

Thèse de Doctorat  
*en*  
Astronomie Fondamentale, Mécanique Céleste et Géodésie

*présentée par :*

Daniel Hestroffer  
*à*  
l'Observatoire de Paris

*sujet :*

ASTROMÉTRIE ET PHOTOMÉTRIE DES ASTÉROÏDES  
OBSERVÉS PAR LE SATELLITE HIPPARCOS.  
APPORT À L'ÉLABORATION D'UN SYSTÈME DE  
RÉFÉRENCE DYNAMIQUE.

*Rapporteurs :*

*Alberto Cellino (Observatoire de Turin)*

*Michel Rapaport (Observatoire de Bordeaux)*

*Soutenue le 21 Décembre 1994, devant le jury composé de :*

*François Mignard (Observatoire de la Côte d'Azur)*

*Bruno Morando (Bureau des Longitudes, Paris)*

*Jean-Eudes Arlot (Bureau des Longitudes, Paris)*

*Alberto Cellino (Observatoire de Turin)*

*M.A.C. Perryman (European Space Agency, Noordwijk)*

*Michel Rapaport (Observatoire de Bordeaux)*

*Président du jury*

*Directeur de Thèse*

*Examineur*

*Rapporteur*

*Examineur*

*Rapporteur*

## Résumé

Le travail présenté ici concerne les données astrométriques et photométriques, des petites planètes observées par le satellite Hipparcos de novembre 1989 à mars 1993. Le sujet traité comprend la réduction des données en position et leur utilisation en vue du lien du catalogue Hipparcos au système de référence dynamique. Pour cela je développe dans un premier temps les notions de système de référence et de repère de référence ; puis je fais un bref rappel historique sur l'utilisation des positions des planètes pour déterminer l'équateur et l'équinoxe des catalogues fondamentaux. Je présente le satellite Hipparcos et les conditions d'observations propres à cette mission ; je rappelle aussi les principales étapes de la construction du référentiel de la sphère des étoiles Hipparcos. Je m'attache ensuite aux observations des petites planètes. On trouvera une présentation des éphémérides utilisées, et l'étude du signal photométrique (dû à la modulation de la lumière par une grille) pour une source étendue présentant une phase. Je développe aussi les aspects théoriques sur la réduction des données astrométriques propres à la grande précision des données Hipparcos. Nous pouvons alors construire une position astrométrique moyenne dont la précision est de l'ordre de  $0''.010 \sim 0''.015$ .

Je termine cet exposé par le lien de la sphère Hipparcos au système de référence dynamique. On trouvera dans cette partie la méthodologie employée pour résoudre ce problème, et la méthode retenue propre à l'amélioration des éphémérides des petites planètes. Le plan de l'écliptique J 2000 est rattaché à la sphère Hipparcos avec une précision de  $0''.002$  et  $0''.002/an$ , l'équinoxe moyen est donné sur cette sphère avec une précision de  $0''.002$  et  $0''.003/an$ .

## Abstract

The ESA Hipparcos satellite not only yields great precision results for star positions and proper motions but it also provides valuable results on minor planets photometric and astrometric data. The aim of this thesis is the reduction to astrometric positions for the 48 minor planets observed during the Hipparcos mission, from november 1989 to march 1993. This thesis deals also with the tie between the Hipparcos reference system and the dynamical system as defined by the minor planets.

In the first part, a presentation of the reference systems and reference frames notions is made. Some historical points to the constructions of fundamental catalogues, and the value of minor planets observations to determine the dynamical frame are related. Then we present the Hipparcos observations, and the general pre-reduction scheme that yields the observational data we are working with. We give a short description of the planets observed and the ephemerides used in this study. The photometric reply for a resolved object is studied. Further the reduction of the observed positions to astrometric directions is developed, this reduction has to take into account small effects up to the milli-arcsecond level which is uncommon for minor planets observations. A twenty seconds averaged normal place is defined providing thus minor planets positions accurate to about  $0''.010 \sim 0''.015$ .

Astrometric residuals were used for the Hipparcos-planetary frame tie. The link obtained is of great precision when compared to the time span covered by the observations, or to previous link to fundamental catalogues by using ground-based observations of minor planets. The ecliptical plane is tied to the Hipparcos sphere with an accuracy of  $0''.002$  and  $0''.002/year$ , and the mean equinox of epoch J 2000 is tied to this sphere with an accuracy of  $0''.002$  and  $0''.003/year$ .

# Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Bruno Morando, mon directeur de thèse, qui a su me guider et me stimuler durant toutes ces années ; ainsi qu'à François Mignard qui a accepté au pied levé de diriger les derniers mois de mon travail, et dont les conseils avisés ont contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie sincèrement François Mignard pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse, ainsi que Messieurs Jean-Eudes Arlot, Bruno Morando et Michael Perryman d'avoir bien voulu en faire partie, et plus spécialement Messieurs Alberto Cellino et Michel Rapaport qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de mes travaux.

Au cours de ce travail j'ai eu l'occasion de recevoir l'aide et les conseils précieux de Ulrich Bastian, Siegfried Röser, Jean-Louis Falin et Michel Froeschlé, je leur en sais gré.

Je voudrais remercier aussi Jean Chapront et Jean-Eudes Arlot, Directeurs du Service de Calcul et de Mécanique Céleste du Bureau des Longitudes, et l'ensemble des membres du B.D.L., pour leur accueil chaleureux et l'aide qu'ils m'ont apportée pendant mon séjour. Je tiens en particulier à exprimer ma profonde gratitude à Annick Bec-Borsenberger, pour avoir mis à ma disposition son algorithme de calcul d'éphémérides grâce auquel j'ai pu mener ce travail.

Je n'oublie pas Nicole Baron, Christian Ruatti, Alain Montintin et les étudiants ou ex-étudiants du B.D.L. pour leurs aides diverses et variées, mais toutes aussi précieuses. Un petit clin d'œil aussi à ceux de mes amis qui se demandent encore ce que peut bien être un système de référence dynamique.

Je suis enfin très heureux de remercier chaleureusement mes parents pour leur soutien moral.

A Arthur et Selmer.





FIG. 0.1 - Astéroïdes observés par la sonde Galileo.  
*Page précédente : astéroïde Gaspra. Cette page : Ida et sa lune.*

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>1 REPÈRE DE RÉFÉRENCE ET CATALOGUE FONDAMENTAL</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes et repères de référence . . . . .	3
1.2 Historique : d'Hipparque à HIPPARCOS . . . . .	4
1.3 La construction d'un catalogue fondamental . . . . .	7
1.4 Le système de référence de la théorie planétaire . . . . .	9
<b>2 LA MISSION HIPPARCOS</b>	<b>11</b>
2.1 Buts de la mission . . . . .	11
2.2 Description du satellite . . . . .	12
2.3 Coordonnées . . . . .	16
2.4 Chaîne de réduction . . . . .	20
2.5 Historique de la mission . . . . .	22
<b>3 OBSERVATIONS DES PETITES PLANÈTES</b>	<b>24</b>
3.1 Généralités . . . . .	24
3.2 Ephémérides . . . . .	27
3.3 Modulation d'un objet sphérique résolu . . . . .	31
3.3.1 Coefficients de modulation . . . . .	33
3.3.2 Position du photocentre . . . . .	39
3.3.3 Relation entre photocentre et direction observée . . . . .	46
<b>4 RÉDUCTION DES DONNÉES</b>	<b>48</b>
4.1 Aspects théoriques . . . . .	48
4.1.1 Parallaxe . . . . .	48
4.1.2 Aberration . . . . .	50
4.1.3 Déviation des rayons lumineux . . . . .	52
4.2 Corrections à apporter aux observations . . . . .	56
4.2.1 Calcul de la position apparente . . . . .	56
4.2.2 Calcul de la direction astrométrique . . . . .	57
4.3 Comparaison observés-calculés : $O-C$ . . . . .	58
4.4 Observations douteuses et filtrage . . . . .	61

4.4.1	Ambiguïté de pas de grille . . . . .	62
4.4.2	Effet d'éblouissement . . . . .	62
4.4.3	Test sur la pente . . . . .	65
4.4.4	T4 supprimés . . . . .	66
4.4.5	Test basé sur la magnitude . . . . .	66
4.5	Positions astrométriques – Points normaux . . . . .	69
4.6	Résultats . . . . .	71
<b>5</b>	<b>LIEN AU REPÈRE DE RÉFÉRENCE DYNAMIQUE</b>	<b>95</b>
5.1	Rappels sur la méthode des moindres carrés . . . . .	97
5.1.1	Probabilités . . . . .	97
5.1.2	Estimateur des moindres carrés . . . . .	98
5.1.3	Modèle stochastique . . . . .	100
5.2	Définition du problème . . . . .	103
5.2.1	Équation fondamentale sur un RGC . . . . .	103
5.2.2	Écriture sous la forme de matrices blocs . . . . .	106
5.3	Éphémérides des astéroïdes . . . . .	110
5.3.1	Matrices aux dérivées partielles . . . . .	110
5.3.2	Corrélation des variables . . . . .	112
5.3.3	Décomposition sur les axes principaux . . . . .	118
5.3.4	Tests statistiques . . . . .	120
5.3.5	Discussion . . . . .	122
5.4	Cas particuliers . . . . .	127
5.4.1	Planète 27–Euterpe . . . . .	127
5.4.2	Transits excentrés . . . . .	128
5.4.3	Déplacement du photocentre . . . . .	130
5.5	Solution générale . . . . .	134
5.5.1	Observations extérieures . . . . .	134
5.5.2	Indétermination en orientation . . . . .	143
5.5.3	Rotation de la sphère Hipparcos . . . . .	144
5.5.4	Solution classique des moindres carrés . . . . .	145
5.5.5	Solution de norme minimale (SVD) . . . . .	146
5.5.6	Validation . . . . .	147
5.6	Résultats . . . . .	148
	<b>CONCLUSION</b>	<b>158</b>
	<b>GLOSSAIRE</b>	<b>160</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>163</b>
<b>A</b>	<b>Matrices de corrélation</b>	<b>169</b>
A.1	Astéroïdes . . . . .	169

A.2 Paramètres globaux . . . . .	174
<b>B Solution globale avec 45 planètes</b>	<b>175</b>
<b>C Conditions initiales des astéroïdes</b>	<b>176</b>
C.1 Solution de norme minimale . . . . .	176
C.2 Variations des conditions initiales des astéroïdes . . . . .	181
C.3 Nouveaux éléments osculateurs . . . . .	184



# INTRODUCTION

La première nuit de l'année 1801, G. Piazzi découvrit la petite planète Ceres. Dans les années suivantes furent découvertes Pallas, Juno et Vesta, comblant ainsi le vide laissé entre Mars et Jupiter. Aujourd'hui quelques milliers d'astéroïdes sont répertoriés, apportant des informations sur l'origine et l'évolution du système solaire.

La formation de notre système solaire, il y a environ 4,5 milliards d'années, a laissé en place de nombreux débris qu'on observe actuellement sous forme de comètes, météores ou astéroïdes. Les petits corps comme les astéroïdes sont encore mal connus dans la mesure où ils restent pour l'essentiel des points lumineux dans les télescopes. Néanmoins, puisque qu'ils sont les restes des planétoïdes à partir desquels les planètes se sont formées, ils sont considérés comme étant les corps les plus primitifs de notre système solaire, et ils contiennent des informations précieuses sur les premiers instants de sa formation.

