ajustement et dans les tests hors-ajustement*

Par ailleurs, 23 positions angulaires déduites du suivi de la sonde Galileo par la technique l'interférométrie longue base sont incluses dans notre échantillon et permettent de compléter notre raccordement à l'ICRS, avec une très grande précision. Rappelons que ce type de données ne permet pas une détermination indépendante des quantités (α, δ) . Donnons simplement ici des estimations de la valeur moyenne et de l'écart type des résidus pour un point moyen, estimations pour lesquelles les contributions de chaque position observée dans le plan du ciel en ascension droite et déclinaison ne sont pas identiques. On obtient ainsi en ascension droite, -0.142 ± 0.123 seconde de degré et en déclinaison, -0.108 ± 0.184 seconde de degré.

Pour Saturne, l'échantillon particulier à l'étude de cet objet est constitué d'observations indirectes du barycentre du système satellitaire noté échantillon Strugnell-Taylor. Comme nous l'avons déjà décrit au chapitre 3, la base de données constituée par Strugnell et Taylor, complétée par des observations récentes réalisées à l'Observatoire de Bordeaux, est un ensemble d'observations des satellites de Saturne à partir desquelles nous avons déduit des positions du barycentre du système sur une période (1980-1995) complémentaire de celle (1840-1982) couverte par l'ensemble des observations directes classiques. On retrouvera dans le tableau de la figure 9.1, les statistiques satisfaisantes liées à cet échantillon. La totalité des observations dont il est question a donc été présentée précédemment. Dans le tableau de cette même figure 9.1, nous présentons les statistiques des résidus de chaque échantillon calculés par comparaison aux positions calculées à l'aide de VSOP87.

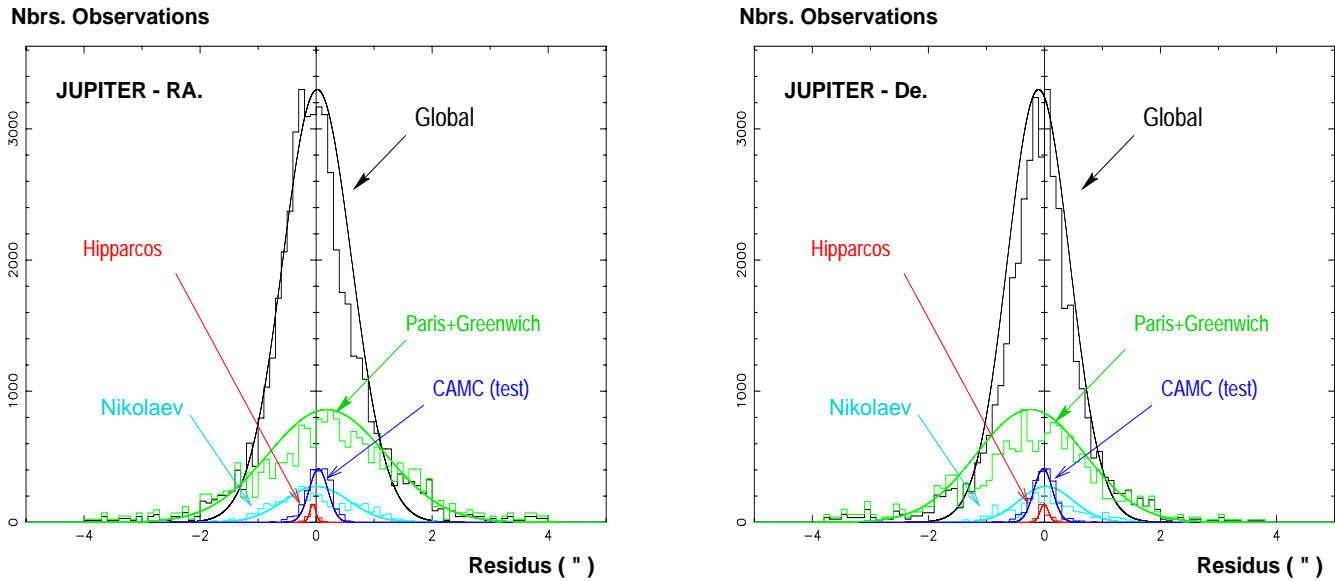


FIG. 9.2: Histogrammes des données autres que méridiennes directes de Jupiter en ascension droite et déclinaison. En traits pleins, sont tracées les densités de répartition théoriques des erreurs issues de lois normales.

La sélection des observations est moins problématique que dans le cas des observations des planètes intérieures, comme on peut le constater sur les histogrammes ?? et 3.19 du chapitre 3, pour les observations méridiennes, et dans les histogrammes 9.2, pour les autres types d'observations (majoritairement déduites d'une astrométrie indirecte par le biais du suivi d'une sonde ou d'observations des satellites) intervenant dans l'ajustement de la solution du mouvement de Jupiter. Dans le cas de Jupiter et de Saturne, la distribution de ces observations est moins "étalée" que dans les cas de Mercure et Vénus et un filtre à 2.5σ permet d'englober une grande majorité des observations aussi bien de Jupiter que de Saturne. La cause principale de cette distribution très fine est bien entendu la réduction notable des incertitudes induites par de mauvaises corrections de phase ou des effets aléatoires de brillance des surfaces.

La sélection des observations par un filtre à 2.5σ reste la même que les observations soient utilisées pour l'ajustement ou pour les tests de prévisions. Comme nous l'avons décrit en introduction, nous avons choisi pour ces tests deux échantillons très éloignés dans le temps, puisque l'un regroupe l'ensemble des observations réalisées à l'Observatoire de La Palma à l'aide du Carlsberg méridien circle entre 1986 et 1995 et l'autre celles réalisées à Oxford entre 1774 et 1799. Par ailleurs, les graphes 9.3 et 9.4 présentent les résidus des deux échantillons calculés par comparaison aux positions déduites de DE403 et VSOP87. Comme on peut le voir, la qualité astrométrique de ces deux échantillons diffère sensiblement. Cependant, les résidus ne présentent pas d'effet systématique ou de biais notables. On pourra donc considérer qu'a priori les erreurs sur les positions observées sont aléatoires et de nature observationnelle.

9.1.2 L'ajustement

Nous avons appliqué la même procédure que dans l'ajustement des orbites des planètes intérieures, à savoir un premier ajustement par moindres carrés classiques suivi d'une analyse en

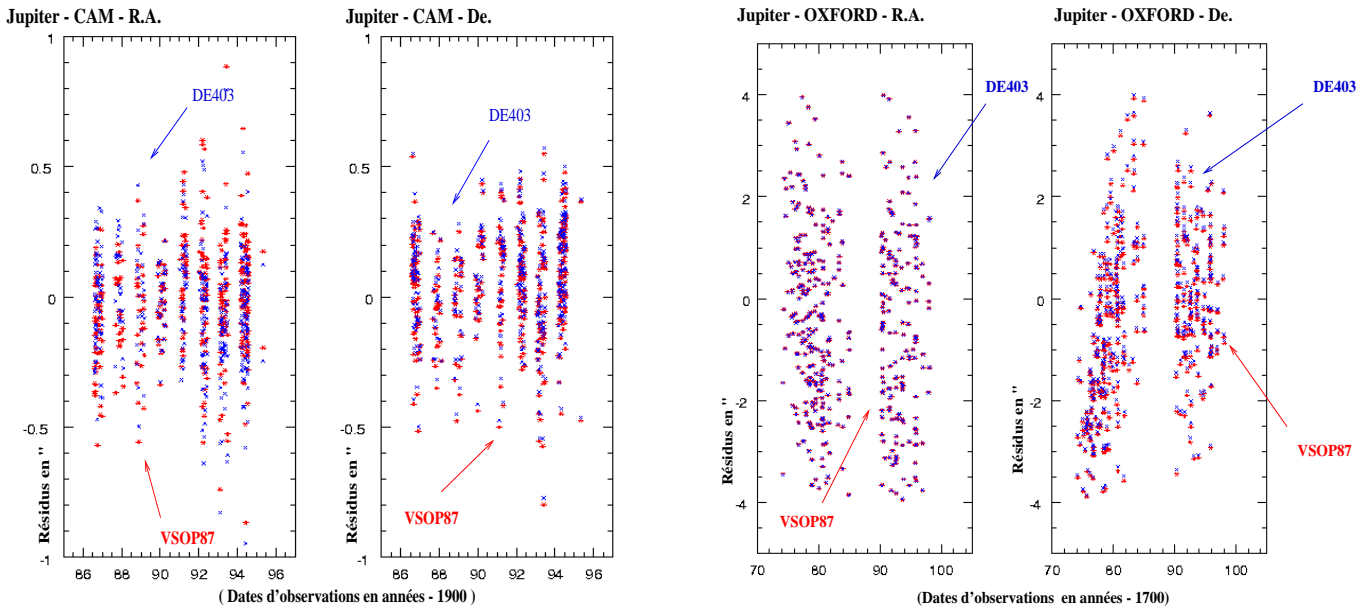


FIG. 9.3: *Jupiter*: Résidus issus des comparaisons entre les positions observées entre 1986 et 1993 au CAMC (à gauche) - observées entre 1776 et 1799 à Oxford (à droite) - et les positions déduites de l'intégration numérique DE403 et la théorie analytiques VSOP87.

composantes principales. Dans le cas des planètes extérieures, seuls les six éléments osculateurs de l'orbite de la planète considérée sont ajustés. En effet, les paramètres orbitaux du barycentre Terre-Lune ayant été déterminés lors de l'ajustement des orbites de Mercure et Vénus, seuls les paramètres liés aux orbites de Jupiter ou Saturne restent à déterminer. Nous avons décrit la procédure de réinjection des paramètres liés au barycentre Terre-Lune dans les théories du mouvement de planètes extérieures au chapitre 7. Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter les résultats issus d'ajustements fondés sur les différentes solutions du barycentre Terre-Lune déterminées au chapitre précédent. Nous discuterons de plus de l'impact des périodes d'ajustement et des types d'observations utilisées.

Signalons que les nouvelles solutions issues de ces ajustements auront été déterminées dans le nouveau système de référence associé à la solution du mouvement du barycentre Terre-Lune choisie. En effet, l'utilisation des corrections aux conditions initiales de l'orbite du barycentre Terre-Lune dans la solution du mouvement de Jupiter ou Saturne permet un basculement naturel de ces solutions dans le nouveau système de référence défini à partir des constantes liées au mouvement du barycentre Terre-Lune. L'apport de toute donnée favorisant un raccordement complémentaire ou direct des orbites de planètes extérieures au repère inertiel cinématique de l'ICRS est donc primordial afin de renforcer les liens entre repère dynamique et cinématique. Nous avons pris ici le parti d'utiliser le même type de pondération utilisé lors de l'ajustement des orbites des planètes intérieures, c'est-à-dire de la forme $w_j = \frac{k}{\sigma_j}$, où k est un coefficient permettant d'atténuer ou de renforcer l'impact de tel type d'observations par rapport à tel autre. Dans le cas des observations de Jupiter, nous avons choisi de favoriser l'apport des données permettant un raccordement direct des orbites au système de référence de l'ICRS. Ainsi, les données VLBI et optiques réduites par rapport aux étoiles Hipparcos ont-elles bénéficié d'une pondération plus favorable que les autres données optiques directes ou indirectes. Dans le tableau de la figure 9.1, sont données les pondérations moyennes pour chaque sous-échantillon de

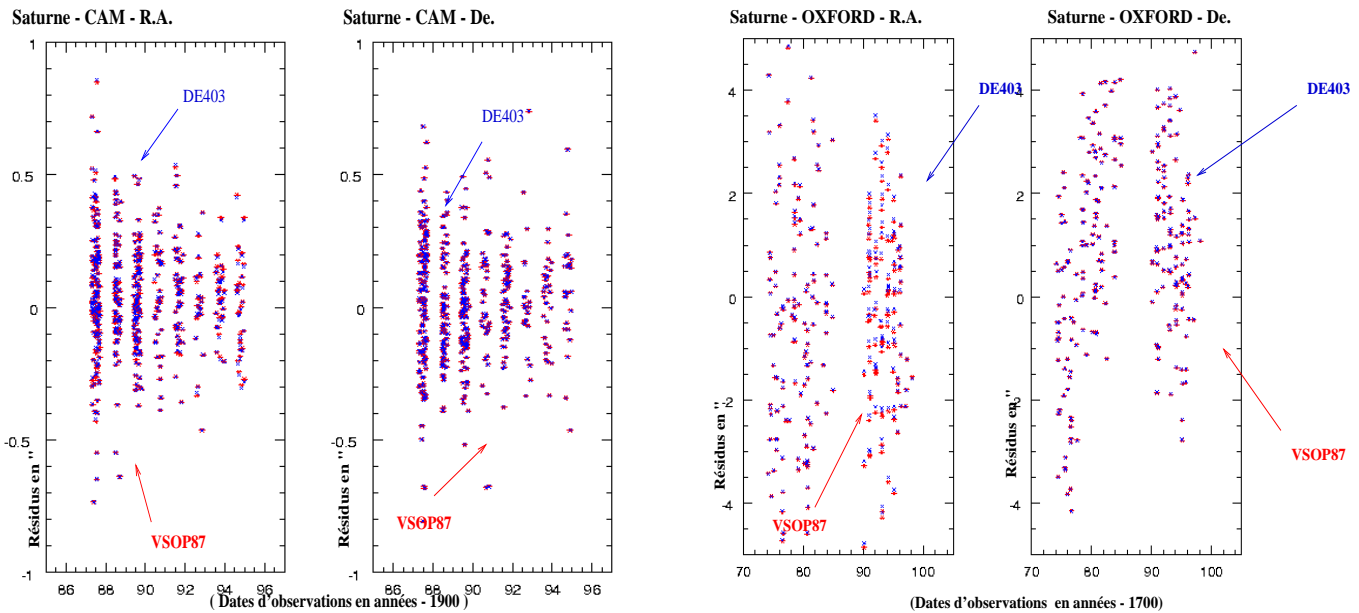


FIG. 9.4: *Saturne*: Résidus issus des comparaisons entre les positions observées entre 1986 et 1993 au CAMC (à gauche) - observées entre 1774 et 1799 à Oxford (à droite) - et les positions déduites de l'intégration numérique DE403 et la théorie analytiques VSOP87.

l'ajustement. Pour Saturne, aucun type d'observation n'a subi un tel système de pondération car aucune observation de Saturne incluse dans l'échantillon d'ajustement n'a directement été exprimée dans le repère de l'ICRS. Seules, les observations indirectes déduites d'observations des satellites (Strugnell-Taylor, 1982-1995) ont été légèrement sur-pondérées du fait de leur bonne qualité astrométrique.

9.2 Les nouvelles solutions

Les ajustements des paramètres d'orbites de Jupiter et Saturne ont été effectués d'une part en utilisant quatre solutions du barycentre Terre-Lune déterminées au chapitre précédent, radar+VLBI, radar+VLBI+optiques modernes, radar+VLBI+optiques modernes et anciennes et radar+optiques modernes, et d'autre part quatre échantillons observationnels regroupant les observations réparties sur les périodes 1914-1982, 1866-1982 et 1750-1982, pour Jupiter et 1914-1982, 1866-1982, et 1840-1982 pour Saturne. Pour Jupiter, le quatrième échantillon n'inclut pas les données VLBI issues du suivi de la sonde Galileo et permet ainsi d'estimer l'impact de ces observations radio sur la qualité de l'orbite ajustée et sur les prévisions issues de cette nouvelle solution. Pour Saturne, l'échantillon dit de *Strugnell-Taylor* nous permettra de compléter nos échantillons d'observations directes par des observations déduites de l'astrométrie des satellites. On aura ainsi un quatrième échantillon, 1840-1982+satellites, qui inclura des données astrométriques directes réalisées au cours de la période 1840-1982 et celles des observations d'astrométriques indirectes permettant de combler un "trou" d'observations directes après 1980. Notre analyse des résultats est, comme dans le cas des planètes intérieures, issue d'une analyse en composantes principales et se décompose en l'étude du conditionnement des matrices d'ajustement, puis en celle des corrélations entre les éléments de la solution ajustée et enfin en une discussion sur leur variabilité selon les solutions du barycentre Terre-Lune et les échantillons observationnels utilisés.

JUPITER											
i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i
1914-1997			1866-1997				1750-1997				
1	0.161	3.515	2.73	1	0.161	3.499	3.94	1	0.133	3.474	2.19
2	1.996	1.000	3.00	2	1.996	1.000	6.01	2	0.159	1.000	3.68
3	1.715	1.078	2.44	3	1.745	1.061	4.26	3	0.907	1.0404	3.59
4	0.132	3.886	0.30	4	0.132	3.857	2.14	4	1.095	3.802	1.14
5	1.092	1.351	1.78	5	1.095	1.340	10.40	5	1.778	1.325	2.93
6	0.903	1.488	2.64	6	0.893	1.482	4.48	6	1.925	1.456	4.26

SATURNE											
i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i	i	Z _i	C _i	t _i
1914-1982			1840-1982				1840-1982+ST				
1	0.188	3.244	4.33	1	0.190	3.197	1.96	1	0.199	3.194	4.40
2	1.909	1.019	3.96	2	1.890	1.013	6.10	2	2.028	1.000	1.28
3	1.982	1.000	1.29	3	1.943	1.000	8.04	3	1.758	1.074	0.83
4	0.143	3.714	0.40	4	0.145	3.653	0.59	4	0.145	3.729	0.07
5	1.153	1.310	0.95	5	1.153	1.297	0.89	5	1.154	1.325	1.40
6	0.622	1.784	1.038	6	0.676	1.695	0.94	6	0.714	1.685	0.90

FIG. 9.5: Statistiques de l'analyse en composantes principales des ajustements de la solution du mouvement de Jupiter (en haut) - fondés sur les échantillons 1914-1997, 1750-1997 et 1866-1997 - et du mouvement de Saturne (en bas) - fondés sur les échantillons 1914-1982, 1840-1982 et 1840-1982 + Strugnell-Taylor. Pour les deux tableaux, la première colonne indique l'indice des composantes. Dans la colonne "Z_i", se trouvent les valeurs propres de la matrice de corrélation de l'ajustement, à savoir les composantes principales du système. La colonne intitulée "C_i" regroupe les nombres de conditions correspondants et dans la dernière colonne, "t_i", se trouvent les valeurs du test de signification de Student pour chaque composante.

9.2.1 Analyse en composantes principales et corrélations

Comme nous l'avons fait pour Mercure et Vénus, on trouvera dans les tableaux de la figure 9.5 les nombres de conditionnement de chaque valeur propre de la matrice de corrélation pour les trois échantillons principaux constituant les bases des ajustements des solutions du mouvement de Jupiter et Saturne. Comme on peut le voir dans ces tableaux, quel que soit l'échantillon utilisé, le conditionnement de la matrice des équations de conditions est très satisfaisant puisque le rapport entre les plus petites et les plus grandes valeurs propres de la matrice de corrélation reste inférieur à 4. Considérant le nombre limité de paramètres à ajuster, nous avons choisi de ne pas chercher à optimiser notre ajustement par moindres carrés par une ou plusieurs éliminations de composantes principales, mais de concentrer notre étude sur les incertitudes induites par les différentes solutions estimées sur des quantités externes à l'ajustement.

Au niveau des corrélations, nous voyons sur les histogrammes du graphique 9.6 qu'il n'est pas décelé de fortes corrélations entre les éléments des solutions du mouvement de Jupiter et de Saturne. Nous sommes donc en présence d'un système d'équations de conditions stable et bien conditionné permettant une détermination efficace des corrections à apporter aux conditions

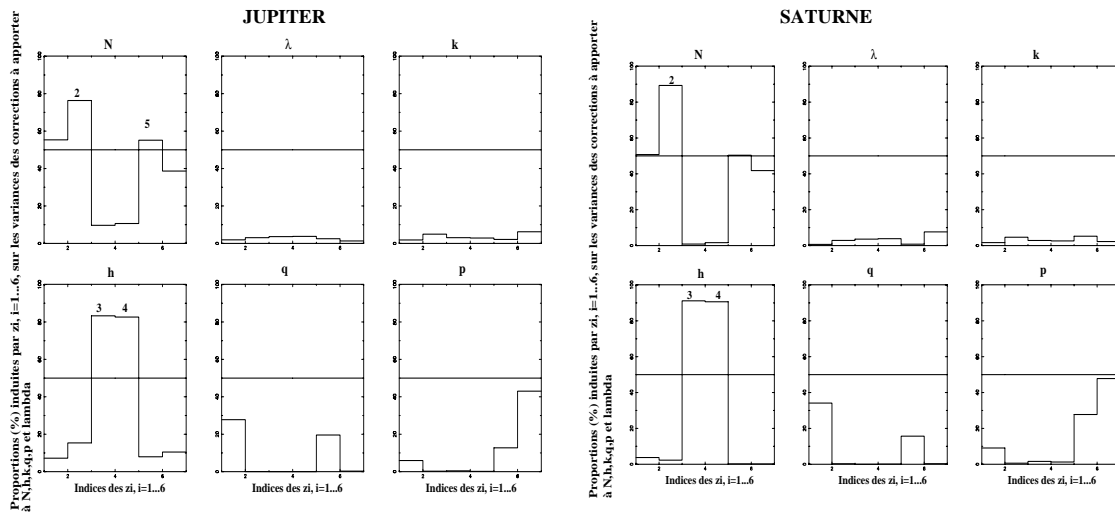


FIG. 9.6: *Histogrammes de proportions de variances des ΔC_i par composante principale pour l'ajustement de la solution du mouvement de Jupiter (à gauche) et Saturne (à droite). L'axe y indique le pourcentage de pourcentages de variances induits par l'une des six composantes principales sur les solutions ajustées. On peut ainsi identifier des sources éventuelles de multicorrélations.*

initiales des solutions du mouvement de Jupiter et Saturne. On pourra retrouver en annexe D les matrices de corrélations issues de ces processus d'ajustement.

9.2.2 Discussion sur les solutions

Jupiter

Sur les graphes 9.7 sont représentées les variations des termes correctifs à ajouter aux conditions initiales de l'orbite de Jupiter selon les diverses solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune et les échantillons observationnels utilisés dans l'ajustement. Il apparaît clairement que le choix de la solution du barycentre Terre-Lune n'est pas sans conséquence sur les nouvelles orbites de Jupiter. L'orbite du BTL déduite d'un ajustement fondé sur des observations radar, VLBI et optiques anciennes et modernes de Mercure et Vénus entraîne de profondes instabilités dans les solutions de Jupiter, quel que soit le paramètre ajusté et l'échantillon d'observations joviennes utilisé. On peut remarquer la relative stabilité des autres solutions. Par ailleurs, dans le cas du moyen mouvement, on constate que l'échantillon incluant des observations de 1750 à 1997 semble apporter des informations non négligeables puisque la correction ΔN est sensiblement modifiée par l'apport des données anciennes entre 1750 et 1866 sans dégradation apparente de la précision, matérialisée sur ces graphiques par les barres d'erreurs.

Dans le cas des corrections à apporter à λ , k et h , les différentes solutions ajustées restent cohérentes aux incertitudes près, bien que dans le cas de $\Delta\lambda$ on puisse noter là encore l'impact des données 1750-1866 sur la détermination de cette constante. Les paramètres Δp et Δq semblent assez sensibles au changement d'échantillons. En particulier, on pourra voir le graphique représentant les variations de Δq . Chaque échantillon apporte une modification dans la détermination de ces corrections mais sans perte apparente de précision.

Pour mieux estimer l'impact des différents échantillons d'ajustement sur la qualité des solutions déduites, nous avons mis en place les histogrammes du graphe 9.9, qui regroupent les

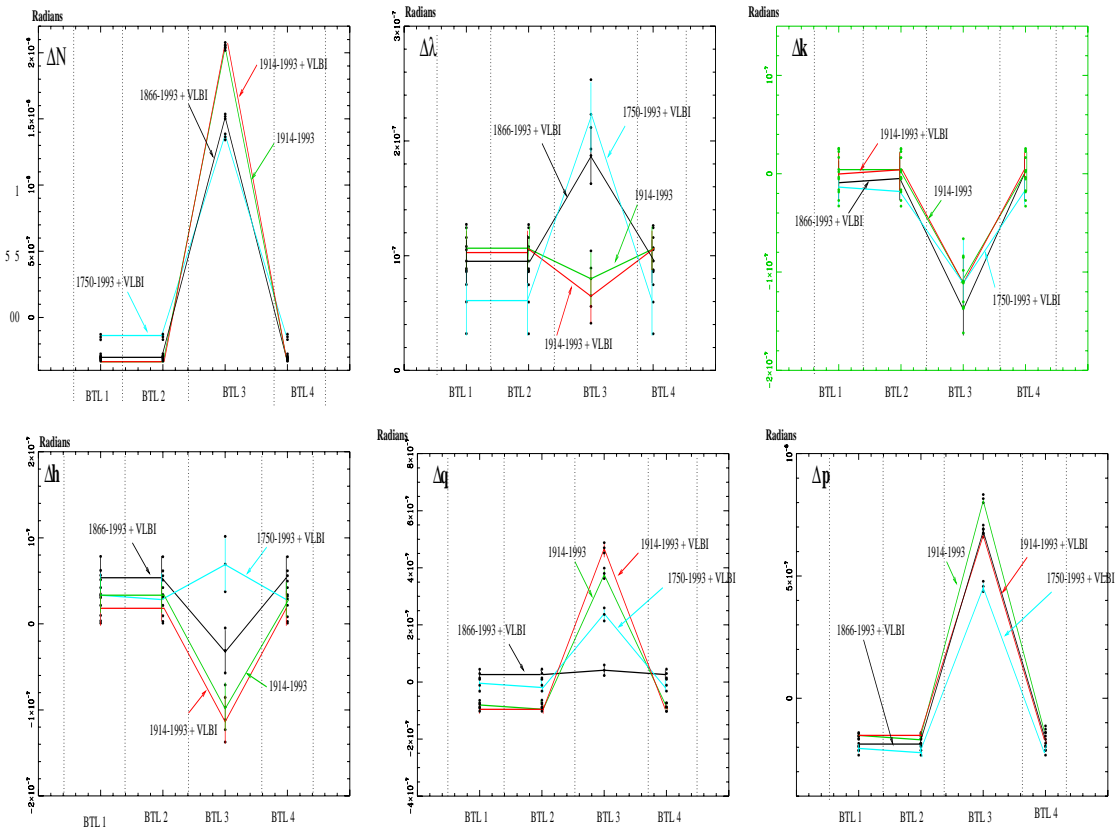


FIG. 9.7: *Jupiter: Variations des corrections à apporter aux conditions initiales de l'orbite de Jupiter en fonction des différents échantillons d'ajustement et des solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées. BTL désigne les différentes solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées dans l'ajustement: BTL1 correspond à la solution Radar+VLBI, BTL2 à Radar+VLBI+Optiques modernes, BTL3 Radar+VLBI+Optiques modernes + Optiques anciennes et BTL4 à Radar+Optiques modernes*

variations des incertitudes avec lesquelles sont calculées les quantités liées aux différents paramètres de l'orbite.

En premier lieu, on peut noter une similitude des comportements sur l'ensemble des paramètres ajustés.

Les solutions issues d'un ajustement à longue période c'est-à-dire incluant des observations des 18ème et 19ème siècles sont clairement dégradées par rapport aux solutions ajustées sur des données contemporaines. Dans le cas de solutions fondées sur des observations réalisées entre 1750 et 1997, donc incluant aussi bien des observations méridiennes du 18ème siècle que des données VLBI de suivi de la sonde Galileo, la dégradation de la précision sur la détermination des constantes d'intégration est comprise entre 44 et 58 % - selon les solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées - par rapport aux précisions atteintes sur les mêmes paramètres ajustés en faisant appel à une solution du barycentre Terre-Lune optimale - radar+VLBI - et un échantillon d'observations réalisées entre 1914 et 1997. Si l'on compare avec les résultats obtenus pour les orbites de Mercure et Vénus, on constate que l'impact des données anciennes est ici plus réduit que dans ces deux derniers cas, mais reste cependant non négligeable et domine ainsi l'apport d'information supposée dans notre première analyse.

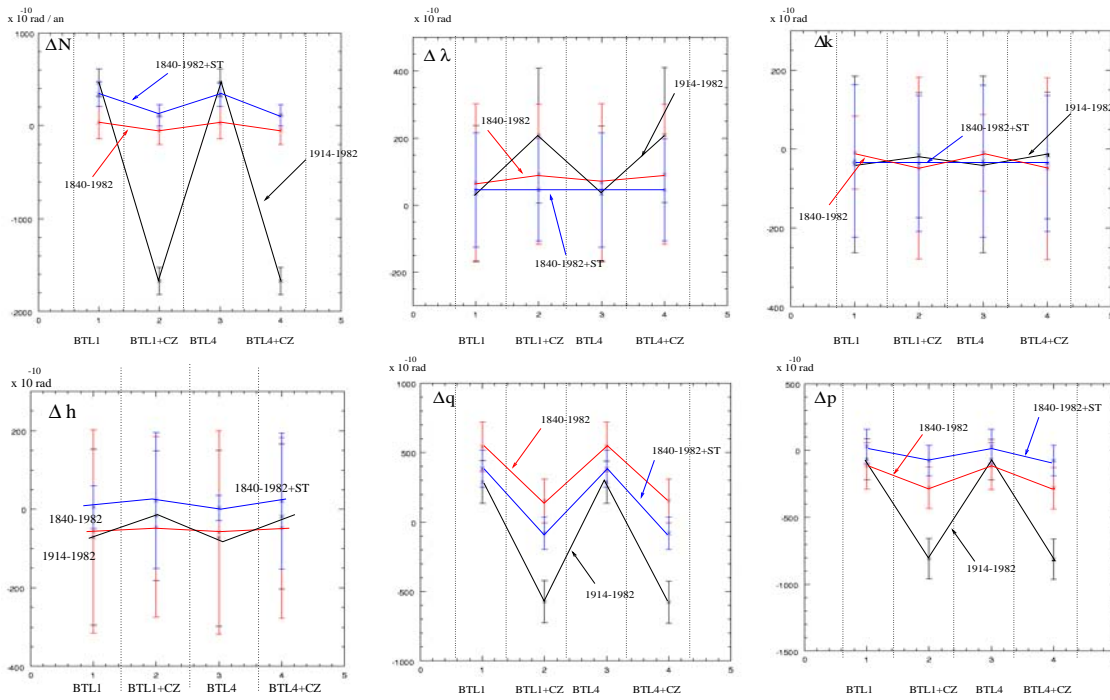


FIG. 9.8: *Saturne: Variations des corrections à apporter aux conditions initiales de l'orbite de Jupiter en fonction des différents échantillons d'ajustement et des solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées. BTL désigne les différentes solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées dans l'ajustement: BTL1 correspond à la solution Radar+VLBI, BTL2 à Radar+VLBI+Optiques modernes, BTL3 Radar+VLBI+Optiques modernes + Optiques anciennes et BTL4 à Radar+Optiques modernes*

Dans le cas d'un ajustement sur une période couvrant la fin du 19ème siècle et la totalité du 20ème siècle - 1866-1997 - on constate que la dégradation est limitée à 7.5 % en utilisant une solution du barycentre Terre-Lune non dégradée. D'autre part, on constate que l'apport de données angulaires de suivi de la sonde Galileo par technique VLBI, nous permet une amélioration de 1% sur la détermination de l'ensemble des constantes d'intégration.

Enfin, on peut noter, comme nous l'avons dit plus haut, que le choix de la solution du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisée dans l'ajustement de la solution de l'orbite de Jupiter est une question importante. Ainsi, au travers de ces histogrammes, il apparaît clairement que l'utilisation d'observations anciennes dans l'ajustement de la solution du mouvement du barycentre Terre-Lune, induit des biais importants non seulement dans cette solution mais aussi pour tout ajustement effectué à partir d'une telle solution. On note ainsi pour un même paramètre ajusté sur un même échantillon d'observations joviennes une dégradation d'environ 17 % par rapport à une solution faisant appel à une solution radar+VLBI du barycentre Terre-Lune. Cependant, on peut remarquer que l'utilisation d'une solution radar+VLBI+optiques modernes n'induit pas de profondes modifications dans les solutions du mouvement de Jupiter, que ce soit dans les corrections elles-mêmes ou dans les incertitudes encadrant leur détermination.

En conclusion, il va être extrêmement intéressant de conserver l'ensemble de ces solutions et de tester leur capacité de prévision sur des échantillons non inclus dans l'ajustement et répartis sur la première et la dernière période d'observations actuellement disponibles à savoir le milieu

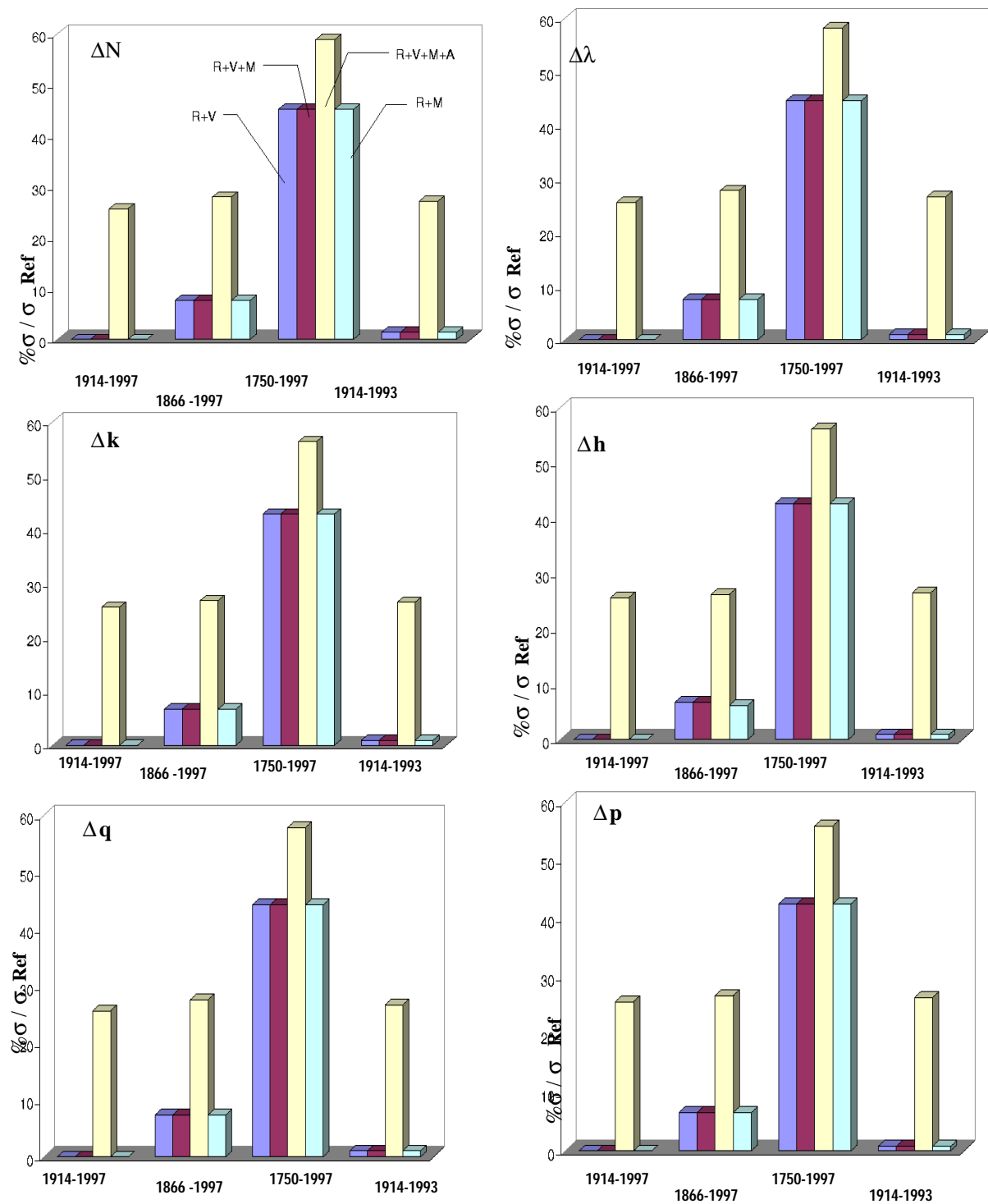


FIG. 9.9: Jupiter: Variations des erreurs sur les déterminations des nouvelles conditions initiales de l'orbite de Jupiter en fonction des différents échantillons d'ajustement et des solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées. Sont représentés ici les rapports de ces erreurs par rapport à une solution dite de référence, correspondant à l'ajustement réalisé à partir de l'échantillon 1914-1997 et de la solution radar+VLBI du mouvement du barycentre Terre-Lune.

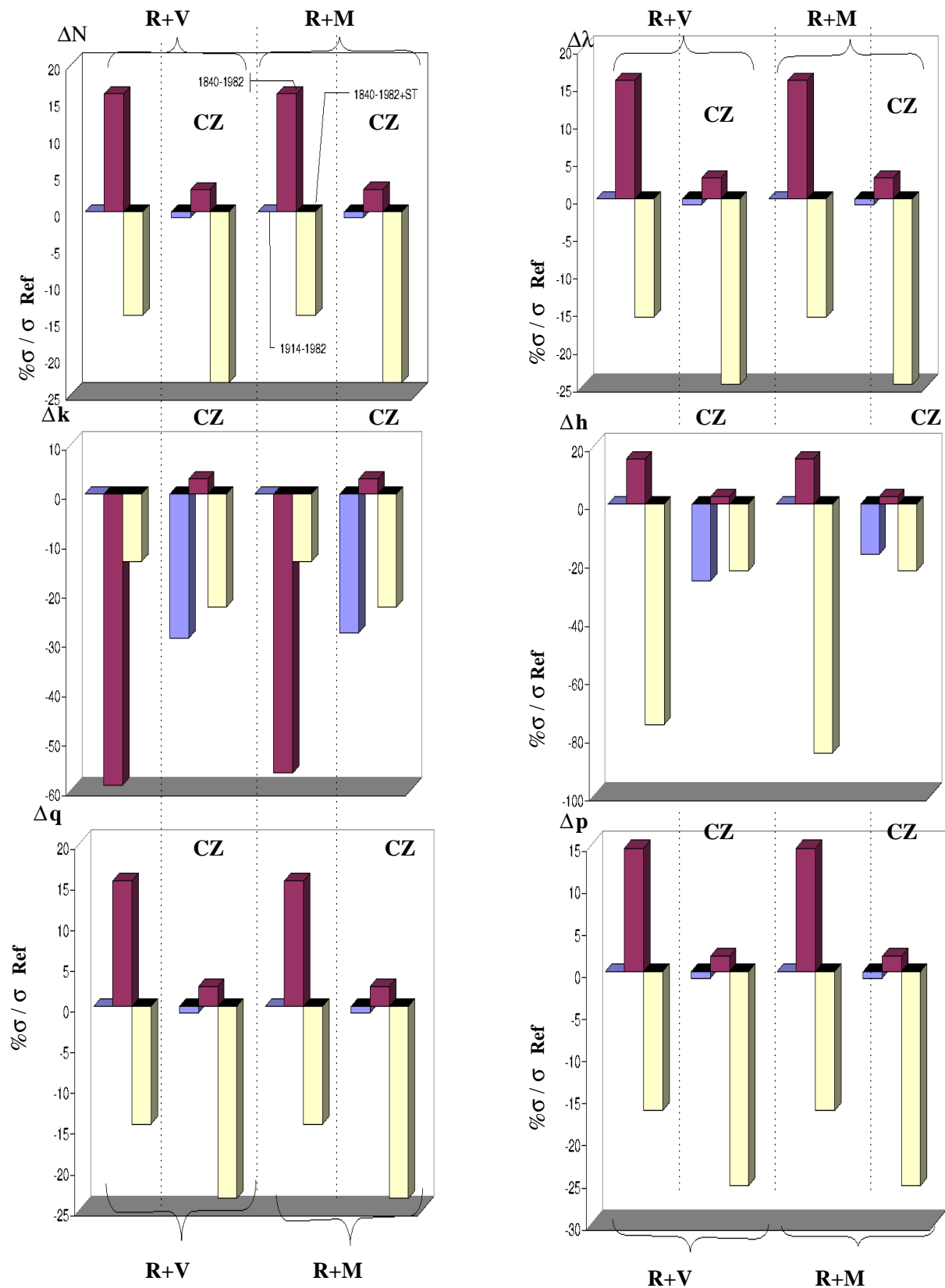


FIG. 9.10: *Saturne: Variations des erreurs sur les déterminations des nouvelles conditions initiales de l'orbite de Jupiter en fonction des différents échantillons d'ajustement et des solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisées. Sont représentés ici les rapports de ces erreurs par rapport à une solution dite de référence, correspondant à l'ajustement réalisé à partir de l'échantillon 1914-1997 et de la solution radar+VLBI du mouvement du barycentre Terre-Lune. CZ indique les quantités déduites de solutions ajustées sur des échantillons corrigés des effets de zone et de réfraction détectés par analyse en ondelettes.*

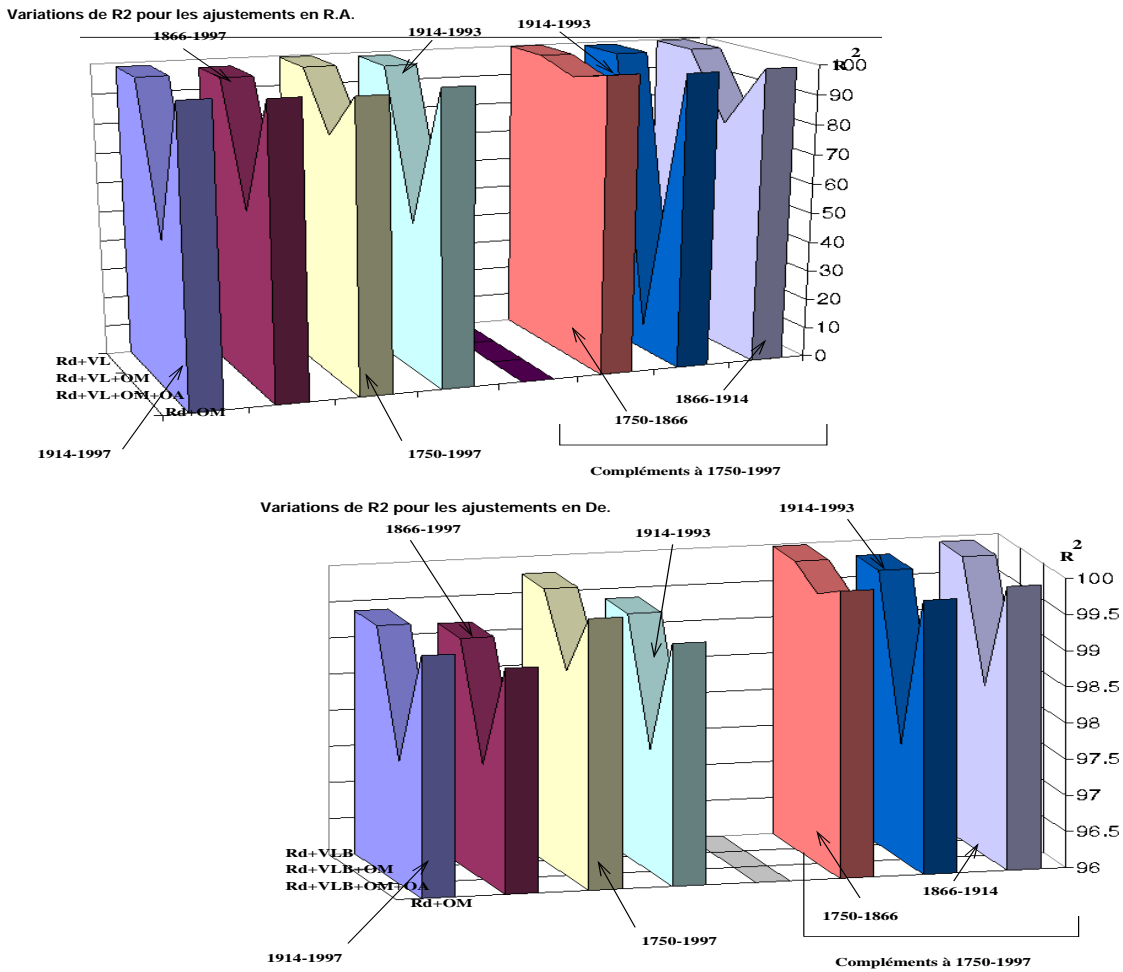


FIG. 9.11: *Jupiter: Coefficients de détermination, R^2 , pour les ajustements fondés sur 4 périodes d'ajustements, 1750-1997, 1866-1997, 1914-1997 et 1914,1993 et utilisant 4 solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune, radar+VLBI, radar+VLBI+optiques modernes, radar+VLBI+optiques modernes et anciennes et radar+optiques modernes.*

du 18ème siècle et bien sûr la fin du 20ème.