L'observation des astéroïdes et l'étude de leur évolution dynamique et collisionnelle nous permet de suivre la fin du processus d'accumulation qui a donné naissance aux planètes telles que la Terre. Les familles dynamiques d'astéroïdes permettent l'étude de la composition minéralogique du corps dont ils sont issus, elles apportent aussi des contraintes sur les modèles de collisions à l'intérieur de la ceinture principale. L'observation des astéroïdes permet aussi d'étudier la dynamique et la stabilité de zones particulières du système solaire : celles où les résonances avec des planètes principales sont importantes, ou bien les points de Lagrange avec les planètes troyennes. La caractéristique principale des astéroïdes est leur diversité, aussi bien de taille ou de forme que de nature chimique ou minéralogique ; certains sont très allongés, d'autres sont presque sphériques, d'autres encore possèdent des satellites. De plus, la plupart des astéroïdes ont subi au cours de leurs révolutions des collisions ou perturbations qui les ont transformés, mais aussi qui ont pu les transporter loin de leur lieu de formation.

Si l'étude polarimétrique ou photométrique des astéroïdes ne nécessite pas a priori la connaissance de leurs positions, l'étude de leur dynamique par contre est liée à un système de référence. Inversement les observations astrométriques des astéroïdes peuvent servir à la matérialisation d'un système de référence dynamique. Le référentiel lié à une sphère d'étoiles et le référentiel de la mécanique sont reliés par les positions qu'occupent les corps du système solaire dans ces deux repères. L'observation des astéroïdes est donc d'un grand intérêt non seulement pour une meilleure connaissance de notre système solaire, mais également pour l'étude des mouvements à une plus grande échelle.

La mission européenne Hipparcos est la première mission astrométrique embarquée à bord d'un satellite. Ces observations spatiales, puisqu'elles s'affranchissent

des problèmes liés à l'atmosphère et aux déformations des télescopes, fournissent un gain en précision remarquable sur le positionnement des étoiles et des astéroïdes. Néanmoins ces observations ne sont pas conventionnelles, elles nécessitent donc une réduction particulière et elles posent, de par leur spécificité et leur grande précision, des problèmes nouveaux. L'objet principal de la mission Hipparcos est de fournir un catalogue d'étoiles homogène et extrêmement précis, ce catalogue pouvant ensuite servir de matérialisation d'un système de référence.

Mon travail s'inscrit dans le cadre de cette mission. J'y développe la réduction des données astrométriques sur les petites planètes et j'y établis le lien de la sphère des étoiles au système de référence dynamique.

La première partie de cet exposé traite de la notion de système de référence et de sa matérialisation. On y trouvera un rappel sur la construction des catalogues fondamentaux et l'apport des observations des petites planètes. La deuxième partie est consacrée au satellite Hipparcos, y sont présentées les observations et les données utilisées dans ce travail. Les éphémérides utilisées, les astéroïdes observés lors de cette mission, et les particularités liées à leur taille sont détaillés au cours du troisième chapitre. Celui-ci comprend notamment l'étude du signal obtenu par la modulation de la lumière pour une source non ponctuelle. On y trouvera aussi l'étude de l'influence de la diffusion de la lumière sur ce signal et sur la position mesurée des petites planètes. Dans la partie suivante nous traiterons de la réduction des données en position ; celle-ci doit être développée jusqu'à tenir compte d'effets petits de l'ordre du millième de seconde d'arc. Nous pourrons alors déterminer des positions astrométriques moyennes réduites sur une durée d'environ vingt secondes. Finalement le lien du catalogue d'étoiles au système de référence dynamique sera étudié lors du dernier chapitre. La méthodologie employée pour déterminer la rotation de la sphère Hipparcos et pour l'amélioration des éphémérides des petites planètes y est exposée.

Les données astrométriques sur les petites planètes obtenues par le satellite Hipparcos, sont d'une grande précision. Elles permettent d'ores et déjà d'améliorer les éphémérides de ces corps et d'établir un lien du système de référence dynamique à la sphère Hipparcos. Toutefois, la durée de vie d'un satellite est relativement limitée comparée aux échelles de temps des révolutions des astéroïdes. Si les données recueillies par le satellite peuvent compléter avantageusement des données terrestres, elles seront surtout d'un grand intérêt si elles sont étendues par des observations de même précision.

# Chapitre 1

## REPÈRE DE RÉFÉRENCE ET CATALOGUE FONDAMENTAL

### 1.1 Systèmes et repères de référence

L'étude des déplacements des corps célestes a toujours intéressé les astronomes, notre Univers est mouvement et l'astrométrie, base métrologique de l'astronomie, tente de le quantifier. On peut distinguer deux types d'observations en astronomie : les observations systématiques des positions et mouvements des corps sur la sphère céleste, et les observations individuelles de ces objets pour étudier leur nature physique particulière. Les observations du premier type sont la base de l'astronomie théorique et gravitationnelle, elles sont nécessaires à la dynamique stellaire, l'étude de la structure de la galaxie, l'astrophysique et la cosmologie.

Toute mesure de position ou de mouvement est relative et nécessite un système ou un repère de référence. Le système de référence idéal correspond à une définition théorique, c'est un système dans lequel des lois de physique sont vérifiées (système de coordonnées en relativité ou carte d'une variété) ; le système de référence galiléen, de conception plus simple, correspond à une définition dynamique, les mouvements des corps y sont décrits sans terme de rotation ou d'accélération. Un tel système n'est pas unique, son seul mouvement possible étant une translation uniforme par rapport à un repère fixe, la transformation entre systèmes galiléens reste simple. Une autre approche consiste en une définition géométrique (resp. cinématique) où l'on suppose l'existence de corps fixes (resp. se déplaçant de façon modélisable et sans rotation d'ensemble). Nous voyons que ces systèmes sont attachés à une certaine théorie. Bien qu'il n'existe pas de référentiel privilégié dans le cadre de la relativité générale, nous pouvons localement, en présence d'un champ de gravité assez faible comme celui du système solaire, trouver un voisinage dans lequel la définition de système inertiel reste possible et où l'on peut décrire les observables (positions, directions) par de petites corrections apportées aux lois classiques ; par contre la transformation entre systèmes inertiels ou entre un système local et un système global devient plus complexe.

A la définition cinématique ou dynamique du système de référence idéal est

associé un ensemble physique. Les galaxies lointaines ou les quasars représentent le système cinématique ; leurs vitesses tangentielles sont négligeables même si elles sont de l'ordre de grandeur des vitesses d'expansion. On associe au système dynamique le système solaire, il est défini par la donnée des masses et des conditions initiales des planètes. Ces types de systèmes dépendants du choix de certains paramètres seront appelés systèmes conventionnels de référence.

Finalement la représentation du système idéal entraîne certaines approximations : système de coordonnées localement tangent à la variété que forme l'espace temps global, paramètres erronés (masses, conditions initiales...) ; ces choix faits, le système solaire ainsi que le système formé de sources lointaines sont des systèmes conventionnels quasi-inertiels, dynamique pour le premier et cinématique pour le second. Notons que nous avons adopté le vocabulaire préconisé par J. Kovalevsky et I.I. Mueller lors du 56<sup>e</sup> colloque de l'Union Astronomique Internationale (U.A.I.) en 1980 [GK81]. Certains auteurs emploient la terminologie "quasi-inertiel" pour un système dont les axes de coordonnées restent parallèles en mécanique classique, sans contrainte sur le mouvement de l'origine ; définition qui peut se prolonger, avec le transport parallèle, à la relativité générale.

Chacun des systèmes décrit jusqu'à présent est matérialisé implicitement par des objets que l'on appelle : les points de référence primaires. Ces points sont soit les sources extragalactiques pour le système cinématique, soit les positions au cours du temps (données par des éphémérides) des corps formant le système solaire pour le système dynamique ; ils forment le repère de référence. Les points de référence sont encore trop peu nombreux ou mal répartis sur la sphère céleste pour rendre le repère accessible à tous, par conséquent ils sont complétés par des objets secondaires pouvant être observés en même temps que les corps à étudier. L'ensemble des positions à une époque donnée et des mouvements propres par rapport au repère de référence de ces points secondaires (généralement des étoiles) constitue un catalogue fondamental. Le catalogue fondamental est la matérialisation du système de référence idéal ; il n'y a pas eu jusqu'à aujourd'hui de publication de catalogue fondamental matérialisant un système de référence cinématique<sup>1</sup>, et l'accessibilité (nombre d'étoiles par degré carré) du catalogue *FK5* est relativement limitée.

## 1.2 Historique : d'Hipparque à HIPPARCOS

Hipparque fut un des premiers astronomes à élaborer un "catalogue fondamental" en 128 av. J.C. Les étoiles étant considérées fixes, il avait mesuré les positions en coordonnées écliptique de 1022 étoiles avec une précision d'environ  $\pm 30'$  d'arc. Une des particularités de son travail est qu'il a découvert la précession des équinoxes en comparant la longitude de  $\alpha$ Vir (Spica) avec celle déterminée 150 ans auparavant par Timocharis et Aristillos, variation en longitude qui se retrouvait aussi sur d'autres étoiles.

L'Almageste de Ptolémée (150 ap. J.C.) reprend les observations d'Hipparque en tenant compte de la précession des équinoxes, peut-être contient-il aussi des observations personnelles. Pendant environ 1500 ans, la sphère des fixes restera pratiquement inchangée ; suivent alors les observations de Tycho Brahe (1600) et Hevelius (1680) fournissant pour la première fois en coordonnées équatoriales les positions

---

<sup>1</sup>Le repère de référence de l'IERS est encore un système propre aux observations de sources radio

(à  $\pm 2'$  d'arc près) d'environ 1500 étoiles. A la même époque Newton expliqua le phénomène de la précession des équinoxes par l'action du couple luni-solaire sur le bourrelet équatorial de la terre.

Au *XVIII*<sup>è</sup> siècle, un pas important est franchi dans l'élaboration de catalogues fondamentaux. Halley en 1718 et Cassini en 1738 mettent en évidence l'existence de mouvements propres de certaines étoiles puis Tobias Mayer à Göttingen, Bradley et Maskelyne à Greenwich déterminent les mouvements propres d'environ 60 étoiles. Bien que Bradley n'ait pu déterminer la parallaxe stellaire, il a découvert l'aberration et la nutation. Les quelques 60 000 observations d'environ 3 200 étoiles (avec une précision de  $\pm 2''$  d'arc) effectuées par Bradley entre 1750 et 1765 seront réduites par le jeune Bessel et regroupées dans le "Fundamenta Astronomiae" (1818). Ce catalogue ne peut pas fournir un système de référence puisque les mouvements propres des étoiles n'y sont pas déterminés de façon satisfaisante, il procure toutefois un système de coordonnées pour l'époque 1755.

Le premier catalogue fondamental, matérialisation d'un système de référence dynamique, est dû à Bessel (Newcomb disait de Bessel qu'il était le père de l'école allemande d'astrométrie). Bradley et Maskelyne avaient observé 36 étoiles zodiacales dans le but d'établir un repère de référence; c'est en complétant ces observations de 1825 à 1830 à l'observatoire du Königsberg que Bessel publia la "Tabulae Regiomontanae". La "Tabulae" donne une nouvelle valeur de la précession et les positions apparentes d'étoiles zodiacales de 1750 à 1850, elle a servi de système de référence pendant une cinquantaine d'années.