Saturne

Les graphes de la figure 9.8 représentent les variations des corrections à apporter aux conditions initiales de la solution du mouvement de Saturne, en fonction d'une part de la solution du barycentre Terre-Lune utilisée et d'autre part de l'échantillon observationnel utilisé au cours de l'ajustement. Comme nous l'avons dit plus haut, dans le cas de Saturne, ces échantillons sont au nombre de trois: 1914-1982, 1840-1982 et 1840-1982+Strugnell-Taylor. Il est à noter que nous avons calculé de plus des solutions appelées *avec correction de zone*. Ces solutions sont issues d'un ajustement fondé sur des échantillons sur lesquels ont été réalisées les corrections de zones décrites au paragraphe 9.5. Suivant les remarques effectuées précédemment sur l'impact des diverses solutions du barycentre Terre-Lune sur l'ajustement des conditions initiales de la solution du mouvement de Jupiter, nous avons choisi de limiter notre étude aux solutions radar+VLBI et radar+Optiques Modernes du barycentre Terre-Lune. La principale constatation

est que l'apport d'un barycentre Terre-Lune calculé soit à partir d'observations radar et VLBI soit radar et optiques modernes est sans conséquence sur l'ajustement de la solution de Saturne. D'autre part, on peut noter que les corrections de zones appliquées aux échantillons affectent principalement la détermination des constantes, et tout particulièrement ΔN .

Comme dans le cas de Jupiter, nous avons calculé les précisions issues de chaque ajustement sur l'estimation de ces corrections orbitales pour le mouvement de Saturne. Nous avons réuni dans la figure 9.12 les graphes représentant les variations en pourcentage de ces incertitudes par rapport à un σ de référence déduit de l'ajustement fondé sur l'échantillon contemporain 1914-1993 et fondé sur la solution radar+VLBI du barycentre Terre-Lune. Sur ces graphes, il apparaît clairement que, quel que soit l'élément osculateur, l'apport des positions de Saturne déduites de celles des satellites de la base de données de Strugnell-Taylor améliore notablement la précision avec laquelle sont estimés les corrections à apporter aux conditions initiales de la solution du mouvement de Saturne. En moyenne, cette amélioration est de l'ordre de 25 % sur l'ensemble des éléments orbitaux. Ceci indique donc que le catalogue de Strugnell-Taylor apporte un supplément d'informations non négligeable dans notre étude du mouvement de Saturne. Ce qui n'est pas étonnant, puisque, comme nous l'avons dit dans la présentation de ce travail (cf le chapitre 1), cet ensemble d'observations a été choisi afin de densifier en observations une partie de l'orbite de Saturne peu couverte par les échantillons d'observations directes à notre disposition (cf graphe 1.5 chapitre 1). Ce complément de données sur une zone explique pourquoi les données déduites de la base de Strugnell-Taylor induit une telle amélioration. D'autre part, on note que pour Δk et Δh , les variations des incertitudes sur ces deux estimations semblent amplifiées par rapport aux autres variations de σ , tout particulièrement lors d'ajustements réalisés sur des échantillons non-correctés d'effets de zone. Cette remarque nous permet d'aborder quelque peu prématurément l'impact des corrections de zone, décrites au paragraphe 9.5. Il est clair que ces corrections permettent soit d'améliorer la précision dans le cas d'un ajustement contemporain (sur l'échantillon 1914-1982), soit d'atténuer la dégradation de la précision dans le cas des ajustements sur l'échantillon 1840-1982, soit d'amplifier l'amélioration dans le cas d'un ajustement 1840-1982+Strugnell-Taylor. En résumé, ces corrections semblent avoir un effet très positif sur la précision de l'ajustement en général. Elles permettent de plus de souligner que certaines déterminations de Δk et Δh , sont très sensibles aux effets systématiques corrigés par nos corrections zonales.

9.2.3 Résidus après ajustement

L'étude des résidus calculés par comparaison entre les positions issues des nouvelles solutions ajustées et les positions observées ayant servis à l'ajustement permet d'estimer l'efficacité de celui-ci. En effet, dans le cas d'un ajustement parfait, la variance expliquée par l'ajustement devra être égale à celle de départ. Autrement dit, la dispersion des résidus calculés par comparaison entre les nouvelles positions ajustées et les positions observées autour d'une valeur moyenne proche de 0 devra être identique à celle des résidus calculés par comparaison des observations aux positions calculées par VSOP87. Dans le chapitre 6 consacré aux méthodes statistiques, nous avons introduit le coefficient de détermination, R^2 , qui permet de quantifier la qualité d'un ajustement au travers des rapports entre variance expliquée par l'ajustement et variance initiale. C'est principalement ce coefficient R^2 que nous allons considérer dans cette étude des résidus après ajustement. En étudiant la valeur de ce coefficient en ascension droite et déclinaison pour chaque sous-échantillon observationnel, il nous est alors possible de tracer une carte de sensibilité des différentes solutions.

SATURNE - Coefficient de détermination

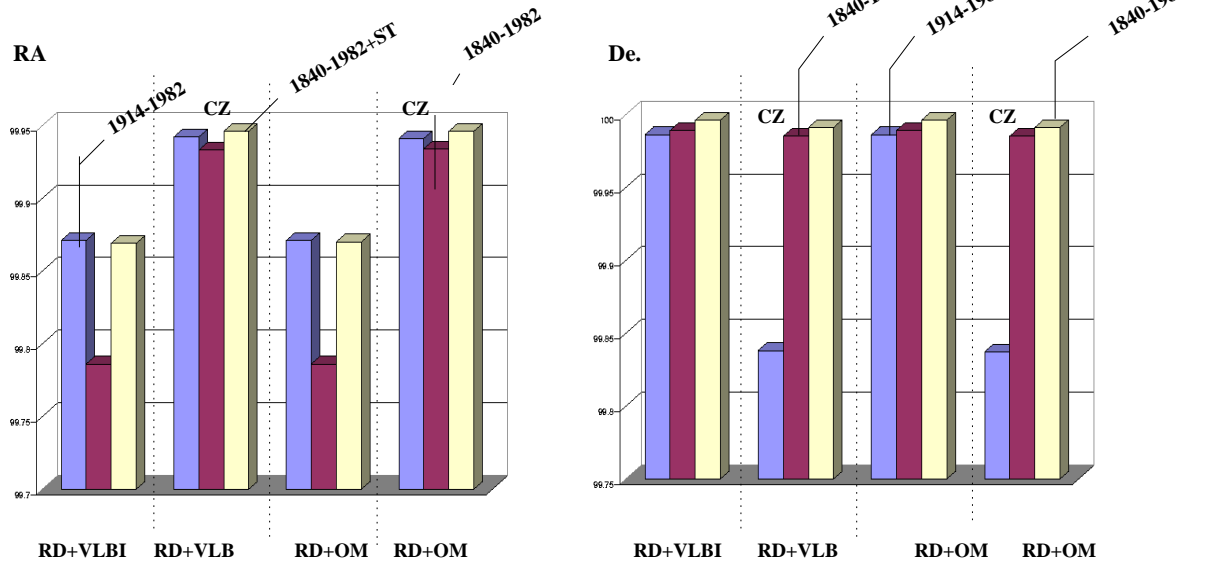


FIG. 9.12: Saturne: Coefficients de détermination, R^2 , pour les ajustements fondés sur les périodes d'ajustement, 1840-1982, 1840-1982+ST, 1914-1982 avec et sans corrections de zone et utilisant deux solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune, radar+VLBI, radar+optiques modernes.

Jupiter

Les graphes 9.11 représentent les variations du coefficient de détermination, en ascension droite et déclinaison, en fonction des échantillons d'ajustement, des paramètres d'orbite de Jupiter et des solutions du mouvement du barycentre Terre-Lune (BTL).

Ce que l'on peut remarquer en premier lieu c'est l'efficacité de l'ajustement en déclinaison ($R^2 > 96\%$ quel que soit l'échantillon et les solutions du BTL utilisées) et les relatives difficultés d'ajustement en ascension droite. En effet, il apparaît que l'utilisation de constantes d'intégration du l'orbite du BTL ajustée sur des données optiques anciennes entraîne une instabilité systématique de l'ajustement, notable aussi bien en ascension droite qu'en déclinaison, mais plus nettement marquée en ascension droite. Pour le reste des autres solutions, les coefficients de détermination sont tout à fait satisfaisants puisque supérieurs à 98 % pour les solutions ajustés sur les échantillons contemporains, 1914-1997 et 1914-1993, et à 97 % pour les solutions à moyenne période, c'est-à-dire ajustés sur l'échantillon 1866-1997. On note qu'à la solution à longue période issue de l'ajustement sur l'échantillon 1750-1997 correspond les coefficients de détermination en ascension droite et déclinaison les plus élevés – 99.53 % en α et 99.76 % en δ – et cela quel que soit la solution du BTL utilisée. De plus, si l'on effectue la même analyse sur les trois sous-échantillons, 1750-1866, 1866-1914 et 1914-1997, on constate là encore une grande homogénéité de l'ajustement.

En conclusion, il apparaît que l'allongement de la période d'ajustement n'induit pas une amélioration dans la détermination des constantes d'intégration, puisque, comme on l'a vu au paragraphe précédent, l'incertitude sur cette détermination n'est pas réduite, mais introduit dans celle-ci des biais observationnels justifiant une meilleure adéquation de la nouvelle solution ajustée avec les observations, aussi bien anciennes que contemporaines. En effet, on remarquera que le coefficient de détermination découlant d'un ajustement à longue période pour le sous-échantillon

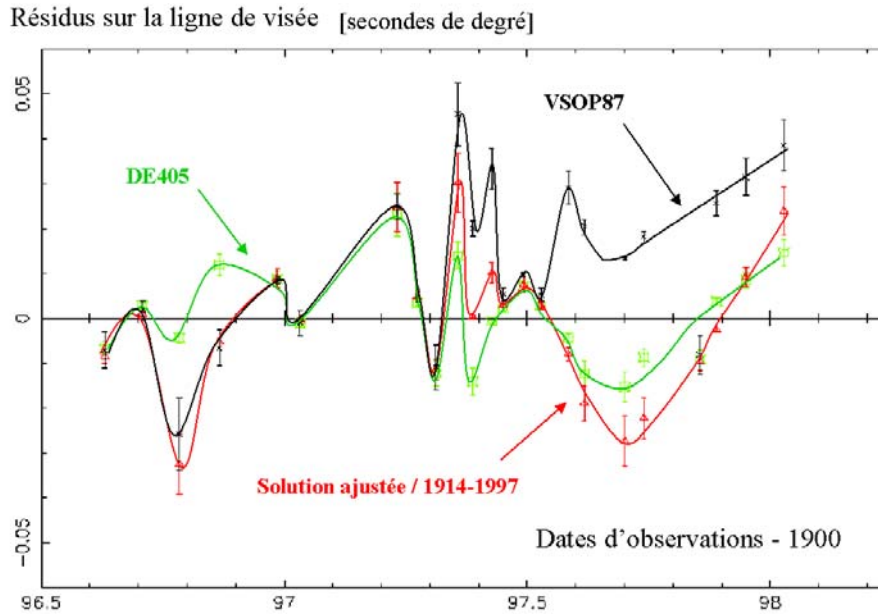


FIG. 9.13: *Jupiter: Résidus estimés le long de la direction de visée c'est-à-dire issus des comparaisons entre les positions angulaires déduites du suivi de la sonde Galileo observées par technique d'interférométrie à très longue base et celles calculées à partir de DE405, VSOP87 et de la solution ajustée sur l'échantillon 1914-1997.*

1914-1993 est supérieur à celui déduit de l'ajustement direct sur cette période – 99.1 % et 98.7 % respectivement en ascension droite et de 99.7 % et 99.4 % en déclinaison. Ces quantités sont bien sûr très proches et donc discutables, mais on peut supposer néanmoins que l'élargissement de la base observationnelle de l'échantillon permet la prise en compte de phénomènes à longue période dans la détermination des constantes d'intégration, qui ne serait que partielle lors d'un ajustement à plus courte période.

Enfin, l'étude des résidus *après ajustement* permet de détecter des observations éventuellement aberrantes et qui bien que n'ayant pas un résidu fort, n'en sont pas moins anormales. Sur les graphes 9.14, sont représentés les résidus issus des comparaisons entre observations et positions déduites de l'intégration numérique DE405, et des solutions ajustées sur des observations couvrant les trois périodes 1914-1997, 1866-1997 et 1750-1997. Les solutions dont il est question ont été bâties en utilisant la solution radar+VLBI du mouvement du barycentre Terre-Lune, les différences de comportement entre ces solutions et celles bâties sur d'autres solutions du mouvement du BTL ayant été largement commentées précédemment. On voit sur ces graphes, et tout particulièrement en ascension droite l'amélioration incontestable apportée par la solution ajustée à l'échantillon 1914-1997 par rapport d'une part à DE405 et d'autre part aux solutions à plus long terme comme celles issues des ajustements sur les échantillons 1866-1997 et 1750-1997.

Sur le graphique 9.13, sont tracés les résidus le long de la ligne de visée issus des comparaisons entre les positions angulaires obtenues par suivi VLBI de la sonde Galileo et les positions calculées à l'aide de l'intégration numérique DE405, de la théorie analytique VSOP87 et de la

solution issue de notre ajustement sur l'échantillon d'observations réparties entre 1914 et 1997 et pour une solution radar+VLBI du mouvement du barycentre Terre-Lune. A la lecture de ce graphique, il semblerait que la solution ajustée sur l'échantillon 1914-1997 améliore l'estimation de la position théorique de Jupiter par rapport à VSOP87. On note néanmoins que les positions déduites de DE405 sont plus proches des positions observées que l'ensemble des solutions précédentes. Cela peut s'expliquer par le fait que l'intégration numérique du JPL inclut une orbite de Mars de très grande qualité et ainsi une solution du mouvement du barycentre Terre-Lune basée essentiellement sur ces dernières observations de Mars. On peut donc supposer que cette différence notable dans les résidus VLBI de Jupiter découle de cette solution améliorée du barycentre Terre-Lune.

Il reste à voir maintenant les qualités de prévision de ces différentes solutions sur deux échantillons-test: CAMC 1986-1993 et Oxford 1774-1799 (*cf.* 9.3).

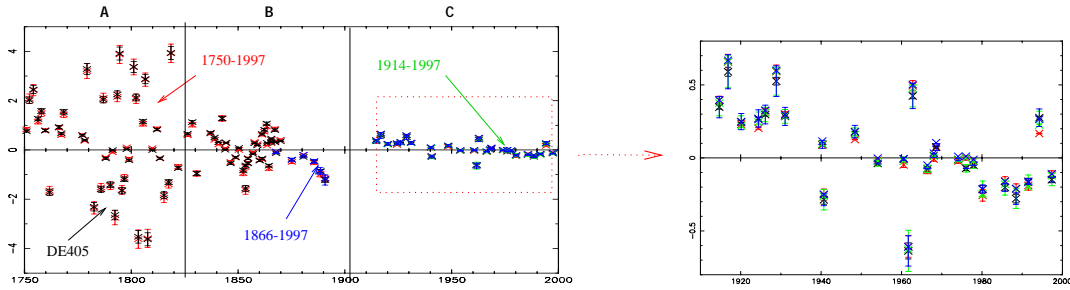
Saturne

Comme dans le cas de Jupiter, nous avons utilisé comme indice primaire de qualité de l'ajustement, le coefficient de détermination R^2 . Les graphes de la figure 9.12 regroupent les valeurs prises par le R^2 pour les différentes solutions issues d'ajustements sur les échantillons 1914-1982, 1840-1982 et 1840-1982+Strugnell-Taylor avec et sans corrections de zone, et fondés sur les solutions radar+VLBI et radar+optiques modernes du mouvement du barycentre Terre-Lune. Le taux de détermination est très satisfaisant puisque supérieur à 99 % dans toutes les configurations. Ce qui indique que l'ensemble des ajustements réalisés intègre plus de 99 % de l'information observationnelle. Plus particulièrement, en déclinaison, on note que ce taux ne descend qu'exceptionnellement en dessous des 99.9 %, alors qu'en ascension droite le taux de détermination le plus faible est de 99.75 %. Ces taux sont équivalents à ceux obtenus pour Jupiter, à solutions du barycentre Terre-Lune équivalentes. On note cependant que l'apport des données de Strugnell-Taylor à l'échantillon à longue période permet une amélioration du R^2 quelle que soit la solution du BTL utilisée. La solution à longue période seule n'induit pas de telles améliorations. Ce qui nous confirme que les données de Strugnell-Taylor apportent à l'ajustement une quantité d'informations non négligeable.

9.3 Prévisions

Nous allons comparer ici les positions observées d'une part au cercle méridien de La Palma entre 1986 et 1995 et d'autre part à l'instrument méridien de 4-inch d'Oxford entre 1774 et 1799, aux positions déduites des diverses solutions ajustées et de l'intégration numérique DE403. Nous rappelons tout l'intérêt résidant dans un tel test après ajustement et dans la mise en place de nouvelles solutions du mouvement de Jupiter et Saturne dans l'ICRS. En effet, les observations réalisées au CAMC de La Palma ont été réduites directement dans le repère de l'ICRS grâce à l'utilisation d'étoiles de référence extraites des catalogues astrométriques Hipparcos ou Tycho et à un protocole rigoureux de réduction (CAM Catalogue, 1997). Ainsi, dans le cas où les nouvelles solutions permettent d'induire de faibles résidus (c'est-à-dire inférieurs à 10 mas) en comparaisons des positions observées, cela signifie que ces nouvelles solutions sont effectivement exprimées dans un repère dynamique proche (à moins de 10 mas) de celui, cinématique, de l'ICRS. Si par contre, les résidus, particulièrement en déclinaison, révèlent un décalage systématique par rapport aux positions observées et exprimées dans le repère cinématique de référence de l'ICRS, c'est donc que les observations utilisées dans l'ajustement de la solution de Jupiter ou

JUPITER: (O-C) (") RA après ajustement



JUPITER: (O-C) (") De. après ajustement

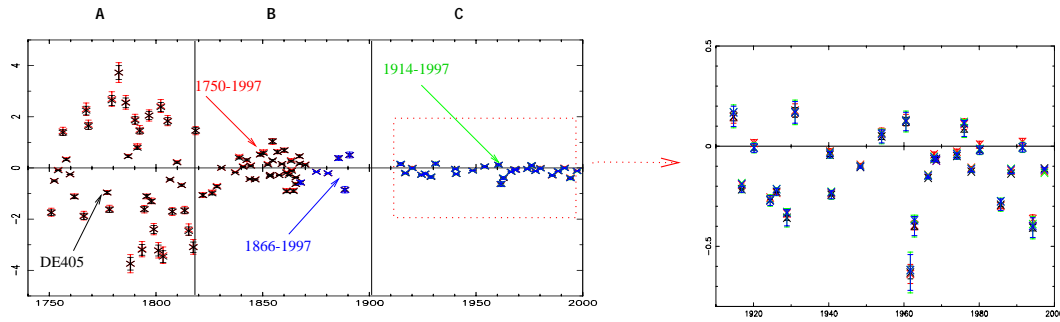
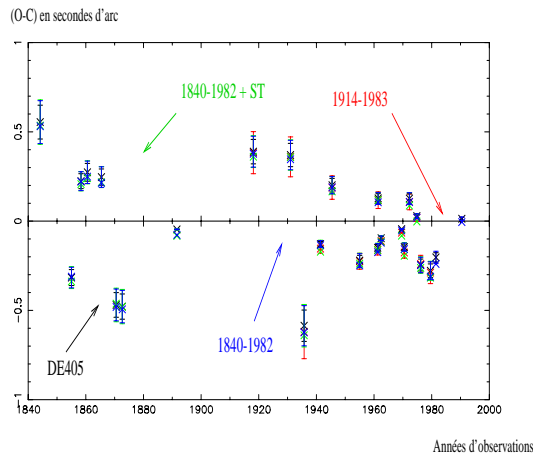


FIG. 9.14: *Jupiter: Résidus après ajustement en ascension droite et déclinaison issus des comparaisons entre observations et positions déduites de l'intégration numérique DE405 et des solutions ajustées sur des observations couvrant les trois périodes 1914-1997, 1866-1997 et 1750-1997*

SATURNE: (O-C) (") RA après ajustement



SATURNE: (O-C) (") De. après ajustement

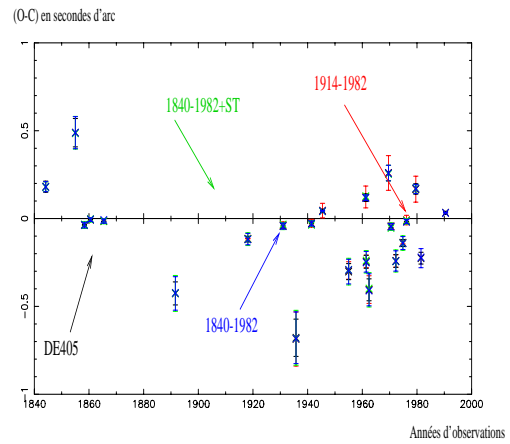


FIG. 9.15: *Saturne: Résidus après ajustement en ascension droite et déclinaison issus des comparaisons entre observations et positions déduites de l'intégration numérique DE405, et des solutions ajustées sur des observations couvrant les trois périodes 1914-1993, 1840-1993 et 1840-1993+Strugnell-Taylor*

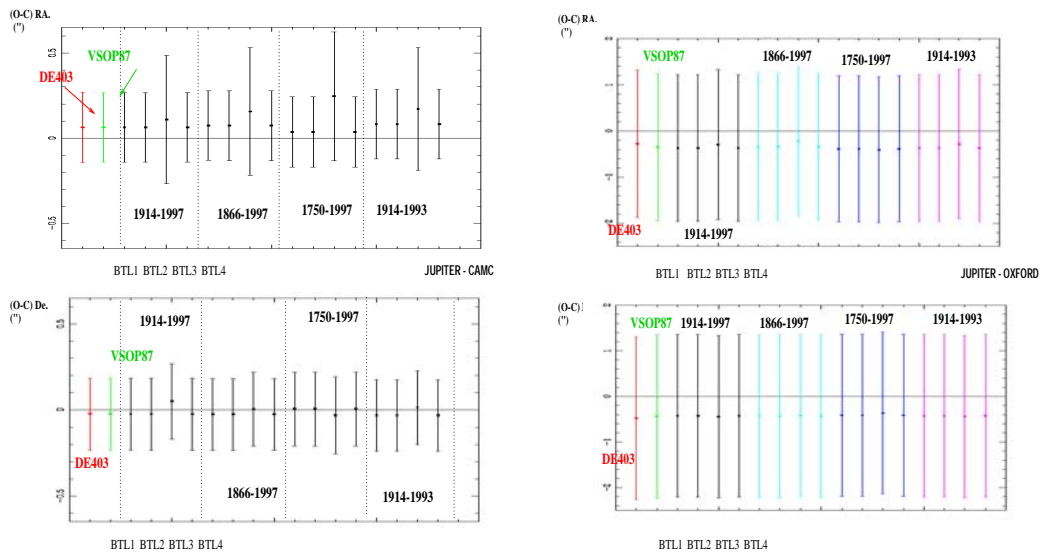


FIG. 9.16: *Jupiter: Moyennes et écarts type globaux des résidus obtenus par comparaison entre les positions observées au cercle méridien de La Palma (graphes de gauche) et à Oxford (graphes de droite) et les positions déduites des solutions indexées en abscisse. Les solutions issues de l'ajustement diffèrent par les périodes couvertes par l'échantillon observationnel utilisé (périodes indiquées sur le graphe) et la solution du barycentre Terre-Lune utilisée dans les calculs (indices en abscisse). BTL1 correspond à la solution Radar+VLBI, BTL2 à Radar+VLBI+Optiques modernes, BTL3 Radar+VLBI+Optiques modernes + Optiques anciennes et BTL4 à Radar+Optiques modernes*

Saturne n'induisent pas un raccordement satisfaisant au repère de référence de l'ICRS. Notons d'autre part que les observations du CAMC ont été incluses dans l'échantillon d'observations utilisé pour l'ajustement des solutions numériques DE403 et DE405.

Jupiter

En première approche, nous avons tracé - graphique 9.16 - les valeurs moyennes et les écarts type des résidus obtenus par comparaison entre les positions observées - et non-incluses dans l'ajustement - et les positions déduites d'une part par DE403 et VSOP87 et d'autre part par les différentes solutions issues de notre ajustement du mouvement de Jupiter.

Dans le cas des observations récentes de La Palma, il apparaît que l'ensemble de nos solutions ajustées, à l'exception de celle déduite d'une solution radar+VLBI+optiques modernes et anciennes du barycentre Terre-Lune, induisent en moyenne des positions du barycentre du système jovien proches des solutions classiques numériques ou analytiques. Il ne semble donc pas qu' *a priori* nos solutions soient affectées d'effets systématiques importants, hormis là encore pour les solutions ajustées sur une longue période.

On retrouvera dans le tableau 9.1 les résultats complets. Si l'on considère les résidus déduits des solutions numériques DE403 et DE405, on retrouve le décalage noté par Morrison (Morrison, 1998) d'environ +50 mas (à l'erreur individuelle des observations près que l'on estime à ± 10 mas) en ascension droite et une fluctuation d'amplitude 100 mas en déclinaison. On remarque d'autre part que la théorie VSOP87 fournit des positions équivalentes à celles issues de DE405 en déclinaison (avec cependant une dispersion légèrement supérieure) mais nettement dégradées en

ascension droite (+20 mas). Comme nous l'avons dit, nous avons appliqué les constantes déduites de nos ajustements afin d'obtenir de nouvelles solutions du mouvement de Jupiter. S'agissant de la solution déduite de l'ajustement effectué sur l'échantillon 1914-1997, la comparaison aux positions observées à La Palma, indique que la nouvelle solution permet de faire chuter les résidus en ascension droite de 50 %, ceux en déclinaison étant légèrement recentrés (mais de façon non significative par rapport à la précision individuelle des observations). On note cependant que la dispersion de ces mêmes résidus en déclinaison diminue sensiblement de 10 % entrant ainsi dans le même ordre de grandeur que celles déduites des comparaisons aux solutions numériques. Les solutions du mouvement de Jupiter ajustées sur des échantillons à plus longue période (1886-1997 et 1750-1997) induisent une dégradation de ces premiers résultats. Cette dégradation est bien sûr à mettre sur le compte de la qualité astrométrique moins grande des observations anciennes souvent affectées d'effets systématiques induits au cours de l'observation ou de la première réduction et difficilement corrigibles *a posteriori*.

Enfin, comme nous l'avons déjà souligné, les solutions du mouvement de Jupiter fondées sur une solution du mouvement du barycentre Terre-Lune ajustée sur l'échantillon incluant des données optiques anciennes, sont clairement biaisées par un effet systématique important. Cet effet systématique se manifeste non seulement par un décalage de la valeur moyenne des résidus mais aussi par une augmentation très nette de la dispersion de ces derniers autour de la valeur moyenne. Cet argument montre une fois de plus, si cela était nécessaire, que cette solution du mouvement du barycentre Terre-Lune ne peut être conservée. Tout particulièrement, il est intéressant de noter que les plus grandes instabilités apparaissent en ascension droite. L'impact des autres solutions du BTL semble beaucoup plus limité car aucune différence notable entre les positions de Jupiter déduites de ces diverses solutions n'est à signaler.

Concernant les résidus obtenus par comparaison entre les positions observées à Oxford entre 1774 et 1797 et celles issues de nos diverses théories, il est plus difficile de discriminer ces dernières. En effet, la deuxième série de graphes (droite) de la figure 9.16 illustre parfaitement la relative stabilité des résidus en ascension droite et déclinaison. Il faut garder en mémoire que les solutions fondées sur VSOP87 utilisent un système de masses moins récent et moins précis que celui utilisé dans DE403 ou DE405. Les différences de masses n'induisent pas d'effets notables à la précision des observations pour les périodes contemporaines. Cependant, pour les observations anciennes, cet effet n'est plus négligeable et permettrait d'expliquer, par le biais notamment d'une dégradation du moyen mouvement, pourquoi malgré nos ajustements les positions déduites de DE403 ou DE405 sont plus proches des positions observées à Oxford entre 1774 et 1799 que nos solutions ajustées.

Pour aller plus loin dans l'analyse, nous avons estimé les résidus moyens à chaque opposition, afin de minimiser les erreurs observationnelles, et de visualiser l'impact réel de chaque solution. Les graphes 9.17 et 9.18 regroupent ces quantités calculées pour des solutions fondées sur la solution radar+VLBI du barycentre Terre-Lune. En ce qui concerne les observations réalisées à La Palma, en déclinaison, il apparaît que notre solution 1914-1997 améliore les positions calculées en comparaison de celles déduites de DE403 et dans une moindre mesure celles de DE405. En ascension droite, l'amélioration est moins flagrante. Par ailleurs, les résidus calculés à partir des données d'Oxford montrent un fort effet systématique en ascension droite qu'aucune solution ne peut absorber, y compris notre solution ajustée sur une longue période. L'ajustement d'une droite en fonction du temps nous permettra par ailleurs de corriger cette dérive séculaire. On ne peut pas discriminer les diverses solutions, mais l'on pourra noter cependant que la solution à longue période permet d'améliorer légèrement les résidus en particulier en ascension droite.

JUPITER - CAMC

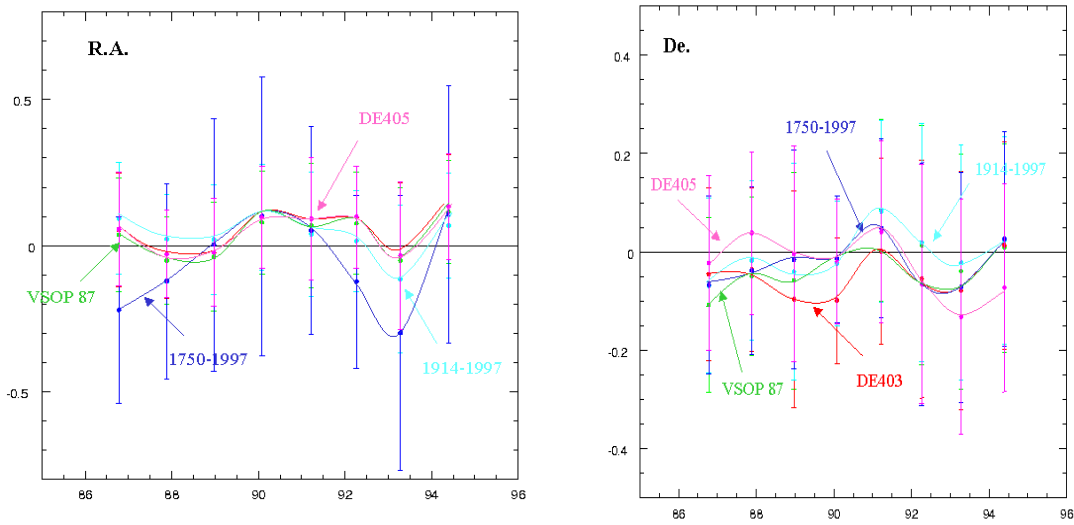


FIG. 9.17: *Jupiter: Résidus par opposition obtenus par comparaison entre positions observées au CAMC de La Palma et les positions déduites de diverses solutions dynamiques issues de nos ajustements, ainsi que de DE405, DE403 et VSOP87. L'unité portée en ordonnée est la seconde de degré, celle portée en abscisse correspond aux dates grégoriennes d'observation - 1900.*

En conclusion, nous pouvons dire, qu'en ce qui concerne les positions récentes du CAMC, notre solution ajustée sur l'échantillon 1914-1997 nous permet de déduire des positions plus proches de celles observées, en particulier, en déclinaison. Il reste cependant un fort biais en ascension droite.

Les observations anciennes d'Oxford ne nous permettent pas de discriminer les diverses solutions mais mettent en lumière un effet systématique non négligeable en ascension droite.

Saturne

Pour notre analyse, nous allons utiliser les statistiques des résidus pour les observations de La Palma et d'Oxford présentées dans le tableau 9.2. Nous y présentons les statistiques, valeurs moyennes et écarts types, des résidus calculés par comparaison entre les positions observées à La Palma et réduites dans le repère de l'ICRS et les positions déduites de VSOP87 et DE405 d'une part et des différentes solutions ajustées d'autre part. Forts des remarques réalisées dans le cadre de l'analyse des prédictions des solutions de Jupiter, nous ne présenterons ici que les résultats issus des solutions fondées sur l'utilisation des solutions radar+VLBI et radar+Optiques modernes du barycentre Terre-Lune. Dans le tableau 9.2, on constate une très nette amélioration en δ induite par la solution ajustée sur la période 1914-1982. Mais, il apparaît clairement que les déclinaisons et les ascensions droites sont affectées d'un effet systématique d'environ 15 mas que nos divers échantillons n'arrivent pas à absorber. Grâce à l'étude comparée de ces résultats, il apparaît que le décalage notable en déclinaison présent dans nos résidus ne semble pas induit par le choix de la solution du barycentre Terre-Lune. Autrement dit, il découle soit d'un effet systématique présent dans l'un des échantillons observationnels de l'ajustement soit d'un effet plus général de raccordement entre le repère des observations (utilisées dans l'ajustement) et l'ICRS, effet bien supérieur en amplitude à celui induit par le basculement naturel de ce repère

JUPITER	CAMC (1986-1995)				Oxford (1774-1799)			
	$(O - C)_\alpha$ (")	σ_α	$(O - C)_\delta$ (")	σ_δ	$(O - C)_\alpha$ (")	σ_α	$(O - C)_\delta$ (")	σ_δ
DE403	0.061	0.207	-0.014	0.217	-0.279	1.595	-0.440	1.782
VSOP87	0.081	0.207	-0.012	0.241	-0.351	1.589	-0.441	1.785
DE405	0.062	0.207	-0.013	0.220	-0.280	1.595	-0.438	1.784
1914 - 1997								
BTL 1	0.043	0.206	-0.002	0.222	-0.314	1.587	-0.458	1.788
BTL 3	0.073	0.360	-0.018	0.210	-0.409	1.605	-0.385	1.780
1866 - 1997								
BTL 1	0.052	0.206	-0.003	0.221	-0.323	1.588	-0.457	1.787
BTL 3	0.100	0.365	0.004	0.233	-0.379	1.645	-0.431	1.793
1750 - 1997								
BTL 1	0.071	0.200	-0.031	0.244	-0.345	1.590	-0.432	1.786
BTL 3	-0.114	0.367	-0.153	0.345	-0.260	1.650	-0.476	1.801
1914 - 1993 (sans VLBI)								
BTL 1	0.043	0.206	-0.001	0.224	-0.315	1.589	-0.457	1.788

TAB. 9.1: *Jupiter: Résultats des prédictions issues des différentes solutions ajustées. Sont ici présentées les valeurs moyennes et les écarts types des résidus obtenus par comparaison entre les positions des deux échantillons-test, CAMC et Oxford, et celles déduites de DE403, DE405, VSOP87 et les solutions ajustées. Ces dernières diffèrent par les périodes observationnelles des ajustements (1914-1997, 1866-1997, 1750-1997 et 1914-1993) et les solutions du barycentre Terre-Lune utilisées (BTL 1 pour radar+VLBI ou BTL 3 pour radar+VLBI+Optiques Modernes + Optiques Anciennes)*

SATURNE (“)	CAMC (1986-1995)				Oxford (1774-1799)			
	$(O - C)_\alpha$	σ_α	$(O - C)_\delta$	σ_δ	$(O - C)_\alpha$	σ_α	$(O - C)_\delta$	σ_δ
DE405	0.013	0.217	0.034	0.200	-0.884	1.826	-0.360	1.966
VSOP87	0.013	0.217	0.034	0.199	-0.878	1.825	-0.409	1.963
1914 - 1982								
BTL 1	0.016	0.220	0.020	0.205	0.850	1.822	-0.411	1.963
BTL 4	0.016	0.220	0.020	0.205	0.850	1.822	-0.411	1.963
1914 - 1982+ST								
BTL 1	0.034	0.220	0.024	0.207	0.887	1.828	-0.409	1.960
1866 - 1982								
BTL 1	-0.004	0.218	0.048	0.200	0.875	1.822	-0.411	1.962
1840 - 1982 + ST								
BTL 1	0.010	0.220	0.049	0.205	0.879	1.825	-0.409	1.961
1840 - 1982 +(ST- USNO 18)								
BTL 1	0.017	0.220	0.041	0.205	0.849	1.825	-0.408	1.962
1840 - 1982 (-ST - USNO 18)								
BTL 1	0.011	0.220	0.028	0.205	0.832	1.824	-0.410	1.962

TAB. 9.2: Saturne: Résultats des prédictions issues des différentes solutions ajustées. Sont ici présentées les valeurs moyennes et les écarts types des résidus obtenus par comparaison entre les positions des deux échantillons-test, CAMC et Oxford, et celles déduites de DE403, DE405, VSOP87 et les solutions ajustées. Ces dernières diffèrent par les périodes observationnelles des ajustements (1914-1982, 1866-1982, 1840-1982, 1840-1982 + Strugnell-Taylor, 1840-1982 - USNO 18 + Strugnell-Taylor) et la solutions radar+VLBI du barycentre Terre-Lune (BTL1) et radar+Optiques Modernes (BTL4)

JUPITER - OXFORD

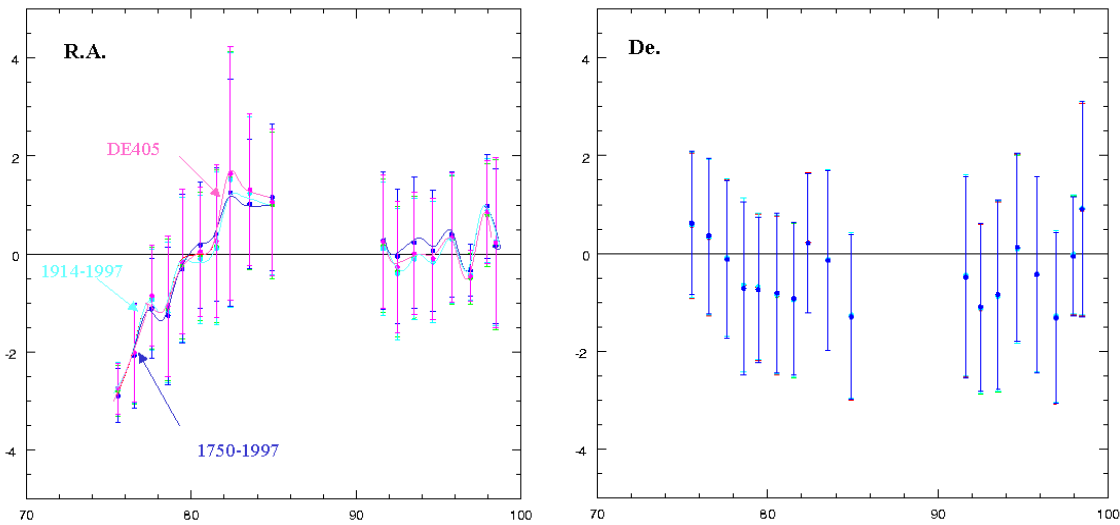


FIG. 9.18: *Jupiter: Résidus par opposition obtenus par comparaison entre positions observées à Oxford et les positions déduites de diverses solutions dynamiques issues de nos ajustements, ainsi que de DE405, DE403 et VSOP87. L'unité portée en ordonnée est la seconde de degré, celle portée en abscisse correspond aux dates grégoriennes d'observation - 1700.*

dans celui de l'ICRS par utilisation de la solution radar+VLBI du barycentre Terre-Lune, soit d'un effet induit non pas par les quantités calculées mais par celles observées et donc par le processus de réduction des données de La Palma.

Toujours dans le cadre des comparaisons entre positions estimées à partir des solutions ajustées et observations CAMC exprimées dans l'ICRS, nous notons que l'apport dans l'ajustement des observations déduites de la base de Strugnell-Taylor et de celles de Bordeaux, réalisées entre 1980 et 1993, dégrade la solution en comparaison de celle obtenue avec l'échantillon 1914-1982. Une analyse en ondelettes des résidus *après ajustement* nous permettra de mettre en lumière la cause probable de ce décalage. D'autre part, on constate que les observations réalisées entre 1866 et 1900 à l'U.S. Naval Observatory semblent induire un effet systématique en déclinaison et en ascension droite, puisque leur suppression dans l'échantillon d'ajustement entraîne une amélioration de plus de 17 % dans les résidus en déclinaison. Pour les observations anciennes réalisées à Oxford entre 1774 et 1799, on retrouve, comme dans le cas de Jupiter, une relative dégradation de nos résidus issus de nos solutions par rapport à ceux déduits de DE405. Ce qui pourrait être l'impact des différences de masses entre DE405 et VSOP87.

9.4 Discussion

Dans le cas de Jupiter, dès la publication de DE403 (Standish, 1995), il a été remarqué que le plan de cette nouvelle orbite était un compromis entre deux types d'observations incompatibles en terme de résidus: les observations optiques, d'une part, pour lesquelles un décalage positif en ascension droite et en déclinaison était notable, et les observations VLBI déduites du suivi de la sonde Voyager et celles obtenues par le biais du VLA, d'autre part, qui par comparaison à la nouvelle solution induisent des résidus négatifs importants notamment en déclinaison (Standish,

1995). Les observations VLBI déduites du suivi de Galileo, ajoutées dans DE405, ne présentent pas de tels effets (Standish, 1998). Or, nos ajustements ne font pas appel aux données VLA et VLBI de Voyager. La dégradation en déclinaison des positions de Jupiter issues de DE405 et surtout de DE403 pourrait donc être essentiellement induite par ces observations.

Par ailleurs, dans le cas des solutions du mouvement de Saturne, des biais de nature diverse semblent affecter des solutions issues, d'une part, de nos ajustements et, d'autre part, des intégrations numériques DE403 et DE405. Plus précisément, comme nous l'avons vu dans le tableau 9.2, et comme nous l'avons déjà signalé, les données issues de la base de Strugnell-Taylor complétée par des observations réalisées à Bordeaux entre 1989 et 1993 semblent induire un effet systématique en ascension droite et en déclinaison assez net, d'environ 10 mas. De même, les observations réalisées à l'U.S. Naval Observatory entre 1866 et 1900 induisent un décalage de +35 mas en δ et +15 mas en α . De plus, il faut garder à l'esprit que, contrairement à Jupiter, l'échantillon observationnel de la solution du mouvement de Saturne ne compte aucune observation susceptible de fournir une position de Saturne dans le repère de référence cinématique de l'ICRS. Autrement dit, nous n'avons pas de point de raccordement entre le système de référence de l'ICRS, qui peut être assimilé à celui du système planétaire intérieur et donc du barycentre Terre-Lune, et celui dans lequel sont exprimées les observations optiques de Saturne. En effet, tout point de raccordement direct, obtenu par la technique VLBI ou par celle de la réduction photographique ou CCD utilisant des étoiles issues des catalogues Hipparcos ou Tycho, nous permet de réaliser un lien entre ces deux repères. Or dans le cas de Saturne, nous n'avons pas à notre disposition de tel point de raccordement. Nous sommes donc en présence de deux repères dynamiques: celui du système planétaire intérieur et de Jupiter, proche du repère cinématique de l'ICRS, et de celui de Saturne proche de l'ICRF aux erreurs aléatoires des catalogues stellaires optiques près puisque toutes les observations optiques, y compris celles de Saturne et de ses satellites, ont été rapportées via l'algorithme de Feissel et Mignard (Feissel et Mignard, 1998) à l'ICRF aux erreurs du FK5 près.

Si nous devons résumer les deux points précédents, nous pourrions dire que la question est ici d'interpréter les résidus obtenus par comparaison entre les positions observées à La Palma et les positions déduites de nos divers ajustements. Deux sources d'erreurs peuvent intervenir: des erreurs *observationnelles* liées directement à la qualité des observations CAMC et des erreurs *théoriques*, c'est-à-dire induites par les positions calculées à partir de nos solutions ajustées.

En ce qui concerne ces dernières, une comparaison réalisée par Morrison (1998) entre des positions de Jupiter déduites des observations des satellites galiléens réalisées lors de la mission du satellite astrométrique Hipparcos et celles calculées à partir de DE405 permet d'estimer la précision externe de la solution numérique DE405 dans l'ICRF, le repère du système de référence ICRS. Des décalages de +20 mas en α et -20 mas en δ entre positions observées dans l'ICRS (c'est-à-dire exprimées directement dans la matérialisation optique de l'ICRS) et positions déduites de DE405 ont été détectés. Ils sont bien supérieurs à la précision interne des observations d'Hipparcos – environ 3 mas pour Europe (Morrison, 1997) – et peuvent s'expliquer soit par un mauvais raccordement entre le système de référence dynamique de la solution numérique à l'ICRS soit par des effets systématiques présents dans les observations optiques utilisées lors de l'ajustement de la solution du mouvement de Jupiter aux observations. Or les résidus obtenus par comparaison entre les positions déduites des observations VLBI de Galileo et DE405 (ou nos solutions ajustées) ne présentent pas d'incompatibilités majeures avec le reste des données optiques. Ce qui montre que le raccordement réalisé par ajustement aux observations radar et VLBI des planètes intérieures entre le repère dynamique des solutions numériques ou de nos

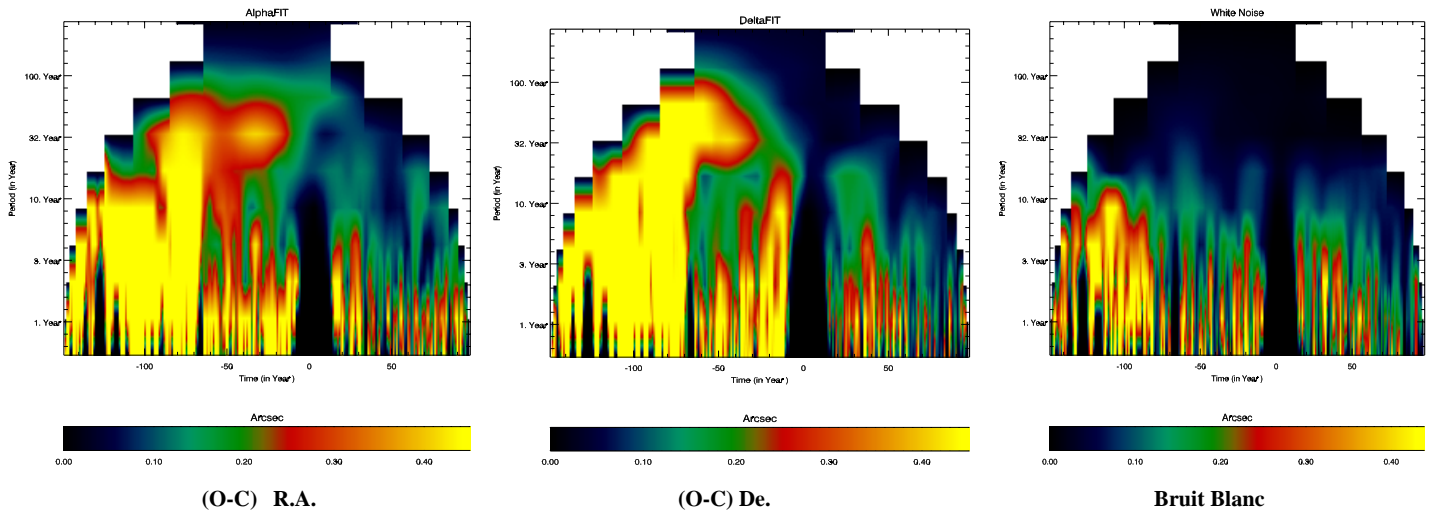


FIG. 9.19: *Jupiter: Analyse en ondelettes des résidus en ascension droite (carte de gauche) et déclinaison (carte du centre) après ajustement sur l'échantillon d'observations réalisées entre 1750 et 1997. La carte de droite est une simulation d'un bruit blanc dans la grille observationnelle précédente. L'axe des x correspond aux dates d'observations en jours grégoriens -1900.0. L'axe des y indique les périodes en années détectées par l'analyse. Les couleurs des cartes correspondent aux amplitudes (en secondes de degré) des signaux détectés.*

solutions analytiques ajustées et l'ICRS est valable. Donc, on peut estimer qu'une partie ou la totalité des décalages révélés par les observations Hipparcos ne peut être imputée à la qualité du raccordement entre les systèmes de référence dynamiques et l'ICRS.

D'autre part, au cours de cette même étude (Morrison, 1998), des comparaisons entre des positions de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune déduites d'observations réalisées à La Palma et celles déduites de DE405 ont été effectuées. Celles-ci révèlent la présence d'effets systématiques dans ces observations, équivalents à des effets de zones et induits par une modélisation insuffisante des distorsions du champ dans le processus de réduction. Ces effets atteindraient 50 mas dans certaines zones de l'écliptique.

Autrement dit, bien que les premiers résultats des comparaisons entre ces observations et nos solutions du mouvement de Jupiter et Saturne semblent indiquer une amélioration dans l'estimation des positions calculées, il est important d'identifier l'origine des décalages encore présents entre ces dernières et les positions observées. Pour cela, nous allons utiliser une technique originale d'analyse de données: l'analyse en ondelettes.

9.5 Analyse en ondelettes des résidus

9.5.1 Contexte

L'analyse en ondelettes est une technique mathématique de décomposition d'un signal développée dans les années 70 et qui permet d'apporter à l'analyse spectrale classique de nombreux éléments d'informations supplémentaires. En effet, là où l'analyse spectrale nous informe sur la nature et la forme des fréquences détectées, l'analyse en ondelettes permet de tracer une cartographie détaillée de la distribution spatiale ou temporelle de ces mêmes fréquences. Il est alors

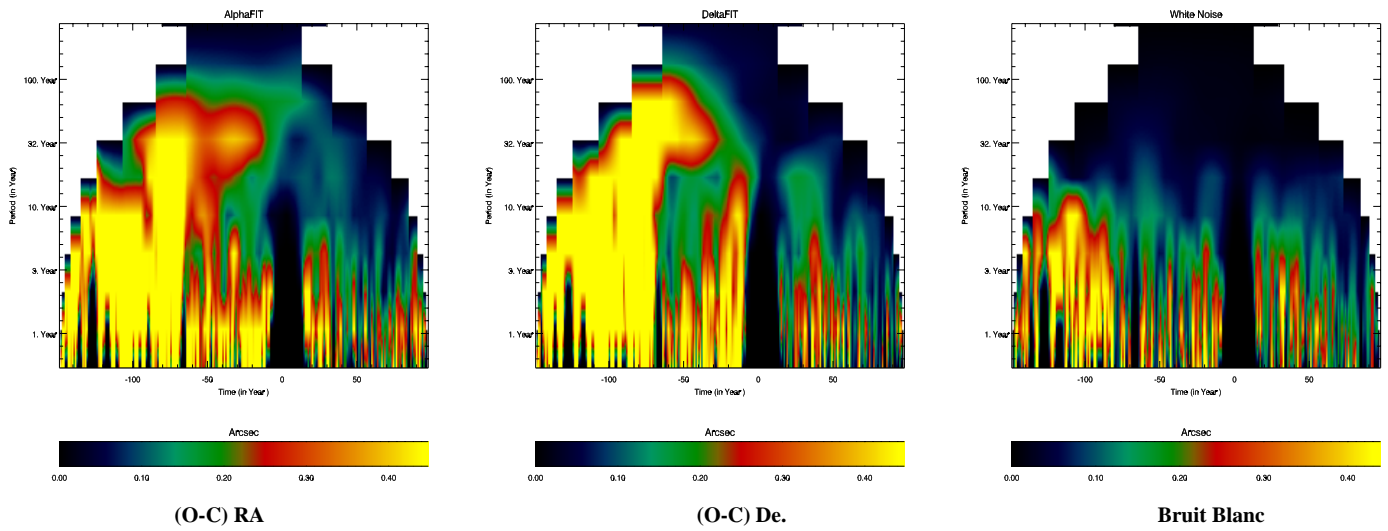


FIG. 9.20: *Jupiter: Analyse en ondelettes des résidus en ascension droite (carte de gauche) et déclinaison (carte du centre) déduits d'une comparaison entre positions observées entre 1750 et 1994 et positions calculées à partir de DE405. La carte de droite est une simulation d'un bruit blanc dans la grille observationnelle précédente.*

possible dans le cas d'un traitement de signal émis par une source cohérente de reconstituer la forme et l'état physique de cette source à l'instant de l'émission. Cette technique a donc été principalement étudiée et développée dans le cadre de l'imagerie radio stellaire, galactique et solaire. L'apport d'un tel outil dans l'analyse des séries temporelles en général, et des résidus issus des comparaisons entre positions observées et positions déduites de solutions dynamiques, est évident: il devient alors possible d'isoler la ou les période(s) observationnelle(s) induisant les fréquences les plus importantes et ainsi faire une analyse plus fine des effets physiques mis en jeu. L'application des ondelettes à des séries temporelles a d'abord été limitée à des séries constituées par des données également réparties dans le temps, limitant ainsi énormément les champs d'analyses possibles. Grâce à un algorithme développé par Delouis (Delouis, 1998) pour les analyses multi-échelles d'images solaires en longueur d'ondes radio, et adapté aux séries temporelles non-également réparties, il nous a été possible de tracer des cartes de distributions temporelles des fréquences détectées dans le signal. Le signal est ici assimilé à l'ensemble des résidus issus des comparaisons entre les positions observées et les positions déduites des théories dynamiques pour une planète donnée. On se référera à Fienga et Delouis (1999) pour obtenir de plus amples explications techniques sur la mise en place de cet algorithme.

9.5.2 Détection

Nous avons donc appliqué la méthode d'analyse en ondelettes à l'ensemble des résidus *après ajustement* de Jupiter et de Saturne couvrant une période de plus de deux siècles dans le cas de Jupiter, cette large couverture temporelle nous permettant la détection d'effets à longue période ou séculaire. Comme on peut le voir sur la figure 9.19, dans le cadre de l'analyse des résidus joviens, une forte fréquence à 12 ans est immédiatement décelable aussi bien en ascension droite (carte de gauche), qu'en déclinaison (carte centrale) ainsi qu'une fréquence comprise entre 32 et 100 ans. L'analyse des résidus de positions de Saturne indique là encore la présence de deux fréquences, l'une proche de l'inverse de la période sidérale (30 ans) et l'autre inverse d'une longue période proche de 100 ans. Ces fréquences sont induites par l'ensemble des observations

de Jupiter réalisées avant 1940 et par la totalité des observations de Saturne aussi bien modernes qu'anciennes. La carte de droite représente ici ce qu'engendrerait un signal aléatoire au travers de la grille observationnelle. Autrement dit, cette carte permet de localiser les fréquences engendrées du fait de la distribution non régulière des données. Il est important de comparer la détection des fréquences à 12 et 100 ans au signal produit par la distribution non-également réparties des observations. En effet, comme nous l'avons vu au cours de notre présentation des méthodes d'analyse spectrale, la distribution des données peut engendrer des pics de fréquences importants sans réalité physique. Comme on peut le voir sur la carte de droite, une telle analyse ne révèle pas de fréquences équivalentes à celles détectées au cours de l'analyse des résidus. En première conclusion, on peut donc déduire qu'il existe des effets systématiques importants dans les résidus *après ajustement* de Jupiter, induisant des signaux de période 12 ans - période sidérale de Jupiter - et de plus longue période comprise entre 32 et 100 ans. Notons que cette dernière est plus particulièrement marquée pour les données anciennes. D'autres fréquences (6 ans) sont plus difficilement identifiables et sont soit induites par des effets de fenêtrage soit d'*aliasing* (cf. paragraphe 3.4.1 du chapitre 3). Une déconvolution du signal pour les fréquences de 12 et 100 ans nous permettra de confirmer que ces deux fréquences sont les deux principales informations détectables sur l'ensemble des données.

Comme nous l'avons dit précédemment, dans le cas de Saturne, on retrouve le même schéma de détection avec une fréquence proche de celle équivalente à la période sidérale de la planète et une fréquence beaucoup plus longue correspondant à une période d'environ 100 ans.

9.5.3 Interprétation

Nous allons ici tenter de cerner les causes de l'apparition des fréquences 12 et 100 ans dans les résidus de Jupiter et de 30 et 100 ans dans les résidus de Saturne. Plusieurs pistes sont ouvertes.

Comparaisons à d'autres théories

En premier lieu, nous avons cherché à savoir si ces fréquences pouvaient être induites par la partie théorique des résidus soit par le biais d'un mauvais ajustement des solutions analytiques aux observations, soit par le fait des solutions dynamiques elles-mêmes. Pour cela, nous avons comparé l'ensemble des positions observées aux positions déduites de l'intégration numérique DE405 et celles calculées à partir de la solution analytique VSOP87. Dans les deux cas (on verra par exemple pour Jupiter les cartes de la figure 9.20 des résidus construits par comparaison à DE405), on retrouve clairement les mêmes fréquences. D'autre part, nous avons appliqué le même processus à des résidus dont la partie théorique était déduite de solutions du mouvement de Jupiter et de Saturne ajustées à partir des différentes solutions de l'orbite du barycentre Terre-Lune. Là encore, on détecte toujours les mêmes fréquences avec un accroissement de l'amplitude à 100 ans pour les solutions fondées sur un ajustement à longue période (1750-1997) de la solution du mouvement du barycentre Terre-Lune. Cela s'explique par le fait que cette dernière solution est une solution extrêmement bruitée et donc induit un bruit supplémentaire dans le spectre des résidus des positions de Jupiter amplifiant l'amplitude des fréquences détectées précédemment. Nous sommes donc face à des effets induits par les méthodes d'observations ou de réduction des données elles-mêmes et non par l'ajustement ou les théories utilisées. Nous nous sommes donc orientés dans la direction d'effets observationnels pouvant justifier, des fréquences de 12 et 100 ans, notamment les effets de zone des catalogues stellaires et de réfraction.

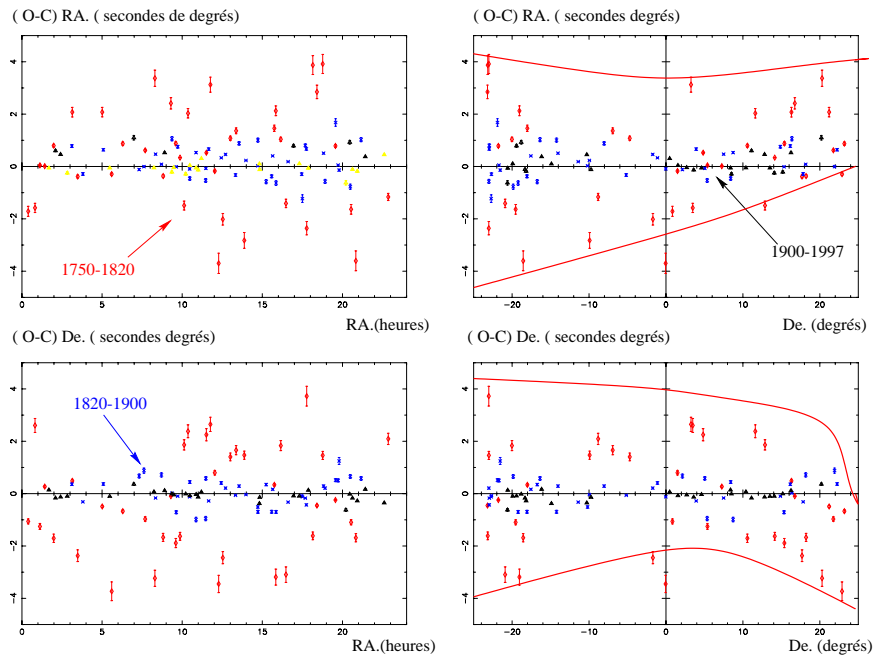


FIG. 9.21: *Jupiter: Résidus avant ajustement tracés en fonction des positions de Jupiter en ascension droite et déclinaison. Ces résidus sont calculées par comparaison entre les positions observées et utilisées dans l'ajustement et les positions déduites de VSOP87. Les différents types de points indique les 3 périodes principales d'observations de ces données: 1750-1820, 1820-1900 et 1900-1997*

Effets de zone et réfraction

Il est clair que les erreurs régionales et zonales inhérentes aux catalogues stellaires construits à partir d'observations au sol et issus de compilation de séries d'observations induisent des effets périodiques sur les positions de l'objet observé d'une période égale à la période sidérale de ce dernier. En effet, à chaque fois que l'objet se retrouve dans une même zone du ciel - par exemple tous les douze ans dans le cas de Jupiter - les mêmes erreurs systématiques sur les positions des étoiles de référence vont entacher les estimations de la position de l'objet. Prenons le cas de Jupiter. Sur les graphiques de la figure 9.21 sont tracés les résidus *après ajustement* de Jupiter en fonction des positions en ascension droite et déclinaison, avec indication des trois grandes périodes d'observations, 1750-1820, 1820-1900 et après 1900. Comme on peut le voir, les observations réalisées dans les zones à forte déclinaison, c'est-à-dire éloignées de l'équateur, sont celles pour lesquelles les écarts en ascension droite et en déclinaison entre positions observées et positions déduites de la solution ajustée semblent être les plus importants. Cet effet est d'autant plus marqué pour les observations réalisées entre 1750 et 1820. Cette analyse renforce l'hypothèse d'effets systématiques récurrents pour des zones de ciel données. D'autre part comme nous l'avons vu sur les graphes des résidus obtenus après ajustement et calculés par opposition, on peut répartir ces quantités en trois périodes nettement marquées. Pour Jupiter rappelons que ces périodes sont: avant 1820, 1820-1900 et après 1900 et pour Saturne, elles sont au nombre de 2 périodes: avant 1940 et après 1940.

D'autre part, remarquons que les modèles de réfraction atmosphérique ont beaucoup évolué depuis plus de deux siècles. Ainsi, les corrections apportées par les observateurs aux distances zénithales des objets observés ont-elles connu d'importantes modifications. Ces dernières sont induites aussi bien par des améliorations dans la modélisation des couches atmosphériques que par des évolutions instrumentales ou environnementales. On citera en exemple le cas des observations de jour de Mercure et Vénus réalisées à l'U.S. Naval Observatory pendant la période d'entre-deux-guerres et qui présentèrent de forts biais en déclinaison provenant des différences de température entre l'extérieur et l'intérieur du bâtiment abritant l'instrument méridien.

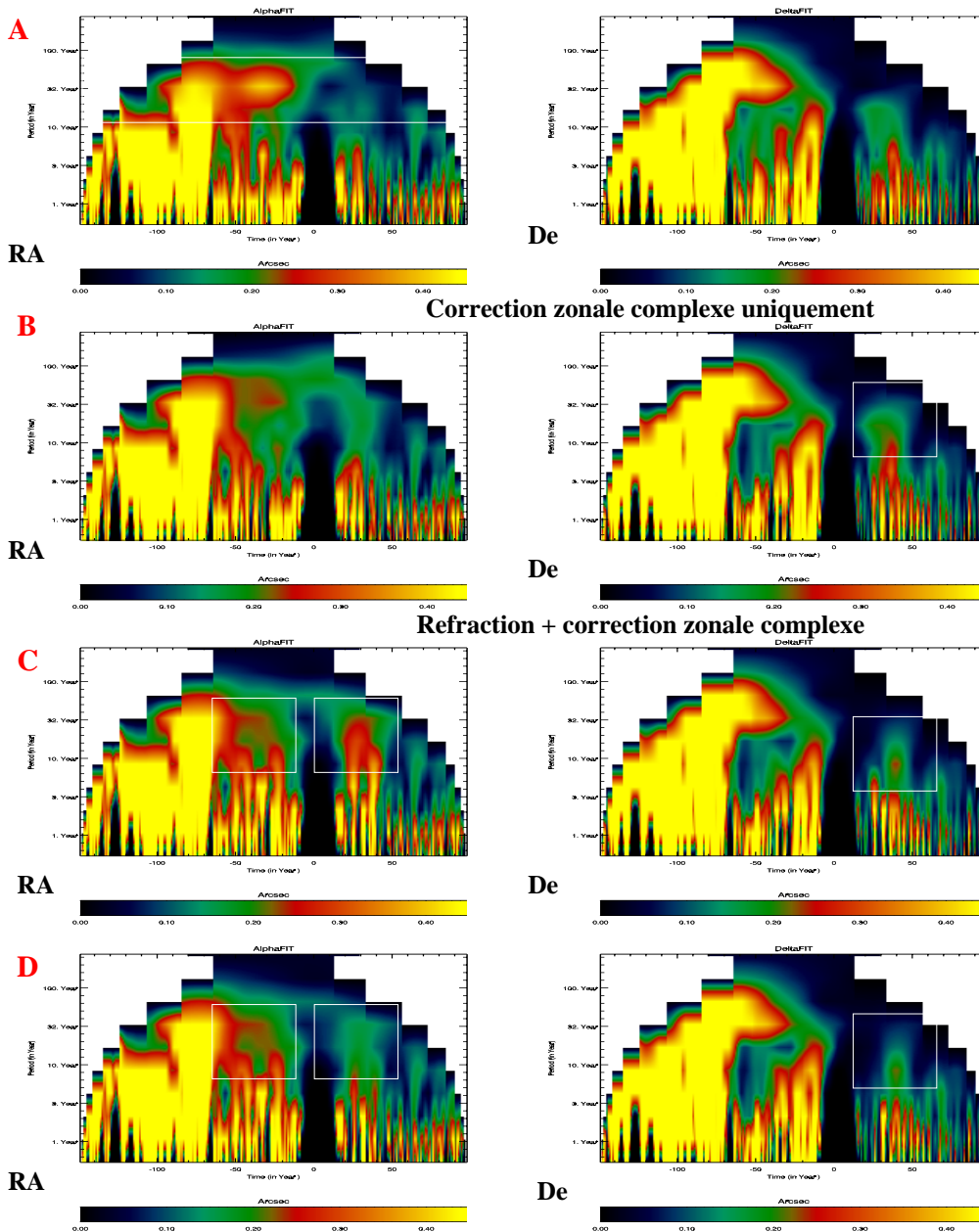
9.5.4 Déconvolution

Modèles

Ainsi, avant ajustement des éléments osculateurs de Jupiter et de Saturne, nous avons testé différentes écritures possibles dans le but d'identifier les causes probables de l'apparition d'un signal de fréquence 12 et 100 ans dans les résidus de Jupiter et de 30 et 100 ans pour Saturne. En suivant les remarques qui ont été faites précédemment, nous avons décomposé l'échantillon constitué des résidus avant ajustement en trois grands groupes: le groupe ancien constitué des observations réalisées avant 1820, le groupe intermédiaire des observations réalisées entre 1820 et 1900 et le groupe des observations réalisées entre 1910 et 1940. Nous avons limité la période contemporaine à cette série d'observations car il est clairement apparu lors des premières analyses qu'après 1940, aucun signal majeur n'est détectable et donc aucune déconvolution n'est nécessaire entre 1940 et 1998 et cela aussi bien pour Jupiter que pour Saturne. Sur ces trois groupes d'observations, nous avons ajusté différents types de corrections correspondant chacune aux apports des corrections de réfraction d'une part et des effets systématiques des catalogues stellaires d'autre part. Ces corrections sont réalisées successivement et ne sont donc pas indépendantes. Pour chaque correction, nous avons testé différents modèles. Nous ne présentons ici que ceux induisant les meilleurs résultats.

1. La réfraction

Solution avant traitement



**Refraction + correction zonale complexe pour la période 1800
+ correction zonale simple pour la période 1900**

FIG. 9.22: *Jupiter*: Analyse en ondelettes des résidus en ascension droite (carte de gauche) et déclinaison (carte de droite) après ajustement des conditions initiales de la solution du mouvement de *Jupiter* à ces mêmes observations corrigées des effets mentionnés sur le graphe: corrections de zone “complexes”, corrections de réfraction, corrections de zone “simples” (voir texte). La première analyse notée “avant traitement” correspond à l’analyse effectuée sur les résidus après ajustement de la solution du mouvement et non corrigés des effets observationnels précédents. L’axe des x correspond aux dates d’observations en jours grégoriens -1900.0 . L’axe des y indique les périodes en années détectées par l’analyse.

Cette correction est réalisée en distance zénithale, notée z dans la suite. Nous avons utilisé le modèle classique de Laplace :

$$(O - C)_{DZ} = A \tan z + B \tan^3 z$$

dans lequel nous avons ajusté les paramètres A et B . L'idée est ici d'absorber dans les valeurs ajustées A et B les erreurs plus ou moins systématiques des modèles de réfraction ou induites par l'évolution de ces modèles et leurs utilisations successives dans la réduction de ces données. Cette correction n'est appliquée que pour la période 1910-1940, car pour les périodes antérieures, la qualité des observations n'est pas suffisante pour ajuster un modèle de façon cohérente. Les valeurs des paramètres ajustés seront données en annexe (annexe D).

Si l'on compare les cartes B et C de la figure 9.22, différant chacune de par la correction en réfraction appliquée en C et non appliquée en B, on note que celle-ci permet d'absorber en grande partie l'effet détecté en déclinaison pour la période 1910-1940 et correspondant à la période sidérale de Jupiter. Autrement dit, il apparaîtrait que ces données subissent une mauvaise correction de réfraction induite soit par des erreurs dans les modèles utilisés lors de la réduction de ces données soit par des mauvaises estimations des conditions météorologiques.

2. Effets de zone des catalogues stellaires

Ces corrections s'appliquent aux groupes d'observations décrits précédemment et correspondant aux observations réalisées à plus de 15 degrés de l'équateur. Cette limite en déclinaison est issue de l'analyse de la répartition des résidus en fonction des zones d'observations (cf graphes de la figure 9.21). Suite à de nombreux tests, nous avons retenu deux types de modèles. Un modèle "complexe" en séries de Fourier de la forme:

$$\begin{cases} (O - C)_\alpha = \sum_{i=0}^k C_{i+1} \sin i\delta \\ (O - C)_\delta = D_1 + \sum_{i=1}^k D_{i+1} \cos i\delta \end{cases}$$

où les paramètres C_i et D_i , $i=1\dots k$, sont des paramètres que nous avons ajusté aux observations. Ajuster ce modèle permet de réaliser une correction assez avancée des effets systématiques en ascension droite et déclinaison. Sur les graphes C de la figure 9.22, on note qu'une correction en série de Fourier des effets de zone permet de faire disparaître du spectre une zone très importante du signal correspondant à la période comprise entre 32 et 100 ans. Nous pouvons donc affirmer que les observations comprises entre 1820 et 1900, bien que traitées *a priori* des effets systématiques des catalogues, en restent cependant grandement affectées et qu'il est possible grâce à l'analyse en ondelettes de corriger ces effets par des modèles empiriques. Cependant, on peut noter une apparition de signal pour la période 1910-1940 aussi bien en ascension droite qu'en déclinaison. En effet, dans les cas où une correction de zone ou régionale a déjà été appliquée, ce type de modèle en série de Fourier induit trop d'informations sur les zones préalablement corrigées et ainsi engendre un surplus de signal dans l'analyse des périodes concernées. C'est l'apparition de ce biais, notamment en α , pour la période 1910-1940 que l'on constate sur les graphes C de la figure 9.22. Pour la période 1910-1940, nous avons appliqué un modèle "simple", polynomial, de

type:

$$\begin{cases} (O - C)_\alpha = \sum_{i=0}^k E_{i+1} \delta^i \\ (O - C)_\delta = \sum_{i=1}^k F_{i+1} \delta^i \end{cases}$$

où nous avons ajusté les paramètres E_i et F_i , $i=1\dots k$. Les résultats de l'analyse des résidus *après ajustement* sont représentés sur les graphes D de la figure 9.22. Il y apparaît clairement que l'effet important induit par le modèle en séries de Fourier disparaît aussi bien en ascension droite qu'en déclinaison. Donc c'est le modèle polynômial qui sera conservé pour les périodes regroupant des observations préalablement traitées permettant ainsi un complément de corrections zonales aux corrections déjà appliquées.

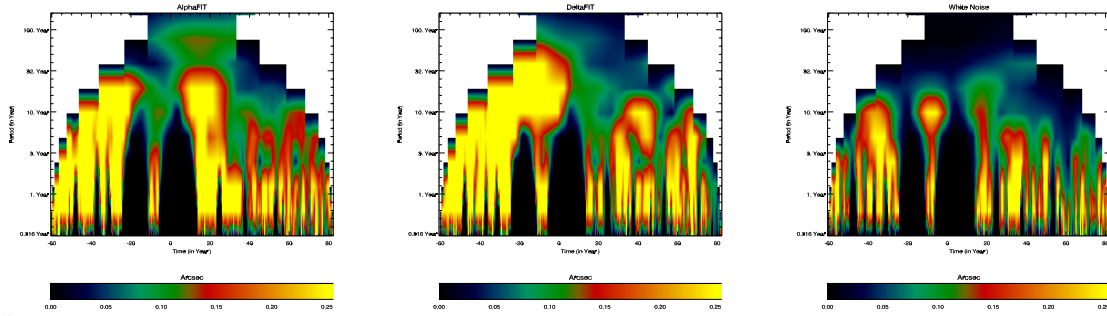
Notons, qu'en conséquence des effets systématiques détectés dans l'échantillon observationnel des positions de Saturne déduites de la base satellitaire de Strugnell-Taylor (cf tableau 9.2), nous avons ajouté une période supplémentaire d'ajustement de ces modèles de corrections de zone et de réfraction correspondant à la période 1960-1990, c'est-à-dire à la période approximativement couverte par ces données.

Résultats

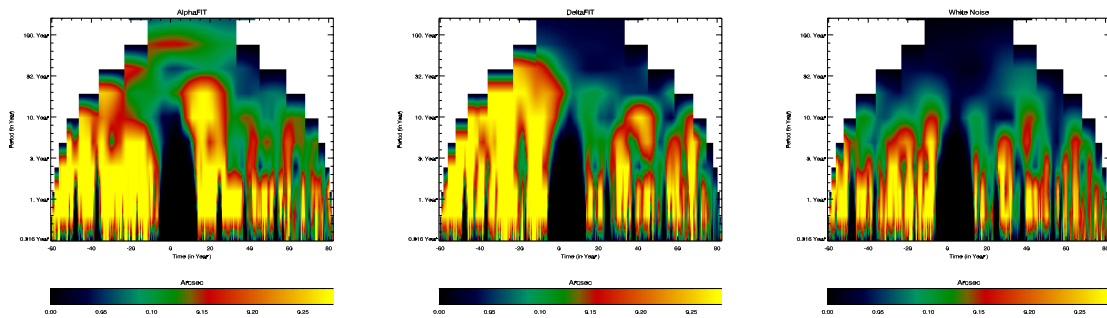
Dans le tableau 9.3, sont réunies les statistiques des résidus sur les positions de Jupiter issus des comparaisons entre quantités observées et les prédictions réalisées à partir des solutions ajustées aux échantillons traités avec les modèles de réfraction et de les modèles polynômiaux de zones pour 1910-1940, en série de Fourier pour 1820-1900 (solution D) et en séries de Fourier pour l'ensemble des périodes (solution C). Le tableau 9.4 en donne les équivalents pour Saturne, avec, dans le cas des échantillons comprenant des observations issues de la base de Strugnell-Taylor, des corrections de zone en séries de Fourier et de réfraction calculées sur la période correspondante, à savoir 1960-1990.

Nous voyons que ces déconvolutions ont permis d'améliorer très nettement les résidus pour la série d'observations réalisées au Carlsberg Meridien Circle entre 1986 et 1993 pour Jupiter et dans une moindre mesure Saturne. En effet, dans le tableau 9.3 c'est-à-dire pour Jupiter et le tableau 9.4 pour Saturne, il apparaît clairement que les corrections de zone et de réfraction appliquées et décrites permettent d'absorber une partie significative des effets systématiques présents dans les résidus. Plus précisément, dans le cas de Jupiter, les résidus calculés permettent de mettre en lumière une amélioration importante de la qualité de la solution de son mouvement notamment en ascension droite. En effet, que nous appliquions une correction de réfraction et de Fourier sur un échantillon d'observations à courte période (1914-1997) ou une correction complète sur un échantillon à plus longue période (1750-1997), nous notons une amélioration très sensible des résidus en α et plus atténuée en δ . L'amélioration est de 20 % sur une courte période par rapport à la même solution sans traitement par ondelettes et atteint 64 % pour une correction de zone et de réfraction réalisée sur l'échantillon 1750-1997, proportions calculées par rapport à la solution équivalent sans analyse en ondelettes. En déclinaison, notons la diminution de 74 % par rapport à une solution sans traitement en ondelettes des résidus déduits de la comparaison entre positions observées et positions issues de la solution ajustée sur l'échantillon 1750-1997 corrigé par ondelettes. La nouvelle valeur obtenue est alors du même ordre que celles découlant des comparaisons entre positions observées et positions déduites des autres solutions ajustées. Aucune amélioration notable n'est donc enregistrée en δ par rapport aux autres solutions issues de nos ajustements. Pour Saturne, l'apport des corrections par ondelettes est aussi indéniable

SATURNE: 1840-1982 (-ST-USNO)



SATURNE: 1840-1982



SATURNE: 1840-1982+ST

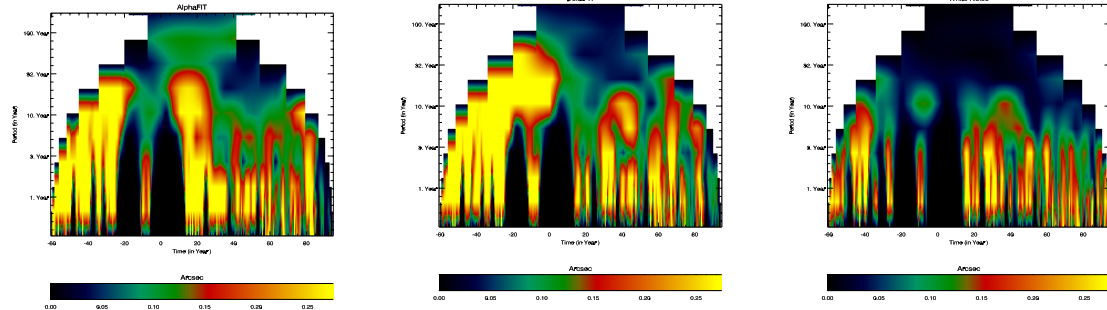


FIG. 9.23: *Saturne: Analyse en ondelettes des résidus en ascension droite (carte de gauche), déclinaison (carte centrale) après ajustement des conditions initiales de la solution du mouvement de Saturne aux échantillons observationnels non corrigés mentionnés sur la figure: 1840-1982, 1840-1982 (-USNO), 1840-1982 + ST. L'axe des x correspond aux dates d'observations en jours grégoriens -1900.0. L'axe des y indique les périodes en années détectées par l'analyse.*

JUPITER	CAMC (1986-1995)				Oxford (1774-1799)			
	$(O - C)_\alpha$ (")	σ_α	$(O - C)_\delta$ (")	σ_δ	$(O - C)_\alpha$ (")	σ_α	$(O - C)_\delta$ (")	σ_δ
DE403	0.061	0.207	-0.014	0.217	-0.279	1.595	-0.440	1.782
VSOP87	0.081	0.207	-0.012	0.241	-0.351	1.589	-0.441	1.785
DE405	0.062	0.207	-0.013	0.220	-0.280	1.595	-0.438	1.784
1914-1997								
BTL 1	0.043	0.206	-0.002	0.222	-0.314	1.587	-0.458	1.788
1914-1997: Solution D								
BTL 1	0.034	0.206	-0.003	0.222	-0.305	1.587	-0.459	1.788
1750 - 1997								
BTL 1	0.071	0.200	-0.031	0.244	-0.345	1.590	-0.432	1.786
1750-1997: Solution D								
BTL 1	0.026	0.202	-0.008	0.217	-0.296	1.591	-0.457	1.784

TAB. 9.3: *Jupiter: Résultats des prédictions issues des différentes solutions ajustées sur des échantillons d'observations corrigées des effets de la réfraction et de zones par une formulation "mixte" (solution D) . Les solutions ajustées présentées ici sont fondées sur une solution radar+VLBI du mouvement du barycentre Terre-Lune.*

SATURNE (“)	CAMC (1986-1995)				Oxford (1774-1799)			
	$(O - C)_\alpha$	σ_α	$(O - C)_\delta$	σ_δ	$(O - C)_\alpha$	σ_α	$(O - C)_\delta$	σ_δ
DE405	0.013	0.217	0.034	0.200	-0.884	1.826	-0.360	1.966
VSOP87	0.013	0.217	0.034	0.199	-0.878	1.825	-0.409	1.963
1840 - 1982 + ST (- USNO)								
Sans correction de zone	0.014	0.217	0.039	0.200	0.887	1.825	-0.409	1.962
Avec correction de zone + réfraction	0.010	0.217	0.004	0.200	0.875	1.823	-0.413	1.963
1840 -1982								
sans correction	0.002	0.218	0.051	0.200	0.855	1.828	-0.411	1.962
Avec correction de zone + réfraction	0.004	0.217	0.039	0.200	0.870	1.826	-0.360	1.966
1840 - 1982 (-USNO -ST)								
sans correction	0.010	0.218	0.025	0.200	0.865	1.828	-0.407	1.962
Avec correction de zone	0.011	0.217	0.016	0.200	0.848	1.822	-0.360	1.966

TAB. 9.4: *Saturne: Résultats des prédictions issues des différentes solutions ajustées sur des échantillons d'observations corrigées des effets de zones par une formulation "simple" sur les échantillons couvrant la période 1840-1982 avec et sans les observations issus du catalogue de Strugnell-Taylor et celles réalisées à l'USNO entre 1866 et 1900. Les deux solutions ajustées présentées ici sont fondées sur une solution radar+VLBI du mouvement du barycentre Terre-Lune.*

puisqu'elles impliquent des améliorations des résidus en déclinaison comprises entre 20 et 90 % (selon les échantillons corrigés). Les résidus en ascension droite, semblent être, dans le cas de Saturne, moins sensibles à nos corrections. Globalement, il apparaît que les corrections en ondelettes nous permettent de corriger des effets systématiques présents dans les échantillons à courte et longue périodes utilisés dans les ajustements des solutions du mouvement de Jupiter et Saturne. En conséquence, nous éliminons des sources potentielles d'erreurs dans les estimations de positions de ces objets au cours du temps. Nous voyons sur l'exemple des observations de La Palma que ces sources d'incertitudes sont importantes et permettent de mettre en lumière d'autres sources possibles d'erreurs, de nature observationnelle ou théorique. Il est cependant clair que nos corrections bien que très efficaces dans certains cas (comme en α de Jupiter) ne permettent pas d'expliquer entièrement les fluctuations en déclinaison notées par Morrison et encore visibles sur le graphe 9.25, même si elles semblent atténuées par le biais de nos corrections.