Newcomb, pour la partie américaine, détermine ensuite l'équinoxe *N1* en 1872 dans le "Right Ascensions of the Equatorial Stars" à partir de différentes observations de ces mêmes étoiles. Ce système sera adopté en 1882 pour le "Catalogue of 1098 Standard Clock and Zodiacal Stars" et en 1899 pour son "Fundamental Catalogue". On peut trouver dans le catalogue de Newcomb des comparaisons de catalogues, établis entre 1830 et 1880, qui mettent en évidence un mouvement supplémentaire de l'équinoxe; "précession" provenant d'effets systématiques lors des observations (équations personnelles lors de l'enregistrement du transit d'une étoile ou du limbe d'une planète, entre une observation de jour ou de nuit, ou selon la méthode d'enregistrement de l'instant du transit...). Newcomb suspectait que l'observateur enregistrerait le transit d'une étoile faible trop tard et celui d'une étoile brillante trop tôt, ceci fut confirmé par Küstner en 1902 [Küs02]. Depuis Kahrstedt en 1931 [Kah31], on sait éviter ces erreurs systématiques mais tous les observateurs ne le faisaient pas [Fri85].

Nous finirons cette brève description de quelques catalogues et observations s'y rattachant, par la série des catalogues fondamentaux allemands, de la fin du 19<sup>è</sup><sup>me</sup> siècle à aujourd'hui. Leur but est de représenter de la manière la plus précise un système de référence dynamique quitte à l'élargir, pour une meilleure couverture de la sphère céleste, à des étoiles plus faibles et ce au risque d'une perte en précision. Il existe d'autres catalogues regroupant un plus grand nombre d'étoiles faibles (le N30 de Morgan ou le GC de Boss...); mais s'ils sont plus accessibles, c'est au détriment d'une représentation précise d'un système de référence.

Jusqu'à présent, il n'a pas été possible de publier un catalogue fondamental de référence cinématique. C'est le nombre de corps primaires trop faible, la difficulté à localiser la contrepartie visuelle des radio-sources et les difficultés à pointer les galaxies puis à les relier à des étoiles (de magnitude plus petite) qui font que les catalogues d'objets extra-galactiques restent réservés à un domaine restreint d'observations.

C'est Auwers qui en 1879 commence la série des catalogues allemands avec le "FC of the northern sky" (Fundamentalkatalog für die Zonen Beobachtungen am Nördlichen Himmel); ce catalogue comprend seulement 539 étoiles de déclinaison supérieure à  $-10^\circ$  et servant de système de référence à l'AGK1 (Astronomische Gesellschaft Katalog). Ce catalogue ne couvrant que l'hémisphère nord est suivi en 1907 par le NFK de Peters (Neuer Fundamentalkatalog des Berliner Astronomischen Jahrbuchs nach den Grundlagen von A. Auwers) qui contient 925 étoiles; on y applique l'équinoxe  $N1$  et la valeur de la précession établie par Newcomb. Ce catalogue est une extension du FC, la précision sur les positions et mouvements propres des étoiles est améliorée et l'hémisphère sud est représenté. En 1937 Kopff publie le FK3 (Dritter Fundamentalkatalog des Berliner Astronomischen Jahrbuchs), il est formé de 1535 étoiles de magnitude inférieure à  $7,5\text{ mg}$  distribuées sur l'ensemble de la sphère céleste. Ce catalogue a servi de repère de référence pour l'AGK2, son équinoxe est celle déterminée par Kahrstedt ([Kah31], correction de l'équinoxe  $N1$ ). Suite à l'Assemblée Générale de 1938, l'U.A.I. décide qu'à partir de 1940 les positions d'étoiles utilisées pour la mesure du temps ou en connexion avec les signaux radio seraient rattachées au système du FK3; depuis elle contrôle la maintenance et l'élaboration du système de référence. Une vingtaine d'années après la publication du FK3, 72 catalogues d'étoiles ont vu le jour et l'U.A.I. recommanda la construction du FK4. Celui-ci fut publié en 1963 par Fricke et Kopff ([K<sup>+</sup>64]). Il consiste en une révision du FK3 avec des corrections individuelles sur les mouvements propres et sur les positions. Ces corrections sont déterminées à partir de comparaison du FK3 avec d'autres catalogues. Ce nouveau catalogue contient aussi, suite aux observations de corps du système solaire (soleil, lune, planètes), une correction d'équinoxe [Gli63] et une correction d'équateur [K<sup>+</sup>64].

Seulement dix ans après, il devenait urgent de remplacer le FK4 pour les deux raisons suivantes :

1. les erreurs sur les mouvements propres des étoiles du FK4 diminuaient sensiblement la précision sur les positions à l'époque  $J2000$  (en particulier pour les étoiles de l'hémisphère sud qui sont observées depuis moins longtemps),
2. un essor important des techniques et précisions d'observations mettait en évidence les erreurs zonales et systématiques du FK4 .

L'U.A.I. recommande donc en 1973 l'amélioration du FK4 et son élargissement à des étoiles plus faibles. Comme nous l'avons déjà vu, c'est au début du  $XX^{\text{e}}$  siècle que l'on savait éviter les erreurs systématiques, mais nombre d'observatoires ne furent équipés dans ce sens qu'à partir des années cinquante; aussi le FK4, basé sur des observations absolues du début du siècle, en souffrait. Son défaut le plus important était le mouvement erroné de son point vernal, ce qui entraînait une erreur systématique sur les mouvements propres (utilisés en dynamique stellaire ou pour la rotation de la galaxie). Le FK5 ([FSL88]) devait donc corriger l'équinoxe du FK4 et son équateur [Fri82] tout en tenant compte de la constante de précession adoptée par l'U.A.I. en 1976 [L<sup>+</sup>77]. Ce système est légèrement différent des solutions adoptées par le passé. Suite à une analyse des mouvements propres, il contient en plus des corrections de précession, une détermination de la rotation du champ d'étoiles proches induite par la rotation galactique.

Notons, pour conclure ce paragraphe, que les mouvements propres des étoiles fonda-

mentales sont bien moins bien déterminés que leurs positions à une époque donnée, ce qui limite la durée de vie d'un catalogue fondamental (environ 25 ans) et explique qu'à chaque construction de catalogue, il faille déjà penser à son successeur.

### 1.3 La construction d'un catalogue fondamental

Le terme de **catalogue fondamental** est difficilement dissociable de celui d'**observation fondamentale**, c'est à dire selon Newcomb, d'observations au cours desquelles sont déterminées les coordonnées d'une étoile fixe indépendamment de toute détermination préalable ; cette définition est étendue à la notion de position absolue. Il s'agit donc de fournir un grand cercle de référence et son origine (par exemple l'équateur et le point vernal à une époque donnée) à partir de positions fondamentales d'étoiles, et un moyen permettant de déterminer ces positions à une autre date, en tenant compte de la précession et des mouvements propres. Les méthodes utilisées par le passé diffèrent sur l'instrumentation utilisée et sur la précision recherchée, toutes cependant ont en commun les deux opérations distinctes suivantes :

1. mesurer les positions relatives de certaines étoiles,
2. déterminer l'équateur ou l'écliptique à partir du mouvement du soleil et/ou des planètes sur la sphère constituée par ces étoiles.

Le catalogue Hipparcos échappe à cette règle ; il peut servir d'extension à un système existant dans la mesure où la méthode de détermination du cercle et de l'origine de référence n'est pas unique (Cf Chapitre 5).

L'objet de mon travail est de fournir des positions astrométriques de certaines petites planètes et de rattacher la sphère d'étoiles Hipparcos (premier point de la construction) à l'écliptique et l'équinoxe dynamique. Il est intéressant de détailler quelque peu la construction d'un catalogue à partir d'observations classiques (observations méridiennes) car, comme on le verra par la suite, les analogies sont nombreuses.

Jusqu'à présent, il était plus difficile, à partir d'observations fondamentales sur des instruments méridiens, de déterminer l'équateur et surtout l'équinoxe que les positions des étoiles entre elles. On détermine la déclinaison d'une étoile à partir de la connaissance de la latitude du lieu d'observation ; celle-ci est donnée par le Service International des Latitudes ou déterminée lors des culminations supérieures et inférieures d'étoiles circumpolaires. On peut ainsi avec une centaine d'étoiles positionner le cercle origine des déclinaisons : *l'équateur*. Il reste à graduer ce cercle à partir d'ascensions droites d'étoiles de référence et à lui imposer une origine : *le point vernal*. Cette origine tournante provient de la définition du système dynamique, elle est donnée de manière directe par la position du soleil ( $\alpha_{\odot}$ ,  $\delta_{\odot}$ ) lors de l'équinoxe de printemps. On peut, en écrivant la relation :  $\sin \alpha_{\odot} \tan \epsilon = \tan \delta_{\odot}$ , déterminer de manière optimale l'obliquité de l'écliptique  $\epsilon$  lors des solstices ; puis l'intersection de l'équateur et de l'écliptique en mesurant les déclinaisons du soleil au voisinage de l'équinoxe ( $\delta_{\odot} = 0$  ;  $\frac{d\delta_{\odot}}{dt} > 0$ ). L'origine en ascension droite du catalogue est fournie ensuite par la position d'étoiles zodiacales par rapport au soleil. Ceci nécessite des observations d'étoiles de jour car les observations diurnes et nocturnes ne sont pas a priori homogènes.

Une autre manière de procéder consiste à comparer les positions observées à des éphémérides. Les écarts entre les observés et les calculés proviennent :

- d’une erreur constante d’équinoxe  $\Delta\alpha_o$  du système des étoiles zodiacales ;
- d’une erreur constante d’équateur  $\Delta\delta_o$  du système d’étoiles ;
- d’une erreur sur les éphémérides du soleil.

Les erreurs constantes  $\Delta\alpha_o$  et  $\Delta\delta_o$  proviennent d’erreurs systématiques liées aux observations des étoiles.  $\Delta\alpha_o$  comprend les erreurs en magnitude et les équations personnelles, cette correction est appliquée à toutes les ascensions droites (c’est une rotation dans le plan de l’équateur) ;  $\Delta\delta_o$  prend en compte les erreurs propres à l’instrument et à la réduction des observations, elle est appliquée à toutes les déclinaisons pour les objets proches de l’équateur et de manière dégressive ensuite jusqu’à s’annuler aux pôles (ce n’est pas une translation). Les corrections des éléments orbitaux de la terre n’introduisent pas de termes constants sur les ascensions droites et les déclinaisons si les observations sont faites uniformément le long de l’orbite.

Newcomb [New95] fut le premier à intégrer en plus des observations du soleil les mesures de positions de Venus et Mercure. En effet, si les observations sont réparties sur toute la trajectoire de la planète (ce qui est vrai pour les planètes telluriques) on peut déterminer de manière indirecte l’équateur et l’équinoxe.