Nous pouvons conclure en disant que les corrections en ondelettes que nous avons effectuées permettent d'expliquer une partie des résidus issus des comparaisons entre les positions observées à La Palma et les positions déduites de nos solutions ajustées d'une part, et des solutions numériques et analytiques classiques d'autre part, en particulier en ascension droite. Mais rappelons que, comme dans le cas des observations radar des planètes intérieures, nous sommes limités par la précision intrinsèque de VSOP87.

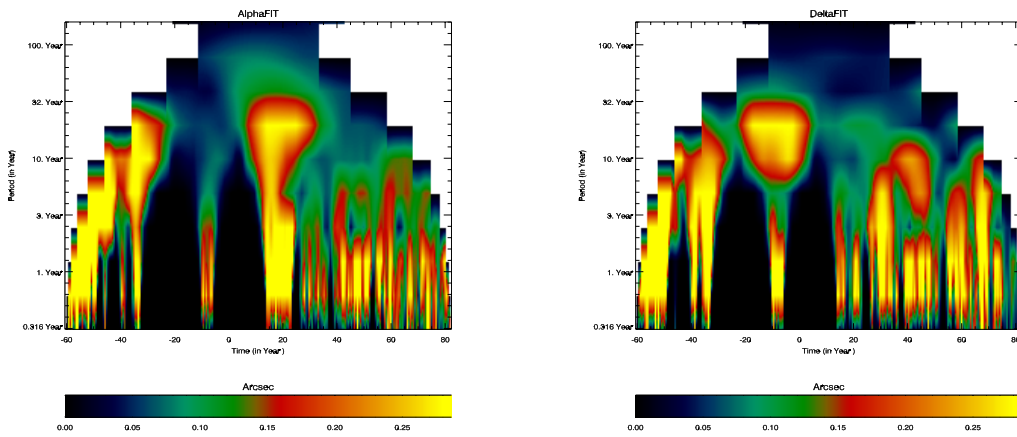
Le graphe 9.25 nous permet de souligner cette amélioration vis à vis des autres théories dynamiques utilisées, y compris celle issue de notre meilleur ajustement précédent cette étude. En ce qui concerne les résidus issus de la comparaison entre les positions observées à Oxford entre 1770 et 1800, aucune amélioration n'est clairement visible. La dérive séculaire reste présente et seul un ajustement d'une droite de la forme $(O - C)_\alpha = G_1.t + G_2$ permet d'absorber cette tendance. Celle-ci n'existe que pour les toutes premières observations de Hornsby entre 1775 et 1785 et disparaît ensuite. Ceci n'est pas étonnant car avant 1781, aucune correction d'horloge ne semblent être appliquée (Knox-Shaw, 1928). Or, il est clair que le type de dérive induit sur les ascensions droites observée par la dérive des horloges est au moins linéaire (formule de Bessel). Donc nous pouvons conclure que dans ce cas particulier, la dérive séculaire détectée dans les résidus est induite par une mauvaise réduction des observations et que l'ajustement d'une dérive séculaire des résidus permet de corriger cet effet. Cependant, si l'on étudie les résidus compris entre 1790 et 1800, on montre que la statistique en ascension droite est très satisfaisante, (0.039 ± 1.335) seconde de degré pour la solution D, contre (0.047 ± 1.333) seconde de degré pour la meilleure solution précédant l'analyse en ondelettes (ajustement sur les observations optiques modernes et VLBI). En déclinaison, un décalage d'environ -0.400 seconde de degré reste encore présent quelle que soit la solution.

9.5.5 Conclusion

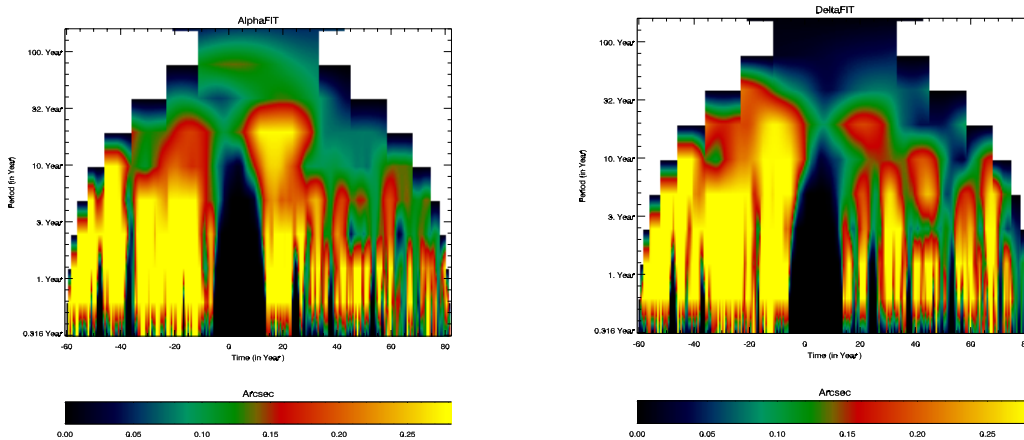
Nous avons donc effectué l'ajustement des théories analytiques du mouvement de Jupiter aux observations optiques et VLBI. Grâce à cet ajustement, nous avons amélioré la capacité d'extrapolation de la théorie d'un facteur deux en déclinaison pour des dates proches de l'intervalle d'ajustement. Pour les observations plus anciennes, il est plus difficile d'apprécier l'amélioration apportée par notre ajustement.

Par ailleurs, des analyses en ondelettes des résidus obtenus après ajustement, nous ont permis d'isoler des effets systématiques présents dans les observations utilisées dans l'ajustement des solutions dynamiques de Jupiter et de Saturne. Ces effets, après avoir été identifiés, effets

SATURNE: 1840-1982 (-ST-USNO) + Correction de Zone



SATURNE: 1840-1982 + Correction de Zone et de réfraction



SATURNE: 1840-1982+ST + Correction de de Zone et de réfraction

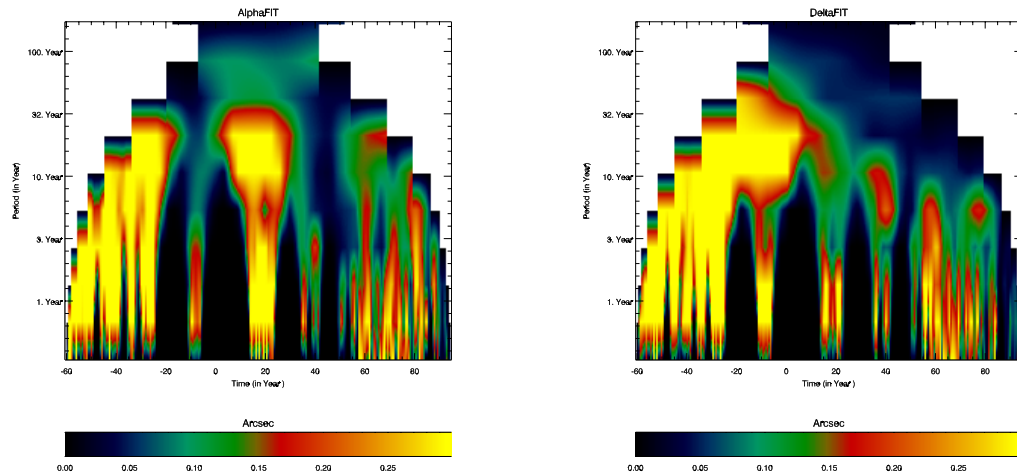


FIG. 9.24: Saturne: Analyse en ondelettes des résidus en ascension droite (carte de gauche), déclinaison (carte de droite) après ajustement des conditions initiales de la solution du mouvement de Saturne aux échantillons observationnels mentionnés sur la figure: 1840-1982, 1840-1982 (-USNO), 1840-1982 + ST corrigés des effets mentionnés sur les graphes: corrections de zone et de réfraction (voir texte). L'axe des x correspond aux dates d'observations en jours grégoriens -1900.0. L'axe des y indique les périodes en années détectées par l'analyse.

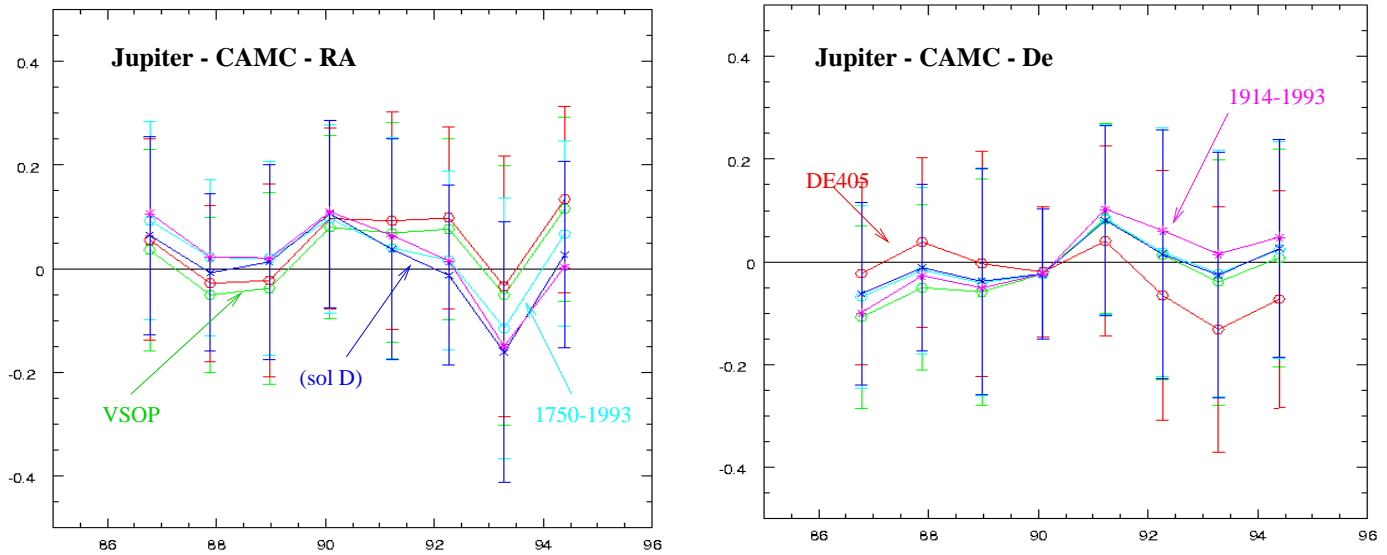


FIG. 9.25: *Jupiter: Résidus par opposition obtenus par comparaison entre positions observées à La Palma et les positions déduites de diverses solutions dynamiques issues de nos ajustements, y compris la solution D, solution ajustée sur des observations corrigées des effets de réfraction et de zones par une formulation “mixte”, ainsi que de DE405 et VSOP87. L’unité portée en ordonnée est la seconde de degré, celle portée en abscisse correspond aux dates grégoriennes d’observation - 1900.*

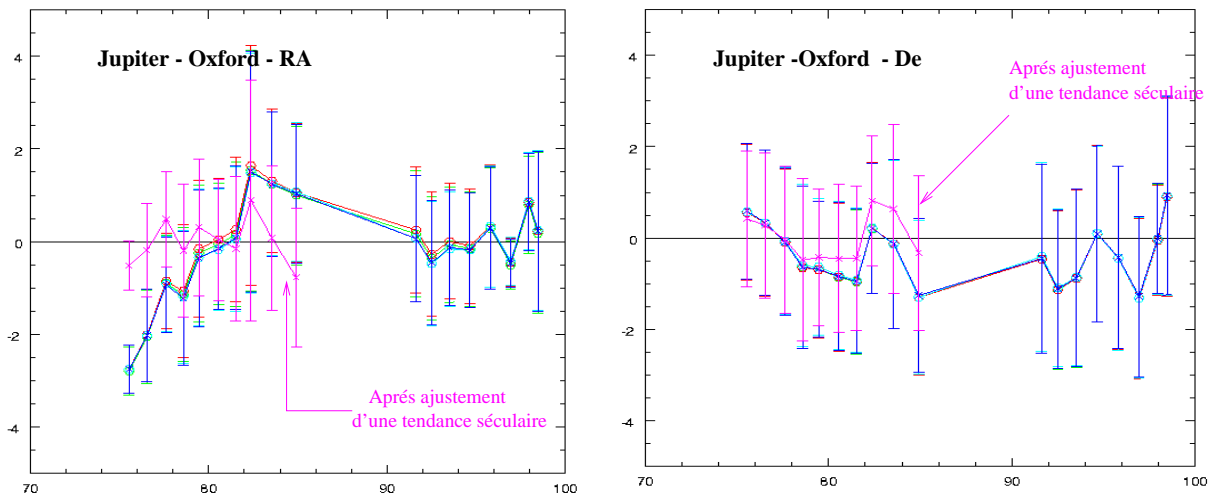


FIG. 9.26: *Jupiter: Résidus par opposition obtenus par comparaison entre positions observées à Oxford et les positions déduites de diverses solutions dynamiques issues de nos ajustements, y compris la solution D, solution ajustée sur des observations corrigées des effets de réfraction et de zones par une formulation “mixte”, ainsi que de DE405 et VSOP87. Aucune différence n’est notable entre les solutions. Cependant, se trouvent aussi tracés les résidus obtenus après ajustement d’une tendance séculaire dans les observations d’Oxford. Les coefficients de la pente sont donnés en annexe (annexe D). L’unité portée en ordonnée est la seconde de degré, celle portée en abscisse correspond aux dates grégoriennes d’observation - 1700.*

SATURNE - CAMC

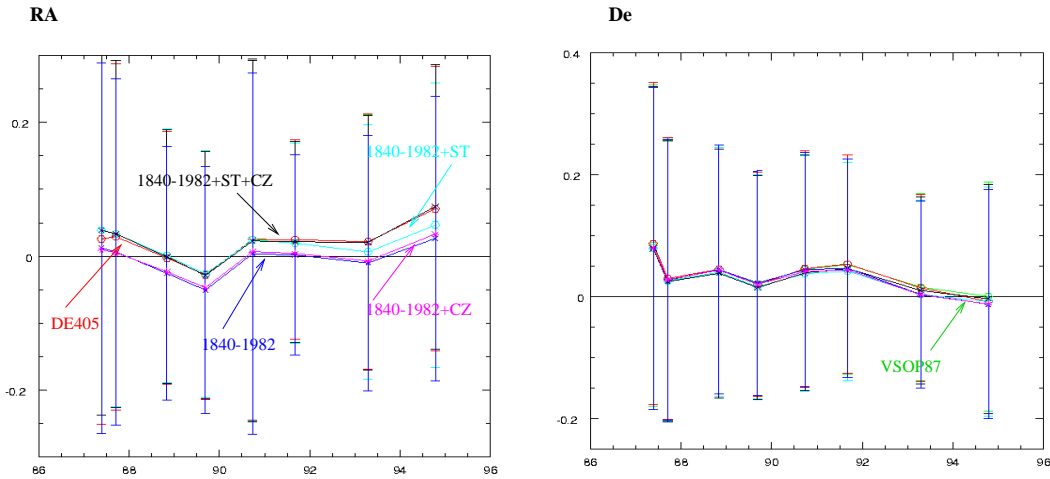


FIG. 9.27: Saturne: Résidus par opposition obtenus par comparaison entre positions observées à La Palma et les positions déduites de diverses solutions dynamiques issues de nos ajustements, y compris la solution D, solution ajustée sur des observations corrigées des effets de réfraction et de zones par une formulation “mixte”, ainsi que de DE405 et VSOP87. Aucune différence n’est notable entre les solutions. Cependant, se trouvent aussi tracés les résidus obtenus après ajustement d’une tendance séculaire dans les observations d’Oxford. Les coefficients de la pente sont donnés en annexe (annexe D). L’unité portée en ordonnée est la seconde de degré, celle portée en abscisse correspond aux dates grégoriennes d’observation - 1900.

SATURNE - OXFORD

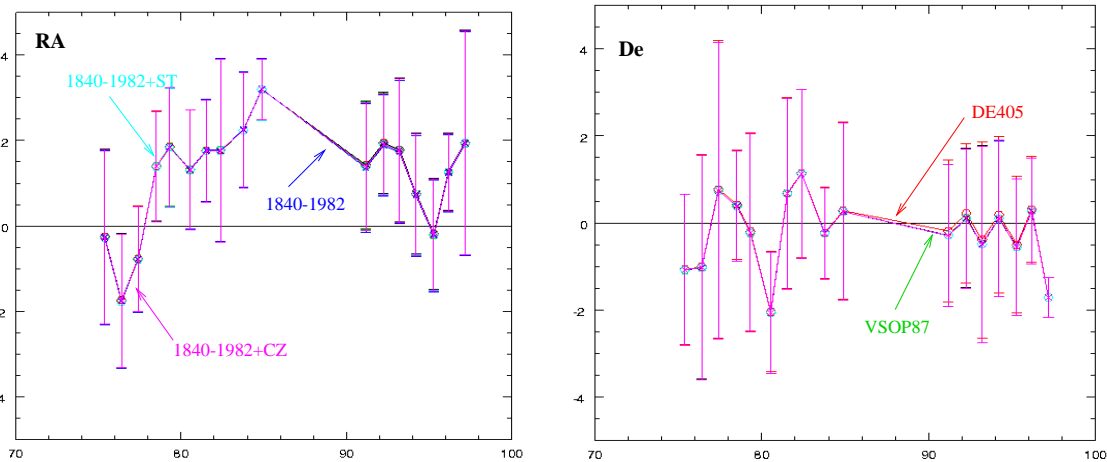


FIG. 9.28: Saturne: Résidus par opposition obtenus par comparaison entre positions observées à Oxford et les positions déduites de diverses solutions dynamiques issues de nos ajustements, y compris la solution D, solution ajustée sur des observations corrigées des effets de réfraction et de zones par une formulation “mixte”, ainsi que de DE405 et VSOP87. Aucune différence n’est notable entre les solutions. Cependant, se trouvent aussi tracés les résidus obtenus après ajustement d’une tendance séculaire dans les observations d’Oxford. Les coefficients de la pente sont donnés en annexe (annexe D). L’unité portée en ordonnée est la seconde de degré, celle portée en abscisse correspond aux dates grégoriennes d’observation - 1700.

de zones des catalogues stellaires et mauvaises corrections de réfraction, ont été totalement ou partiellement retirés des observations. Un autre ajustement sur les observations nouvellement traitées a été effectué. La nouvelle solution apporte là encore des enseignements intéressants, puisque il est alors possible de diminuer les résidus issus des comparaisons entre observations modernes de La Palma et positions prédites par la nouvelle solution d'un facteur deux par rapport à DE405 en ascension droite sur la solution ajustée sur les données optiques récentes et VLBI.

Ainsi, nous venons de montrer qu'en utilisant des observations couvrant une période suffisamment importante et analysées par des méthodes et des outils originaux, il était possible d'obtenir des positions de Jupiter et de Saturne, en prédiction, d'une grande précision. Ce résultat nécessite bien sûr d'être confirmé par comparaison à bien d'autres échantillons observationnels non-inclus dans la solution, mais il nous donne à penser que mener des études poussées fondées sur l'utilisation de moyens adéquats, comme l'analyse en ondelettes, permettrait d'améliorer considérablement la qualité à moyen terme des théories dynamiques des planètes géantes en général, et de Jupiter en particulier.

On peut donc conclure que si des points de raccordement entre le repère cinématique de l'ICRS et le repère dynamique de la théorie sont assurés soit par le biais de positions déduites du suivi de sondes spatiales par la technique VLBI soit par le biais de réductions photographiques ou CCD fondées sur l'utilisation des catalogues astrométriques Hipparcos ou Tycho (réalisations optiques de l'ICRS), il semble que seuls les effets induits par de mauvaises ou d'insuffisantes corrections de zone ou de réfraction induisent une dégradation de la qualité de prédiction des théories ajustées.

Dans le chapitre final de notre travail, nous allons brièvement proposer quelques pistes de nature observationnelle afin d'aller dans cette voie de l'amélioration des théories dynamiques de l'ensemble des système intérieur et extérieur, et tout particulièrement des théories analytiques.

Perspectives et conclusion

Chapitre 10

Perspectives

10.1 Vers une nouvelle astrométrie

10.1.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre concernant les réductions astrométriques de plaques photographiques ou d'images CCD, cette technique d'analyse est fondée essentiellement sur la notion de points de raccordement (étoiles de référence) qu'il est impératif d'avoir en grand nombre et de bonne qualité astrométrique. Or, nous savons que ces deux contraintes (grand nombre et bonne qualité) de la réduction astrométrique ne sont que très rarement remplies simultanément. A l'heure actuelle, il n'existe pas de catalogues stellaires fournissant à la fois l'ensemble des données liés à la dynamique des étoiles de référence, garantissant ainsi une bonne estimation des positions apparentes de ces points de raccordement à l'instant et dans les conditions de l'observation, et un nombre suffisamment important de points permettant une modélisation complète des déformations du récepteur. Il faut donc choisir et dans bien des cas, on préférera la densité au détriment de la qualité afin de faciliter l'algorithme de réduction. Ce choix très courant entraîne que la détermination des positions d'objets inconnus ou dont on veut étudier la dynamique s'effectue à l'ordre de la précision de catalogues denses mais non astrométriques, c'est-à-dire entre 100 et 500 mas. Autrement dit, et toujours dans le cadre des observations optiques, il est actuellement difficile d'effectuer l'étude du mouvement d'un objet, en particulier d'un objet du système solaire, à mieux que 100 mas. Ce qui est énorme en comparaison des ordres de grandeurs des effets pris en compte ou prédits par les théories dynamiques et physiques de ces corps. Pour franchir cette barrière, principalement induite par les erreurs des catalogues utilisés, deux solutions peuvent être proposées: adapter les techniques de réduction à un nombre moins important d'étoiles de référence tout en limitant la dégradation induite par des points de raccordement non astrométriques (c'est cette alternative qui est proposée dans le logiciel de réduction Priam), et construire de nouveaux catalogues de référence plus denses et plus précis que ceux actuellement disponibles à savoir les catalogues Hipparcos, Tycho et ACT. Or depuis la fin de la mission du satellite Hipparcos, deux autres projets spatiaux de mise en place de catalogues astrométriques denses et complets sont à l'étude: les projets FAME (NASA) et GAIA (ESA). Les densités et précisions prévues pour chacun de ces projets sont indiquées dans le tableau 10.1. On voit qu'une amélioration conséquente va être apportée à l'astrométrie stellaire par le biais de ces deux outils. Tout comme la préparation et les données de la mission Hipparcos ont modifié en profondeur l'approche que l'on pouvait avoir de cette discipline, on peut estimer que la préparation de ces deux projets concurrents ne sera pas sans répercussion sur cette dernière. Ainsi, dans ce chapitre, nous allons aborder différents aspects des implications

Catalogue	Précision (mas)	Nombre d'étoiles	Densité (* / d ^2)
FK4	200	3 522	0.08
FK5	100	4 652	0.1
HIP	1	118 218	3
ACT	25	988 758	23
GSC 1.1	500	25 258 765	600
USNO SA2.0	250	54 787 624	1300
FAME	0.100	40 000 000	1000
GAIA	0.010	35 000 000	875

FIG. 10.1: *Caractéristiques des principaux catalogues stellaires, astrométriques ou non, utilisés actuellement ou dans le futur dans les réductions astrométriques*

que pourrait avoir l'apparition de données astrométriques de type GAIA ou FAME. Cela va concerner aussi bien les techniques d'observations en elle-même (types de récepteurs utilisés et autres) que les processus de réduction à mettre en place. Enfin, nous nous sommes intéressés aux effets dynamiques et physiques qu'il va devenir possible de détecter grâce à l'amélioration des techniques dont il a été question précédemment et de l'utilisation de catalogues astrométriques issus des projets spatiaux.

10.1.2 Implications techniques

Nous avons effectué des simulations de réductions astrométriques d'observations réalisées au moyen de récepteurs de taille (1000x1000, 2000x2000, 4000x4000 et 8000x8000 pixels par pixels) et de focales diverses et fondées sur l'utilisation des catalogues USNO SA2.0, FAME et GAIA. Les résultats de ces simulations sont présentés sur les graphes de la figure 10.2. Ces tailles de récepteurs correspondent aux tailles des CCD actuels ou à celles envisagées dans le cadre de mosaïques de CCD, de type MEGACAM. Les différents types de points représentent des tailles de pixels variant entre 10 et 25 microns. Là encore, le choix de ces tailles de pixels est fondé sur les valeurs adoptées pour la majorité des récepteurs. Pour chaque catalogue, on a donc estimé une erreur moyenne externe induite par le processus de réduction astrométrique sur les positions déduites (α , δ) de l'objet étudié. Cette erreur, e_{ext} , est fonction du type de fonction de raccordement utilisé dans l'algorithme de calcul, du nombre moyen d'étoiles présentes dans le champ, des incertitudes sur les positions mesurées sur le récepteur et celles sur les positions déduites des catalogues de référence utilisés. On rappelle qu'une forme classique pour son estimation a été donnée par Pascu (1987):

$$e_{\text{ext}} = \frac{e_{\text{cat}}^2 + S^2 e_{*r}^2}{n - m} + (S e_{\text{or}})^2 \quad (10.1)$$

Cette écriture générale fait intervenir la précision externe, e_{cat} , moyenne du catalogue de référence d'où sont extraites les n coordonnées (α, δ) des points de raccordement, l'incertitude

induite par les mesures effectuées sur le récepteur de ces n points, e_{*r} , et de l'objet étudié, e_{or} . Notons enfin que S représente le facteur d'échelle théorique du récepteur et m le nombre de paramètres à déterminer par la fonction de raccordement. Pour nos calculs, nous avons supposé que l'erreur de mesure est égale à 10% de la taille du pixel du récepteur et reste constante en fonction du temps et de l'objet observé supposé ponctuel. Le terme de *focale* est ici compris comme celui de la focale équivalente à l'ensemble du système optique. e_{ext} est la somme de deux termes, l'un induit par les erreurs de mesures et l'autre par les incertitudes sur les positions issues de catalogues stellaires. Sur les graphes de la figure 10.2, nous avons représenté ces deux composantes séparément.

La première conséquence évidente de ces calculs est qu'avec l'arrivée des nouveaux catalogues astrométriques la source majeure d'imprécisions dans les processus de réduction n'est plus l'incertitude liée aux déterminations des positions, mouvements propres et parallaxes trigonométriques des étoiles de référence, mais celle découlant des mesures effectuées sur le récepteur. Dans le cas des récepteurs couramment utilisés actuellement (1000x1000 et 2000x2000), la principale source d'erreurs provient bien sûr des erreurs *astrométriques*, c'est-à-dire découlant des incertitudes sur la position des étoiles de référence. Dans le cas d'une utilisation de l'USNO SA2.0, l'erreur astrométrique atteint un maximum de 125 mas alors que l'erreur de mesure ne dépasse pas 65 mas. Cependant, dès qu'il est question de grands récepteurs de type 4000x4000, 8000x8000, ou plus, l'erreur astrométrique n'est plus dominante et c'est l'erreur induite par les techniques d'observations et de mesures qui devient prépondérante. On a ainsi une nouvelle limitation à environ 10 mas découlant non plus des incertitudes des catalogues de référence – les ordres de grandeur des incertitudes liées à l'utilisation de FAME ou de GAIA étant d'un facteur au moins mille fois inférieur à celui des erreurs de mesures et cela quel que soit le type de récepteur – mais des techniques d'acquisition des données. On montre ainsi que si l'on souhaite bénéficier au maximum du gain de précision et de densité des nouveaux catalogues astrométriques, il faut développer de nouveaux récepteurs.

Quelles caractéristiques pour ces nouveaux CCD? Sur les graphes de la figure 10.2, il apparaît qu'une taille de pixel comprise entre 10 et 15 microns permet de réduire d'un facteur 6 l'incertitude sur la détermination des centroïdes des étoiles de référence et de l'objet ponctuel observé par rapport aux mesures effectuées sur des pixels de 25 microns. Donc, l'un des premiers critères à considérer dans notre étude sera la taille réduite des pixels du CCD. Un autre critère, évident, est celui du champ du récepteur. En effet, comme nous l'avons déjà noté, le nombre d'étoiles de référence présentes dans le champ est un point fondamental de la réduction astrométrique. Autrement dit, notre CCD *idéal* devra être à grand champ et composé de petits pixels. Or, l'évolution actuelle dans le développement des récepteurs optiques est essentiellement orientée vers des systèmes en mosaïque de CCD, permettant ainsi d'allier la qualité optique d'un CCD individuel de pixels de 15 ou 13.5 μm et la taille du champ. On citera en exemple le projet MEGACAM (Vigroux, 1996) constitué d'un ensemble de 9x4 CCD de 2048x4608 pixels de 13.5 μm et couvrant un champ maximal de 1 degré carré. Ce nouveau type de récepteurs permet de répondre aux deux critères précédemment évoqués (grand champ et petits pixels) mais soulève des problèmes complexes de raccordements entre chaque récepteur. L'astrométrie déduite de ces systèmes pourrait néanmoins atteindre quelques mas selon la nature de l'objet observé.

Par ailleurs, d'autres méthodes existent afin de réduire l'incertitude sur l'estimation de la position des centroïdes observés (c'est-à-dire l'erreur de mesure considérée dans les graphes de la figure 10.2) soit par réduction des perturbations du front d'onde avant ou à son arrivée à la surface du CCD soit par la mise en place de nouvelles méthodes de mesures. Notre première proposition est fondée en partie sur les techniques avancées d'optiques adaptatives extrêmement efficaces (on se reportera par exemple à Roddier et al, 1990) mais qui présentent l'inconvénient

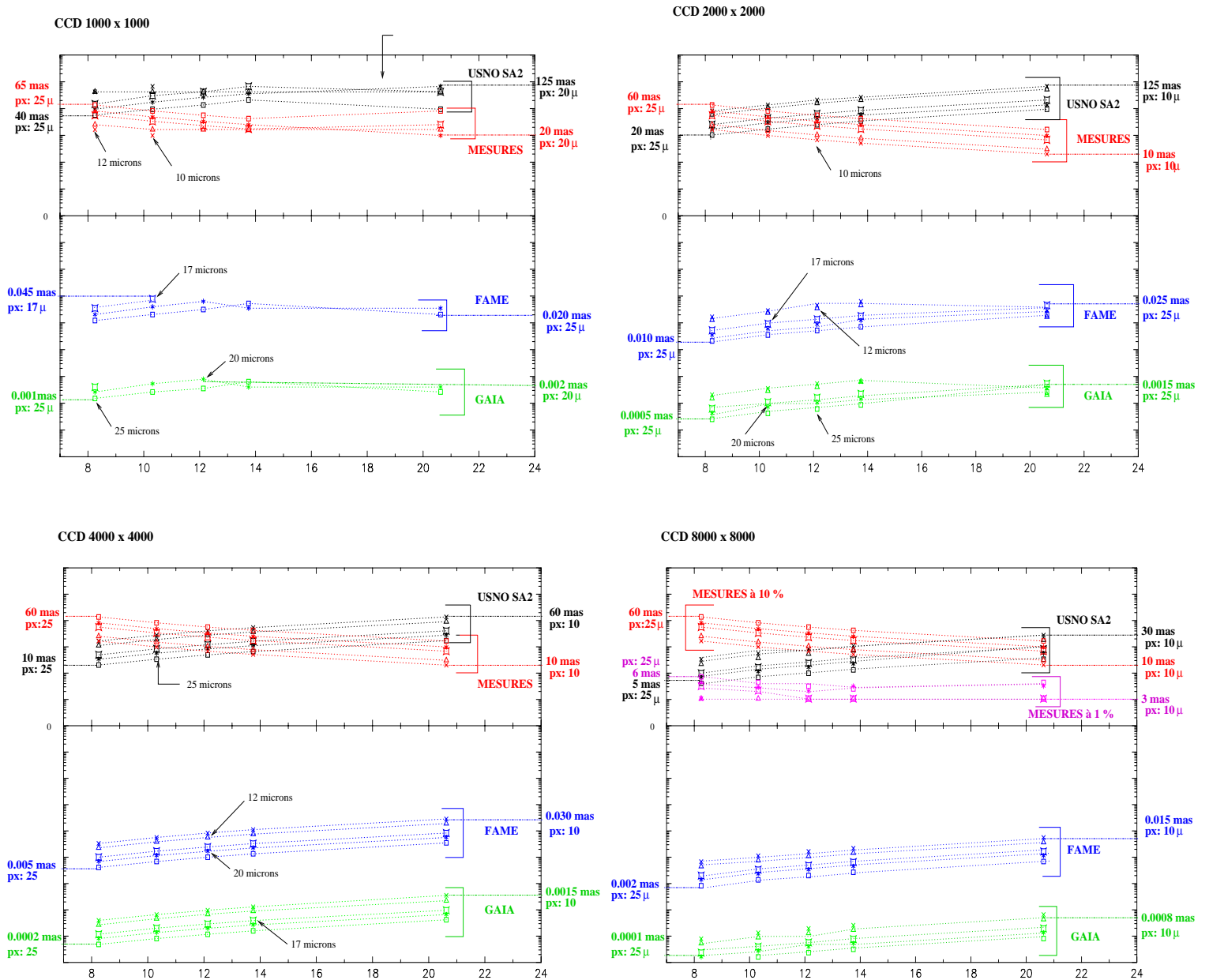


FIG. 10.2: Simulations d'erreurs estimées sur la position d'un objet ponctuel à partir d'un processus de réduction. Les erreurs estimées sont d'une part induites par les erreurs de centrage de PSF (Point Spread Function) sur le CCD et d'autre part par les incertitudes sur les positions des étoiles de référence du fait de la qualité des catalogues USNOSA2.0, FAME et GAIA. Y sont comparées les simulations effectuées pour des récepteurs de 1000x1000 pixels à 8000x8000 pixels et des instruments (focales) différents. L'axe horizontal de chaque graphe indique la focale de l'instrument considéré (en m), l'axe logarithmique vertical donne l'erreur déduite de l'équation 10.1 en mas.

de limiter leur action de compensation de la turbulence atmosphérique à une zone très réduite du récepteur (limitation de la zone d'isoplanétisme: le rayon de cette zone est comprise entre 20 secondes et 1 minute de degré pour un télescope de 4 mètres (Rodier, 1994)). Des techniques de recombinaison d'images ont été étudiées (Thorpe, 1994) mais ne semblent pas donner de résultats satisfaisants. Cependant, d'autres solutions permettant une correction des perturbations du front d'onde directement à la surface du récepteur et donc affectant l'ensemble du champ observé sont en cours de développement. On citera notamment le très prometteur CCD à transfert orthogonal (Tonry et al, 1997). Ce système est fondé sur l'idée qu'il est possible en modifiant la vitesse et la direction de lecture du CCD de compenser efficacement et plus rapidement les perturbations atmosphériques de l'image que dans le cas de l'OA (Optique Adaptative) classique (compensation par déformation progressive des miroirs secondaires). Cette technique est actuellement en phase de test. Elle permettrait d'affiner de près de 80 % les profils des objets observés dans un champ actuellement de l'ordre de 2.5 minutes de degré (tests effectués sur le télescope MDM (Michigan-Dartmouth-MIT) de 2.4 mètres), Tonry estimant par ailleurs que ce champ pourrait être étendu jusqu'à 10 minutes de degré.

D'autre part, en parallèle à la mise en place des grands projets instrumentaux tels que les CCD mosaïques, l'instrumentation OA et autres, se développent des techniques de plus en plus élaborées de détection et de mesures de positions. Des simulations sur des champs stellaires fictifs ont ainsi montré qu'il était possible d'effectuer de telles mesures, sans présence atmosphérique, avec une précision de 1/600 de pixel (Gai, 1999).

Autrement dit, il est certain que par des couplages entre des méthodes d'analyse d'images astrométriques d'une part (logiciel) et de l'instrumentation d'autre part (matériel), la limite de 1 mas de précision sur le terme instrumental de la réduction astrométrique sera franchie. Sachant d'autre part que l'erreur induite par la précision astrométrique des catalogues atteint au maximum – dans le cadre d'une réduction d'images 8000x8000 et de taille de pixels comprises entre 10 et 20 μm – 15 μmas pour FAME et 0.8 μmas pour GAIA, on peut conclure que l'ambition d'atteindre 1 mas de précision sur une position (α , δ) d'un objet ponctuel est très raisonnable. Ce nouvel ordre de grandeur amène à s'interroger de façon plus approfondie d'une part sur les techniques et les algorithmes utilisés dans les réductions et d'autre part sur les effets physiques, gravitationnels ou non, susceptibles d'être confirmés par l'observation ou mis en lumière par elle.

10.1.3 Implications sur le processus de réduction en lui-même

Depuis Hipparcos, la communauté a pris conscience de l'importance des corrections relativistes dans le processus de réduction en général et dans le calcul des positions apparentes d'étoiles en particulier. En effet, les ordres de grandeur impliqués (de l'ordre du mas) ne permettaient plus de négliger des effets comme la déflexion des rayons lumineux ou les conséquences relativistes de phénomènes bien connus comme l'aberration annuelle. Cependant, ces efforts ne furent pas menés jusqu'à leur terme qui aurait été une ré-écriture complète de l'algorithme en métrique PPN (métrique *Parametrized post-Newtonian*). En effet, jusqu'à présent, l'écriture relativiste se limite à des corrections ponctuelles dans un repère euclidien, nécessitant ainsi le passage d'un repère à un autre avec toutes les approximations que cela entraîne. Le tableau 10.1 donne un aperçu des ordres de grandeur de ces approximations, qui, accumulées, atteignent les 2 mas d'approximation. A cela s'ajoutent les incertitudes quant au lien entre le repère céleste et le repère terrestre, incertitudes liées aussi bien au type de coordonnées utilisées qu'à la position plus ou moins bien connue de l'observateur.

Enfin, rappelons les difficultés liées à l'état physique de l'atmosphère lors des observations

Approximations des corrections relativistes		
--	--	--

Temps Lumière		0.01 mas
Déflexion des rayons lumineux	Potentiels autres que solaire	Jupiter: 1.5 mas / Terre: 0.04 mas
	Approx. au 1er ordre	0.5 mas
	Approx. instant de la déflexion	0.1 mas
Temps coordonnée des planètes		Jupiter: 10 msec/0.03 mas
		Vénus: 0.5 msec/2 μ mas

Approximation du passage entre repère terrestre et repère céleste		
--	--	--

		Impacts sur les positions: Vénus/Jupiter
	Terre	
Mouvement du pôle	10m - 0.3"	0.05 mas/ 0.003 mas
Déflexion de verticale	2km - 1'	10 mas/0.6 mas
Estimation de la position de l'observateur	100m - 3"	0.5 mas/ 0.03 mas

Impact de la réfraction différentielle		
---	--	--

		$\Delta\alpha/\Delta\delta$
Pour $\Delta d=1'$	$z=45^\circ$ - CNTP	20mas/ 40mas
Précision en réfraction absolue	$z \leq 70^\circ$ - temp $\pm 0.1^\circ\text{C}$	5 à 20 mas
	Pression ± 0.4 mb - $E_o \pm 10\%$	

TAB. 10.1: *Approximations diverses effectuées dans les processus de réductions actuels. On suppose ici que la réduction s'opère à partir de coordonnées apparentes de la date des étoiles de référence.*

et leurs conséquences dans la réduction. Autrement dit, il est clair que pour maintenir un taux de précision de l'ordre de 5 mas dans une réduction astrométrique, des améliorations très nettes sont à apporter aussi bien dans notre modélisation du trajet d'un photon de la source à l'observateur que dans la détermination précise de la position du dit observateur, ainsi que de notre modélisation de l'atmosphère.

10.1.4 Effets détectables

Nous n'exposerons ici que quelques idées générales concernant les effets détectables par le biais d'observations astrométriques d'objets du système solaire réalisées par rapport au futur catalogue stellaire issu des missions FAME et GAIA.

Des techniques de traitement du signal, telles que l'analyse en ondelettes, appliquées aux résidus déduits de comparaisons entre positions observées et positions calculées à partir de solutions numériques ou de théories analytiques du mouvement permettent de détecter des effets physiques difficiles à mettre en lumière par les techniques classiques d'analyse. Or, comme nous l'avons vu dans le cas de Jupiter et Saturne, une part importante des effets déduits d'une telle analyse en ondelettes découle de corrections de zone et régionales mal appliquées, et donc sont fonctions des

catalogues stellaires utilisés au cours de la réduction. Autrement dit, les incertitudes liées à la qualité astrométrique de ces catalogues masquent actuellement la détection directe d'effets physiques ou dynamiques de plus faible amplitude. Il est donc évident qu'allier de telles méthodes de détection à l'utilisation de catalogues de référence ne présentant pas de biais aussi importants permettrait la mise en lumière d'effets de surface sur des objets lointains comme les satellites de Neptune ou même plus généralement de mieux appréhender les décalages photocentre / centre de masse de corps tels que les astéroïdes de la ceinture principale ou les satellites des planètes géantes. L'ordre de grandeur de tels effets de surface sur des objets de taille importante comme par exemple Rhéa ou Ganymède est de 6 mas pour l'un et 37 mas pour l'autre. On voit alors qu'une astrométrie de l'ordre d'une dizaine de mas réalisée sur des objets de ce type permettrait d'améliorer considérablement notre connaissance de la nature chimique et topographique de leur surface. Dans le même ordre d'idées, des effets dynamiques de types accélérations séculaires et effets de marées, à l'heure actuelle prédits par la théorie ou supposés par elle mais non encore observés ou observés sur un nombre limité d'objets, pourraient là encore ressortir d'une amélioration générale des techniques d'observations d'une part et de réduction d'autre part.

Par ailleurs, la découverte de nouveaux astéroïdes ou la nette amélioration de leur orbite ne seront pas sans influence sur la dynamique générale du système solaire. Notons principalement deux implications. En premier lieu, atteindre une précision de 10 mas sur l'orbite d'un astéroïde de la bande principale (comme 44 Nysa) permet de détecter des perturbations gravitationnelles – dont l'impact sur les coordonnées observées de l'objet peut atteindre, comme par exemple dans le cas d'un passage proche 20 Massalia - 44 Nysa, 59 mas en α et 7 en δ (Berthier et Fienga, 1999). Il est alors possible, à partir de l'estimation de l'amplitude des effets perturbant l'orbite de l'objet en question, d'en déduire la masse de l'astéroïde perturbateur. Ces déterminations de masse sont donc d'une grande importance puisque, alliées à une estimation de la taille du corps, elles permettent d'établir une caractéristique physique majeure de celui-ci: sa densité. Peuvent alors être mises en place des classes taxonomiques susceptibles d'expliquer la formation du système solaire. Ajoutons de plus qu'une conséquence indirecte de l'astrométrie *nouvelle génération* des catalogues FAME et GAIA, sera la multiplication des observations d'occultations stellaires par des objets de la ceinture principale et de Kuiper. Cet accroissement, notable ces dernières années du fait de l'utilisation d'étoiles issues des catalogues astrométriques Hipparcos et Tycho, sera d'autant plus important que le nombre d'étoiles disponibles et la précision sur leur astrométrie seront grands.

Dans le cadre de l'étude de la physique non-gravitationnelle des corps du système solaire, notons qu'une amélioration constante de la qualité astrométrique des observations cométaires, et plus particulièrement des noyaux cométaires, permettrait les premières détections, sur des périodes d'observations assez courtes, d'effets autre que gravitationnels, thermiques dans le cas présent, sur des objets non artificiels. L'étude de l'impact du champ magnétique de Jupiter sur l'orbite de son satellite polarisé Amalthée ou d'effets de type Yarkovsky sur les petits astéroïdes de la ceinture principale semble être plus complexe puisque ceux-ci sont d'amplitudes plus faibles.

D'autre part, une amélioration conséquente devra être apportée aux connexions inter-systèmes de référence (lien DE403/ ICRF \approx 3 mas). Enfin citons des effets de nature relativiste non encore détectés mais prévus par la théorie ou vérifiés dans des cas particuliers, comme l'effet de Lens-Thirring détecté sur la dynamique lunaire.

10.1.5 Conclusion

L'arrivée de nouveaux catalogues astrométriques et en particulier de Gaia va permettre de passer le pas des 5 mas de précision sur les positions d'objets du système solaire de magnitude inférieure ou égale à 15.

Mais cela nécessite de développer des CCD de grande taille avec un rendement quantique permettant l'utilisation de petits pixels sans perte de gain, et cela sur des instruments à longue focale. Une solution alternative pourrait être la généralisation de l'utilisation des techniques d'optique adaptative dans le domaine du visible.

A cet ordre de précision, le développement d'un algorithme de réduction astrométrique plus cohérent que celui généralement adopté s'impose ainsi qu'une amélioration globale des théories dynamiques des objets du système solaire et des raccordements inter-systèmes.

A ces conditions, il deviendra possible de détecter, entre autres, des effets d'accélération séculaires sur des objets tels que les satellites galiléens et de marées sur des satellites lointains, Néréide par exemple, des effets de surface par le biais de décalages photocentre / centre de masse, des perturbations successives à des passages proches entre astéroïdes et des effets relativistes non encore détectés.

10.2 Quelles observations astrométriques planétaires dans l'avenir?

10.2.1 Planètes intérieures: vers l'abandon des observations optiques

Bilan

L'une des premières motivations de ce travail a été de comprendre dans quelle mesure la précision et la qualité astrométriques des différents types d'observations utilisées lors de l'ajustement des planètes intérieures pouvaient altérer les déterminations des constantes d'intégration des théories analytiques du mouvement de ces objets et la mise en place de liens entre les systèmes de référence issus des solutions analytiques et ceux issus des observations.

Il est clairement apparu alors que les observations angulaires de type méridiennes et photographiques n'apportaient plus d'informations suffisamment originales pour justifier de la mise en place de lourds traitements de données comme la recherche d'effets systématiques par déconvolution du signal déduits des résidus entre positions observées et positions calculées par le biais des techniques d'analyse de Fourier ou d'analyse en ondelettes.

Rappelons que l'apport des données optiques dégrade d'un facteur 6 la qualité de l'ensemble des constantes d'intégration ajustées pour les solutions analytiques du mouvement de Mercure, Vénus et du barycentre Terre-Lune. Cette dégradation globale des constantes indique bien que l'apport d'information des données optiques, si apport il y a, est supplanté par le bruit observationnel de ces échantillons. D'autre part, trois arguments confirment cette argumentation visant à éliminer les observations optiques classiques de l'ajustement des planètes telluriques et de leur préférer des observations plus modernes et plus efficaces telles que les tirs radar ou les observations VLBI par suivi de sonde.

Comme nous l'avons montré dès le début de notre exposé, la période observationnelle couverte par des données autres qu'optiques, radar et VLBI, est équivalente à plusieurs fois la période orbitale des corps observés. Autrement dit, ces dernières fournissent des informations suffisamment bien réparties sur l'orbite pour déterminer complètement les constantes d'intégration d'une théorie du mouvement. De plus rappelons que la précision obtenue sur une distance issue d'une série d'observations radar est en moyenne de quelques kilomètres, et que celle sur une position

angulaire déduite d'un suivi de sonde par la technique de l'interférométrie très longue base est de l'ordre de 1 à 2 mas, ce qui correspond à une amélioration d'un facteur 600 à 800 sur la précision des observations optiques classiques.

La nature de ces observations radar et VLBI peut être discutée. En effet, comme nous l'avons souligné précédemment, les données optiques sont angulaires alors que les données radar sont elles des estimations des distances mutuelles entre objets. Elles n'apportent donc pas le même type d'information sur l'orbite du corps ajusté. Cependant, comme nous l'avons rapporté au chapitre 5, cette estimation des distances mutuelles permet de mettre en place une métrique du système des planètes intérieures et du barycentre Terre-Lune indépendamment des systèmes de référence actuels. Il est donc tout à fait possible d'envisager une solution analytique ou numérique du mouvement du barycentre Terre-Lune, de Mercure et de Vénus uniquement fondée sur des observations de distances mutuelles déduites de tirs radar. Afin d'effectuer le raccordement entre le système de référence de l'UAI et cette solution indépendante du système interne, quelques points de raccords entre les planètes intérieures et une matérialisation, optique ou radio, de l'ICRS sont nécessaires. Comme il n'est plus là question de déterminer des constantes d'intégration de la solution du mouvement, précédemment ajustées sur les observations radar, la couverture temporelle de ces observations de raccordement n'est plus un handicap pour l'utilisation de ces données, encore maintenant en nombre très limité (18 points pour Vénus).

Développements envisageables

Par conséquent, il apparaît donc comme extrêmement important de maintenir le suivi radar des planètes telluriques par le biais d'observations monostatiques ou multistatiques (une antenne émettrice et plusieurs antennes réceptrices). De plus, les techniques liées aux suivis des sondes spatiales deviennent de plus en plus précises et permettent d'obtenir un nombre de plus en plus grand d'informations. Ainsi, de nouvelles méthodes alliant estimations de distances mutuelles par tirs radar et de positions angulaires par VLBI sont en ce moment à l'essai (Zaitsev et Gratchev, UAI Telegram 1999).

De plus, la mise en œuvre des projets spatiaux vers Mars (Mars Surveyor 2001 (2001), Mars Sample Return (2003-2008), NetLander (2005), etc....) et vers Mercure permettront d'obtenir de nouvelles données du même type que celles obtenues au cours des missions Magellan, Ulysses et Galileo.

Enfin, notons que dans le cadre des surveillances d'astéroïdes géocroiseurs, des coopérations dans le but de développer les techniques d'observations astrométriques (et non seulement d'imagerie) radar et radio d'objets du système solaire tendent à se mettre en place ainsi que des projets de construction de nouvelles antennes de réception européennes, en Sardaigne notamment (DelBo et al, 1999). L'augmentation constante des puissances d'émission d'instruments tels que le système radar en bande S d'Arecibo font de ce domaine de recherche un lieu d'innovation dans lequel l'astrométrie planétaire a toute sa place. L'avenir de l'astrométrie des planètes intérieures et de Mars réside donc dans ces trois directions complémentaires d'observations actuellement en expansion: les techniques d'observations radar *classiques*, celles liées au développement et au suivi des programmes spatiaux par le biais de l'interférométrie très longue base et enfin les techniques mixtes en cours de validation alliant radar et astrométrie différentielle en mode VLBI.

10.2.2 Planètes extérieures: vers un renouveau des observations optiques

Bilan

Le cas des planètes géantes est bien différent de celui des planètes telluriques. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de techniques d'observation alternatives aux observations optiques classiques et couvrant une période orbitale équivalente.

Des observations de type VLBI déduites des suivis des sondes Ulysses et Galileo autour de Jupiter existent mais restent très ponctuelles. De même des observations VLBI fondées sur l'émission thermique des galiléens et de Titan ont été réalisées (Muhleman, 1985, 1986) mais là encore celles-ci peuvent servir de points de raccordements entre le système de référence de sources extra-galactiques et celui de la solution du mouvement des planètes extérieures mais ne fournissent pas assez d'observations pour constituer la base d'un ajustement de telles solutions. Signalons, de plus, les observations radar effectuées entre 1987 et 1991 par l'antenne d'Arecibo. Ces données furent exploitées afin d'étudier les différentes caractéristiques de surface, albédo et réflectivité en longueur d'onde radio, d'Europe, Ganymède et Callisto. Aucune application astrométrique n'a été déduite de ces données. Il est donc là encore intéressant de signaler, comme dans le cas des planètes intérieures, que les techniques radar et radio pourraient jouer un rôle important dans l'astrométrie directe des satellites des planètes extérieures en général, mais aussi dans celle du centre de masse de ces systèmes planétaires, et tout particulièrement celui de Jupiter. Techniquement, la remise à niveau en octobre 1997 de l'émetteur d'Arecibo devrait permettre de relancer une campagne d'observations vers la fin de l'année 1999 pour l'observation des satellites galiléens ainsi que du satellite de Saturne, Japet.

Cependant, du fait de la couverture orbitale limitée de ce type de données (une orbite de Jupiter nécessite environ 12 ans d'observations continues), l'amélioration des constantes d'intégration des solutions analytiques et numériques par ajustement à des données observationnelles passe encore par l'intermédiaire des observations optiques. Or, l'apparition de catalogues astrométriques de haute précision comme Hipparcos et dans une moindre mesure l'ACT permettent d'améliorer l'estimation de positions du centre de masse de ces systèmes planétaires, comme celui de Jupiter par exemple, et cela après de nouvelles réductions complètes de plaques photographiques. On a ainsi montré qu'il était possible de gagner un facteur 10 sur la précision astrométrique de telles positions angulaires (Fienga, 1998). De plus, une réduction effectuée par rapport à la réalisation optique de l'ICRS (le catalogue Hipparcos) permet de déduire des points de raccordement entre ce système de référence et celui de la solution analytique du mouvement du centre de masse du système jovien.

Enfin, rappelons que des techniques d'analyse de signal par ondelettes appliquées aux résidus déduits des comparaisons entre positions observées et positions calculées par le biais de solutions analytiques ou numériques ont permis de mettre en lumière et de corriger des effets jusqu'à présent supposés mais difficilement détectables par des méthodes classiques d'analyse.

Développements envisageables

La mise en place de programmes de nouvelles réductions systématiques d'anciennes plaques photographiques des systèmes satellitaires extérieurs à l'aide des catalogues astrométriques modernes, et en particulier le catalogue Hipparcos, alliés à l'utilisation des positions observées de ces satellites afin d'obtenir une astrométrie précise du barycentre du système satellites-planète serait nécessaire. Nous pourrions ainsi améliorer sensiblement et sur une longue période d'observation la qualité des données optiques utilisées dans nos ajustements des solutions du mouvement des planètes extérieures. Comme nous l'avons dit plus haut, un tel programme permettrait de

déduire des positions dont l'incertitude serait diminuée au moins un facteur 5 par rapport aux données actuelles et seraient de plus exprimées directement dans le système de référence actuel, l'ICRS. Rappelons à cette occasion que les améliorations constantes apportées aux théories dynamiques des satellites d'une part et aux modèles de surface de ces mêmes objets d'autre part, ont aussi un impact important sur la qualité des positions des barycentres des systèmes déduites de tels programmes. Plus généralement, le fait d'effectuer l'astrométrie des planètes extérieures directement par rapport à la réalisation optique de l'ICRS, le catalogue Hipparcos, permettrait de réduire considérablement le décalage qui existe actuellement entre un système dynamique interne (composé des planètes intérieures, du barycentre Terre-Lune et de Mars) dont le raccordement aux sources extra-galactiques est réalisé à environ 2 mas et un système externe établi avec une précision externe (en comparaison directe à des positions observées dans l'ICRS) de 50 mas. Un projet est d'ailleurs mené actuellement en ce sens à l'U.S. Naval Observatory. D'autre part, l'application de méthodes performantes d'analyse de signal par la méthode des ondelettes semble être très prometteuse et devrait permettre d'améliorer la qualité astrométrique des positions utilisées dans les ajustements des constantes d'intégration des solutions du mouvement. Pour finir, mettons l'accent sur l'impact non négligeable qu'aurait l'organisation de campagnes d'observations radar et radio des satellites des planètes extérieures, non seulement en terme d'étude planétologique, comme cela a été le cas jusqu'à présent, mais aussi dans le cadre d'un suivi astrométrique régulier de ces objets.

Chapitre 11

Conclusion

Rappelons brièvement les données de notre problème: il est évident que l'évolution très rapide des techniques modernes d'observation astronomique des corps célestes en général et de l'astrométrie des objets du système solaire en particulier induit une remise en question des méthodes classiques de réduction et d'ajustement de ces nouveaux types de données. On pourra citer en exemple la part croissante prise par l'astrométrie de suivi des sondes spatiales ainsi que celle, très récente et en plein développement, bien qu'encore limitée, des techniques radio d'interférométrie à très longue base appliquées aux objets du système solaire.

Au cours de ce travail, nous avons fait le bilan des différents types d'observations pouvant intervenir dans notre meilleure connaissance de la dynamique des planètes de notre système solaire. Nous avons examiné leurs méthodes de réduction et cherché à les optimiser soit par le développement de nouveaux algorithmes (réduction à une étoile, chapitre 2 de la partie I) et de nouveaux outils (PRIAM, Annexe B), soit par l'utilisation de techniques d'analyse originales (analyse en ondelettes). Nous nous sommes attachés à identifier des sources possibles d'erreurs systématiques présentes dans chacun des échantillons observationnels, de type optique, méridien ou photographique, radar ou VLBI et à les corriger par ajustement de modèles physiques.

D'autre part, nous avons essayé d'apporter des éléments de réponse aux questions liées à l'impact de l'utilisation de ces différentes sources d'information sur la qualité et la stabilité des nouvelles solutions du mouvement des objets étudiés, Mercure, Vénus, le barycentre Terre-Lune, Jupiter et Saturne. Il est alors apparu que les observations optiques des planètes intérieures n'apportaient pas aux ajustements d'informations suffisamment précieuses ou fondamentales pour pallier leur manque de précision astrométrique. En effet, nous avons montré que malgré une réduction fine des données méridiennes de Mercure et Vénus, ces dernières provoquaient une plus grande dégradation générale des solutions ajustées qu'elles n'induisaient d'améliorations ne serait-ce que ponctuelles sur un élément donné des orbites, même sur de longues périodes de temps. Il est alors clair que le développement des techniques d'observations radio ou radar représente l'avenir de l'astrométrie et de la dynamique des planètes intérieures mais aussi d'un point de vue plus général des objets proches de la Terre, comme les astéroïdes géocroiseurs et les astéroïdes de la ceinture principale.

Le cas des planètes extérieures est plus complexe. D'une part, leur période de révolution étant plus longue, il faut attendre 12 ans pour Jupiter et 30 ans pour Saturne pour avoir une couverture complète et homogène de leur orbite par des observations déduites d'un même type de techniques instrumentales. D'autre part, la limitation actuelle des techniques d'observation radio, qu'il s'agisse des puissances d'émission des antennes radar (un seul site, Arecibo, est

actuellement capable d'effectuer ce type d'observations – tirs radar sur les satellites galiléens, par exemple) ou des difficultés de modélisation des émissions thermiques par une source non-punctuelle par les techniques type VLA, n'a pas permis de mettre en place un suivi régulier de ces objets hors des campagnes de suivi de sondes spatiales (pour Jupiter, les missions Ulysses et Galileo). La mise en place de campagnes d'observations radar ou radio pourrait être envisagée. Les observations optiques, méridiennes et photographiques classiques restent donc les seules données majoritairement utilisées dans nos ajustements. Cependant, grâce aux algorithmes et aux outils de réduction développés dans la première partie de notre travail, nous avons montré qu'il était possible d'atteindre de très bonnes précisions (± 50 mas, Fienga 1998) sur l'estimation des positions de ces objets en se basant sur l'utilisation du catalogue astrométrique Hipparcos. C'est dans ce cadre d'utilisation d'observations optiques réparties sur un large intervalle de temps, 1750-1997, que nous avons testé une nouvelle méthode d'analyse par ondelettes, permettant la détection et l'étude d'effets systématiques localisés dans le temps, ce qui n'est pas possible pas le biais d'une analyse de Fourier classique des résidus. Il est alors possible grâce à cette détection temporelle de corriger de façon plus efficace des défauts présents dans les algorithmes classiques de réduction et qui n'auraient pas pu être mis en lumière par les méthodes conventionnelles. L'impact des nouvelles solutions ajustées sur de tels échantillons de données est évident. Par comparaison des positions déduites de ces nouvelles solutions à des positions observées non utilisées dans leurs ajustements, nous avons montré que ces corrections par ondelettes induisaient des diminutions de résidus de l'ordre de 20 à 60 % par rapport à des résidus déduits de solutions ajustées sur des observations non-traitées par ondelettes. Il est alors possible d'envisager des ajustements réalisés sur de plus longues périodes d'observations gagnant donc en stabilité au cours du temps tout en conservant une très bonne précision pour les périodes contemporaines.

Nous avons donc apporté en plus d'une amélioration générale de la précision des théories analytiques du Bureau des longitudes, les premiers éléments d'une réflexion sur le choix des observations à utiliser au cours de tels ajustements, dans quelle mesure et comment associer des types très différents de données, ainsi que sur le type de solutions que l'on cherche à obtenir après ajustement. Ce travail n'est bien sûr pas achevé et a pour vocation de se placer dans le cadre d'une rénovation complète des théories analytiques du mouvement des planètes du système solaire. Comme il a été déjà mentionné au cours de ce travail, la précision actuelle de ces théories est inférieure, dans certains cas, à celles des observations (observations radar des planètes intérieures notamment). Nous n'avons donc pas pu bénéficier ici de la totalité de l'apport d'informations de ces données. L'actuel développement des nouvelles théories de l'Institut de mécanique céleste devrait permettre d'atteindre des précisions suffisantes pour aborder pleinement le développement et l'amélioration des nouvelles techniques d'observations des prochaines années. En conclusion, beaucoup de choses restent encore à mettre en place et nous espérons poursuivre ce travail dans le futur.

Bibliographie

- [1] V.K. Abalakin, editor. *Refraction tables of Pulkovo Observatory*. Leningrad NAUKA publishing house, 1985. 5th edition.
- [2] J. B. Abshire and C. S. Gardner. Atmospheric refractivity corrections in satellite laser ranging. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 23:414–425, July 1985.
- [3] J. D. Anderson, R. F. Jurgens, E. L. Lau, Iii Slade, M. A., and G. Schubert. Shape and orientation of Mercury from radar ranging data. *Icarus*, 124, December 1996.
- [4] H. Andoyer. Les formules de précession d'après S. Newcomb. *Bull. Astron.*, 28:67, 1911.
- [5] E. F. Arias, P. Charlot, M. Feissel, and J. F. Lestrade. The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS. *Astron. Astrophys.*, 303:604–608, November 1995.
- [6] M. E. Ash, I. I. Shapiro, and W. B. Smith. Astronomical constants and planetary ephemerides deduced from radar and optical observations. *Astron. Journal.*, 72:338+, April 1967.
- [7] B. R. Bean and E. J. Dutton. Radio metrology. Technical report, US Nat. Bur. Stand., 1966.
- [8] J. Berthier. *Serveur d'ephemerides du Bureau des longitudes. Librairie et programmes de calcul EPROC. Guide de l'utilisateur (v1.02)*. Notes Scientifique et Technique du Bureau des longitudes, 1998. S062.
- [9] J. Berthier and A. Fienga. Comparaisons d'expressions de la réfraction atmosphérique. In Service des calculs et de mecanique celeste du bureau des longitudes, editor, *Journées scientifiques du service des calculs et de mecanique celeste du bureau des longitudes*, October 1997.
- [10] F. W. Bessel. Tabulae regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 ad 1850. In *Regiomonti Prussorum: Borntraeger, 1830; LXIII, 542 p.; in 8.; DCCC.4.123*, 1830.
- [11] F. W. Bessel and J. Bradley. Fundamenta astronomiae pro anno MDCCLV deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley in Specula Astronomica Grenovicensi per annos 1750-1762 institutis. In *Regiomonti: In commissis apud Frid. Nicolovium, 1818.*, 1818.
- [12] O. Bienayme. Field astrometry using orthogonal functions. *Astron. Astrophys.*, 278:301–106, October 1993.

- [13] N. Borderies. *La rotation de Mars: théorie analytique et analyse d'observations de l'expérience Viking*. PhD thesis, Université de Toulouse, 1980.
- [14] B. Boss, S. Albrecht, H. Jenkins, H. Raymond, A. J. Roy, W. B. Varnum, R. E. Wilson, and L. Boss. General Catalogue of 33342 stars for the epoch 1950. *Washington, D.C., Carnegie institution of Washington, 1936-37.*, 1936.
- [15] L. Boss. Preliminary General Catalogue of 6188 stars for the epoch 1900. In *Washington, D.C.: Carnegie Institution, 1910*, 1910.
- [16] P. Bretagnon. Théories au deuxième ordre des planètes inférieures. *Astron. Astrophys.*, 84:329–341, 1980.
- [17] P. Bretagnon. Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes, solution VSOP82. *Astron. Astrophys.*, 114:278, 1982.
- [18] P. Bretagnon and G. Francou. Planetary theories in rectangular and spherical variables. *Astron. Astrophys.*, 202:309–315, 1988.
- [19] R. A. Broucke and P.J. Cefola. On the equinoctial orbit elements. *Celes. Mech.*, 5:303–310, 1972.
- [20] D. Brouwer and G. Clemence. *Methods of celestial mechanics*. Academic Press, 1961.
- [21] Bureau des longitudes. *Introduction aux éphémérides astronomiques: supplément explicatif à la connaissance des temps*, les éditions de physiques edition, 1997.
- [22] Carlsberg Meridian Catalogue La Palma, 1997. vol. 9.
- [23] Annales of Cape Observatory, 1907. vol. 2.
- [24] J. Cassini. Tables astronomiques du soleil, de la lune, des planetes, des etoiles fixes, et des satellites de Jupiter et de Saturne; avec l'explication à l'usage de ces memes tables. In *Paris, Imprimerie royale, 1740.*, 1740.
- [25] J. Chapront, P. Bretagnon, and M. Mehl. Un formulaire pour le calcul des perturbations d'ordres élevés dans les problèmes planétaires. *Celestial Mechanics*, 11:379–399, 1975.
- [26] J. Chapront, M. Chapront-Touzé, and G. Francou. Complements to Moon's lunar libration theory. comparisons and fits to JPL numerical integrations. In *IAU Colloq. 172: Impact of Modern Dynamics in Astronomy*, pages E20–+, 1998.
- [27] J. Chapront, M. Chapront-Touzé, and G. Francou. Determination of the lunar orbital and rotational parameters and of the ecliptic reference system orientation from LLR measurements and IERS data. *Astron. Astrophys.*, 343:624–633, March 1999.
- [28] M. Chapront-Touze and J. Chapront. The lunar ephemeris ELP 2000. *Astron. Astrophys.*, 124:50–62, July 1983.
- [29] P. Charlot, O. J. Sovers, J. G. Williams, and X. X. Newhall. Precession and nutation from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging observations. *Astron. Journal.*, 109:418–427, January 1995.
- [30] F. Chollet. An evaluation of phase corrections to planet position measurements. *Astron. Astrophys.*, 139:215–219, October 1984.

- [31] G. M. Clemence. The motion of Mercury 1765-1937. *Astron. Journal.*, 50:126–127, July 1943.
- [32] G. M. Clemence. Venus perturbations in Newcomb's Tables of the Sun. *Astron. Journal.*, 50:127–128, July 1943.
- [33] C. Cohen and E. Hubbard. A nonsingular set of orbits elements. *Astron. Journal.*, 67:10, 1962.
- [34] K. Davies. *Ionospheric radio propagation*. Dover Publ, 1966.
- [35] M. E. Davies, V. K. Abalakin, M. Bursa, J. H. Lieske, B. Morando, D. Morrison, P. K. Seidelmann, A. T. Sinclair, B. Yallop, and Y. S. Tjufflin. Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on cartographic coordinates and rotational elements of the planets and satellites: 1994. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 63:127–148, 1995.
- [36] S. Debarbat and P. Grudler. Observations of Jupiter with Danjon Astrolabes in 1965, 1966, 1967. *Astron. Astrophys.*, 22:81+, January 1973.
- [37] Deposit of Soviet Union Institute of scientific and technical information, 1976-1986. vol. 1975-1588 – 895-B86.
- [38] W. J. Eckert. Coordinates of the five outer planets, 1653-2060. In *Washington, U. S. Govt. Print. Off., 1951*, 1951.
- [39] B. Edlen. *J. Opt. Soc. Am.*, 43:339, 1953.
- [40] ESA. The HIPPARCOS and TYCHO Catalogues (vol. 1-17). In *European Space Agency SP-1200 (1997)*, pages 0+, 1997.
- [41] M. Feissel. Permanent milliarcsecond link of celestial and terrestrial reference systems. In *IAU Colloq. 127: Reference Systems*, pages 101+, 1991.
- [42] M. Feissel and F. Mignard. The adoption of ICRS on 1 January 1998: meaning and consequences. *Astron. Astrophys.*, 331:L33–L36, March 1998.
- [43] A. Fienga. On the use of Hipparcos data for the determination of astrometric positions of outer planets. *Astron. Astrophys.*, 335:1111–1116, July 1998.
- [44] W. M. Folkner, P. Charlot, M. H. Finger, J. G. Williams, O. J. Sovers, X. X. Newhall, and E. M. Standish. Determination of the extragalactic-planetary frame tie from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging measurements. *Astron. Astrophys.*, 287:279–289, 1994.
- [45] W. M. Folkner, T. P. McElrath, and A. J. Mannucci. Determination of position of Jupiter from Very-Long Baseline Interferometry Observations of Ulysses. *Astron. Journal.*, 112:1294+, September 1996.
- [46] W.M. Folkner. Preliminary results from VLBI measurement of Venus on September 12, 1990. Technical Report 335.1-92-25., JPL IOM, 1992.
- [47] W.M. Folkner. Results from VLBI measurement of Venus on March 29, 1992. Technical Report 335.1-93-22., JPL IOM, 1993.

- [48] W.M. Folkner. Results from VLBI measurement of Venus on April 1, 1994. Technical Report 335.1-94-014., JPL IOM, 1994.
- [49] W.M. Folkner. Results from VLBI measurements of Venus on December 22 and December 23, 1991. Technical Report 335.1-94-006., JPL IOM, 1994.
- [50] W. Fricke. Determination of the equinox and equator of the FK5. *Astron. Astrophys.*, 107:L13–L16, March 1982.
- [51] W. Fricke. Fundamental catalogues, past, present and future. *Celestial Mechanics*, 36:207–239, July 1985.
- [52] W. Fricke, A. Kopff, W. Gliese, F. Gondolatsch, T. Lederle, H. Nowacki, W. Strobel, and P. Stumpff. Fourth fundamental catalogue FK4. *Veroeffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg*, 10:1+, 1963.
- [53] W. Fricke, H. Schwan, T. Lederle, U. Bastian, R. Bien, G. Burkhardt, B. Du Mont, R. Hering, R. Jahrling, H. Jahreiss, S. Roser, H. M. Schwerdtfeger, and H. G. Walter. Fifth fundamental catalogue FK5. Part 1: The basic fundamental stars. *Veroeffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg*, 32:1+, 1988.
- [54] Krogh F.T. *Lectures notes in mathematics*. Springer-Verlag, 1972.
- [55] S. Fukao, editor. *Middle atmosphere program*. International School on atmospheric radar, ICS Scientific Committee on solar-terrestrial physics, 1989.
- [56] M. Gai. Image centering accuracy with CCDs. In *Optical Detectors for Astronomy*. ESO, September 1999. 4th Workshop.
- [57] A. Gaillot. *Annales de l'Observatoire de Paris*, volume 31. Gauthier-Villars, 1913.
- [58] J. D. Goguen. *A theoretical and experimental investigation of the photometric functions of particulate surfaces*. PhD thesis, Cornell Univ., Ithaca, NY., 1981.
- [59] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 1950.
- [60] R.M. Green. *Spherical astronomy*. Cambridge University Press, 1985.
- [61] X. Guo, T. M. Girard, W. F. Van Altena, and C. E. Lopez. Space velocity of the globular cluster NGC 288 and astrometry with the CTIO 4 meter telescope. *Astron. Journal.*, 105:2182–2191, June 1993.
- [62] E. Halley. Edmundi halleii astronomi dum viveret regii tabulae astronomicae. In *Londini, apud Gulielmum Inneys, 1749.*, 1749.
- [63] O. Heckmann and W. Dieckvoss. AGK3: star catalogue of positions and proper motions, north of 2 .5 declination : derived from photographic plates taken at Bergedorf and Bonn in the years 1928-1932 and 1956-1963. *Hamburg-Bergedorf: Sternwarte, 1975.*, 1975.
- [64] R. N. Herring and S. Rotheram. A versatile waveguide mode method for tropospheric propagation modelling. In *International Conference on Antennas and Propagation, 5th, York, England, Mar. 30-Apr. 2, 1987, Proceedings. Part 2 (A88-17501 05-32)*. London, Institution of Electrical Engineers, 1987, p. 355-358., pages 355–358, 1987.

- [65] S. S. Hough. Results of meridian observations of the sun, Mercury and Venus made at the Royal Observatory, Cape of Good Hope, in the years 1907 to 1911. *Annals of the Cape Observatory*, 8, 1915.
- [66] Proceeding of Main Astronomical observatory at Pulkovo, 1961-1977. vol. 171-195.
- [67] A. Kahrstedt. Über die Verbesserung des Aquinoktiums des N.F.K. *Astronomische Nachrichten*, 244:33–48, 1931.
- [68] G. H. Kaplan, J. A. Hughes, P. K. Seidelmann, C. A. Smith, and B. D. Yallop. Mean and apparent place computations in the new IAU system. III - apparent, topocentric, and astrometric places of planets and stars. *Astron. Journal.*, 97:1197–1210, April 1989.
- [69] G.H. Kaplan, J.A. Hughes, P.K. Seidelmann, C.A. Smith, and B.D. Yallop. Mean and apparent place computations in the new IAU system. III - Apparent, topocentric, and astrometric places of planets and stars. *Astron. Journal.*, 97:1197–1210, April 1989.
- [70] H. Kinoshita and S. Aoki. The definition of the ecliptic. *Celestial Mechanics*, 31:329–338, December 1983.
- [71] H. Knox-Shaw, J. Jackson, and W.H. Robinson. *The observations of the reverend T. Hornby, made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the years 1774-1798*. Radcliffe Trustees, 1932.
- [72] A. Kopff. Definitive Verbesserungen der Zusatzsterne des FK3 1900.0. *Astronomische Nachrichten*, 264:201–214, 1937.
- [73] J. Kovalevsky. *Astrometrie moderne*. Springer-Verlag Paris, 1990.
- [74] J. Kovalevsky. Preliminary report of the work of the subgroup on coordinate frames and origins. In *IAU Colloq. 127: Reference Systems*, pages 17+, 1991.
- [75] K. Lambeck. *Geophysical Geodesy*. Oxford Science Publication, 1988.
- [76] M. G. Lattanzi and B. Bucciarelli. A non-deterministic approach to Schmidt plate astrometry. *Astron. Astrophys.*, 250:565–572, October 1991.
- [77] U.J. Le Verrier. *Annales de l'Observatoire de Paris*. Observatoire de Paris, 1855.
- [78] J. Lecacheux. Master's thesis, DEA de l'Observatoire de Paris, 1969.
- [79] J. H. Lieske, T. Lederle, W. Fricke, and B. Morando. Expressions for the precession quantities based upon the IAU 1976 system of astronomical constants. *Astron. Astrophys.*, 58:1–2, June 1977.
- [80] L. Lindgren. Meridian observations of planets with a photoelectric multislit micrometer. *Astron. Astrophys.*, 57:55–72, May 1977.
- [81] L. Lindgren and J. Kovalevsky. Linking the Hipparcos Catalogue to the extragalactic reference system. *Astron. Astrophys.*, 304:189+, December 1995.
- [82] L. Lindgren and M. A. C. Perryman. Microarcsec astrometry: The GAIA mission. *The First Results of Hipparcos and Tycho, 23rd meeting of the IAU, Joint Discussion 14, 25 August 1997, Kyoto, Japan.*, 14:E18–+, 1997.

- [83] N. R. Lomb. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39:447–462, February 1976.
- [84] L. Magnani. The Arecibo 5 ghz mini-gregorian feed system - spectral line performance. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 105:894–901, August 1993.
- [85] J.W. Marini. Correction of satellite tracking data for an arbitrary tropospheric profile. *Radio Science*, 1971.
- [86] D.D. McCarthy. IERS conventions (1996). Technical report, IERS, July 1996.
- [87] F. Mignard and M. Froeschle. Linking FK5 to ICRF. *The New International Celestial Reference Frame, 23rd meeting of the IAU, Joint Discussion 7, 22 August 1997, Kyoto, Japan.*, 7:E24–+, 1997.
- [88] D. L. Mitchell, S. J. Ostro, K. D. Rosema, R. S. Hudson, D. B. Campbell, J. F. Chandler, and I. I. Shapiro. Radar observations of asteroids 7 Iris, 9 Metis, 12 Victoria, 216 Kleopatra, and 654 Zelinda. *Icarus*, 118:105–131, November 1995.
- [89] X. Moisson. Solar system motion to third order of masses. *Astron. Astrophys.*, 341:318–327, 1999.
- [90] H. R. Morgan. Catalog of 5,268 standard stars for the equinox and epoch 1950.0 based on the Normal Star System N30. In *Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanach 13, part 3, pp. 109-321 (1952)*, pages 0+, 1952.
- [91] J. E. Morrison, R. L. Smart, and L. G. Taff. Do we need to model plates at all? *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 296:66–76, May 1998.
- [92] D. O. Muhleman. Microwave spectroscopy and radiometry of Saturn and Titan. Technical report, December 1985.
- [93] D. O. Muhleman and J. D. Anderson. Solar wind electron densities from Viking dual-frequency radio measurements. *Astrophys. Journal*, 247:1093–1101, August 1981.
- [94] D. O. Muhleman, G. L. Berge, D. Rudy, and A. E. Niell. Precise VLA positions and flux-density measurements of the Jupiter system. *Astron. Journal*, 92:1428–1435, December 1986.
- [95] D. O. Muhleman, P. B. Esposito, and J. D. Anderson. The electron density profile of the outer corona and the interplanetary medium from Mariner-6 and Mariner-7 time-delay measurements. *Astrophys. Journal*, 211:943–957, February 1977.
- [96] K. Muinonen and E. Bowell. Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities. *Icarus*, 104:255–279, 1993.
- [97] C. A. Murray. Relativistic astrometry. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 195:639–648, May 1981.
- [98] Nautical almanac office, U.S. Naval Observatory. *Explanatory supplement to the astronomical almanac*, university science books edition, 1992.
- [99] Nautical almanac offices of United Kingdom and U.S.A. *Explanatory supplement to the astronomical ephemeris and the american ephemeris and nautical almanac*, her majesty's stationery office edition, 1961.

- [100] S. Newcomb. On the right ascensions of the equatorial fundamental stars and the corrections necessary to reduce the right ascensions of different catalogues to a mean homogeneous system. *Washington, Govt. print. off., 1872.*, 1872.
- [101] S. Newcomb. Catalogue of fundamental stars for the epochs 1875 and 1900 reduced to an absolute system. In *Washington, 1898.*, 1898.
- [102] S. Newcomb. Theory of the Sun. *Astron. Pap. Amer. Ephem.*, 6, 1898.
- [103] X. X. Newhall, E. M. Standish, and J. G. Williams. DE 102 - a numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. *Astron. Astrophys.*, 125:150–167, August 1983.
- [104] C. Oesterwinter and C. Cohen. New orbital elements for Moon and planets. *Celestial Mechanics*, 5:317–395, 1972.
- [105] S. J. Ostro, D. B. Campbell, A. A. Hine, I. I. Shapiro, J. F. Chandler, C. L. Werner, and K. D. Rosema. Radar images of asteroid 1627 Ivar. *Astron. Journal.*, 99:2012–2018, June 1990.
- [106] S. J. Ostro, D. B. Campbell, R. A. Simpson, R. S. Hudson, J. F. Chandler, K. D. Rosema, I. I. Shapiro, E. M. Standish, R. Winkler, D. K. Yeomans, R. Velez, and R. M. Goldstein. Europa, Ganymede, and Callisto: New radar results from arecibo and goldstone. *J. Geophys. Res.*, 97:18277–18244, November 1992.
- [107] S. J. Ostro, R. Connelly, and L. Belkora. Asteroid shapes from radar echo spectra - a new theoretical approach. *Icarus*, 73:15–24, January 1988.
- [108] S. J. Ostro, R. F. Jurgens, K. D. Rosema, R. S. Hudson, J. D. Giorgini, R. Winkler, D. K. Yeomans, D. Choate, R. Rose, M. A. Slade, S. D. Howard, D. J. Scheeres, and D. L. Mitchell. Radar observations of asteroid 1620 Geographos. *Icarus*, 121:46–66, May 1996.
- [109] S. J. Ostro, D. K. Yeomans, P. W. Chodas, R. M. Goldstein, R. F. Jurgens, and T. W. Thompson. Radar observations of asteroid 1986 JK. *Icarus*, 78:382–394, April 1989.
- [110] J.C. Owens. Optical refractive index of air: dependence on pressure temperatures and composition. *Applied Optics*, 6:51–60, 1967.
- [111] D. Pascu and R.E. Schmidt. Photographic positional observations of Saturn. *Astron. Journal.*, 99:1974–1984, June 1990.
- [112] J. Peters. Neuer Fundamentalkatalog des Berliner Astronomischen Jahrbuchs nach den Grundlagen von A. Auwers. Fur die Epochen 1875 und 1900. *Veroffentlichungen des Koniglichen Astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin, Nr. 33; Verlagsbuchhandlung Ferd. Dummler, VIII + 116 Seiten*, 33:1+, 1907.
- [113] I. Platais, T. M. Girard, W. F. Van Altena, W. Z. Ma, L. Lindegren, F. Crifo, and H. Jahreizlig;. A study of systematic positional errors in the SPM plates. *Astron. Astrophys.*, 304:141+, December 1995.
- [114] H.W Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical recipes in fortran*. Cambridge University Press, 1992.