Les observations astrométriques du soleil sont délicates (flexion du tube, contraintes thermiques, diamètre apparent) tout comme la combinaison à des observations d’étoiles (corps moins brillants, observés la nuit). Bien que dans le principe les observations des planètes soient suffisantes, toutes les difficultés inhérentes aux observations du soleil ne sont pas surmontées. Les diamètres apparents des planètes, les délais d’observation des planètes extérieures, les phases des planètes inférieures (observées elles aussi de jour) font que : les données d’observation des planètes sont intégrées dans le programme, mais la solution retenue sur la détermination du repère de référence dépend encore essentiellement du soleil.

En 1928, Dyson [Dys28] propose lors de l’assemblée de l’U.A.I. d’intégrer les observations de l’astéroïde Vesta. En effet, les petites planètes sont d’apparence stellaire, observables la nuit et assez proches de la terre ; elles sont par contre peu brillantes ce qui limite ainsi leurs observations au voisinage de leur opposition. Dans les années trente, Dyson est suivi par Numerov, Brouwer, Schmeidler et d’autres qui développent des études théoriques et entreprennent des programmes intensifs d’observation de petites planètes (Ceres, Pallas, Juno, Vesta) afin d’améliorer leurs éphémérides. Numerov [Num36a] montra en particulier que les observations devaient s’étendre d’une quadrature à l’autre pour séparer les anomalies moyennes des planètes et de la terre ; puis en 1948, Clemence [Cle48], suite à une étude théorique sur des observations de Ceres pendant une période de cinq ans, donna une estimation de la précision avec laquelle on pouvait rattacher le repère dynamique au repère formé par les étoiles. Cette précision ne sera pourtant jamais atteinte lors des différentes tentatives faites par Schmeidler [Sch58] et Petri [Pet58], Yasuda [Yas66], Jackson [Jac68], Branham [Bra92], ...

Dans le cas d’observations de planètes, des sources supplémentaires d’erreurs entre les positions observées et calculées apparaissent. Nous pouvons les scinder en



deux parties :

1. des erreurs sur les éphémérides des planètes ou astéroïdes :
  - modélisation
  - masse des corps perturbateurs,
  - conditions initiales des orbites des planètes en question ;
2. des erreurs systématiques sur les positions d'étoiles.

Les erreurs systématiques sont essentiellement déterminées à partir d'observations sur plaques photographiques [Bro35] ; elles correspondent à des corrections en ascension droite et déclinaison des étoiles données en fonction de zones de ces mêmes coordonnées équatoriales. A partir des observations méridiennes, sont déterminées uniquement les corrections constantes d'équateur et d'équinoxe ([Num36a], [Sch58]). En pratique les observations de petites planètes ne suffisent pas à positionner l'équateur et l'équinoxe, elles entrent toutefois dans la solution adoptée [Fri82].

Les autres corrections correspondent au modèle du système dynamique utilisé, nous allons l'évoquer dans la section suivante.

## 1.4 Le système de référence de la théorie planétaire

Le plan de référence de la dynamique du système solaire est par convention le plan de l'écliptique ; son mouvement par rapport à un repère inertiel est "entièrement déterminé" par le système des masses et constantes d'intégration, et par la mesure du temps. Ceci doit s'entendre sur un certain intervalle de temps et pour une précision donnée ; les modèles analytiques ou numériques de la dynamique des corps du système solaire sont des approximations, les constantes d'intégration ne sont pas connues de manière exacte, les orbites à l'intérieur du système solaire peuvent être chaotiques [Las92].

Le système solaire est supposé isolé : la précession séculaire, qui résulte des effets gravitationnels de l'ensemble de la galaxie sur les orbites des planètes massives, est de l'ordre  $10^{-6}$  seconde d'arc par siècle [Woe43]. L'approximation post-newtonienne de la théorie de la relativité générale est suffisante pour l'aspect gravitationnel de la dynamique du système solaire [Sof89]. Le repère de référence dynamique de la théorie, auquel se rapportent les positions calculées, est défini par l'écliptique et l'équinoxe moyen de la date ; celui-ci diffère du repère empirique auquel sont liées les observations par trois rotations (figure 1.1). Leverrier a déterminé les masses des planètes après avoir exprimé la variation séculaire de l'obliquité, et en supposant que les deux équinoxes (théorique et empirique) coïncidaient. Par la suite, Newcomb ne fait plus cette hypothèse, il calcule les masses, les éléments orbitaux des planètes, et deux des trois paramètres donnant l'orientation entre le repère dynamique et empirique : une correction d'équinoxe et une correction d'obliquité. Or le système de masses implique la précession planétaire, ainsi le mouvement observé de la planète par rapport aux étoiles est la somme de la précession et de son mouvement sidéral. Les paramètres et constantes entrant dans la modélisation du système solaire, sont obtenus désormais à partir d'observations en termes de corrections à des valeurs précédentes. Les constructions de catalogues fondamentaux évoqués plus haut, et

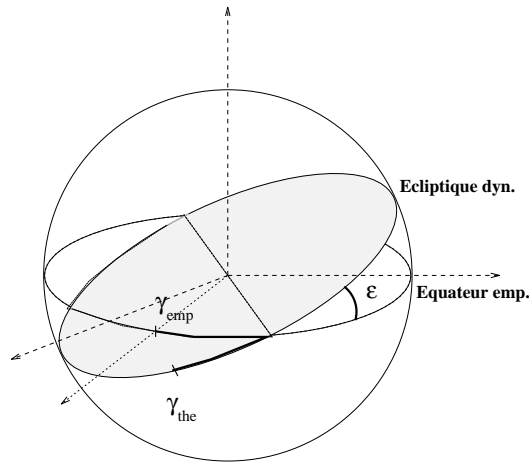


FIG. 1.1 - Rotation entre le repère dynamique et le repère des observations.

les déterminations des corrections d'équateur ou d'équinoxe ne font plus intervenir les masses des planètes comme inconnues. Une dernière remarque concerne la définition de l'équinoxe dynamique et l'obliquité moyenne; la théorie du mouvement des planètes (et plus particulièrement les intégrations numériques des équations de mouvement) peut être associée à un repère inertiel ou à un repère tournant. Habituellement c'est ce dernier repère qui est utilisé, la position de l'équinoxe dynamique dans ce repère diffère alors de celle donnée dans un repère inertiel [Sta81].

## Chapitre 2

# LA MISSION HIPPARCOS

### 2.1 Buts de la mission

Les limitations liées aux observations en position depuis la Terre sont multiples. Nous retiendrons les problèmes liés :

- à la présence de l’atmosphère (réfraction, hétérogénéité);
- aux turbulences de l’atmosphère (tavelures, ”seeing”);
- aux mouvements de la Terre (mouvement du pôle, séparation de la précession et du mouvement d’ensemble des étoiles);
- aux déformations du tube du télescope par son propre poids ;
- à la couverture partielle du ciel par un instrument (astrométrie au mieux semi-globale).

En général, les catalogues d’étoiles réparties sur l’ensemble du ciel représentent mal les voisinages des pôles célestes, et de manière inhomogène les deux hémisphères. De plus, ils comportent des erreurs zonales provenant des erreurs systématiques des différents instruments (Cf section 1.3), voire des différents catalogues entrant dans la construction. C’est le cas du catalogue PPM [RB91] et même du FK5 [FSL88] repère de référence dynamique actuel [Lin92].

C’est pourquoi une mission d’observation astrométrique embarquée à bord d’un satellite est tout à fait adaptée à la situation. L’idée n’est pas récente, P. Lacroûte la proposa dans les années soixante [Lac68]. Il aura fallu néanmoins attendre quelques décennies pour que le premier satellite d’astrométrie soit mis en orbite autour de la terre. Outre l’hommage rendu à l’astronome Hipparque, l’acronyme du nom du satellite HIPPARCOS (High Precision Parallax Collecting Satellite) rappelle que le but de la mission HIPPARCOS est de fournir, avec une très grande précision, les parallaxes et mouvements propres de quelques 120 000 étoiles. Le catalogue d’étoiles ainsi obtenu possède, en plus d’une précision inégalée, deux qualités essentielles : il est homogène et les objets sont bien répartis sur l’ensemble de la sphère céleste.

Par l’obtention d’un grand nombre de parallaxes absolues, un progrès important pourra être réalisé sur les échelles de distances cosmiques et sur la localisation de structures fines dans le diagramme HR. Un autre progrès concerne, avec des mou-

vements propres plus précis, l'étude de l'évolution dynamique de notre galaxie, des dispersions de vitesse, de la rotation galactique et sa dynamique, de la masse du halo... Il sera permis de mieux déterminer le positionnement et la dynamique des corps célestes, ceci grâce à un plus grand nombre de positions de référence. Ainsi par exemple, les prédictions d'occultations d'étoiles par des astéroïdes seront moins aléatoires, et les données en position absolue de plaques photographique [Ber92] ou les calibrages d'images CCD seront améliorés. La comparaison de modèles de la dynamique des corps du système solaire aux observations sera plus fine ; les observations en ondes millimétriques des astéroïdes pourront être élargies à des objets plus faibles [A+94]... Les résultats de la mission HIPPARCOS apporteront d'amples renseignements sur les magnitudes d'étoiles ([M+92], [E+92]), et permettront en particulier la découverte d'étoiles variables.

Les données préliminaires d'Hipparcos ont d'ores et déjà contribué à la réussite des observations de Gaspra et d'Ida (avec sa lune) par la sonde Galileo ; elles ont aussi été utilisées pour les observations de la collision de la comète Shoemaker-Levy 9 avec Jupiter.

Néanmoins, le nombre d'étoiles Hipparcos sur un petit champ est limité (en moyenne 2,5 étoiles par degré carré), aussi ce catalogue doit être étendu à des objets moins brillants ; d'autre part, le catalogue se dégrade au cours du temps (Cf section 1.2). Il s'ensuit que l'astrométrie au sol qui est en continuelle progression, reste très utile.

## 2.2 Description du satellite

Le satellite Hipparcos est le premier instrument d'astrométrie globale, les positions sont obtenues par la combinaison des trois types de mesure d'angle suivants :

- mesure à partir d'une rotation ;
- comparaison à un angle étalon ;
- position sur une grille de modulation.

Ainsi la couverture de l'ensemble de la sphère céleste est assurée avec un seul instrument, de plus les positions relatives sont données avec une grande précision.

Le satellite, lancé en août 1989, décrit une orbite elliptique autour de la terre avec une excentricité de 0,72 et une période de révolution de  $10^h 40^{mn}$ . Le moteur d'apogée n'ayant pu être mis en marche, le périégée de l'orbite a une altitude voisine de 500 km forçant le satellite à traverser régulièrement les ceintures de radiation.