- [115] N. Rappaport and J. J. Plaut. A 360-degree and -order model of Venus topography. *Icarus*, 112:27–33, November 1994.
- [116] Royal Greenwich Observatory Bulletins, 1973. vol. 178.
- [117] N. Robichon, C. Turon, V.v. Makarov, M.A.C. Perryman, E. Hoeg, M. Froeschle, D.W. Evans, J. Guibert, R.S. Le Poole, F. Van Leeuwen, U. Bastian, and J.L. Halbwachs. Schmidt plate astrometric reductions using preliminary Hipparcos and Tycho data. *Astron. Astrophys.*, 304:132+, December 1995.
- [118] F. Roddier. Adaptive optics: Performance and limitations. In *Very High Angular Resolution Imaging*, pages 273–281. International Astronomical Union, 1994. Symposium 158.
- [119] F. Roddier, M. Northcott, and J. E. Graves. A simple low-order adaptive optics system for near-infrared applications. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 103:131–149, January 1991.
- [120] G. Saporta. *Probabilité, analyse des données et statistique*. Technip, 1990.
- [121] J. D. Scargle. Studies in astronomical time series analysis. II - Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *Astrophys. Journal.*, 263:835–853, December 1982.
- [122] H. Schwan. Development and testing of a method to derive an instrumental system of positions and proper motions of stars. *Veroeffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts Heidelberg*, 27:1+, 1977.
- [123] H. Schwan. A computer program for evaluating the analytical representation of the systematic differences between the FK4 and the FK5 or other catalogues of star positions or proper motions. *Astron. Astrophys.*, 198:363+, June 1988.
- [124] P. K. Seidelmann, M. E. Germain, T. P. Greene, S. D. Horner, K. J. Johnston, D. G. Monet, M. A. Murison, J. D. Phillips, R. D. Reasenberg, and S. E. Urban. FAME- Full-sky Astrometric Mapping Explorer. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, volume 31, pages 1401+, September 1999.
- [125] S. Silver. *Microwave Antenna Theory and Design*. McGraw-Hill, 1951.
- [126] J. L. Simon. Theory for the motion of the four giant planets - the TOP 82 solution. *Astron. Astrophys.*, 120:197–202, April 1983.
- [127] C. A. Smith, G. H. Kaplan, J. A. Hughes, P. K. Seidelmann, B. D. Yallop, and C. Y. Hohenkerk. Mean and apparent place computations in the new IAU system. I - The transformation of astrometric catalog systems to the equinox J2000.0. *Astron. Journal.*, 97:265–279, January 1989.
- [128] E. M. Standish. Two differing definitions of the dynamical equinox and the mean obliquity. *Astron. Astrophys.*, 101:L17–+, September 1981.
- [129] E. M. Standish. Orientation of the JPL ephemerides, DE 200/LE 200, to the dynamical equinox of J2000. *Astron. Astrophys.*, 114:297–302, oct 1982.
- [130] E. M. Standish. The observational basis for JPL's DE 200, the planetary ephemerides of the astronomical almanac. *Astron. Astrophys.*, 233:252–271, July 1990.

- [131] E. M. Standish. JPL planetary and lunar ephemerides, DE403. Technical report, Jet Propulsion Laboratory Interoffice Memorandum, 1995.
- [132] E. M. Standish. JPL planetary and lunar ephemerides, DE405. Technical report, Jet Propulsion Laboratory Interoffice Memorandum, 1998.
- [133] E. M. Standish and G. Williams. Dynamical reference frames in the planetary and Earth-Moon systems. *IAU Symposia*, 141:173–180, 1990.
- [134] H. Steppe, R. Mauersberger, A. Schulz, and J. W. M. Baars. First sub-mm spectral line observations with the IRAM 30-m telescope - a co ($j = 3-2$) map of IC 342. *Astron. Astrophys.*, 233:410–416, July 1990.
- [135] R. C. Stone. Systematic errors in the FK5 catalog as derived from CCD observations in the extragalactic reference frame. *Astron. Journal.*, 114:850+, August 1997.
- [136] R. C. Stone. Ccd positions for the outer planets in 1996-1997 determined in the extragalactic reference frame. *Astron. Journal.*, 116:1461–1469, September 1998.
- [137] Ronald C. Stone. An accurate method for computing atmospheric refraction. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 108:1051–1058, November 1996.
- [138] G. Thorpe and D. Fraser. Restoration over fields of view wider than the isoplanatic patch. In *Very High Angular Resolution Imaging*, pages 221–223. International Astronomical Union, 1994. Symposium 158.
- [139] Tokyo Astronomical Bulletin, 1971. vol. 208-236.
- [140] Transactions of Main Astronomical Observatory at Pulkovo, 1966. vol. 176.
- [141] R. Tomasse. *La regression: nouveaux regards sur une ancienne méthode statistique*. INRA, 1992.
- [142] J. Tonry, B. E. Burke, and P. L. Schechter. The orthogonal transfer CCD. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 109:1154–1164, October 1997.
- [143] M. Toulmonde and F. Chollet. Correction de phase et positions planétaires. *Astron. Astrophys.*, 287:1014–1020, July 1994.
- [144] G. L. Tyler, J. P. Brenkle, T. A. Komarek, and A. I. Zygielbaum. The Viking solar corona experiment. *J. Geophys. Res.*, 82:4335–4340, September 1977.
- [145] S. E. Urban and T. E. Corbin. New reductions of the Astrographic Catalogue. conventional plate adjustment of the Cape Zone. *Astron. Astrophys.*, 305:989+, January 1996.
- [146] Publications of the U.S. Naval Observatory, 1911-1992. vol. XI -XXIV.
- [147] P. Van de Kamp. *Principles of astrometry*. Freeman, 1967.
- [148] L. Virgoux, O. Boulade, Y. Mellier, and V. de Lapparent. Wide field imaging at CFHT: the MEGACAM project. Technical report, CEA/DSM/DAPNIA/ service d'astrophysique, Institut d'astrophysique de Paris, CEA/DSM/DAPNIA/ service de physique des particules, L.A.S, Observatoire de Bordeaux, Observatoire de Besancon, Observatoire de Marseille, Observatoire Midi-Pyrénées, Observatoire de Paris-Meudon, Dominion Astrophysical Observatory, Canadian Institute of Theoretical Astrophysics, C.F.H.T, 1996.

- [149] E. W. Woolard. Redevelopment of the theory of nutation. *Astron. Journal.*, 58:1+, February 1953.
- [150] B. D. Yallop, C. Y. Hohenkerk, C. A. Smith, G. H. Kaplan, J. A. Hughes, and P. K. Seidelmann. Mean and apparent place computations in the new IAU system. II. Transformation of mean star places from FK4 B1950.0 to FK5 J2000.0 using matrices in 6-space. *Astron. Journal.*, 97:274+, January 1989.
- [151] H. Yan. A new expression for astronomical refraction. *Astron. Journal.*, 112:1312+, September 1996.
- [152] H. Yan and J. Ping. The generator function method of the tropospheric refraction corrections. *Astron. Journal.*, 110:934+, August 1995.
- [153] A. Y. Yatsenko. Exact theory of astronomical refraction for the real atmosphere. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, 111:579+, June 1995.
- [154] D. K. Yeomans, P. W. Chodas, M. S. Keesey, S. J. Ostro, J. F. Chandler, and I. I. Shapiro. Asteroid and comet orbits using radar data. *Astron. Journal.*, 103:303–317, January 1992.
- [155] A.L. Zaitsev and V.G. Gratchev. Differential RADAR-VLBI (DRVLBI) observations of Venus and Mars. UAI Telegram, June 1999.

Annexe A

Compléments de statistique

A.1 Généralités sur la régression

Nous allons ici exposer ce qui a motivé la construction de l'algorithme d'ajustement utilisé dans ce travail. Le problème de l'ajustement des éléments osculateurs d'une planète aux observations est similaire au problème suivant:

Soit un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) de n mesures indépendantes de s grandeurs physiques $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

On note X , le vecteur aléatoire, constitué des valeurs prises par l'échantillon et $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, la distribution de probabilité de X , appelée fonction de vraisemblance de l'échantillon. La question est: comment, à partir de cet échantillon, estimer au mieux les s grandeurs physiques précédentes? Ou encore, quels critères utiliser pour former s fonctions des observations, $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $g_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, telles que ces s fonctions soient des estimateurs de $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$?

Un exemple classique: dans le cas d'une distribution normale des erreurs, on montre que l'estimateur de la moyenne expérimentale, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, est un très bon estimateur.

Nous allons expliquer maintenant les notions de 'distribution normale des erreurs' surtout de 'très bon estimateur' afin d'établir des conditions sur le choix de l'estimateur, ou des estimateurs, utilisé(s) par la suite.

A.1.1 Distributions normales et asymptotiquement normales

Rappels sur les variables aléatoires

Soit X , une variable aléatoire et P_x , la loi de probabilité de X .

P_x admet une densité de probabilité, f , si $\forall I \subset \mathcal{R}$, on a: $P_x(I) = \int_I f(x) dx$

A partir de cette densité de probabilité, il est possible de décrire la variable aléatoire à l'aide de moments statistiques. Les plus utilisés sont l'espérance mathématique, $E(X)$, la variance de X , $D(X)$ (ou son écart type, $\sigma(X)$). Ajoutons à cela les troisième et quatrième moments, moins utilisés mais riches d'informations sur X .

– L'espérance mathématique $E(X)$

X , variable aléatoire, admettant f comme densité de probabilité, alors E , espérance mathématique, s'écrit:

$$E(X) = \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx$$

L'espérance mathématique n'existe pas toujours, car la convergence de $\int_{\mathcal{R}} xf(x)dx$ n'est pas toujours assurée. L'exemple classique est celui d'une loi de probabilité suivant une loi de type Cauchy de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur \mathcal{R} . L'intégrale n'étant pas convergente, cette loi n'a aucun moment.

– La variance $D(X)$

Par définition, la variance de X est:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{\mathcal{R}} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Soient X et Y , 2 variables aléatoires. On définit leur covariance par: $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Ainsi, 2 variables aléatoires sont indépendantes si $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

– Autres moments

On définit, si ils existent, les moments d'ordre k par:

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

Parmi ces moments, μ_3 et μ_4 , permettent de caractériser la forme de la distribution de X . En effet, à partir de ces derniers, on définit les coefficients d'asymétrie, $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, et d'aplatissement, $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$, des courbes de densité.

Grâce à ces différentes quantités, il est possible de d'écrire la densité de probabilité d'une variable aléatoire, et donc la variable elle-même.

Variable et distribution normales

Une variable X suit une loi normale $LG(m; \sigma)$ si et seulement si sa densité de probabilité f s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Dans ce cas, on a:

$$E(X) = m \quad ; \quad D(X) = \sigma^2$$

On montre que les k -moments deviennent $\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$

Cette loi de probabilité est d'une grande importance car d'une part, comme nous allons le voir dans la suite, elle apparaît comme loi limite de caractéristiques liées à un échantillon de grande taille et d'autre part, elle conditionne la plupart des estimateurs.

On dira qu'un échantillon d'observations a une distribution normale si la loi de probabilité des erreurs observationnelles est normale. Ce qui s'écrit: $X = (x_1, \dots, x_n)$ avec $\forall i, x_i = m + \Delta_i$ avec $\Delta_i \sim LG(0, \sigma)$ et donc $x_i \sim LG(m, \sigma)$. La loi de vraisemblance de l'échantillon va alors s'écrire:

$$L(x_1, \dots, x_n, m) = \frac{1}{2\pi^{n/2}\sigma^n} \exp\left[\sum_{i=1}^n -\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Pour reprendre l'exemple donné initialement, on montre que la moyenne arithmétique est un bon estimateur de m car on a :

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = m \\ D(\bar{X}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \sigma^2/n \end{aligned}$$

ce qui est la principale caractéristique d'un estimateur non biaisé.

Normalité asymptotique - Théorème central-limite

Il existe bien d'autres loi de probabilité aussi bien continues que discrètes, bien que dans notre cas nous ne considérons que des distributions continues. En statistique, on rencontre fréquemment des distributions sensiblement normales c'est à dire que l'on a affaire à une variable qui peut être considéré comme la somme d'un très grand nombre de causes indépendantes. C'est le cas en astronomie dans les cas d'erreurs observationnelles vérifiant l'hypothèse dite des erreurs élémentaires de Bessel. La justification théorique de cette hypothèse de l'effet global d'un grand nombre de causes indépendantes se trouve dans le théorème central limite de A.M.Liapounov.

Théorème central limite 1 Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes pas forcément de même loi et d'espérance m_i et de variance σ_i^2 . Soit $S_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ et $F_i(x)$ la fonction de répartition de $(X_i - m_i)$.

On note :

$$L_n = \frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x| > S_n} x^2 dF_i(x)$$

Si la condition suivante est réalisée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$$

alors :

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - m_i)}{S_n} \rightarrow ULG(0;1) \quad \text{uniformement}$$

La limite ' $L_n \rightarrow 0$ ' pour n grand est la traduction analytique de la condition qui veut qu'aucun des termes de S_n n'est un effet prépondérant dans cette somme. D'autre part, il est important de noter que dans le cas de suites de variables aléatoires suivant des distributions discrètes de type loi binomiale (théorème de De Moivre-Laplace) et loi de Poisson, on démontre que ces suites convergent vers la loi normale. Ces théorèmes permettent de justifier l'emploi abondant de la loi normale comme modèle. Cependant, un échantillonnage d'observations réalisées sur un ensemble hétérogène ou biaisé par une mauvaise réduction des données brutes suffit à produire une distribution non normale ou non asymptotiquement normale. Dans le cas d'un ensemble hétérogène, c'est à dire par exemple dans le cas de mesures d'une même grandeur physique réalisées sur des populations différentes, on considère la distribution de l'échantillon comme une somme de distributions normales. Dans ces cas-là, nous verrons quelles conséquence entraîne la 'non-normalité' de tels échantillons.

A.1.2 Les estimateurs

Comme nous l'avons vu en introduction, l'estimateur d'une grandeur physique α est fonction des variables aléatoires, (x_1, \dots, x_n) . En tant que tel, il est lui-même une variable aléatoire. D'autre part, d'après le théorème central limite, on montre que pour un nombre assez grand d'observations, la distribution des observations est asymptotiquement normale. De même, l'estimateur aura lui aussi une distribution asymptotiquement normale. En conclusion, on peut considérer que dans la plupart des cas d'estimation de paramètres à l'aide de grands échantillon, on aura affaire à des estimateurs qui suivent asymptotiquement un loi normale à une ou plusieurs dimensions.

A.1.3 estimateurs biaisés

De manière générale, nous appellerons le vecteur $G=(g_1, \dots, g_s)$, vecteur des estimateurs non biaisés des grandeurs physiques $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, si

$$E(g_i) = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, s$$

de même qu'il a été défini des distributions asymptotiquement normales, on définit des estimateurs asymptotiquement non biaisés tels que:

$$E(g_i) - \alpha_i \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Il est évident que le premier critère de choix pour un estimateur sera son biais. On s'efforcera de trouver un estimateur sans erreur systématique, même s'il reste possible de trouver, dans certains cas particulier des estimateurs biaisés plus précis qu'un estimateur sans biais.

L'estimation sans biais de variance minimale

Nous allons montrer que le deuxième critère utile lors du choix d'un estimateur est celui du minimum de variance. Il nous faut pour cela introduire la notion d'exhaustivité.

Une statistique sera dite exhaustive si elle conserve toute l'information fournie par un échantillon sur une grandeur physique α inconnue. Mathématiquement, cela s'exprime de la façon suivante: On note $L(x_1, \dots, x_n, \alpha)$, la fonction de vraisemblance de $X=(x_1, \dots, x_n)$ et U une statistique suivant une loi $g(t, \alpha)$. U est dite exhaustive si l'on peut écrire $L(X, \alpha) = g(t, \alpha) \cdot h(X)$, c'est à dire que la densité conditionnelle de l'échantillon est indépendante du paramètre.

Par exemple que la statistique $U = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$ est exhaustif pour σ^2 sur un échantillon gaussien.

Application importante

On montre que s'il existe une statistique exhaustive U et T un estimateur quelconque sans biais d'une quantité physique α , alors si T est de variance minimale, il ne dépend que de U . Ceci implique que T est l'un des meilleurs estimateurs possible pour α .

T est le meilleur estimateur possible si U est exhaustive et complète c'est à dire qu'une famille de probabilité $f(X, \alpha)$ si $E[h(U)] = 0 \quad \forall \alpha \rightarrow h = 0$ presque sûrement. Dans la recherche des critères de sélection d'estimateur, on demandera donc principalement que l'estimateur soit au moins sans biais et de variance minimale.

Précision d'un estimateur pour une taille d'échantillon donnée

Plaçons nous dans le cas simple où il n'y a qu'un seul paramètre, α , à estimer et soit $R=(x_1, \dots, x_n)$, l'échantillon de fonction de vraisemblance $L(x_1, \dots, x_n, \alpha)$. On appelle $t(x_1, \dots, x_n)$, un estimateur non biaisé de α . Par définition, on a:

$$\int \dots \int_R L(x_1, \dots, x_n, \alpha) dx_1 \dots dx_n = 1$$

d'où

$$\int \dots \int_R \frac{\partial L}{\partial \alpha} dx_1 \dots dx_n = 0$$

Comme t est un estimateur non biaisé, on a :

$$E[t(x_1, \dots, x_n)] = \alpha$$

on peut donc écrire :

$$\int \dots \int_{\mathcal{R}} t \frac{\partial L}{\partial \alpha} dx_1 \dots dx_n = 1$$

Par intégration par partie, on arrive à l'égalité :

$$\int \dots \int_{\mathcal{R}} (t - \alpha) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) L dx_1 \dots dx_n = 1$$

Ceci revient en fait à considérer

$$E[(t - \alpha) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right)] = 1$$

Par ailleurs, on peut montrer que si X et Y sont des variables aléatoires alors on a la propriété suivante :

$$E(X^2) \cdot E(Y^2) \geq E((X \cdot Y)^2) \geq [E(X \cdot Y)]^2$$

Ce qui après application de cette dernière propriété à l'inégalité vue précédemment, donne

$$E(t - \alpha)^2 \cdot E\left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)^2 \geq 1$$

Après réécriture de $E\left(\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)^2$ et différents calculs, on aboutit à l'inégalité dite de Rao-Cramer simplifiée, à savoir :

$$D(t) = E(t - \alpha)^2 \geq \frac{1}{E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \alpha}\right)}$$

La quantité $E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \alpha}\right)$ est appelée quantité d'information de Fisher.

Conclusion: Pour une taille d'échantillon donnée, la variance d'un estimateur non biaisé quelconque est limitée inférieurement par la quantité d'information de Fisher. Un estimateur qui égale cette borne est dit efficace.

On notera que par définition un estimateur efficace est un estimateur sans biais, de variance minimale, qui est dans le cas présent la plus petite qui soit pour un échantillon donné. A ce titre, on peut dire qu'un estimateur efficace est le plus précis possible pour un échantillon donné.

Application importante

Dans le cas de la mesure d'une grandeur physique, avec une distribution normale d'erreurs, on sait que la fonction de vraisemblance de l'échantillon va s'écrire :

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i, m) \quad \text{avec} \quad f(x_i, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

On montre alors que la quantité de Fisher équivaut à $\frac{1}{\sigma^2}$. Donc pour un estimateur quelconque non biaisé, t , on a la minoration :

$$D(t) \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

Or comme nous l'avons déjà vu, la variance de la moyenne expérimentale s'écrit $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Donc on peut conclure que dans le cas d'une distribution normale (voir asymptotiquement normale) des erreurs, l'estimateur de la moyenne expérimentale est un estimateur efficace.

On généralise aux cas d'estimation de plusieurs grandeurs physiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, en notant t_1, \dots, t_n des estimateurs de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Par les mêmes calculs que précédemment, on aboutit à l'inégalité de Rao-Cramer:

Inégalité de Rao-Cramer 1 *Si l'on suppose l'existence et la non-singularité de la matrice dite d'information de Fisher I*

$$I = (I_{ij}) = E(L_{ij}) \quad \text{avec} \quad L_{ij} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$$

et celles des quantités

$$E\left(t_j \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\right)$$

nous avons, $\forall Z$,

$$Z^T B Z \geq Z^T I^{-1} Z \quad \text{avec} \quad B = (b_{ij}) = (E(t_i - \alpha_i)(t_j - \alpha_j)), \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

L'ensemble des estimateurs égalant la matrice I est dit totalement efficace.

Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

L'idée est ici de trouver des estimateurs des grandeurs physiques $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ rendant maximum $L(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$. Ainsi, si on donne à $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ la valeur prise par les estimateurs ainsi définis, nous obtenons le maximum de la densité de probabilité de l'échantillon.

La condition d'optimisation de L va s'appeler équation de vraisemblance et s'écrit de façon générale:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0$$

Sous certaines conditions d'existence et d'unicité [Linnik], il est possible de démontrer l'efficacité voir l'unicité d'une solution issue du principe du maximum de vraisemblance.

Application importante

Supposons que l'échantillon des observations de la grandeur physique α soit entaché d'erreurs aléatoires, Δ_i . Dans le cas où $\Delta_i \text{ LG}(0; \sigma)$, alors la fonction de vraisemblance s'écrit:

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha) \quad \text{avec} \quad f(x_i, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x_i - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Si on applique le principe de maximum de vraisemblance pour une estimation efficace de α , l'équation de vraisemblance devient équivalente à:

$$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \text{Max} \iff \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 = \text{Min}$$

Cette dernière condition constitue la base du calcul des moindres carrés.

Conclusion: Pour une distribution normale des erreurs, l'estimateur rendant maximum la densité de probabilité de l'échantillon n'est autre que la solution issue des moindres carrés.

Autrement dit, l'estimation des moindres carrés sera conditionnée par la normalité des erreurs

de l'échantillon. Plus l'échantillon aura une distribution normale, plus la solution obtenue par moindres carrés sera un estimateur efficace de la vraie quantité.

Ces remarques ont deux conséquences importantes. La première est que nous nous sommes attachés dès le début de l'ajustement à quantifier la normalité des échantillons utilisés, afin de veiller à l'opportunité d'une estimation par moindres carrés. La deuxième est que dans le cas d'échantillons biaisés ou hétérogènes (donc non gaussiens), l'estimation par moindres carrés n'est pas le meilleur estimateur possible. L'utilisation d'estimateurs moins dépendants de la nature de la distribution devient alors nécessaire.

Estimation par intervalles de confiance

Il est souvent plus intéressant et plus réaliste de fournir non seulement une estimation d'une grandeur physique mais aussi un renseignement du type $a < \hat{\alpha} < b$ plutôt que $\alpha = \hat{\alpha}$. Nous nous plaçons dans le cas d'une distribution normale - nous verrons par la suite comment calculer ces intervalles pour d'autres distributions - et nous utilisons 3 propriétés des estimateurs \bar{x} et s^2 :

1. pour un échantillon gaussien, \bar{x} est le meilleur estimateur possible et $\bar{x} \sim \text{LG}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
2. l'estimateur de variance expérimentale, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, est une variable aléatoire statistiquement indépendante de \bar{x} , et $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ est distribué selon la loi du χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté.
3. la quantité $t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \alpha}{s} \sqrt{n-1}$ suit une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.

Connaissant la loi de Student, on peut estimer l'intervalle de probabilité de t_{n-1} pour une valeur $(1-a)$ et γ quelconques. Cela revient à calculer:

$$P\{|t_{n-1}| \leq \gamma\} = (1-a)$$

Ce qui s'écrit aussi:

$$P\left\{\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}} \leq \alpha \leq \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right\} = (1-a)$$

Autrement dit, la probabilité pour que l'intervalle aléatoire

$$I = \left[\bar{x} - \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + \frac{\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

recouvre la quantité inconnue α est de ...%, selon le γ choisi. Par le point 2, on peut calculer l'intervalle de confiance autour de σ . En effet, puisque $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ suit une loi de χ^2_{n-1} , il est alors possible de calculer les bornes l_1 et l_2 telles que:

$$P\left\{l_1 \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq l_2\right\} = (1-a)$$

$I = \left[\frac{ns^2}{l_2}, \frac{ns^2}{l_1}\right]$ est alors l'intervalle de confiance autour de l'estimation de σ , $(1-a)$ étant le coefficient de confiance.

Comme nous l'avons vu précédemment le choix de l'estimateur n'est pas anodin. Par exemple, l'efficacité de l'estimation par moindres carrés est fortement conditionnée par la normalité de l'échantillon. On va donc ici chercher à introduire des classes d'estimateurs d'une part relativement insensibles à la distribution de l'échantillon et d'autre part aux valeurs aberrantes.

estimateur robustes de tendance centrale

Le but est ici d'estimer une valeur centrale m pour une distribution symétrique.

La norme L1 étant par définition moins sensible aux valeurs aberrantes, on propose classiquement un pré-traitement de l'échantillon par norme L1, avant tout ajustement de norme L2, qui reste, pour un échantillon asymptotiquement gaussien, le plus efficace. Le pré-traitement par norme L1 consiste en un ajustement du modèle par minimisation des déviations absolues (et non plus des déviations standards). Cet ajustement permet de faire une première estimation des paramètres et de visualiser les valeurs aberrantes présentes dans l'échantillon.

Une autre approche est celle des M-estimateurs. L'algorithme est ici de calculer μ tel $\sum_{i=1}^n \rho(\frac{x_i - \mu}{s})$ atteigne son minimum, avec s un estimateur robuste de la dispersion. Le calcul de μ par minimisation de ρ se fait par la méthode du simplex. L'algorithme du simplex nécessitant une condition initiale, il reste nécessaire d'appliquer un ajustement de norme L2 en première instance, puis de calculer μ avec un choix de ρ , reflétant un certain comportement de l'échantillon. Cette approche par méthode du simplex intervient essentiellement dans des cas d'estimation de paramètres sur des échantillons avérés non gaussiens d'observations, c'est à dire des échantillons suivant des lois de probabilité exponentielles ou de Lorentz.

estimateur Jackknife

Cet estimateur, proposé par Quenouille en 1949, permet d'atténuer le biais de certains estimateurs, d'étudier l'influence des valeurs de l'échantillon sur l'estimateur.

– Estimation du biais

Soit $\hat{\theta}$ un estimateur biaisé de θ , et \hat{F} , la distribution empirique de probabilité de l'échantillon, F étant la distribution inconnue de l'échantillon.

On définit alors la notion de biais par:

$$\text{Biais} = E_F \theta(\hat{F}) - \theta(F)$$

La méthode d'estimation du biais par Quenouille consiste à considérer $F_{(i)}$ la distribution de l'échantillon avec l'observation x_i en moins. On définit alors:

- \hat{F}_i la distribution empirique de l'échantillon - x_i
- $\hat{\theta}_i = \theta(\hat{F}_i) = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

L'estimation du biais est alors:

$$\widehat{BIAS} = (n-1) \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i - \hat{\theta} \right]$$

On en déduit l'estimateur non-biaisé dit Jackknife :

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{BIAS} = n\hat{\theta} - \frac{(n-1)}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i$$

– Jackknife groupé

Si on décompose l'échantillon de n observations en $n=gh$ c'est à dire en h blocs de g observations, il est alors possible de faire une estimation non biaisée par blocs. Dans ce cas, on a avec $\hat{\theta}_i = \frac{1}{g} \sum \hat{\theta}_i$:

$$\tilde{\theta} = h\hat{\theta} - (h-1)\hat{\theta}_i$$

- Estimation de la variation par Jackknife
Par définition de la variance, on a :

$$Var = E_F[\hat{\theta} - E_F(\hat{\theta})]^2$$

Turkey proposa en 1958, l'estimation non biaisé suivante de la variance:

$$\widehat{VAR} = \frac{(n-1)}{n} \sum_{i=1}^n [\hat{\theta}_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i]^2$$

Un test statistique intéressant est celui de l'estimation de l'importance du biais d'un échantillon par le rapport $\frac{\widehat{BIAIS}}{\widehat{VAR}}$. Si ce rapport est faible ($\leq \frac{1}{4}$, par exemple), alors le biais de l'échantillon n'est pas important.

Par sa construction l'estimateur du Jackknife est très utile dans le cas de statistique biaisée dont le biais est très difficile à estimer. On voit donc tout l'intérêt qu'il y a à utiliser cet estimateur en complément d'une estimation par moindres carrés, en particulier sur de grands échantillons.

Annexe B

PRIAM: Procédure de Réduction d'Images AstroMétriques

Cette annexe correspond au volume I de la documentation du logiciel PRIAM lié à la présentation et l'introduction des notions de base de l'algorithme de réduction du logiciel. De fait, cette partie est à vocation pédagogique et ne peut donc être considéré comme un document de recherche en tant que tel. Cette première documentation sera accompagnée d'un volume II présentant en détail l'ensemble de la librairie FORTRAN constituant la base informatique du logiciel. Nous ne présentons ici que la partie théorique de ce travail. L'ensemble des deux volumes sera publié dans (Berthier et Fienga, 1999, *Notes scientifiques et techniques du Bureau des longitudes*, volume S063).

B.1 Contexte

PRIAM (Procédure de Réduction d'Images AstroMétriques) est un logiciel de réduction astrométrique d'images CCD ou photographiques ayant pour vocation de permettre une réduction de très haute précision, complète en terme de corrections théoriques et instrumentales tout en restant simple d'utilisation. La grande différence entre PRIAM et les autres logiciels de réduction astrométrique actuellement disponibles (modules de réduction astrométrique des logiciels de traitements d'images MIDAS, IRAF, Astrometrica et autres) réside dans la volonté d'induire dans la réduction une grande partie des effets gravitationnels et physiques pouvant intervenir lors de l'observation d'un corps céleste depuis une station au sol.

L'apparition des catalogues astrométriques Hipparcos, Tycho et ACT a motivé le développement d'un tel outil. En effet, l'idée de faire de l'astrométrie stellaire à ± 1 mas s'est concrétisée par l'arrivée du catalogue astrométrique Hipparcos. Ce dernier représente un gain de facteur 100 sur le reste des autres catalogues astrométriques précédents tels que le PPM et l'ACRS où l'erreur sur la position est de l'ordre respectivement de 300 et 200 mas dans l'hémisphère Nord (*cf.* tableau de la figure B.1). Autrement dit, la préparation de la mission et les résultats de ce catalogue ont poussé la communauté scientifique à s'interroger sur les ordres de grandeurs des corrections et des constantes utilisées jusqu'à présent. Par exemple, avec une précision de 1 mas sur la position d'une étoile on ne peut plus négliger les effets relativistes sur le trajet du photon allant de l'étoile à l'observateur. On a ainsi développé une astrométrie vectorielle relativiste basée sur des transformations de type transformations de Lorentz (voir par exemple Murray, 1981). D'autre part, jusqu'à présent, la précision des techniques de réduction des plaques photographiques ou des images CCD pour les objets du système solaire était de l'ordre de 100 mas.

Catalogue	Précision (mas)	Nombre d'étoiles	Densité (* / d ²)
FK4	200	3 522	0.08
FK5	100	4 652	0.1
HIP	1	118 218	3
PPM	300	468 586	11
ACT	25	988 758	23
GSC 1.1	500	25 258 765	600
USNO SA2.0	250	54 787 624	1300
USNO A2.0	500	526 280 881	12450

FIG. B.1: *Caractéristiques des principaux catalogues stellaires utilisés actuellement dans les réductions astrométriques.*

Dans cette centaine de mas d'incertitude, il y a aussi bien des erreurs de mesures sur la plaque, des erreurs dues aux conditions d'observation que des incertitudes liées à la position apparente des étoiles de référence. L'idée fut donc de tirer profit au maximum du gain de précision malgré la faible densité des catalogues tels que Hipparcos et Tycho (*cf.* tableau de la figure B.1).

PRIAM se présente comme un module d'application de la librairie EPROC (Berthier, 1998) développée à l'IMC. Tout comme EPROC, PRIAM peut s'utiliser aussi bien en tant que librairie de routines écrites en Fortran 90 et Fortran 77, qu'en ligne de commande ou par le biais d'une interface de type CGI ou en version PC-Linux avec interfaçage C++/Tcl (en cours de développement).

Le but de PRIAM n'est pas de traiter les images mais bien les observations astrométriques d'objets célestes. Autrement dit, notre algorithme ne considère que les mesures en pixels effectuées après traitement des images brutes issues d'une séquence d'observations. Il n'est donc question ici en aucun cas d'effectuer ces mesures mais bien de les récupérer dans un ou plusieurs fichiers ASCII et d'en déduire des positions inconnues, exprimées dans des systèmes de référence propres aux théories dynamiques classiques.

Dans un premier temps, nous allons présenter en détail l'algorithme général du logiciel ainsi que les problèmes liés à l'optimisation du processus de réduction et aux variantes possibles de réduction (cas où il y a peu d'étoiles dans le champ, par exemple). Diverses applications seront présentées en conclusion de cette première partie. Dans un deuxième temps, l'ensemble de la librairie sera décrite ainsi que les différentes interfaces existantes ou en cours de développement.

B.2 Algorithme et architecture

Notre algorithme se place dans le cadre d'une astrométrie relativiste dont le but est d'atteindre la dizaine de mas de précision sur des positions d'objets du système solaire exprimées

dans un système de référence donné (ici le FK5). Pour cela, plusieurs améliorations ont été apportées à différents stades du processus de réduction.

B.2.1 Présentation générale

Le but d'une réduction astrométrique est la modélisation, via une fonction de raccordement, des déformations et des distorsions du récepteur, plaque photographique ou CCD, et de l'optique du télescope utilisés lors de la réalisation de l'observation. Cette fonction est déterminée par ajustement entre les positions observées en pixels sur la surface du récepteur d'étoiles, dites de référence astrométriques, et leurs positions cataloguées (α, δ) théoriques projetées sur le plan *idéal* d'observation, tangent à la sphère céleste. Après ajustement, on applique cette fonction de raccordement aux positions observées (en pixel sur le récepteur) de l'objet inconnu ou dont on veut connaître les coordonnées sur la sphère céleste. Jusqu'à présent, était induit dans la fonction de raccordement, en général polynomiale, des approximations linéaires d'effets aussi divers que les aberrations dues au déplacement de l'observateur et des étoiles de référence, les déviations atmosphériques du signal et les distorsions du champ observé découlant des *imperfections* du système optique de l'observateur. Un tel amalgame nécessite bien entendu de développer à des degrés plus ou moins élevés l'ordre de la fonction de raccordement, et en conséquence, requiert un nombre important de points de référence, autrement dit d'étoiles astrométriques. Or, comme nous l'avons dit précédemment, les catalogues astrométriques de qualité ont une densité d'étoiles par degré carré très limitée, contraignant l'utilisateur d'un algorithme classique de réduction à utiliser un grand nombre d'étoiles non astrométriques (USNO2.O, GSC...), c'est-à-dire dont les mouvements propres et les parallaxes trigonométriques – autrement dit les vitesses en ascension droite et déclinaison et les distances au barycentre du système solaire – sont inconnus, et donc nécessairement des étoiles dont les positions sur la sphère céleste au moment de l'observation sont déterminées moins précisément.

Pour PRIAM, nous avons procédé par opposition avec l'algorithme classique, puisque nous avons essayé d'*épurer* la fonction de raccordement afin que celle-ci ne représente plus que des effets non-modélisables *a priori* comme les rotations du récepteur par rapport à son axe optique. Ainsi, nous avons choisi, avant d'effectuer la détermination de la fonction de raccordement, de faire une première transformation de repère en mettant en place, à partir des positions des étoiles de référence fournies par les catalogues, en général dans le repère barycentrique J2000 et pour l'époque moyenne d'observations de ces objets, le repère de référence pour le champ tel qu'il est observé. La fonction ajustée à un tel système ne nécessite plus d'ordre élevé dans son développement polynomial, puisque elle n'induit plus que des corrections liées aux configurations des systèmes optiques actuels, de taille telle qu'une modélisation à l'ordre 2 est suffisante dans le plus grand nombre des cas. Ceci nous permettra d'envisager des réductions avec un nombre limité d'étoiles de bonne qualité astrométrique. De plus, les coefficients ajustés deviennent alors interprétables en terme de corrections à la géométrie et à l'optique du récepteur. Cette question du degré de la modélisation, du nombre et du type d'étoiles à utiliser dans le processus sera plus amplement discutée dans le chapitre relatif à l'optimisation de la réduction. Après application de cette fonction aux positions observées (en pixel) de l'objet à étudier, nous en déduisons les positions affectées des effets de l'atmosphère terrestre et dans le repère topocentrique, apparent de la date d'observation. Il suffit alors d'inverser les transformations précédentes. Cet algorithme, schématisé sur la figure B.2, va maintenant être présenté étape par étape.

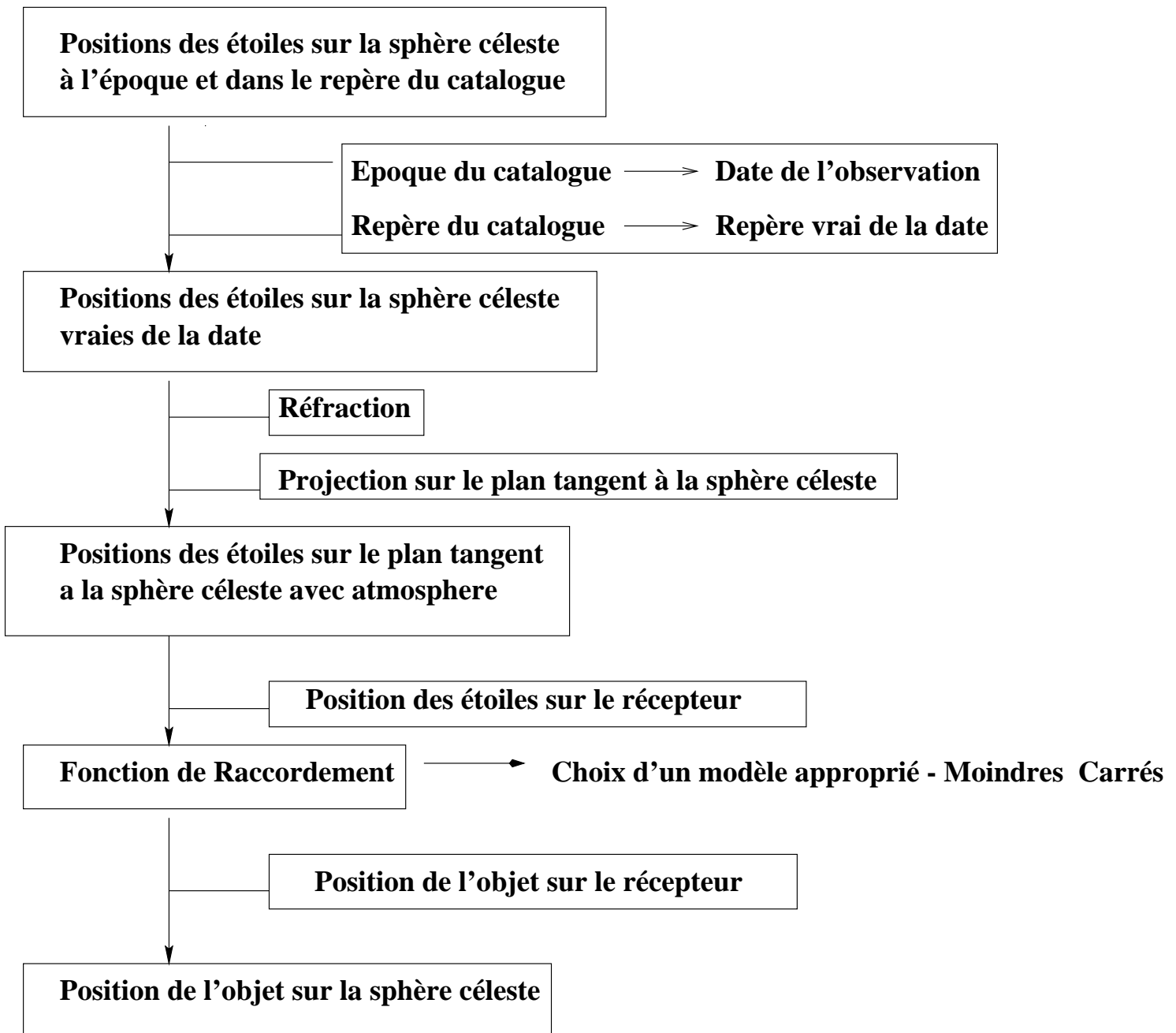


FIG. B.2: Schématisation de l'algorithme de réduction utilisé dans PRIAM

B.2.2 Mise en place du repère de référence tel qu'il est observé

L'une des principales causes d'erreurs dans les réductions décrites précédemment provient de la linéarisation de corrections complexes telles que les aberrations annuelle et diurne ainsi que la réfraction atmosphérique. Il nous a donc semblé intéressant, dans un premier temps, d'évaluer la totalité des phénomènes intervenant lors de l'observation d'une étoile de référence, cela dans un cadre relativiste. Nous avons utilisé l'algorithme de l'Astronomical Almanach, modifié par Kaplan et al (1989) et en utilisant la loi de réfraction inverse directe de Marini-Yan-Owens (Marini, 1972, Yan, 1996). Cet algorithme comprend trois parties distinctes: le changement de

Approximations des corrections relativistes		
--	--	--

Temps Lumière		0.01 mas
Déflexion des rayons lumineux	potentiels autres que solaire	Jupiter: 1.5 mas Terre: 0.04 mas
	Approx. au 1er ordre	0.5 mas
	Approx. instant de la déflexion	0.1 mas
Temps coordonné des planètes		Jupiter: 10 msec/0.03 mas Venus: 0.5 msec/2 μ as

Approximation du passage entre repère terrestre et repère céleste		
--	--	--

	Terre	Impacts sur les positions de Vénus et Jupiter
Mouvement du pôle	10m - 0.3"	0.05 mas/ 0.003 mas
Déflexion de verticale	2km - 1'	10 mas/0.6 mas
Estimation de la position de l'observateur	100m - 3"	0.5 mas/ 0.03 mas

Impact de la réfraction différentielle		
---	--	--

		$\Delta\alpha/\Delta\delta$
Pour $\Delta d=1'$	$z=45$ - CNTP	20mas/ 40mas
Précision en réfraction absolue	$z \leq 70$ - temp $\pm 0.1C$	5 à 20 mas
	Pression ± 0.4 mb - $E_0 \pm 12\%$	

TAB. B.1: *Approximations diverses effectuées dans les processus de réductions actuels. On suppose ici que la réduction s'opère à partir de coordonnées apparentes de la date des étoiles de référence*

direction de l'étoile dû à son propre mouvement – ce sont les corrections de mouvement propre et de vitesse radiale –, le changement de direction de l'étoile dû à la position et au mouvement de l'observateur par rapport à cette dernière, au barycentre du système solaire et au voisinage solaire – c'est-à-dire l'aberration annuelle et diurne, la parallaxe trigonométrique, la déflexion des rayons lumineux, la précession et la nutation – et la correction due à la présence d'atmosphère. Une fois ces corrections appliquées, les coordonnées obtenues refléteront les positions observées des étoiles par l'observateur dans les conditions climatiques du jour.