La figure 2.1 représente une vue de la charge utile. Le satellite comporte un télescope dont le miroir complexe a été coupé en deux puis recollé de telle manière que deux champs représentant  $0.9^\circ \times 0.9^\circ$  sur le ciel sont observés simultanément. La stabilité de cet angle étalon de  $58^\circ$  étant assurée à mieux de 0,001 seconde d'arc en un jour, il est possible de déterminer les positions relatives de corps éloignés sur la sphère céleste. La vitesse de rotation du satellite est de  $168,75/s$  (la période correspondante est de  $2^h 8^{mn}$ ) ce qui fait qu'un objet *fixe* "traverse" le champ de vue en 19,2 secondes. L'axe de rotation du satellite décrit un cône autour de la direction du soleil avec une période de 57 jours. Cette loi de balayage permet une couverture du

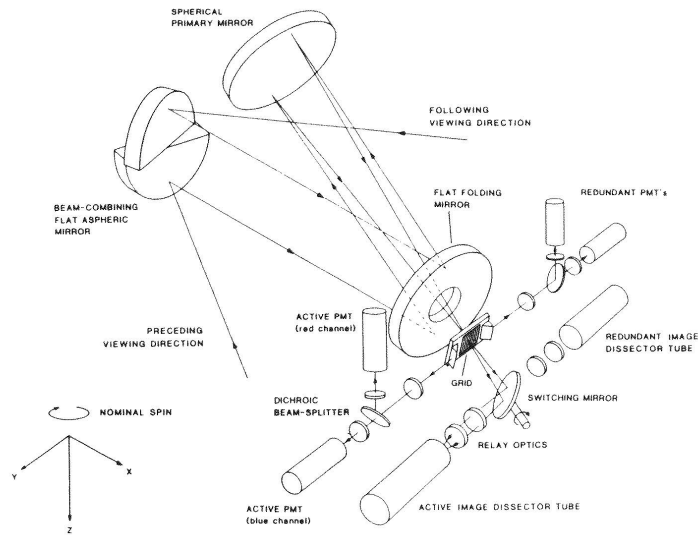


FIG. 2.1 - Vue éclatée de l'optique et du système de réception.

Figure tirée de [P<sup>+</sup> 92].

TAB. 2.1 - Caractéristiques du satellite

Type de télescope	Schmidt
Dimension du champ	0,9° x 0,9°
Longueur focale	1400 mm
Séparation des champs	58°
Diamètre du miroir primaire	290 mm
Magnitude limite	13
Grille de modulation principale	2688 bandes
Pas de la grille	1",208 (8,2 μm)
Détecteur	Dissecteur d'images
Dimension du champ	38"
Bande spectrale	375 - 750 nm
Fréquence de comptage	1200 Hz
Masse au lancement	1140 kg
Période de révolution	10 <sup>h</sup> 40 <sup>mn</sup>
Altitude du périégée	≈ 500 km
Altitude de l'apogée	≈ 36000 km
Inclinaison de l'orbite	≈ 7°
Inclinaison axe spin/soleil	43°
Vitesse de rotation	168",75 s <sup>-1</sup>

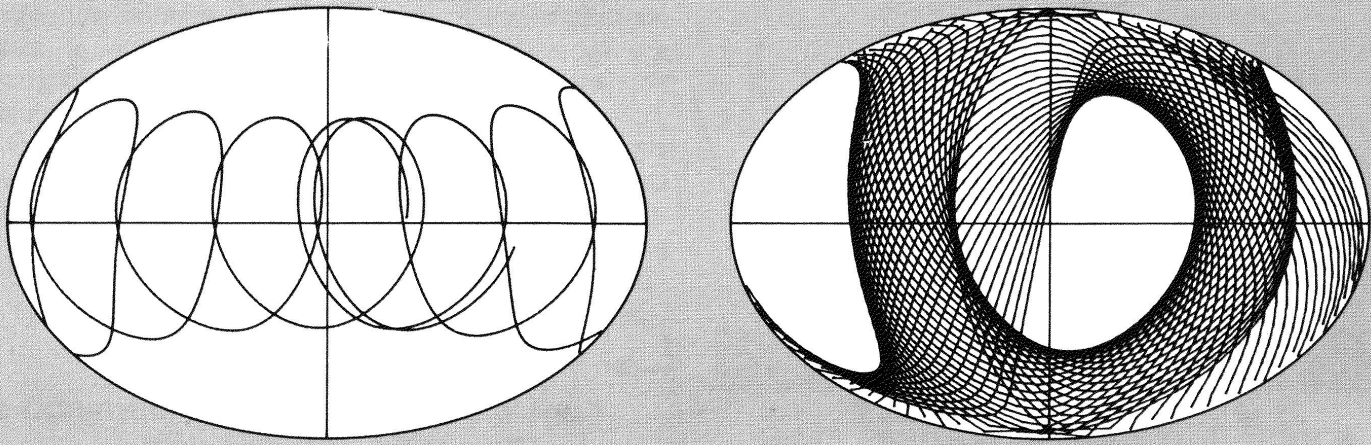


FIG. 2.2 - Loi de balayage en coordonnées écliptiques.  
*A gauche : mouvement de l'axe de rotation en un an.*  
*A droite : Partie du ciel balayée en 70 jours; seul est donné la trace d'un grand cercle par jour. Figure extraite de [Per85].*

ciel optimale avec un bruit de fond aussi constant que possible, elle permet aussi d'éviter de fortes contraintes thermiques. En raison du mouvement apparent du soleil, le balayage se répète avec un décalage d'environ  $57^\circ$ . La figure 2.2 montre, en coordonnées écliptiques, le mouvement de l'axe de rotation en un an. La rotation du satellite est suivie par des gyroscopes dont la dérive est constamment contrôlée par le passage de certaines étoiles (étoiles d'attitude) dans le champ; cette rotation s'écarte régulièrement de la loi nominale elle est corrigée par de petits jets de gaz environ toutes les dix minutes.

Au foyer de ce télescope est placée une grille à bandes verticales de pas  $1'',208$  qui provoque, avec la rotation du satellite, une modulation de la lumière. La lumière reçue est renvoyée sur la couche sensible d'un récepteur photoélectrique. Afin de ne sélectionner qu'une portion du ciel de  $38''$  d'arc de diamètre entourant un objet à observer, les photoélectrons traversent ensuite un dissecteur d'image pour être finalement comptés avec une fréquence de 1200 Hz. Le signal consiste donc essentiellement en un comptage de photons d'un signal diffracté et modulé par une fenêtre (figure 2.3), signal que l'on peut décomposer en série de Fourier jusqu'au second harmonique :

$$S(t) = I + B + IM \cos(\omega t + \Phi) + IN \cos(2\omega t + 2\Psi) \quad (2.1)$$

où  $B$  représente le bruit de fond, la pulsation  $\omega$  dépend de la vitesse de rotation du satellite et de la vitesse de la planète. Dans le cas d'une source ponctuelle, sans effet de chromatisme (indice de couleur  $B - V = 0,5$ ) et une optique idéale, nous avons la relation sur les phases :  $\Psi = \Phi$  et les valeurs de référence des coefficients de modulation sont :  $M_o = 0.72$ ;  $N_o = 0.25$ .

$$S(t) = I + B + IM_o \cos(\omega t + \Phi) + IN_o \cos(2\omega t + 2\Phi) \quad (2.2)$$

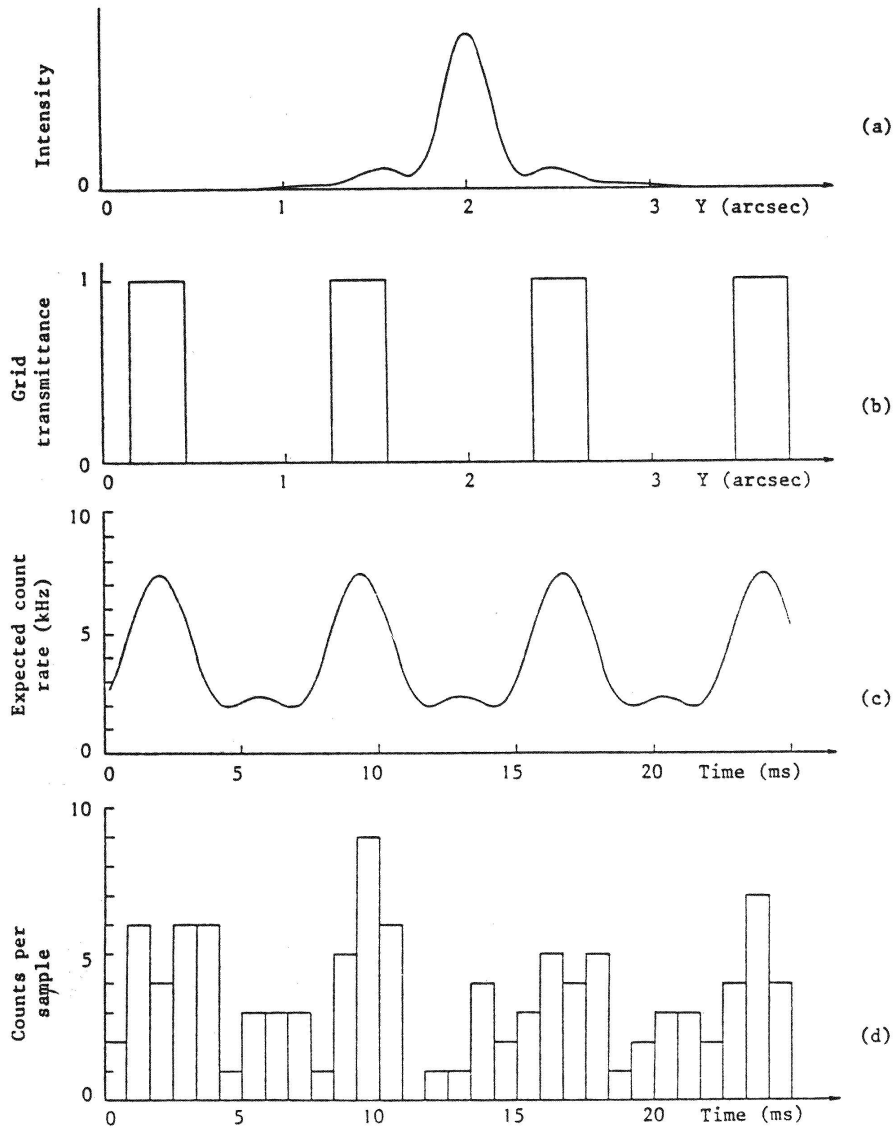


FIG. 2.3 - Principe de modulation de la lumière par la grille principale

*Au signal de l'image diffractée de la source lumineuse (a) est appliqué un produit de convolution par le signal carré de la grille (b) pour produire la variation périodique d'intensité (c). Le signal observé (d) consiste en un comptage de photoélectrons. Le signal donné ici correspond à celui d'une étoile de magnitude 8,5. Figure tirée de [Hog80].*

Les coefficients de la série de Fourier contiennent des informations sur la magnitude alors que les phases permettent de déterminer la position du photocentre de l'objet sur une période de la grille principale.

La reconnaissance des objets à observer se fait par un repéreur d'étoiles composé de bandes verticales et de bandes en chevrons, placé à coté de la grille principale. Signalons que les données de position obtenues dans deux bandes de longueur d'onde par ce repéreur d'étoiles portent sur environ un million d'étoiles ; leur réduction se fait dans le cadre de la mission TYCHO.

## 2.3 Coordonnées

### Coordonnées sur la grille de référence

Les durées d'observations à travers le dissecteur d'images varient en fonction de la magnitude de l'objet, de son importance quant à la réduction de la sphère etc... Afin d'observer l'ensemble des objets présents dans les deux champs du télescope, le temps d'observation est découpé en séquences. Les données de comptage de photons pour un objet, réparties sur différentes séquences, sont moyennées sur un temps de référence de  $\frac{32}{15} \simeq 2,13$  secondes appelé T4. De la courbe de lumière (équation (2.1)) est déduit la phase  $\phi$  du signal au milieu de chaque T4. A ce stade, la même procédure est appliquée aussi bien aux étoiles qu'aux planétoïdes. La phase de l'objet est une combinaison linéaire des phases des deux harmoniques, choisie de manière à minimiser sa variance :

$$\phi = c \Phi + (1 - c) \Psi$$

avec  $c = 0,75$  fixe au cours de la mission et  $|\Psi - \Phi| < \pi/2$ . On obtient par conséquent, à l'instant du milieu du T4, la coordonnée du photocentre entre deux centres de bandes transparentes successives. Pour avoir sa coordonnée sur la grille, il faut connaître sa position a priori. Cette dernière est fournie par des éphémérides obtenues par intégration numérique puis représentées en polynômes de Tchebychev (section 3.2). La position sur la grille ainsi obtenue est unidimensionnelle et peut comporter des erreurs d'ambiguïté de pas de grille.

### Coordonnées sur le cercle de référence

Les coordonnées ainsi recueillies sont dans un repère lié au satellite. Elles sont ramenées à un grand cercle de référence (RGC), position moyenne des cercles instantanés de balayage sur une durée d'environ 7 heures (figure 2.4). Le volume de données est par conséquent diminué ; la loi de balayage du satellite est telle que les cercles instantanés de rotation ne s'écartent pas de plus de  $1^{\circ}5$  du RGC. Les pôles de ces RGC sont définis dans le repère écliptique J2000 et leurs origines sont déterminées lors de la réduction de la sphère Hipparcos. La transformation des coordonnées sur la grille vers leur projection sur le RGC comprend :

- la transformation grille-champ, exprimant les coordonnées sur la sphère céleste en fonction des coordonnées sur la grille et de termes dépendant de la couleur ;
- la détermination de l'attitude, exprimant la rotation d'Euler (d'angles  $\psi, \theta, \phi$ ) entre le repère instantané lié au satellite et le RGC.



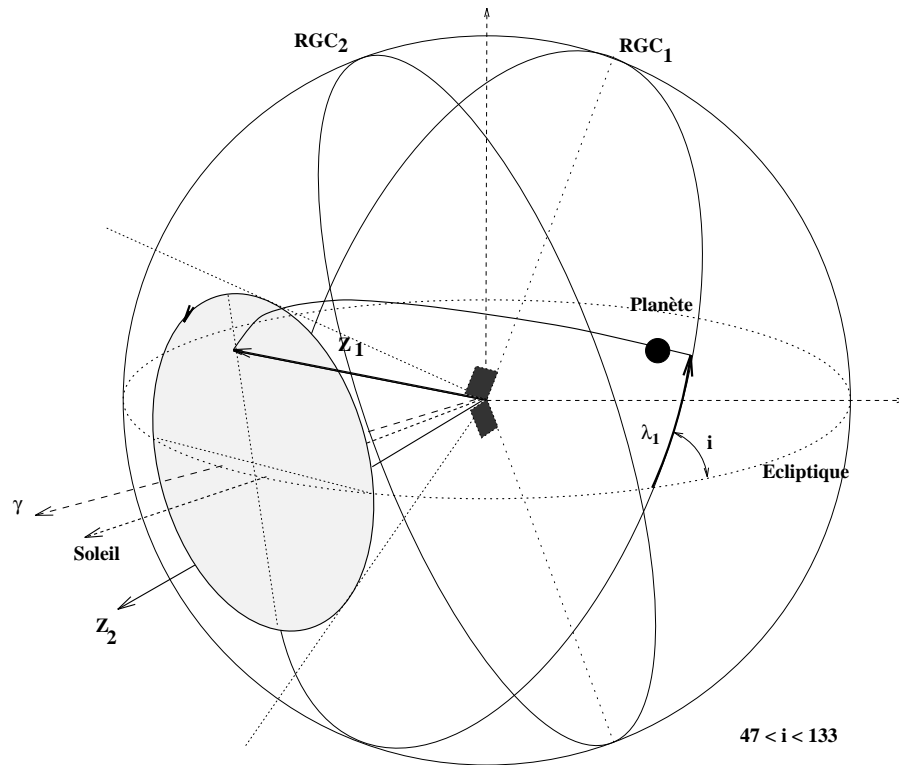


FIG. 2.4 - Abscisse sur un RGC. Géométrie des observations. La position d'une planète sur la sphère est unidimensionnelle. Elle est donnée par l'abscisse sur un grand cercle de référence :  $\lambda_1$  pour le RGC<sub>1</sub> de pôle  $z_1$ . Suite au mouvement de l'axe de rotation du satellite, l'inclinaison du RGC sur l'écliptique varie entre  $47^\circ$  et  $133^\circ$ .

Le suivi de la loi de balayage nominale se fait en actionnant des jets de gaz, modifiant instantanément les paramètres d'attitude du satellite. Ces paramètres, représentés généralement par des splines cubiques, sont déterminés à partir de positions d'étoiles d'attitude sur le repéreur d'étoiles.

La connaissance de l'origine du RGC est un point essentiel de la détermination de la longitude d'un objet sur un cercle de référence et, comme on le verra plus loin, de la présence d'une rotation de la sphère. Soient  $\lambda_o$  et  $\zeta_o$  la longitude et la latitude a priori d'un objet sur un cercle de balayage et  $\psi_o(t)$  le paramètre d'attitude lié à la rotation du satellite déterminé grossièrement par le repéreur d'étoiles. Si l'on ne s'intéresse qu'aux corrections  $d\lambda$  sur l'abscisse  $\lambda_o$ , et  $d\psi$  sur le paramètre  $\psi_o(t)$ , on peut développer, au premier ordre, la relation  $F$  liant l'abscisse à déterminer aux paramètres d'attitude et aux coordonnées du catalogue d'entrée:

$$\begin{cases} \lambda &= \lambda_o + d\lambda = F(\zeta_o, \psi_o + d\psi, \theta, \phi) \\ d\lambda &= F(\zeta_o, \psi_o, \theta, \phi) - \lambda_o + \frac{\partial F}{\partial \psi} d\psi \end{cases}$$

La dérivée partielle  $\frac{\partial F}{\partial \psi}$  étant voisine de l'unité, les deux corrections en question ne peuvent être déterminées simultanément : elles sont données à une constante près. Cette constante arbitraire qui définit momentanément l'origine du RGC pourrait être imposée par la longitude d'une étoile donnée. La solution adoptée, après test sur des données réelles, est choisie de telle sorte que les corrections, sur l'ensemble des abscisses de certaines étoiles, soient en moyenne nulles.

Les origines des RGC sont redéterminées en même temps que les cinq paramètres astrométriques des étoiles ( $\alpha, \delta, \mu_\alpha, \mu_\delta, \varpi$ ) qui sont les positions à une époque, les mouvements propres et les parallaxes. Cette synthèse sur la sphère ne s'applique qu'à quelques dizaines de milliers d'étoiles primaires. Ces étoiles sont des étoiles simples, brillantes, bien réparties sur la sphère et dont les positions sont a priori bien connues. Avec 2 000 RGC, 40 000 étoiles primaires et un total de 1 500 000 équations, il faut déterminer 200 000 + 2 000 inconnues ; la résolution du système linéarisé se fait par itération successive [G<sup>+</sup>89]. Les observations étant relatives, une indétermination d'ordre six subsiste ([A<sup>+</sup>87], [B<sup>+</sup>87], [Lin89]). Celle-ci peut s'exprimer comme une rotation linéairement variable dans le temps, elle s'écrit comme la somme d'une rotation sur l'ensemble des positions à l'époque (orientation de la sphère) et d'une rotation sur l'ensemble des mouvements propre (taux de rotation de la sphère). Le schéma de la figure 2.5 reprend les étapes principales de l'obtention de la coordonnée unidimensionnelle d'un astéroïde sur un grand cercle de référence.

## Datation

Les dates d'observations correspondent au temps milieu du T4, elles sont données en temps dynamique à partir de la relation suivante:

$$\begin{cases} t(mjd) &= t_{beg} + \sum_{k=1}^4 a_k (n + \frac{1}{2}) \\ &\simeq t_{beg} + \frac{32}{15} (n + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (2.3)$$

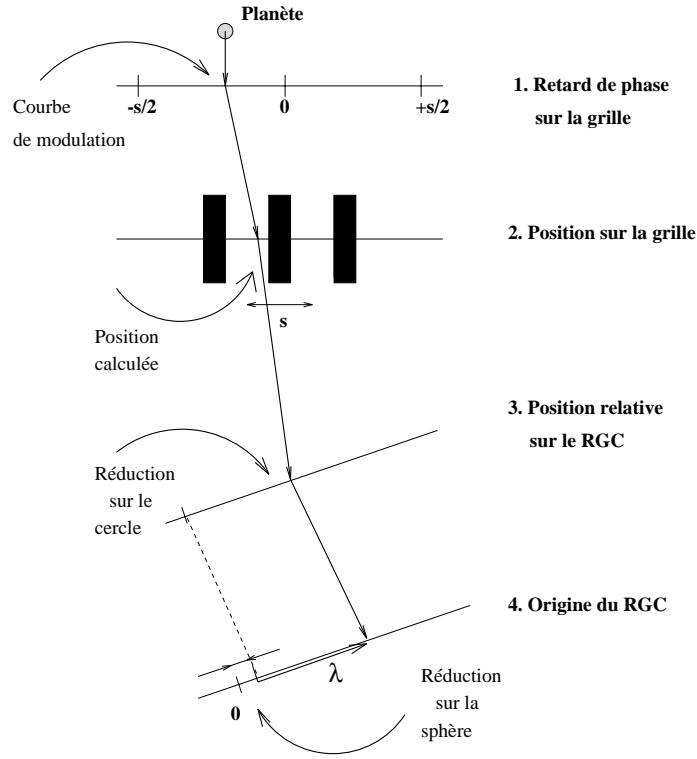


FIG. 2.5 - Abscisse sur un RGC. Chaîne de réduction.

- $t_{beg}$  est le temps TD en jour julien modifié du début de comptage pour le RGC,
- $a_k$  sont quatre coefficients exprimant le passage de l'échelle propre au satellite à celle du temps dynamique. Ils représentent la dérive de l'horloge de bord et le temps de transit des signaux de l'émission à la réception au sol,
- $n$  est le numéro du début du T4.