1. Corrections dues au mouvement de l'étoile

On estime, en supposant que les étoiles ont un mouvement uniforme par rapport à l'observateur, leur déplacement entre le jour de l'observation et l'époque du catalogue. D'autre part, les coordonnées données dans les catalogues sont données par rapport au barycentre du système solaire. On va donc ramener ce repère à l'observateur. La correction est de la forme:

$$\mathbf{EO}_0 = \mathbf{EB} + \Delta T \frac{d\mathbf{EB}}{dt}$$

ou \mathbf{EO}_0 représente la direction géométrique de l'étoile pour l'observateur O, \mathbf{EB} , la direction barycentrique de l'étoile donnée par le catalogue, ΔT marquant l'intervalle de temps entre l'époque du catalogue et la date de l'observation.

2. Corrections dues au mouvement de l'observateur par rapport à l'étoile et au soleil

- La parallaxe trigonométrique

$$\mathbf{EO}_1 = \mathbf{EO}_0 - \pi \mathbf{BO}$$

avec \mathbf{BO} , la direction barycentrique de l'observateur O et π , la parallaxe trigonométrique de l'étoile fournie dans les catalogues astrométriques tels que le catalogue Hipparcos.

- Déflexion des rayons lumineux

Cela correspond à la déviation des rayons lumineux due au voisinage plus ou moins proche du Soleil. Cette correction sera de l'ordre de 4 mas (Cowling, 1984) dans le cas d'un objet supposé à l'infini, comme une étoile de référence. Ce calcul fait intervenir \mathbf{SO} , le vecteur héliocentrique de l'observateur, \mathbf{SE} , le vecteur héliocentrique de l'étoile et deux quantités scalaires,

$$\begin{cases} g1 = \frac{2\mu}{c^2 |\mathbf{SO}|} \\ g2 = 1 + \frac{\mathbf{SE} \cdot \mathbf{SO}}{|\mathbf{SE}| \cdot |\mathbf{SO}|} \end{cases}$$

La direction corrigée de ces effets s'écrit:

$$\mathbf{EO}_2 = \frac{\mathbf{EO}}{\|\mathbf{EO}\|} + \frac{g1}{g2} \left[\left[\frac{\mathbf{EO}}{\|\mathbf{EO}\|} \cdot \frac{\mathbf{SE}}{\|\mathbf{SE}\|} \right] \frac{\mathbf{SO}}{\|\mathbf{SO}\|} - \left[\frac{\mathbf{SO}}{\|\mathbf{SO}\|} \cdot \frac{\mathbf{EO}}{\|\mathbf{EO}\|} \right] \frac{\mathbf{SE}}{\|\mathbf{SE}\|} \right]$$

- Aberrations annuelle et diurne

On corrige du mouvement de la Terre sur son orbite et du mouvement de l'observateur par une seule correction en considérant non plus la vitesse de la Terre mais celle de la Terre + celle de l'observateur dans un mouvement de translation uniforme par rapport au barycentre du système. Cette correction est d'une importance majeure et peut atteindre jusqu'à 15 secondes d'arc. En posant $\beta = \sqrt{1 - (V/c)^2}$, où \mathbf{V} représente le vecteur vitesse de l'observateur par rapport au barycentre du système, on a

$$\mathbf{EO}_3 = c \frac{\beta^{-1} \cdot \mathbf{EO}_2 + \left(c + \frac{\mathbf{EO}_2 \cdot \mathbf{V}}{1 + \beta^{-1}} \right) \cdot \mathbf{V}}{c + \mathbf{EO}_2 \cdot \mathbf{V}}$$

- Précession et Nutation

Ces deux corrections sont des rotations du repère équatorial moyen J2000, au repère équatorial vrai de la date, c'est-à-dire celui par rapport auquel on se repère pendant l'observation. Quels que soient les modèles choisis et le système de constantes en vigueur, on représente ces effets par deux matrices de rotation, notées respectivement P pour la précession et N pour la nutation, et on calcule les directions apparentes des étoiles dans un repère vrai de la date avec:

$$\mathbf{EO}_4 = N P \mathbf{EO}_3$$

Nous nous plaçons ici dans le système de référence du FK5.

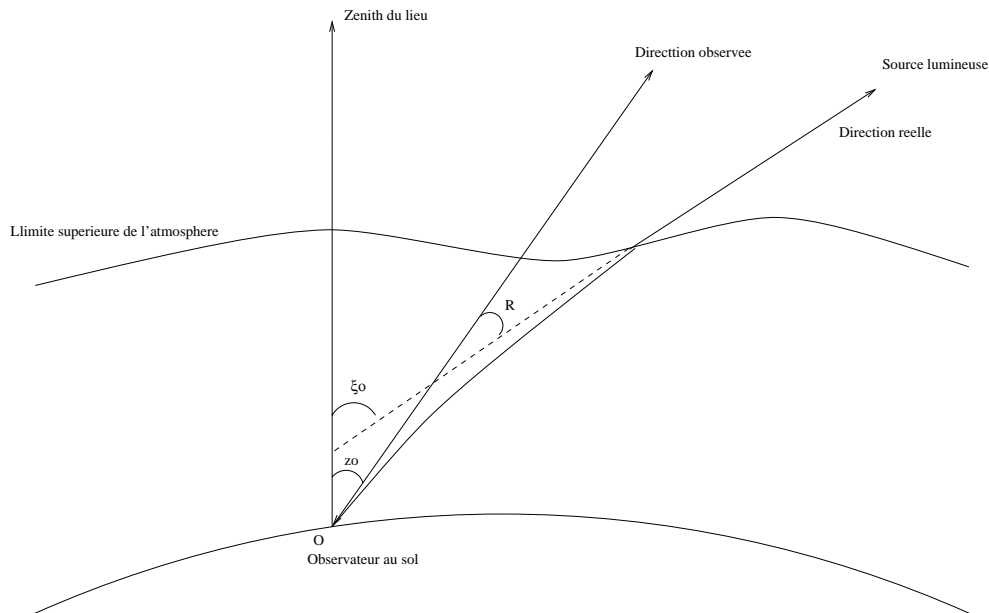


FIG. B.3: *Déviations des rayons lumineux dans l'atmosphère terrestre. z_0 est la distance zénithale observée, Δz l'angle de réfraction et ξ_0 la distance zénithale "vraie".*

3- Réfraction atmosphérique

La principale différence entre la position apparente d'un corps céleste et sa position observée depuis la surface de la Terre provient de la présence de l'atmosphère terrestre. Cette dernière a pour conséquence de provoquer une déflexion des ondes électromagnétiques et un retard sur les signaux électromagnétiques (figure B.3). Ainsi, avant d'être captés par un récepteur, les photons lumineux traversant des couches d'air progressivement plus denses (correspondant à un indice de réfraction de plus en plus grand) sont déviés graduellement vers la verticale. L'effet induit est l'observation d'une distance zénithale plus petite que la distance zénithale "vraie" de l'objet (i.e. s'il n'y avait pas d'atmosphère). La différence entre les distances zénithales, ou angle de réfraction, est donnée à partir du principe de Fermat par la relation :

$$\Delta z = \xi_0 - z_0 = \int_1^{n_0} \frac{\tan z}{n} dn \quad (\text{B.1})$$

où ξ_0 et z_0 sont les distances zénithales "vraies" et observées des corps célestes et n est l'indice de réfraction atmosphérique, n_0 étant cet indice au niveau de l'observateur (Yan et Ping, 1995). Ainsi, si les variations de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude sont connues dans la direction visée, alors cette équation est intégrable et permet de calculer l'angle de réfraction correspondant à la distance zénithale observée. Cependant la modélisation de l'atmosphère terrestre en un lieu et à une date donnée est fort complexe, dépendant des conditions météorologiques, des saisons, de la géographie du lieu, etc..., ce qui rend difficile l'expression des variations de l'indice de réfraction atmosphérique. Pour le calculer, on modélise généralement l'atmosphère par deux composantes à symétrie sphérique, la troposphère (de 0 à environ 11 km) et la stratosphère (jusqu'à environ 100 km¹), séparées par la tropopause (d'épaisseur négligeable mais pour laquelle l'indice de réfraction présente une discontinuité). On considère de plus que l'atmosphère est en

1. au delà, la réfraction atmosphérique pour les longueurs d'ondes optiques est de l'ordre de quelques microsecondes de degré (Green, 1985).

équilibre hydrostatique et qu'elle obéit aux lois des gaz parfaits (Explanatory Supplement of American Ephemeris, 1992). Dans de telles conditions, on peut modéliser la courbure des rayons lumineux dans l'atmosphère par un profil exponentiel, correspondant aux variations observées de la réfractivité (de l'atmosphère) en fonction de l'altitude. La loi de la réfraction s'exprime alors sous la forme classique de la loi de Laplace:

$$\Delta z = A \tan z_0 + B \tan^3 z_0 \quad (\text{B.2})$$

où z_0 représente la distance zénithale observée, et où A et B sont soit des constantes, soit dépendent des conditions atmosphériques du lieu d'observation et de la longueur d'onde des signaux observés. Ces paramètres sont généralement exprimés sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \kappa \alpha (1 - \beta) \\ B &= \kappa \alpha \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

où α et β dependent du modèle atmosphérique et κ un terme correctif permettant de prendre en compte l'aplatissement de la Terre et par conséquent des couches atmosphériques. κ se calcule comme le rapport entre la gravité mesurée au niveau de l'observateur et celle mesurée au niveau moyen des mers à l'équateur ; $\kappa = 1.0$ pour une terre sphérique (Stone, 1996). En première approximation et pour des conditions standard de température et de pression (0°C , 1013.25 mb) et sans prendre en compte la longueur d'onde, ces paramètres sont pris égaux à 0.001254 pour β et $60''.37$ pour α , fournissant les constantes de la réfraction $A = 60''.2943$ et $B = -0''.06687$ (Kovalevsky, 1990). Pour des conditions dites "normales" (15°C , 1013.25 mb, $p_v^2 = 0\text{mb}$, $\lambda = 0.59\mu\text{m}$), les constantes de la réfraction sont $A = 57''.085$ et $B = -0''.0666$, déduites des Tables de la réfraction éditées par l'observatoire de Pulkovo en 1985 (Refraction tables of Pulkovo Observatory, 1985). Pour tenir compte de conditions atmosphériques et de longueurs d'ondes particulières, ces paramètres peuvent être exprimés comme des fonctions de la température, de la pression, de la pression de vapeur sèche et de la longueur d'onde, tel que $\alpha = n_0 - 1$ représente la réfractivité de l'atmosphère au niveau de l'observateur et $\beta = H_0/r_0$ représente le rapport de la hauteur équivalente d'atmosphère homogène sur le rayon géocentrique de l'observateur (Stone, 1996). Cette formulation de la réfraction, que nous désignerons loi de Laplace-Stone, permet d'obtenir une précision meilleure que 40 mas pour toute distance zénithale inférieure à 70° (comparaisons avec les Tables de la réfraction de l'observatoire du Pulkovo (Refraction tables of Pulkovo Observatory, 1985) (Stone, 1996). Cette expression de la réfraction a cependant pour inconvénient de calculer l'angle de réfraction à partir uniquement de la distance zénithale observée (z_0). Ainsi, dans le cas où l'on veut estimer l'angle de réfraction à partir des coordonnées apparentes, on introduit une approximation supplémentaire en considérant la distance zénithale "vraie" (ξ_0) plutôt que celle observée dans l'équation (B.2). Ce problème est résolu en utilisant la formulation de l'angle de réfraction proposée par Yan et basée sur l'utilisation de fonctions dites de "mapping" modélisant les variations de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude (Yan et Ping, 1995, Yan, 1996). L'angle de réfraction s'exprime alors sous la forme :

$$\Delta z = 10^{-6} N_0 \sin \xi_0 m'(\xi_0) \quad (\text{B.3})$$

où $N_0 = 10^6 (n_0 - 1)$ est la réfractivité de l'atmosphère au niveau de l'observateur, ξ_0 est la distance zénithale "vraie" et $m'(\xi_0)$ est la fonction dite de "mapping" de la réfraction faisant intervenir, comme la réfractivité, les paramètres de température, de pression et de pression de

2. p_v est la pression de vapeur sèche.

vapeur sèche du lieu d'observation ainsi que la longueur d'onde du signal observé (Yan, 1996). Cette formulation assure une précision sur l'angle de réfraction de l'ordre de 100 mas jusqu'à des distances zénithales de 80°.

Ces expressions de la réfraction se basent sur l'hypothèse que l'atmosphère terrestre peut être modélisée par une symétrie sphérique dont les paramètres sont déterminés à partir d'un certain nombre de données météorologiques moyennes. Cela implique que la déviation des rayons lumineux ne dépend que de la distance zénithale et est indépendante de l'azimut de la direction visée. Cela implique aussi que cette déviation est indépendante des conditions atmosphériques réelles au moment de l'observation et tout le long du chemin parcouru par les photons dans l'atmosphère. Or dans la pratique, les conditions atmosphériques peuvent être très différentes des conditions moyennes ayant déterminé le profil atmosphérique de la loi de réfraction utilisée. En outre, la déviation des rayons lumineux ne se produit pas uniquement selon la verticale et on observe une déviation horizontale affectant la précision des positions mesurées de l'ordre du mas (en interférométrie optique par exemple). Il reste néanmoins difficile de déterminer avec précision la structure exacte de l'atmosphère en un lieu et une date donnés, et seule une bonne connaissance des conditions météorologiques mesurées en différents points de l'atmosphère entourant l'observateur (de 100 m à 82 km d'altitude) peut conduire à une précision sur la réfraction astronomique à l'ordre du mas. Pour autant, des modèles d'atmosphères plus ou moins complexes existent et ont pour but d'apprécier les modifications physico-chimique du milieu de propagation du signal électro-magnétique et d'en répercuter les conséquences sur la direction et la vitesse de propagation de ce dernier. On citera par exemple les modèles d'Owens (Owens, 1967), d'Edlen (Edlen, 1953) et de Bean et Dutton (Bean et Dutton, 1966) pour les longueurs d'ondes optiques et proches infrarouge, ainsi que ceux d'Appleton-Hartree (Davies, 1966) et Abshire et Gardner (Abshire et Gardner, 1985) pour les longueurs d'onde radio. Le modèle d'indice de réfraction utilisé dans PRIAM est celui d'Owens simplifié à deux composantes, l'une sèche, noté D_s correspondant au comportement d'un indice de réfraction pour un air sec à 0.03 % de CO_2 et l'autre, humide noté D_w , incluant une proportion plus ou moins importante de vapeur d'eau. Ces deux composantes sont déterminées par ajustement aux observations dans des données de validité couvrant une grande partie du spectre visible et du proche IR (2.4 à 6.9 μm). L'indice de réfraction, n , est alors donné sous la forme:

$$(n - 1) \times 10^8 = [K_1^s + \frac{K_2^s}{(130.0 - \sigma^2)} + \frac{K_3^s}{(38.9 - \sigma^2)}].D_s + [K_1^w + K_2^w.\sigma^2 + K_3^w.\sigma^4 + K_4^w.\sigma^6].D_w$$

où $K_i^s, i = 1...3$ et $K_j^w, j = 1...4$ sont des constantes du modèle d'Owens. Grâce à cette modélisation de l'indice de réfraction, il est alors possible d'aborder la modélisation globale de la traversée de l'atmosphère du signal observé depuis une station au sol. Comme nous l'avons déjà dit, de par la discontinuité de la tropopause, l'équation B.1 n'est pas intégrale et donc n'est pas réversible. C'est pourquoi, dans PRIAM, deux modèles de correction de réfraction co-existent. Le premier modèle correspond à l'approximation de Laplace, reprise et améliorée par Stone (Stone, 1996) et permet d'estimer la déviation du signal lumineux à partir d'une direction zénithale observée. Cette correction est appliquée dans la deuxième partie de l'algorithme après la détermination de la fonction de raccordement et l'obtention des positions observées sur la sphère céleste de l'objet étudié. Afin de rendre ces données utilisables, par exemple dans les théories dynamiques, il convient de corriger ces positions de l'effet de déviation induit par la traversée de l'atmosphère terrestre. On applique la relation B.2 sachant que la quantité z_o est connue et on en déduit la distance zénithale ξ_o corrigée de la réfraction. Le deuxième modèle est celui développé par Yan en 1995 (Yan et Ping, 1995) et 1996 (Yan, 1996) sur la base d'une étude de réversibilité des

modèles de réfraction entamée par Marini en 1971 (Marini, 1971) dans les longueurs d'onde radio. Cette correction intervient dans la première partie de l'algorithme et plus exactement dans la mise en place du système de référence astrométrique tel qu'il est observé. Ainsi, à partir de positions barycentriques astrométriques J2000 d'étoiles de référence astrométriques, on effectue une première transformation permettant d'exprimer les coordonnées de ces points de rattachement dans un repère apparent topocentrique. Il reste donc à affecter ces positions de l'effet de déviation angulaire induit par la traversée de l'atmosphère par le signal. Ainsi à partir d'une expression du décalage en distance zénithale d'un objet, on a pu, en appliquant des modèles de fonctions mapping, déterminer analytiquement une fonction inverse non approximée de l'angle de réfraction. Ce raisonnement est basé sur une étude de la convergence d'intégrales du type

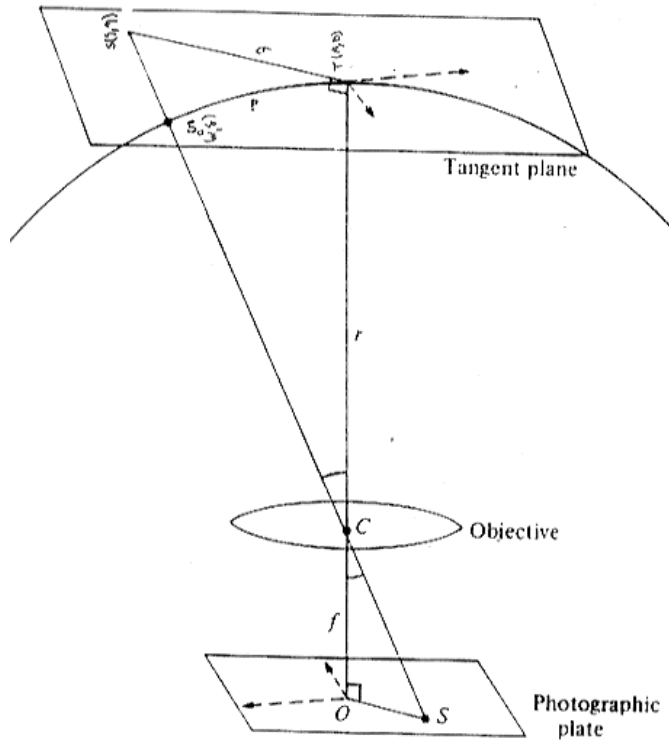
$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{p'(x)}{\sqrt{x + \alpha^2 - K(1-p)}} dx$$

où p représente le profil de l'atmosphère en fonction de l'altitude, K est une constante, $K = 10^{-6} N_0 \cos(z_{AR})^2 \frac{r_0}{H}$, z_{AR} , la distance zénithale observée (affectée de la réfraction), r_0 est le rayon équatorial terrestre et H , l'altitude du profil atmosphérique. En effet, au voisinage de 0, ce type d'intégrale peut se développer en puissance de α , alors qu'au voisinage de ∞ , le développement sera en $1/\alpha$. Or, les fractions rationnelles, de forme correctement choisie, répondent elles aussi à ces critères et peuvent converger vers la même limite. C'est en se basant sur cette idée, que cette écriture en fonction de mapping a été appliquée au problème de la réfraction atmosphérique. Pour plus de détails sur les corrections de réfraction ainsi que pour une étude comparative entre les différents modèles de réfraction atmosphérique actuellement disponibles et leur impact sur la réduction astrométrique en longueurs d'ondes optiques, on se reportera à (Berthier et Fienga, 1997).

4- Projection sur le plan tangent

A ce stade du processus, nous avons transformé le repère de référence, barycentrique, astrométrique J2000, défini à partir des étoiles astrométriques présentes dans le champ en un repère observé, c'est-à-dire topocentrique, apparent de la date affecté des effets de déviations atmosphériques. Nous effectuons maintenant la projection de ce repère sur le plan théorique d'observation. Ce plan, appelé aussi plan tangent à la sphère céleste, représente le plan du récepteur si celui-ci était *parfait*, c'est-à-dire si l'axe optique du télescope et du récepteur, CCD ou plaque photographique, était aligné, si l'optique de ce dernier et de celle du télescope n'induisaient aucune déformation ou distorsion du champ etc... Ce passage entre sphère céleste et plan idéal du récepteur est connu sous le nom de projection gnomonique et se trouve schématisé sur la figure B.4. Soit T le centre de la projection, qui correspond aussi au centre du récepteur – dans les cas où l'observation a été réalisée en *binning 1*, c'est-à-dire sur l'ensemble de sa surface – de coordonnées topocentriques (A, D), apparentes de la date, affectées de la réfraction et l'objet observé, de coordonnées (α, δ) , sa position sur le plan tangent en T à la sphère céleste sera donnée par le couple (ζ, η) tel que:

$$\begin{cases} \zeta = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A)}{\sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A)} \\ \eta = \frac{\cos D \sin(\alpha - A) - \sin D \cos \delta \cos(\alpha - A)}{\sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A)} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

FIG. B.4: *Projection gnomonique (Green, 1985)*

et inversement:

$$\begin{cases} \tan(\alpha - A) = \frac{\zeta}{\cos D - \eta \sin D} \\ \tan \delta = \frac{\sin D + \eta \cos D}{\cos D - \eta \sin D} \cos(\alpha - A) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Le choix des coordonnées (A, D) du centre du champ est important. En général, celles-ci ne sont pas connues. On choisit alors comme centre de la projection sur la sphère céleste, le barycentre des étoiles de référence. Le décalage entre cette position approximative du centre du champ inconnu sur la sphère céleste et le centre effectif (en pixel) du centre du récepteur sera absorbé par le terme constant de la fonction de rattachement (ou constantes de plaque, voir le paragraphe suivant). On verra par la suite, que chercher à approcher la position du centre du champ par d'autres positions que celles du barycentre du repère de référence permet d'optimiser la détermination de la fonction de raccordement et donc celle du processus de réduction.

B.2.3 Fonction de raccordement

Choix de la forme et du type de la fonction

La première idée pour améliorer les méthodes de réduction dites classiques a donc été de calculer tous les effets modélisables directement sur les (α, δ) d'étoiles afin de réellement commencer le processus de réduction non plus avec des coordonnées astrométriques, J2000 mais avec les positions réellement observées. Les constantes qu'il restera à déterminer ne seront plus affectées de corrections autres qu'instrumentales mais représenteront des effets physiques directement matérialisables sur le récepteur. Comme nous l'avons déjà dit, le rôle de la fonction de raccordement est de corriger, par ajustement entre positions mesurées à la surface du récepteur et positions théoriques dans le plan *idéal* de l'observation, les *imperfections* de modélisations des systèmes optiques. Il est donc clair que la forme de cette fonction – polynomiale d'ordre plus ou moins élevé (Platais, 1995, Urban et Corbin, 1996), orthogonale (Bienaymé, 1993), en harmoniques sphériques, non déterministe (Lattanzi et Bucciarelli, 1990), ... – varie selon la nature de l'instrumentation utilisée lors de l'acquisition des observations. Plus précisément, une modélisation polynomiale conviendra parfaitement à la correction d'effets simples tels que des rotations d'axe et de décalages de centre optique mais répondra assez mal, de par sa forme linéaire, à des distorsions de champ, en particulier sur les bordures des récepteurs, induits par exemple par des effets d'aberrations optiques, caractéristiques des récepteurs à très grand champ (plusieurs degrés), comme ceux des astrographes de type Carte du ciel et des télescopes de Schmidt. La figure A du graphe B.5, extraite de Robichon et al (1995) est un bon exemple des distorsions résiduelles qui peuvent apparaître après l'utilisation d'un modèle linéaire insuffisant dans la réduction d'une plaque grand champ, ici une plaque de Schmidt de $5^\circ \times 5^\circ$.

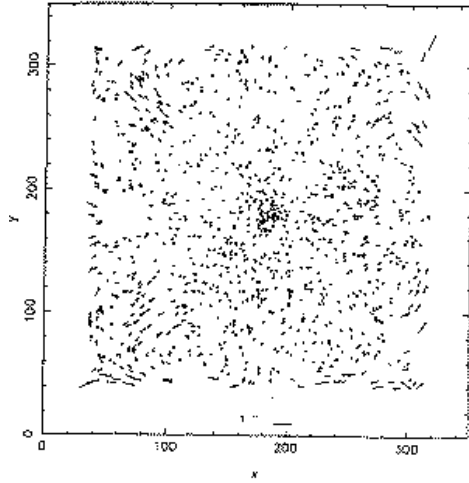
De plus, dans ces cas particuliers d'astrométrie à très grand champ, des modélisations, autres que gnomonique, du plan *idéal* d'observations, et de type projection équidistante (Morrison et al, 1998), semblent être plus à même de modéliser les déformations induites par une projection de la sphère céleste sur une surface qu'il est difficile de décrire par le biais d'une géométrie plane. On retrouvera sur les figures B et C du graphe B.5, l'impact de la projection gnomonique classique dans le processus de réduction de plaques de Schmidt de $6^\circ \times 6^\circ$ (figure B) et on pourra comparer cette solution à celle déduite de la projection dite équidistante (figure C). Nous conseillerons donc, bien que cette option soit disponible dans PRIAM, de ne pas chercher à réduire des champs de plus de 2 degrés avec une fonction de raccordement polynomiale, même développée à un ordre élevé, mais d'utiliser des écritures plus spécifiques aux problèmes liés aux récepteurs très grand champ.

La fonction de raccordement utilisée dans PRIAM est un modèle polynomial dont l'ordre est laissé au choix de l'utilisateur, bien que certaines contraintes sur ce choix soient imposées selon les niveaux d'utilisation du logiciel. Ce modèle dans le cas d'un développement à l'ordre m s'écrit:

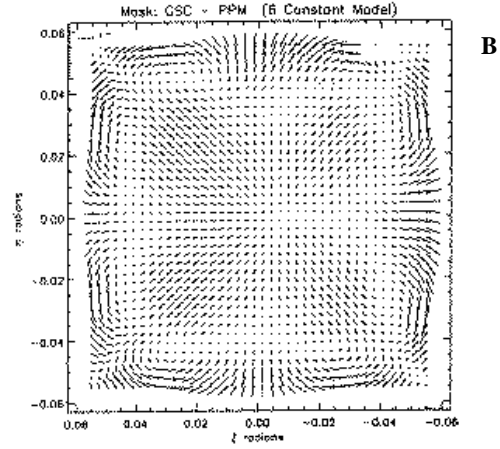
$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{p,q} X^p Y^q = F_x(X, Y) \\ \eta = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n B_{p,q} X^q Y^p = F_y(X, Y) \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

où (ζ, η) sont les coordonnées standard (*cf.* équation B.4) des objets sur le plan *idéal* d'observation tangent à la sphère céleste et (X, Y) , les coordonnées en pixels mesurées sur le récepteur de ces mêmes objets, par rapport au centre de ce dernier.

A

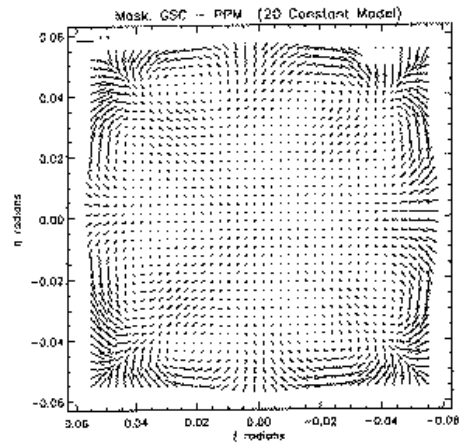


A: (Robichon et al, 1995)



B

Figure 1. Mean vector residual map using a linear plate model and an equidistant projection for the southern hemisphere made with the PPM catalogue.



C

B et C: (J.E.Morisson et al , 1998)

Figure 2. Mean vector residual map using a third-order polynomial plate model and a gnomonic projection for the southern hemisphere made with the PPM catalogue.

FIG. B.5: Cartes de distorsions de plaques de Schmidt: Résidus vectoriels obtenus après application de différents modèles de projection: cas C - projection gnomonique et B - projection équidistante (Morrisson et al, 1998) ou après application d'une fonction de raccordement polynomiale d'ordre insuffisant, cas A, (Robichon, 1995). La dimension de plaques de Schmidt utilisées est de 6.4×6.4 degrés dans les cas C et B et de 5.3×5.3 degrés dans le cas A.

L'ajustement de la fonction

La détermination des coefficients $A_{p,q}$ et $B_{p,q}$ de l'équation B.6 s'effectue par le biais de l'ajustement par moindres carrés décrit entre les positions observées en pixels sur la surface du récepteur d'étoiles de référence astrométriques et leurs positions cataloguées (α, δ) théoriques projetées sur le plan idéal d'observation, tangent à la sphère céleste. L'algorithme utilisé dans PRIAM est un algorithme de résolution de système linéaire classique avec pondération des équations de conditions et calculs d'erreurs par matrice de variance-covariance sur les coefficients ajustés. Matriciellement, le système d'équations précédent, développé à l'ordre m , s'écrit, pour chaque observation réalisée d'un champ stellaire comportant n étoiles de référence:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_k \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & X_1 \cdot Y_1 & \dots & X_1^p \cdot Y_1^q & \dots & X_1^m & Y_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_k & Y_k & X_k \cdot Y_k & \dots & X_k^p \cdot Y_k^q & \dots & X_k^m & Y_k^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_n & Y_n & X_n \cdot Y_n & \dots & X_n^p \cdot Y_n^q & \dots & X_n^m & Y_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,0} \\ A_{1,0} \\ A_{0,1} \\ A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{p,q} \\ \vdots \\ A_{m,0} \\ A_{0,m} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

On écrit le même système pour la coordonnée η . Chaque équation de conditions correspond à une étoile de référence. Il est alors possible de pondérer chacune d'entre elles selon la qualité astrométrique de chaque point de raccordement. Dans PRIAM, chaque équation est pondérée par l'erreur moyenne externe des catalogues stellaires dont proviennent les différentes étoiles de référence. Cette précision permet d'estimer la qualité astrométrique moyenne des différents éléments intervenant dans l'estimation de la fonction de raccordement. Le tableau B.1 donne les précisions astrométriques utilisées par PRIAM pour les catalogues stellaires les plus couramment rencontrés.

Les erreurs déduites de la matrice de covariance du système sont aussi calculées pour chaque coefficient ajusté. Avec l'estimation de ces erreurs sur les coefficients de la fonction de rattachement, nous pourrions répercuter directement la qualité de la modélisation du système optique sur la détermination des positions (α, δ) des objets inconnus ou dont on veut connaître les positions sur la sphère céleste. A ce stade de l'algorithme, tous les éléments sont réunis pour pouvoir entamer le calcul de ces positions.

B.2.4 Détermination des positions inconnues

Application de la fonction de rattachement et projection sur la sphère céleste

Après ajustement de ses coefficients, la fonction de rattachement est appliquée aux positions mesurées en pixels sur le récepteur de l'objet dont on veut connaître la position sur la sphère céleste. Sont alors déduites les coordonnées (ζ, η) de l'objet dans le plan *idéal* d'observation tangent à la sphère céleste.

Choix du repère définitif

Estimation des erreurs sur les positions calculées

Cette estimation est d'une très grande importance car elle permet d'estimer la qualité du processus de réduction d'une part et d'autre part de valider les choix d'optimisation que nous décrirons au chapitre suivant. Une position déduite de la réduction astrométrique d'une image CCD ou photographique sera déterminée avec une précision, fonction de plusieurs critères dont la précision des mesures (effectuées sur le récepteur) des positions des points de référence et de l'objet étudié, la qualité astrométrique des positions cataloguées, de la forme de la fonction de rattachement et de son degré de liberté. Classiquement, on estime la précision externe, e_{ext} d'un tel processus de réduction sur une observation par (Pascu, 1990):

$$e_{ext} = \frac{e_{cat}^2 + S^2 e_{*r}^2}{n - m} + (S e_{or})^2 \quad (\text{B.8})$$

Cette écriture générale peut être modifiée selon la forme de la fonction de raccordement (ici polynomiale de degré m) et fait intervenir la précision externe, e_{cat} , moyenne du catalogue de référence d'où sont extraites les n coordonnées (α, δ) des points de raccordement, celle induite par les mesures effectuées sur le récepteur de ces n points, e_{*r} , et de l'objet étudié, e_{or} . Cette équation et celles qui en sont dérivées permettent de faire des estimations, pour un type de récepteurs et catalogue stellaire donnés, de la précision maximale que peut atteindre un processus de réduction. Nous verrons dans la suite que cette écriture est très utile dans les discussions concernant les stratégies de réduction.

Dans PRIAM, nous avons fait le choix d'effectuer un calcul d'erreurs basé sur la différentiation des équations B.6 et B.5. Ce calcul s'effectue en deux temps.

Premièrement, on calcule l'erreur induite par l'estimation des positions mesurées de l'objet sur le récepteur et par les erreurs de détermination des coefficients de la fonction de raccordement sur le calcul des coordonnées, (ζ, η) , de l'objet étudié dans le plan *idéal* d'observation. Pour cela, on dérive l'équation B.6 par rapport aux coefficients $A_{(p,q)}$ et $B_{(p,q)}$, puis par rapport aux positions mesurées (X, Y) . Le système B.6 devient alors:

$$\begin{cases} d\zeta = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n X^p Y^q dA_{p,q} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{p,q} \cdot p \cdot X^{p-1} Y^q dX + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{p,q} \cdot q \cdot X^p Y^{q-1} dY \\ d\eta = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n X^q Y^p dB_{p,q} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n B_{p,q} \cdot p \cdot X^{p-1} Y^q dX + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n B_{p,q} \cdot q \cdot X^p Y^{q-1} dY \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Dans un deuxième temps, on répercute $(d\zeta, d\eta)$ sur l'estimation des coordonnées (α, δ) par la différentiation de l'équation B.5. On obtient ainsi l'écriture définitive:

$$\begin{cases} d\alpha = \frac{\cos^2(\alpha - A)}{(\cos D - \eta \sin D)^2} [(\cos D - \eta \sin D)d\zeta - \zeta \sin D d\eta] \\ d\delta = \frac{1}{(\cos D - \eta \sin D)^2} \cos^2(\alpha - A) d\eta - \frac{\sin D + \eta \cos D}{\cos D - \eta \sin D} \sin(\alpha - A) d\alpha \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

B.3 Optimisation

B.3.1 Discussion préalable

L'optimisation d'un processus de réduction astrométrique est une question délicate car deux tendances existent. Nous qualifierons ces deux écoles de *profusionnaire* et de *minimaliste*.

Les *profusionnaires* considèrent qu'une bonne réduction s'effectue avec un très grand nombre de points de référence afin de déterminer une fonction de raccordement complexe (à plusieurs degrés de développement polynomial) permettant ainsi d'absorber les termes issus d'une part des linéarisations du mouvement de l'observateur, des étoiles de référence, de la réfraction, ..., et d'autre part des distorsions du champ. Plusieurs arguments sont à opposer à cette technique. Le premier d'entre eux a déjà été exposé et concerne les linéarisations effectuées à une époque où les calculs vectoriels n'étaient pas facilement programmables. A l'heure actuelle, la programmation de tels formulaires (*cf.* paragraphe B.2.2) n'est plus un obstacle. De plus, comme nous l'avons dit, ne pas effectuer ces corrections liées à la cinématique des systèmes de référence (précession, nutation, aberrations annuelle et diurne) peut induire des effets systématiques difficilement identifiables dans les solutions du mouvement ajustées sur ces observations non ou mal corrigées. D'autre

part, un développement de la fonction de raccordement à un degré supérieur à trois n'est nécessaire que pour des champs stellaires couvrant une surface supérieure à 1 degré carré. Or, dans la majorité des cas, la taille moyenne des récepteurs n'atteint pas cette couverture. Autrement dit, utiliser une fonction de rattachement avec un haut degré de développement est souvent sans intérêt dans la correction d'effets optiques liés aux distorsions éventuelles des champs observés. Rappelons, de plus, que dans le cas de très grands champs (de plus de 2 degrés), d'autres algorithmes de réduction (*cf.* paragraphe B.2.3) semblent être plus adaptés. Enfin, pour mettre en œuvre de tels processus, il faudrait disposer de catalogues stellaires ET astrométriques tels que leur densité permettrait de disposer d'un nombre suffisant d'étoiles de référence pour effectuer ce type d'algorithme et cela quelle que soit la taille, en général quelques minutes ou dizaines de minutes de degré des récepteurs classiques. Or, nous savons que ce n'est pas le cas. Les *profusionnaires* font donc appel à d'autres catalogues stellaires, non astrométriques, en particulier l'USNO A2.0 et sa version résumée l'USNO SA2.0, ayant respectivement des densités de 12450 et 1300 étoiles par degré carré (contre 23 étoiles par degré carré pour l'ACT) mais ne comportant aucune information sur la cinématique propre (mouvements propres et parallaxe trigonométrique) de chaque objet. Le fait d'ajuster une fonction polynomiale à haut degré permet alors d'absorber les effets induits par cette méconnaissance des mouvements propres des points de raccordement mais n'est pas, comme nous l'avons déjà dit, sans conséquence sur la qualité astrométrique des positions déduites en particulier dans le cadre d'une exploitation dynamique (ajustement des théories du mouvement de l'objet observé, raccordement de systèmes de référence etc....) de ces données. Cette méthode de réduction est bien sûr la plus répandue car d'application simple et induit des positions sur les objets à étudier à une précision équivalant à celle de la précision externe des catalogues stellaires utilisés à savoir entre 300 et 500 mas.

La tendance *minimaliste* correspond à une approche plus moderne de la réduction astrométrique et vise à n'utiliser qu'un nombre limité d'étoiles de très bonne qualité astrométrique tout en corrigeant au préalable un grand nombre d'effets présents sous forme linéaire et donc approximative dans l'approche décrite précédemment. Ce type d'algorithme constitue la base de PRIAM. Ces corrections, que nous avons décrites plus haut, nous permettent d'effectuer des réductions pouvant atteindre les limites de précision des catalogues astrométriques utilisés qui, dans ce cas, atteignent 50, 25 voire 10 mas (pour Hipparcos). L'inconvénient d'un tel algorithme réside dans le fait que bien souvent une réduction uniquement avec des étoiles de référence astrométrique est difficile car bien souvent il n'y a qu'une voire deux étoiles de ce type dans le champ. Pour ces cas complexes, des algorithmes de réduction, présentés dans le paragraphe B.3.3, ont été mises en place (Fienga, 1998) afin de pallier ce déficit de points de raccordement et de limiter la dégradation de la qualité astrométrique de la réduction induite par l'introduction d'étoiles non astrométriques dans le processus.

Hormis ces différentes considérations, certains choix sont à effectuer lors du processus, comme celui de la position du centre de champ, du degré de la fonction de raccordement à utiliser et autres. Nous allons dans la suite indiquer quelques choix possibles, illustrés d'exemples, afin d'optimiser la réduction d'une image CCD ou photographique.