Les dates des positions calculées sont en *temps dynamique barycentrique* (TDB) pour des éphémérides barycentriques ou héliocentriques et en *temps terrestre* (TT) pour des éphémérides géocentriques apparentes ; ces deux échelles de temps remplacent le *temps des éphémérides* (TE) pour tenir compte d'effets relativistes. Comme l'écart entre ces deux échelles de temps est inférieur au centième de seconde, nous garderons l'ancienne terminologie pour chacun des temps qu'il soit barycentrique ou terrestre. Les relations entre le temps des éphémérides et le temps atomique, et celles entre le temps des éphémérides et le temps universel coordonnées (UTC), sont données avec une précision de  $0^s,01$  [Lon95] :

$$\begin{aligned}
 t_{TE} - t_{TAI} &= 32^s, 184 \\
 t_{TE} - t_{UTC} &= 56^s, 184 \quad \text{du } 1^{er} \text{ janvier } 1988 \quad \text{au} \quad 31 \text{ décembre } 1989 \\
 &= 57^s, 184 \quad \text{du } 1^{er} \text{ janvier } 1990 \quad \text{au} \quad 31 \text{ décembre } 1990 \\
 &= 58^s, 184 \quad \text{du } 1^{er} \text{ janvier } 1991 \quad \text{au} \quad 30 \text{ juin } 1992 \\
 &= 59^s, 184 \quad \text{du } 1^{er} \text{ juillet } 1992 \quad \text{au} \quad 30 \text{ juin } 1993
 \end{aligned}$$

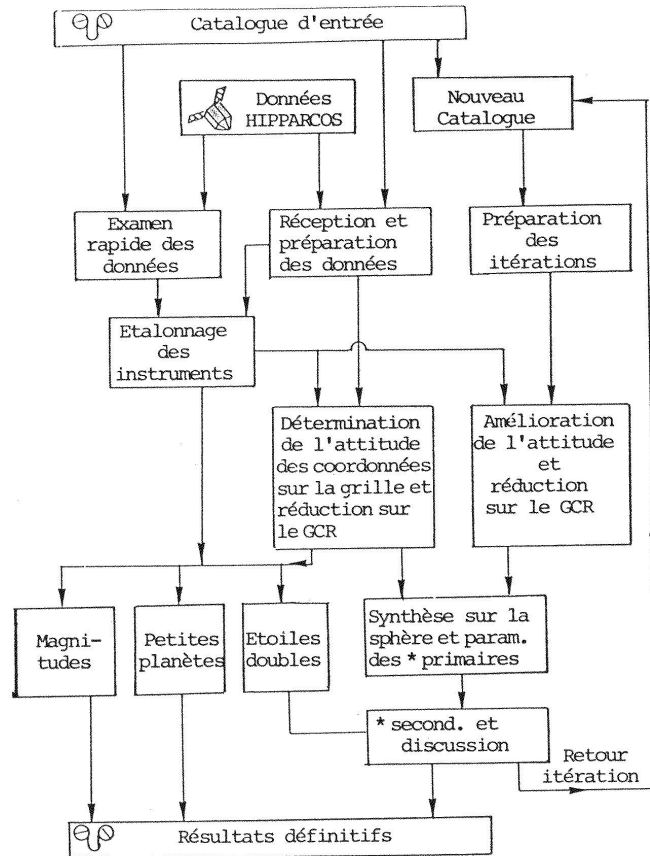


FIG. 2.6 - Chaîne de réduction des données pour le consortium FAST

Figure tirée de [Kov90].

## 2.4 Chaîne de réduction

Les réductions décrites jusqu'à présent dépendent fortement des coordonnées à priori du catalogue d'entrée: détermination de l'attitude, réduction sur la sphère, ambiguïté de pas de grille, linéarisation des différentes équations de conditions, etc... L'ensemble des opérations décrites est donc réitéré, le catalogue d'entrée étant remplacé par un catalogue intermédiaire résultant du premier calcul. Cette itération concerne la détermination de l'attitude, la réduction sur le cercle de référence et la synthèse sur la sphère (origine des RGC et paramètres des étoiles primaires). Les traitements des comptages de photons sur la grille ne sont pas refaits et les positions calculées restent inchangées. Ainsi les abscisses des petites planètes sur la grille ne sont pas modifiées, par contre l'origine du RGC change. Les données Hipparcos sont réduites en parallèle par deux Consortium: NDAC (Northern Data Analysis Consortium) et FAST (Fundamental Astronomy by Space Techniques). L'organigramme 2.6 donne la chaîne de réduction du Consortium FAST, ce travail s'y rattache; on reconnaît les tâches secondaires de calcul des magnitudes, de traitement des étoiles multiples et de réduction des données sur les astéroïdes.

Les données dont nous disposons pour les petites planètes sont regroupées sur

plusieurs fichiers, transmis sur bande magnétique par le CNES. Ces différents fichiers sont :

- MCG : données relatives aux RGC,
- MPAG : données relatives aux positions des planètes sur les RGC,
- FORG : données relatives à l'orbitographie du satellite,
- SYS : données relatives aux corrections d'origine des RGC,
- MDMPG : données relatives au signal photométrique.

Parallèlement, deux autres fichiers sont établis :

- MPMAG : données relatives aux magnitudes des petites planètes,
- EPHEM : éphémérides astrométriques des petites planètes.

**Fichier MCG**, taille 566 Koctets

Il regroupe l'ensemble des informations sur un grand cercle de référence, on y trouve en particulier les coordonnées du pôle dans le repère écliptique J 2000, les dates de début et fin de comptage des T4 par rapport à ce RGC, et les quatre coefficients de l'équation 2.3 permettant le passage du temps propre au satellite au temps dynamique.

**Fichier MPAG**, taille 32.2 Moctets

Les données sont regroupées dans un ordre proche de l'ordre chronologique, elles comportent, pour chaque RGC et pour l'ensemble des observations d'une petite planète : le numéro de T4, l'abscisse correspondante déduite de la réduction sur le cercle et l'erreur quadratique moyenne associée.

**Fichier FORG**, taille 12.2 Moctets

Il comprend l'ensemble des coefficients de Tchebychev permettant, pour une période donnée, de calculer la partie corrective d'une orbite képlérienne de référence. Ce calcul est valable pour de faibles excentricités et inclinaisons. On obtient la position et la vitesse géocentrique du satellite au temps du milieu du T4 dans le repère écliptique J 2000.

**Fichier SYS**, taille 139 Koctets

Il contient les corrections d'origines des RGC après réduction sur la sphère ainsi que les erreurs associées.

**Fichier MDMPG**, taille 7.3 Moctets

Ce fichier comporte l'ensemble des paramètres de la courbe de modulation pour chaque T4 et les erreurs correspondantes.

**Fichier MPMAG**, taille 213 Koctets

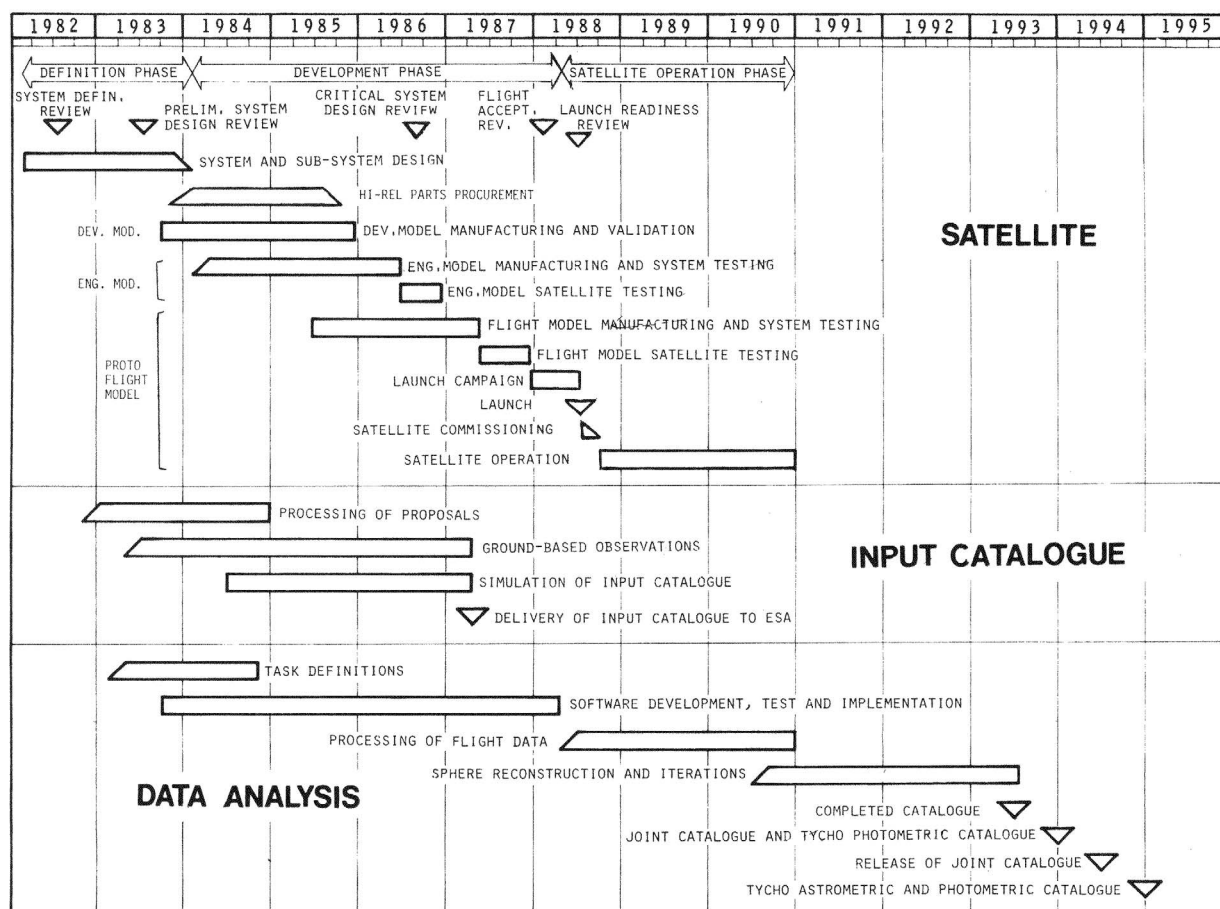
Celui-ci est construit en partie à partir du fichier MDMPG. On y trouve pour chaque passage de la planète à travers le champ du télescope, appelé transit, deux estimations de la magnitude de la planète (fournies par le CERGA), les distances héliocentriques et satellitocentriques de la planète et l'angle de phase.

Fichier EPHEM, taille 3.1 Moctets

Ce fichier regroupe, dans l'ordre des observations du fichier MPAG, les positions et vitesses astrométriques obtenues par intégration numérique. Aucune compression n'est effectuée.

## 2.5 Historique de la mission

Plan prévisionnel Plannification extraite de [Per85]



### Historique des observations

- lancement le 8 août 1989 du satellite ;
- novembre 1989 : début des observations ;
- interruption des observations des petites planètes pendant le mois de juillet 1991 ;
- d'août 1992 à octobre inclus, arrêt des acquisitions de données pendant la mise au point du contrôle d'attitude à deux gyroscopes ;
- panne d'un des gyroscopes et arrêt des observations le 18 mars 1993 ;
- panne de l'ordinateur de bord ;
- arrêt des opérations le 15 août 1993.

Les observations s'étendent donc sur 41 mois, elles comprennent 37 mois d'acquisition de données et 36 mois pour les petites planètes.

## Chapitre 3

# OBSERVATIONS DES PETITES PLANÈTES

### 3.1 Généralités

L'étude des astéroïdes présente de nombreux intérêts aussi bien en mécanique céleste qu'en cosmogonie. Les observations d'astéroïdes ont été utilisées par le passé pour la construction de repères dynamiques (section 1.3), la détermination des masses des planètes perturbatrices et l'étude de zones dynamiquement instables dans le système solaire. La connaissance des masses de ces corps donne des informations sur leur composition.

Les données de position recueillies par le satellite permettent d'améliorer les éphémérides des astéroïdes de la mission et de relier la sphère Hipparcos à un système dynamique. Les données photométriques procurent des courbes de lumières dont il est possible de tirer des informations sur la forme de ces corps, leur rotation et des propriétés physiques de leur surface [MM93].