B.3.2 De la géométrie des points de raccordement

Comme nous l'avons vu, la fonction de raccordement est déterminée à partir de points de référence. Les déformations ainsi modélisées le seront donc en fonction de la position et de la nature des étoiles de référence utilisées comme points de raccordement. Or gardons à l'esprit,

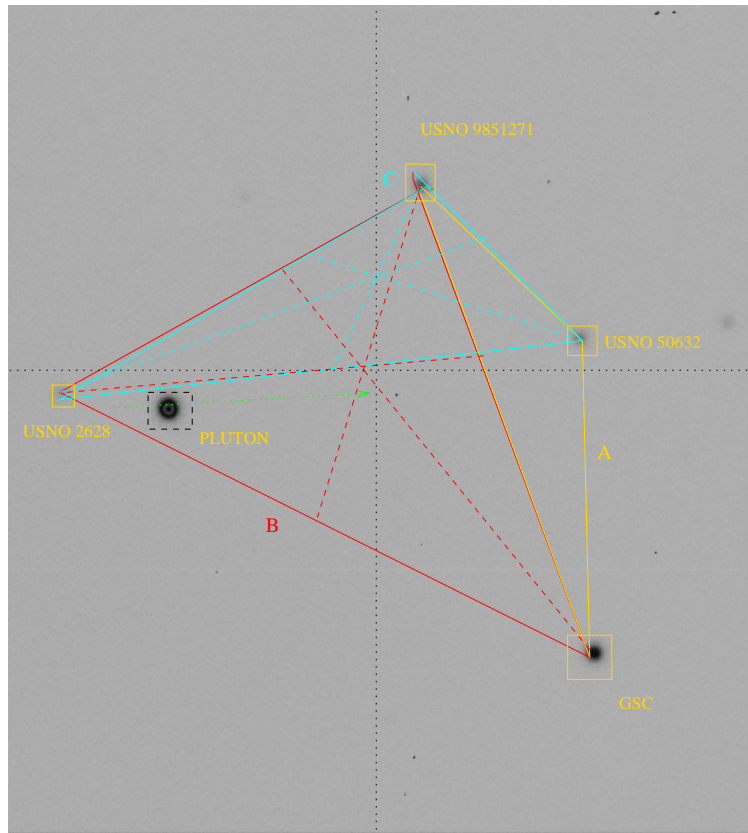


FIG. B.6: Exemple de configuration géométrique: image de Pluton réalisée au télescope de 80 cm de l'OHP en juin 1999.

le but de cette étape: corriger les positions de l'objet étudié mesurées en pixels sur le récepteur des distorsions du champ pouvant induire des erreurs systématiques lors de l'estimation de la position de ce même objet sur la sphère céleste. Or de telles déformations sont locales. Il convient donc de choisir des points de raccordement environnant le plus possible l'objet considéré. Prenons l'exemple d'une série d'observations de Pluton (figure B.6) réalisées au télescope de 80 cm de l'Observatoire de Haute Provence en juin 1999. Sur cet exemple, quatre étoiles de référence ont été détectées autour de Pluton. Quatre configurations de réduction sont donc possibles: la première réunit l'ensemble des quatre étoiles de référence délimitant l'aire dans laquelle sera déterminée la fonction de raccordement et se trouve Pluton, et les trois configurations notées A, B, C sur la figure et reliant trois des quatre étoiles précédentes. Les résultats issus de ces quatre réductions sont présentés dans le tableau B.2. Il apparaît alors clairement que la configuration constituée des trois étoiles les plus éloignées de Pluton induit des estimations des positions de cet objet très fortement dégradées par rapport aux trois autres solutions. Cet exemple est un cas typique de l'importance de la géométrie du système dans le choix des étoiles de référence. En effet, les trois étoiles formant la configuration A ne sont pas individuellement les sources de cette dégradation des résidus, puisque chacune utilisée séparément induit des solutions bien meilleures.

La condition minimale dans le choix d'une configuration de points de raccordement pourrait donc être que la surface délimitée par ces points inclut l'objet étudié, ici Pluton. C'est donc l'association de ces trois étoiles qui induit une mauvaise détermination de la fonction de raccordement

Configurations	$\langle(O - C)\rangle_\alpha$ (")	σ_α (")	$\langle(O - C)\rangle_\delta$ (")	σ_δ (")
4 étoiles	0.141	± 0.173	0.117	± 0.216
A	0.541	± 0.657	1.373	± 0.672
B	0.122	± 0.170	0.059	± 0.204
C	0.081	± 0.179	-0.072	± 0.241

TAB. B.2: *Pluton*: Statistiques des résidus calculés par comparaison entre les positions observées et réduites selon les configurations quatre étoiles, A, B et C et les positions déduites de DE405

et donc de l'ensemble des paramètres de la réduction. Remarquons d'autre part que la solution induisant une diminution des dispersions des résidus de façon significative est la configuration dont le barycentre est le plus près du centre du récepteur (*cf.* figure B.6). Cette remarque soulève un deuxième point important dans l'impact de la géométrie des systèmes dans l'optimisation des processus de réduction: le choix des coordonnées sur la sphère céleste du point T, centre de la projection du plan d'observation *idéal* tangent à la sphère céleste. Comme nous l'avons vu, les coordonnées physiques de ce point sur le récepteur sont associées au centre physique du CCD en pixels. L'intérêt d'estimer une position sur la sphère céleste la plus proche possible du centre physique du récepteur est de minimiser la valeur d'*offset* (coefficient constant) de la fonction de raccordement afin d'améliorer la détermination d'autres paramètres plus complexes, comme ceux de rotation par exemple. Cette algorithmique peut être utile dans les cas d'étalonnage optique d'un récepteur (détermination précise des valeurs de l'échelle et des angles de rotation du récepteur par rapport à l'axe optique du télescope) ou de réduction à peu d'étoiles, comme nous le verrons au chapitre suivant.

B.3.3 Choix de l'ordre de la fonction de raccordement et réduction à peu d'étoiles

Beaucoup de choses ont déjà été dites à ce sujet. Rappelons cependant que dans les cas d'applications les plus courantes, PRIAM s'adresse à des utilisateurs dont les récepteurs ont des surfaces comprises entre quelques minutes de degré carrées et un peu plus d'un degré carré.

Les réductions à peu d'étoiles consistent à simplifier la fonction de rattachement au maximum (formule des constantes de plaques classiques), à corriger le plus grand nombre d'effets connus empiriquement (comme les mouvements de l'observateur et des points de raccordement, la réfraction etc...) et enfin à faire appel à des étalonnages antérieurs de l'instrument, étalonnages pouvant avoir été réalisés par de précédentes réductions. Il devient alors possible de faire une astrométrie précise sur des champs couvrant de très petites surfaces (quelques minutes) et ne comportant qu'un nombre très restreint d'étoiles ou d'objets de référence (1 ou 2).

Dans ce cadre d'astrométrie à très petit champ, on suppose que les distorsions optiques et mécaniques affectant la surface du récepteur sont linéaires et peuvent être représentées par un

décalage en (X, Y) , une rotation autour de l'axe optique du télescope et une réduction constante en X et en Y de l'échelle de la projection. Si on note (ζ, η) les projections sur le plan *idéal* d'observation des coordonnées apparentes, vraies de la date des points de raccordement, (X, Y) les mesures réalisées sur le récepteur des positions de ces mêmes points, alors la fonction de raccordement s'écrit:

$$\begin{cases} \zeta = e_x \cdot \cos \theta X + e_Y \cdot \sin \theta Y + K_x \\ \eta = -e_x \cdot \sin \theta X + e_Y \cdot \cos \theta Y + K_y \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

où (e_x, e_y) sont les facteurs d'échelle respectivement des axes X et Y , θ est l'angle qu'il existe entre l'axe optique du télescope et la direction normale à la surface du récepteur, et enfin (K_x, K_y) représente le décalage en X et Y entre la position du centre physique du récepteur (en pixels) et la position (α, δ) du point tangent à la sphère céleste. En général, les facteurs d'échelle sont connus, et lorsque le récepteur vient d'être récemment et convenablement aligné à l'ensemble du système optique du télescope, on considère que θ est petit ou nul. Dans le premier cas de figure (θ petit, donc $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$), qui est celui le plus communément rencontré, le système d'équations précédent devient:

$$\begin{cases} \zeta = e_x \cdot X + e_Y \cdot \theta Y + K_x \\ \eta = -e_x \cdot \theta X + e_Y \cdot Y + K_y \end{cases}$$

Si de plus, l'angle d'orientation est connu (par des calibrations antérieures) ou supposé nul, ce système devient un système de deux équations à deux inconnues qu'il est possible de résoudre à l'aide d'un seul point de référence.

Inversement, il est possible à partir d'une estimation des paramètres $(A(i), i=1, 2, 3)$ et $(B(j), j=1, 2, 3)$ de déduire une fonction de rattachement d'ordre 0, c'est-à-dire de la forme:

$$\begin{cases} \zeta = A(1) \cdot X + A(2) \cdot Y + A(3) \\ \eta = B(1) \cdot X + B(2) \cdot Y + B(3) \end{cases}$$

en terme de paramètres instrumentaux liés à l'optique et à la mécanique du télescope. Ces déterminations peuvent être utiles dans le cadre d'un étalonnage de l'instrument d'une part et pour la mise en place de paramètres standard de réduction associés à l'instrument, et donc réutilisables au cours de réductions suivantes, d'autre part. Plus précisément, le graphe présente les évolutions des erreurs externes de réductions déduites d'une formule de type B.8 pour un récepteur CCD classique de 1000x1000 pixels de 25 à 10 microns, couplé à des optiques variant de 25 à 8 mètres de focale. Pour ces différents éléments, est tracée l'erreur induite par un processus de réduction utilisant deux types de catalogues stellaires, ici mis en opposition: les catalogues stellaires au sens strict du terme, comportant un grand nombre d'étoiles mais de qualités astrométriques réduites (en exemple ici l'USNO S2.0) et les catalogues astrométriques à proprement parler, présentant un nombre plus limité d'étoiles de référence mais de façon plus précise. Notons que nous avons pris ici comme exemple le catalogue FAME. Le but n'est pas ici d'insister sur les caractéristiques de ces catalogues mais de montrer qu'une réduction avec un grand nombre d'étoiles de référence non astrométriques (comme c'est le cas des étoiles de l'USNO S2.0) ne permet pas d'obtenir une meilleure précision sur la position de l'objet étudié, considéré ici ponctuel. Prenons par exemple, le cas d'une réduction effectuée sur un

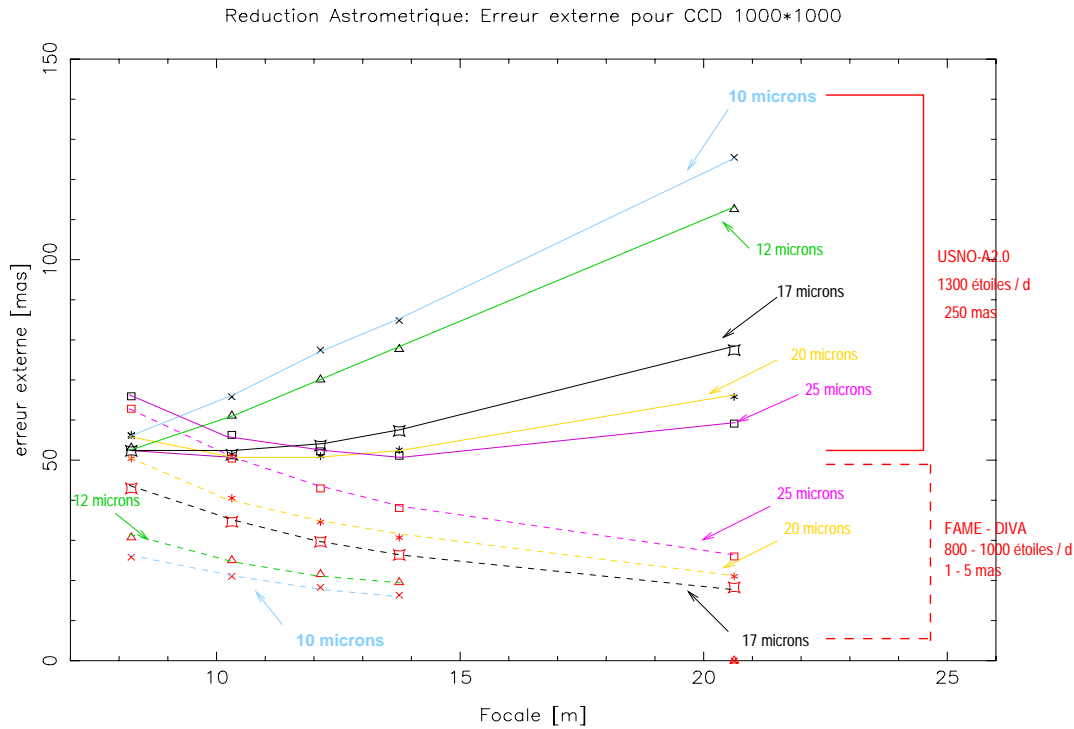


FIG. B.7: Evolution de l'erreur externe de réduction en fonction du catalogue stellaire utilisé ainsi que des caractéristiques instrumentales telles que la focale de l'ensemble du système optique, la taille des pixels constituant un CCD de taille 1000×1000

récepteur de pixels de 17 μm . On voit clairement sur notre graphe que l'erreur induite par le choix des points de raccordement est doublée pour une focale de 14 mètres et se trouve multipliée de presque un facteur 10 pour une focale de 21 mètres. Autrement dit, il est clair que le nombre d'étoiles utilisées dans la réduction ne peut compenser la qualité astrométrique propre de chaque étoile. En conclusion, il est important de garder à l'esprit qu'une réduction basée sur l'utilisation d'étoiles non astrométriques de type USNO SA2.0 induira des positions de qualité inférieure, même si ce processus s'opère avec un grand nombre de point de raccordement, à celles déduites d'une réduction basée sur un nombre plus limité d'étoiles astrométriques, de type ACT. Cependant, restons réalistes: à l'heure actuelle, la densité des catalogues astrométriques – ACT, Tycho et Hipparcos – ne permet pas, dans la plupart des cas (champs des récepteurs inférieurs à 10 minutes de degré carrées), d'effectuer de réduction classique, au sens *professionnel* du terme. Nous conseillons dans ce cas à l'utilisateur de faire des calibrages précis de son instrument et d'utiliser les possibilités offertes par PRIAM pour effectuer une réduction à peu d'étoiles comme cela a été décrit précédemment.

Annexe C

APDB: Astrometric Planetary Data Base

Nous allons présenter ici en quelques mots la base de données que nous avons mise en place en collaboration avec le Jet Propulsion Laboratory et l'U.S. Naval Observatory regroupant un grand nombre d'observations astrométriques des planètes du système solaire. La vocation de cette base est donc de mettre à disposition de la communauté scientifique l'ensemble des observations astrométriques de planètes servant d'échantillonnage observationnel aux ajustements des théories planétaires numériques et analytiques actuelles, et de façon plus générale des observations astrométriques très diverses en terme de répartition dans le temps, des lieux d'observation et de techniques mises en œuvre. Sur les figures C.1 et C.2, sont représentées ces répartitions pour les observations des planètes intérieures et de Mars (figure C.1) et pour les planètes extérieures (figure C.2).

La base APDB est présente sur deux et bientôt trois sites (JPL, IMC-BDL et USNO). Ces trois sites proposent les mêmes observations mais sous des présentations légèrement différentes ainsi que des liens permettant une interconnexion entre ces sites. Les sites de l'IMC-BDL, web et ftp, sont organisés par planète (Image A), type d'observations (Image B), et niveau de réduction (Image C). L'utilisateur a accès aussi bien aux données brutes c'est-à-dire telles qu'elles ont été publiées qu'à des séries de positions déduites des positions observées, exprimées dans les systèmes de références propres aux théories dynamiques (repère astrométrique J2000 FK5, par exemple) et corrigées des effets instrumentaux et physiques, type effet de phase, affectant les données directement issues de l'observation. Ce dernier type de données, appelé *reduced data*, est donc directement comparable aux théories dynamiques actuelles, numériques, analytiques ou semi-analytiques et peut intervenir comme base d'ajustement pour de nouvelles solutions du mouvement. Les positions réduites ou brutes sont organisées en fonction du lieu d'observation. Des formats standardisés ont été adoptés afin de faciliter à l'utilisateur la lecture des fichiers, en particulier pour les observations optiques pour lesquelles les unités de temps et les repères dans lesquels ont été publiées ces dernières ont beaucoup évolué.

La figure C.3 permet de visualiser les différentes possibilités offertes à l'utilisateur afin d'aboutir à un fichier de données pour une planète et un type d'observation choisis. Comme nous l'avons déjà dit, cette architecture est en miroir sur le site ftp de l'IMC. Ces sites, web (<http://www.bdl.fr/APDB.html>) et ftp (<ftp://ftp.bdl.fr/pub/PODB/>), doivent évoluer afin de fournir à l'utilisateur un plus grand nombre d'accès à des observations de deux types bien distincts: les observations récentes issues des programmes spatiaux et de la mise en œuvre de techniques complexes (suivi VLBI de sonde

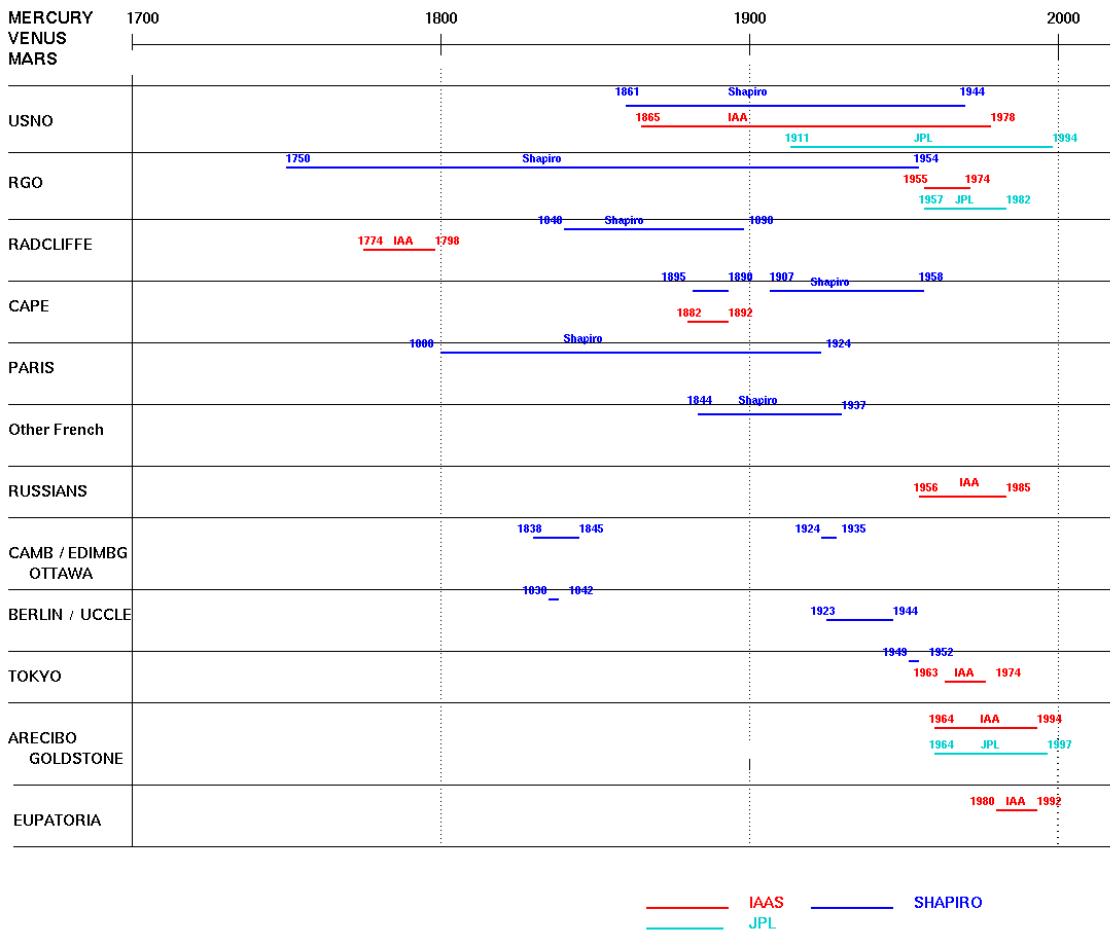


FIG. C.1: *Distribution des observations optiques et radar des planètes intérieures actuellement disponibles ou prochainement disponibles sur APDB*

par exemple) et les observations anciennes. Dans le cas des données récentes, la vocation de la base de données sera de veiller à l'actualisation permanente de ces fichiers. D'autre part, de nombreux observateurs amateurs ou professionnels ont de nos jours du matériel suffisamment performant pour fournir de nouvelles positions des planètes du système solaire, en particulier des planètes extérieures. Un espace est d'ailleurs consacré sur le site au dépôt de nouvelles données. Enfin, abordons le problème des observations anciennes. Sous format papier donc difficilement consultables et bien souvent complexes d'interprétation, ces observations n'en sont pas moins dignes d'intérêt. Rappelons que de nouvelles techniques d'analyse (analyse en ondelettes) permettent d'améliorer la qualité astrométrique de ces données par la détection et la déconvolution d'effets systématiques résiduels. Grâce à une collaboration avec l'Institut d'Astronomie Appliquée de Saint-Petersbourg, nous avons mis à disposition de la communauté, en complément des données brutes fournies par l'U.S. Naval Observatory (Hilton, 1999), des observations anciennes réalisées entre 1750 et 1900 sous un format et dans un repère (astrométrique B1950 FK4) utilisables aisément (Sveshnikov, 1998). Précisons que les données de l'U.S. Naval Observatory ont été elles-aussi mises au format standard des observations optiques de la base mais ont été laissées dans leur repère d'origine. D'autre part, rappelons que des recherches bibliographiques permettent de mettre régulièrement de nouvelles données au jour.

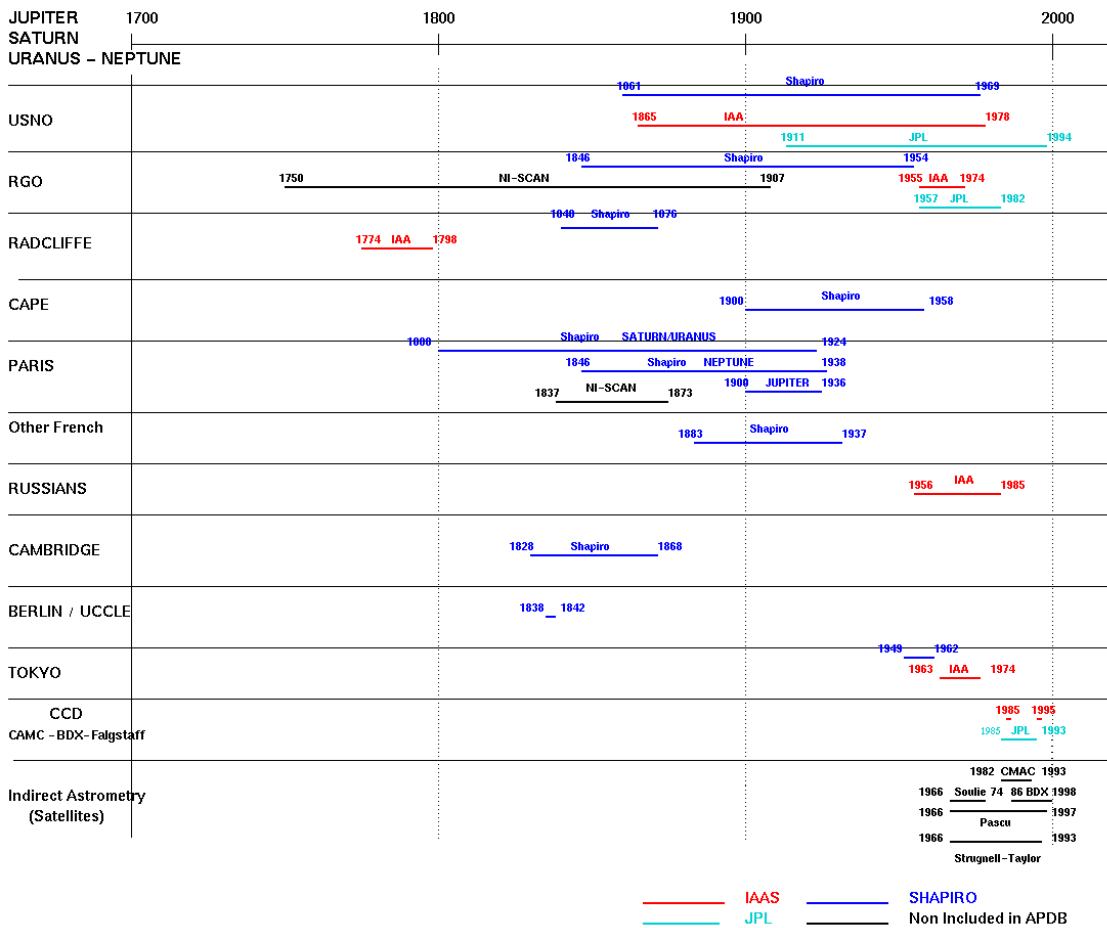


FIG. C.2: *Distribution des observations optiques des planètes extérieures actuellement disponibles ou prochainement disponibles sur APDB*

L'évolution de cette base exige bien sûr de maintenir à jour l'ensemble des données de quelques types d'observation (radar, VLBI, VLA, observations méridiennes anciennes et modernes, observations CCD) que ce soit tout en permettant à l'utilisateur d'utiliser facilement ces données dans le cadre d'étude dynamique ou planétologique de l'ensemble des planètes de notre système solaire.

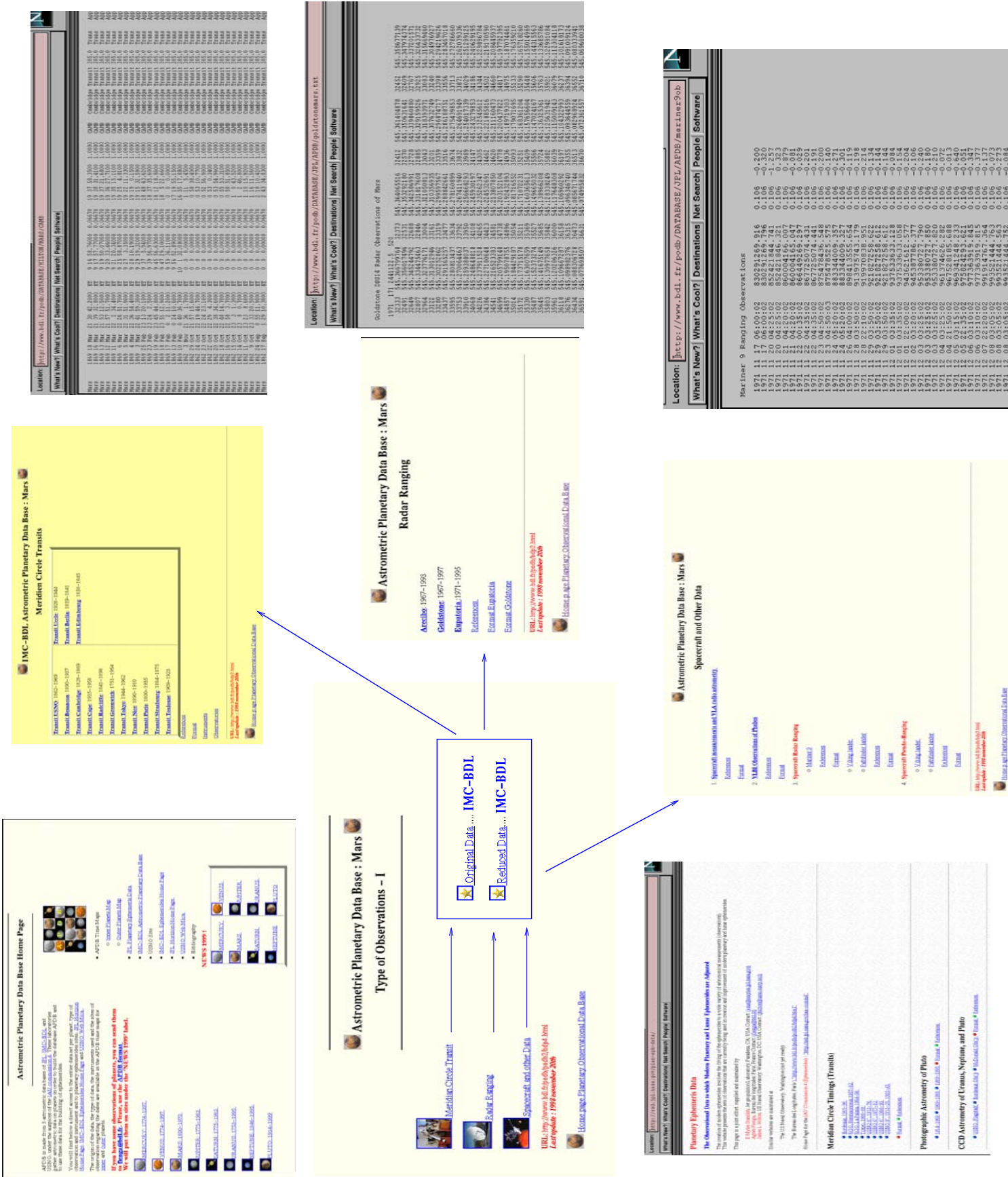


FIG. C.3: Vision globale de l'organisation de la base astrométrique des données planétaires, APDB. L'accès à ce site s'effectue sur l'adresse: <http://www.bdl.fr/APDB.html>

Annexe D

Corrélations et autres paramètres des ajustements

D.1 Constantes du modèle d'Owens

Nous précisons ici les valeurs numériques utilisées dans le modèle de réfraction dit de *Herring-Owens*. Plus précisément, ces valeurs interviennent dans l'estimation des composantes sèche et humide de la réfractivité atmosphérique modélisée par Owens et cela pour les longueurs d'onde radar et radio. On rappelle brièvement le formulaire utilisé au chapitre 2 de notre travail. Nous cherchons à estimer le décalage $\Delta\tau_{TROP}$ induit par les couches troposphériques de l'atmosphère terrestre sur le temps aller retour d'un signal radio. On montre que:

$$c\Delta\tau_{TROP} = \Delta R = \frac{1}{f(\Psi, H, T_0)} \cdot \frac{A + B}{\sin(E) + \frac{\frac{f_s(\lambda)B}{A+B}}{\sin(E) + 0.01}} \quad (D.1)$$

avec : E et Ψ respectivement, la hauteur, la latitude de l'objet. H est l'altitude de l'antenne (en km) et T_0 est la température en kelvin au niveau de l'antenne. f_s et f_v sont les facteurs dissipatifs du milieu en fonction de la longueur d'onde λ .

$$\begin{aligned} A &= K_1^A \cdot f_s(\lambda) \cdot P_{a_0} + K_2^A (3.7f_v(\lambda) - 2.7f_s(\lambda)) \cdot P_{v_0} \cdot (1 + K_3^A (T_0 - 283.15)) \\ B &= K_1^B \cdot P_{a_0} T_0 \kappa + K_2^B \frac{P_{a_0}^2}{T_0} \cdot \frac{2}{3 - \frac{1}{\kappa}} \end{aligned} \quad (D.2)$$

où

$$\begin{cases} \kappa = 11.63 - K_1^\kappa \cos 2\Psi - K_2^\kappa T_0 + K_3^\kappa P_{a_0} \\ f(\Psi, H, T_0) = 1 - K_1^f \cos 2\Psi - K_2^f H - K_3^f (T_0 - 283.15) \end{cases} \quad (D.3)$$

P_{a_0} et P_{v_0} représentent respectivement les pressions atmosphériques et de vapeur d'eau au niveau de l'antenne en mb. Puis:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_s(\lambda) = \frac{1}{K_1^{f_s}} \left[K_2^{f_s} + \frac{K_3^{f_s} \left(130 + \frac{1}{\lambda^2} \right)}{\left(130 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^2} + \frac{K_4^{f_s} \left(38.9 + \frac{1}{\lambda^2} \right)}{\left(38.9 + \frac{1}{\lambda^2} \right)^2} \right] \\ f_v(\lambda) = \frac{1}{K_1^{f_v}} \left[K_2^{f_v} + \frac{K_3^{f_v}}{\lambda^2} + \frac{K_4^{f_v}}{\lambda^4} + \frac{K_5^{f_v}}{\lambda^6} \right] \end{array} \right. \quad (\text{D.4})$$

Les constantes associées sont à lire dans le tableau D.1:

$K_1^A = 2.355 \cdot 10^{-3}$	$K_1^B = 1.8084 \cdot 10^{-8}$	$K_1^\kappa = 0.00968$	$K_1^f = 0.0026$
$K_2^A = 0.1405 \cdot 10^{-3}$	$K_2^B = 4.734 \cdot 10^{-8}$	$K_2^\kappa = 0.00204$	$K_2^f = 0.28 \cdot 10^{-3}$
$K_3^A = 0.0042$		$K_1^\kappa = 0.1435 \cdot 10^{-4}$	$K_3^f = 8.4 \cdot 10^{-6}$
$K_1^{f_v} = 6838.849$	$K_4^{f_v} = 4547.3$	$K_1^{f_s} = 8028.519$	$K_4^{f_s} = 4547.3$
$K_2^{f_v} = 6487.31$	$K_5^{f_v} = 4547.3$	$K_2^{f_s} = 2371.34$	
$K_3^{f_v} = 174.174$		$K_3^{f_s} = 683939.7$	

TAB. D.1: Constantes du modèle de réfraction de Herring-Owens

D.2 Paramètres de l'ajustement

Sont présentées ici les valeurs des corrections à apporter aux constantes d'intégration des solutions analytiques VSOP87 pour Mercure, Vénus, Jupiter et Saturne ainsi que pour le barycentre Terre-Lune. Nous présentons de plus, les matrices de corrélations liées aux principales résolutions de notre travail.

D.2.1 Mercure-Vénus-le barycentre Terre-Lune

Solution Mer - Ven - BTL 1

Mercure

	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	-0.131	0.095	0.544	-0.591	-0.350
$\Delta \lambda$		1.0	-0.107	0.012	0.125	0.676
Δk			1.0	0.005	0.170	-0.009
Δh				1.0	-0.610	-0.032
Δq					1.0	0.240
Δp						1.0

La Terre

	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	0.021	-0.053	0.419	-0.133	-0.361
$\Delta \lambda$		1.0	-0.222	-0.030	0.165	0.277
Δk			1.0	0.103	-0.084	0.043
Δh				1.0	0.192	-0.158
Δq					1.0	0.162
Δp						1.0

Vénus

	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	-0.035	-0.088	0.219	-0.173	-0.439
$\Delta \lambda$		1.0	-0.151	-0.036	0.101	0.329
Δk			1.0	0.122	-0.068	0.025
Δh				1.0	-0.215	-0.206
Δq					1.0	0.140
Δp						1.0

TAB. D.2: Matrice de corrélation des corrections aux conditions initiales de la solutions analytique du mouvement de Mercure, Vénus et du barycentre Terre-Lune. La solution dite BTL 1 correspond à une solution ajustée sur l'échantillon Radar+VLBI décrit dans le texte.

Solution Mer - Ven - BTL 4

Mercure

	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	-0.034	0.031	0.117	-0.016	-0.002
$\Delta \lambda$		1.0	0.182	0.001	0.054	-0.185
Δk			1.0	-0.068	-0.022	0.020
Δh				1.0	0.007	-0.008
Δq					1.0	-0.012
Δp						1.0

La Terre

	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	-0.005	-0.019	0.168	0.001	-0.008
$\Delta \lambda$		1.0	-0.105	-0.045	0.014	-0.132
Δk			1.0	-0.238	-0.027	-0.007
Δh				1.0	-0.032	-0.030
Δq					1.0	-0.040
Δp						1.0

Vénus

	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	-0.025	-0.040	0.042	-0.055	-0.021
$\Delta \lambda$		1.0	0.019	-0.030	0.043	-0.132
Δk			1.0	-0.127	0.050	-0.002
Δh				1.0	-0.215	-0.206
Δq					1.0	-0.241
Δp						1.0

TAB. D.3: Matrice de corrélation des corrections aux conditions initiales de la solutions analytique du mouvement de Mercure, Vénus et du barycentre Terre-Lune. La solution dite BTL 4 correspond à une solution ajustée sur l'échantillon Radar+Optiques Modernes décrit dans le texte.

D.2.2 Jupiter et Saturne

Jupiter	BTL 1	BTL 3	BTL 4
Optiques 1914-1993 + VLBI			
ΔN	(3.9 ± 0.7)	(3.4 ± 0.7)	(3.3 ± 0.7)
$\Delta \lambda$	(-450 ± 20)	(-447 ± 20)	(-453 ± 20)
Δk	(14 ± 12)	(10 ± 12)	(10 ± 12)
Δh	(55 ± 11)	(69 ± 11)	(69 ± 11)
Δp	(10 ± 14)	(12 ± 14)	(14 ± 14)
Δq	(184 ± 9)	(182 ± 9)	(181 ± 9)
Optiques 1750 - 1993 + VLBI			
ΔN	(0.8 ± 0.8)	(0.6 ± 0.8)	(0.5 ± 0.8)
$\Delta \lambda$	(-140 ± 16)	(-138 ± 16)	(-144 ± 16)
Δk	(21 ± 11)	(14 ± 11)	(14 ± 11)
Δh	(152 ± 9)	(168 ± 9)	(168 ± 9)
Δp	(-210 ± 15)	(-209 ± 15)	(-208 ± 15)
Δq	(-76 ± 10)	(-78 ± 10)	(-79 ± 10)
Optiques 1914 - 1993			
ΔN	(3.5 ± 0.7)	(3.1 ± 0.7)	(3.0 ± 0.7)
$\Delta \lambda$	(-442 ± 20)	(-449 ± 20)	(-445 ± 20)
Δk	(14 ± 12)	(10 ± 12)	(9 ± 12)
Δh	(55 ± 11)	(69 ± 11)	(69 ± 11)
Δp	(12 ± 14)	(14 ± 14)	(15 ± 14)
Δq	(169 ± 9)	(167 ± 9)	(166 ± 9)
Solution D			
ΔN	(5.9 ± 0.8)		
$\Delta \lambda$	(-595 ± 18)		
Δk	(51 ± 11)		
Δh	(2 ± 10)		
Δp	(178 ± 14)		
Δq	(194 ± 8)		

TAB. D.4: Corrections aux conditions initiales de VSOP87 des solutions analytiques du mouvement de Jupiter. Les unités sont 10^{-10} pour k, h, q et p , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} radian par an pour N . Les solutions BTL 1, BTL 3, BTL 4 correspondent aux diverses solutions du barycentre Terre-Lune utilisées dans les solutions du mouvement de Jupiter.; BTL1 est la solution du BTL ajustée sur l'échantillon Radar+VLBI, BTL 3 sur Radar+VLBI+Optiques anciennes et modernes et BTL 4 Radar+Optiques modernes.

Saturne BTL 1

Optiques 1914-1982

ΔN	(-1.1 ± 1.0)
$\Delta \lambda$	(147 ± 24)
Δk	(-18 ± 15)
Δh	(-36 ± 14)
Δp	(-17 ± 17)
Δq	(15 ± 15)

Optiques 1866-1982

ΔN	(2.1 ± 1.16)
$\Delta \lambda$	(247 ± 21)
Δk	(-6 ± 14)
Δh	(-24 ± 12)
Δp	(19 ± 17)
Δq	(28 ± 12)

Optiques 1840-1982+ST (-USNO18)

ΔN	(0.8 ± 0.9)
$\Delta \lambda$	(165 ± 15)
Δk	(-0.9 ± 9)
Δh	(-3 ± 9)
Δp	(42 ± 9)
Δq	(4 ± 10)

TAB. D.5: *Corrections aux conditions initiales de VSOP87 des solutions analytiques du mouvement de Saturne. Les unités sont 10^{-10} pour k, h, q et p , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} radian par an pour N . La solution BTL 1 correspond à la solution du mouvement du barycentre Terre-Lune utilisée dans l'ajustement de la solution de Saturne. Ici, on a utilisé la solution ajustée sur l'échantillon Radar+VLBI.*

JUPITER

1914-1997							1750-1997						
	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp		ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	-0.131	0.732	0.020	-0.031	-0.01	ΔN	1.0	-0.054	0.250	-0.261	-0.006	-0.011
$\Delta \lambda$		1.0	-0.202	0.404	-0.022	0.210	$\Delta \lambda$		1.0	0.105	-0.102	0.100	-0.148
Δk			1.0	-0.212	-0.043	-0.011	Δk			1.0	-0.559	0.030	-0.010
Δh				1.0	0.012	0.010	Δh				1.0	0.026	0.013
Δq					1.0	0.422	Δq					1.0	0.461
Δp						1.0	Δp						1.0

TABLE D.6: *Matrice de Corrélations des corrections aux conditions initiales de la solutions analytique du mouvement de Jupiter*

SATURNE

1840-1982							1840-1982+ST						
	ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp		ΔN	$\Delta \lambda$	Δk	Δh	Δq	Δp
ΔN	1.0	0.014	0.073	0.108	0.025	0.038	ΔN	1.0	0.201	0.528	-0.208	0.035	0.012
$\Delta \lambda$		1.0	-0.256	0.059	-0.001	0.056	$\Delta \lambda$		1.0	-0.031	0.022	-0.005	0.021
Δk			1.0	0.510	-0.001	-0.001	Δk			1.0	-0.312	0.003	0.002
Δh				1.0	0.001	0.010	Δh				1.0	-0.007	0.003
Δq					1.0	0.410	Δq					1.0	-0.683
Δp						1.0	Δp						1.0

TABLE D.7: *Matrice de Corrélations des corrections aux conditions initiales de la solutions analytique du mouvement de Saturne*

Annexe E

On the use of Hipparcos data for the determination of astrometric positions of outer planets