L'observation par le satellite Hipparcos ne peut pas être systématisée à tous les objets du système solaire. La contrainte provient d'une part de la magnitude limite observable par le télescope qui est de 13 et d'autre part du diamètre apparent maximal des objets. En effet, l'objet doit être assez lumineux pour que le rapport signal sur bruit soit important et il doit être assez ponctuel – de diamètre apparent inférieur à 1 seconde d'arc – pour avoir une bonne estimation de sa position sur une bande de la grille principale (voir section 3.3). Les astéroïdes et les satellites naturels<sup>1</sup> sont donc de bons candidats pour être observés par le satellite. Les seuls satellites naturels observés sont Europe de Jupiter, Titan et Japet de Saturne. Il n'a été retenu que 48 astéroïdes parmi les milliers répertoriés [BB89], ceux-ci appartiennent à la ceinture principale. La liste des planètes retenues est donnée dans le tableau 3.1, les rayons (colonne R) sont extraits de [Ted90]. Le tableau 3.2 nous a été fourni par A. Cellino, il donne des renseignements supplémentaires sur les rotations de ces astéroïdes ; on trouvera une documentation complète dans *Asteroids II* [Wil90], [KM90], [Ted90], [Mag90].

La magnitude apparente d'un astéroïde est fonction de sa distance au soleil ( $r$ ) et à l'observateur ( $\Delta$ ), elle dépend aussi de son albédo et de l'angle phase ( $i$ ) au moment

---

<sup>1</sup>Ceux-ci doivent de plus être assez éloignés de la planète mère.



TAB. 3.1 - Liste des astéroïdes

$N^\circ$	Nom	R [km]	$N^\circ$	Nom	R [km]	$N^\circ$	Nom	R [km]
1	Ceres	456.5	18	Melpomene	74	63	Ausonia	54
2	Pallas	261.5	19	Fortuna	113	88	Thisbe	107
3	Junon	122	20	Massalia	75.5	115	Thyra	41.75
4	Vesta	250.5	22	Kalliope	63.5	129	Antigone	62.5
5	Astraea	62.5	23	Thalia	55.5	192	Nausikaa	53.5
6	Hebe	96	27	Euterpe	50.5	196	Philomela	73
7	Iris	101.5	28	Bellona	63	216	Kleopatra	70
8	Flora	70.5	29	Amphitrite	109.5	230	Athamantis	56.5
9	Metis	84	30	Urania	52	324	Bamberga	121
10	Hygiea	214.5	31	Euphrosyne	124	349	Dembowska	71.5
11	Parthenope	81	37	Fides	56	354	Eleonora	81
12	Victoria	58.5	39	Laetitia	479.5	451	Patientia	115
13	Egeria	107.5	40	Harmonia	55.5	471	Papagena	69.5
14	Irène	77.5	42	Isis	53.5	511	Dauida	168.5
15	Eunomia	136	44	Nysa	36.65	532	Herculina	115.5
16	Psyche	132	51	Nemausa	76.5	704	Interamnia	166.5

Légende de la table 3.2 :

- No Nom : Numéro et nom de la petite planète,  
a, a/b, b/c : rayon et modèle de forme utilisé pour la détermination du pôle. Lorsque ce dernier n'est pas déterminé on impose (convention personnelle) a/b=b/c=1,  
Demga : demi-grand axe pour les éléments propres,  
 $\lambda_o, \beta_o$  : coordonnées du pôle de rotation de la petite planète, en coordonnées écliptiques, équinoxe 1950. Le couple (0 ; 0) correspond à un pôle non déterminé (convention personnelle),  
P : Période sidérale,  
H : Magnitude visuelle absolue,  
G : "slope parameter",  
Pv : Albedo géométrique visuel.

No	Nom	a (km)	a/b	b/c	Demga (UA)	$\lambda_o$ degrés	$\beta_o$ degrés	P (heure)	H	G	Pv
1	CERES	456.5	1	1	2.7668519	270	+36	9.075	3.32	0.111	0.1
2	PALLAS	261.5	1.14	1	2.7700981	44	+4	7.811	4.13	0.148	0.14
3	JUNO	122	1.23	1	2.6696878	101	+29	7.21	5.31	0.3	0.22
4	VESTA	250.5	1	1.27	2.3621200	310	+60	5.342	3.16	0.338	0.38
5	ASTREA	62.5	1.29	1	2.5741398	131	+49	16.812	7.24	0.672	0.14
6	HEBE	96	1.24	1	2.4251081	344	+30	7.274	5.7	0.24	0.25
7	IRIS	101.5	1.19	1.21	2.3863276	18	+33	7.139	5.76	0.509	0.21
8	FLORA	70.5	1.1	1.28	2.2014688	327	+32	12.79	6.48	0.327	0.22
9	METIS	84	1.32	1.34	2.3861634	2	+26	5.078	6.32	0.293	/
10	HYGIEA	214.5	1	1	3.1352421	0	0	18.4	5.27	-0.04	0.075
11	PARTHENOPE	81	1	1	2.4528496	0	0	7.83	6.62	0.272	0.15
12	VICTORIA	58.5	1	1	2.3352993	0	0	8.654	7.23	0.24	0.33
13	EGERIA	107.5	1	1	2.5754638	0	0	7.045	6.47	-0.02	0.099
14	IRENE	77.5	1	1	2.5867562	0	0	9.35	6.27	0.092	/
15	EUNOMIA	136	1.44	1	2.6435717	170	+59	6.083	5.22	0.199	0.19
16	PSYCHE	132	1.32	1.26	2.9270905	40	+23	4.196	5.99	0.217	0.1
18	MELPOMENE	74	1	1	2.2955537	0	0	11.572	6.41	0.175	0.22
19	FORTUNA	113	1.21	1.1	2.4424612	70	+50	7.445	7.09	0.104	/
20	MASSALIA	75.5	1.16	1	2.4085975	20	+80	8.098	6.52	0.263	0.19
22	KALLIOPE	63.5	1.34	1.18	2.9103516	13	+17	4.147	6.5	0.215	0.12
23	THALIA	55.5	1	1	2.6301115	0	0	12.308	7.07	0.37	0.21
27	EUTERPE	50.5	1	1	2.3467444	0	0	8.5	6.78	-0.16	/
28	BELLONA	63	1.31	1.18	2.7775390	93	+18	15.695	7.17	0.221	0.15
29	AMPHITRITE	109.5	1.22	1.06	2.5542352	314	+36	5.39	5.84	0.208	0.16
30	URANIA	52	1	1	2.366	0	0	7.74	7.74	0.413	0.13
31	EUPHROSYNÉ	124	1.12	1	3.1444349	317	+4	5.531	6.53	0.15	0.07
37	FIDES	56	1.2	1	2.6409426	100	+5	7.332	7.28	0.251	0.17
39	LAETITIA	79.5	1.5	1.5	2.7685738	130	+29	5.138	5.94	-0.03	0.29
40	HARMONIA	55.5	1	1	2.2672348	0	0	9.136	7.14	0.307	0.2
42	ISIS	53.5	1	1	2.4405087	0	0	13.59	7.75	0.587	0.12
44	NYSA	36.65	1.51	1.18	2.4229391	99	+49	6.422	7.05	0.44	0.49
51	NEMAUSA	76.5	1	1	2.3655209	0	0	7.785	7.36	0.061	0.086
63	AUSONIA	54	2.25	1	2.3955388	127	+38	9.298	7.35	-0.02	0.17
88	THISBE	107	1.13	1	2.7674738	32	+69	6.042	7.05	0.169	/
89	JULIA	79.5	1	1	2.5499561	0	0	11.387	6.57	0.144	0.16
115	THYRA	41.75	1	1	2.3794529	0	0	7.241	7.51	0.144	0.25
129	ANTIGONE	62.5	1.32	1.02	2.8676294	38	+27	4.957	7.05	0.366	0.17
192	NAUSIKAA	53.5	1	1	2.4016343	0	0	13.622	7.13	0.029	0.21
196	PHILOMELA	73	1	1	3.1132708	0	0	8.333	6.64	0.475	0.18
216	KLEOPATRA	70	2.71	1.3	2.7958286	71	+19	5.385	7.53	0.247	0.088
230	ATHAMANTIE	56.5	1	1	2.3818920	0	0	23.99	7.47	0.354	0.14
324	BAMBERGA	121	1	1	2.6817903	0	0	29.43	6.82	0.104	0.057
349	DEMBOWSKA	71.5	1.28	1.15	2.9247928	163	+49	4.701	5.98	0.325	0.34
354	ELEONORA	81	1.21	1.11	2.7969842	148	+35	4.277	6.32	0.321	0.19
451	PATIENTIA	115	1.07	1	3.0641714	153	+67	9.727	6.65	0.204	0.073
471	PAPAGENA	69.5	1	1	2.8908893	0	0	7.113	6.61	0.285	0.2
511	DAVIDA	168.5	1.19	1.13	3.1741649	303	+34	5.13	6.17	0.02	0.053
532	HERCULINA	115.5	1.21	1.01	2.7725799	312	+59	9.405	5.78	0.247	0.16
704	INTERAMNIA	166.5	1	1	3.0626220	0	0	8.727	6	0.019	0.064

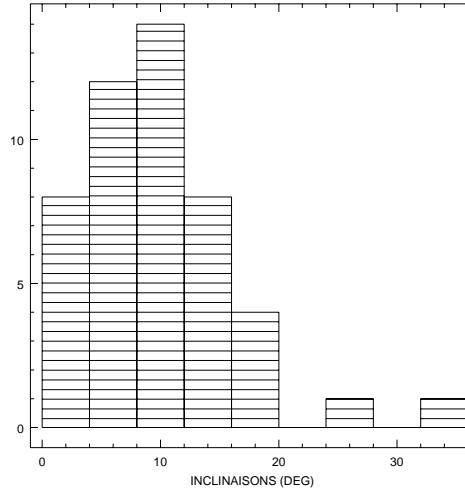


FIG. 3.1 - Inclinaisons des 48 petites planètes.

de l'observation. Elle est déduite pour le système Hipparcos de la relation [ML89]

$$H_p \simeq B(1, 0) - 0,3 + 0,25 i + 5 \log_{10}(r\Delta)$$

où  $B(1,0)$  est la magnitude absolue ( $r = \Delta = 1 UA$ ;  $i = 0$ )  $B$  dans le système  $UBV$ .

La loi de balayage nominale fait que la sphère céleste est parcourue plusieurs fois durant la mission, il n'y a donc pas de programmation de rendez-vous. En ce qui concerne les observations des petites planètes cette loi entraîne une autre particularité. Les trajectoires des astéroïdes s'écartent peu du plan de l'écliptique, l'inclinaison maximale d'environ  $35^\circ$  est atteinte avec 2-Pallas. La figure 3.1 donne un histogramme des inclinaisons des 48 petites planètes de la mission; on trouvera aussi, à la figure 3.2, les histogrammes des excentricités et des demi-grands axes de ces planètes (éléments osculateurs au  $1^{er}$  juillet 1991  $12^h$  JJ = 2 448 439.0). Le cercle de balayage, perpendiculaire à l'axe de rotation, oscille par contre autour d'un plan perpendiculaire à l'écliptique, c'est pourquoi les petites planètes ne sont observées qu'au voisinage des quadratures (Cf figure 3.3).

## 3.2 Ephémérides

### Ephémérides compressées

Une vaste campagne d'observations sur les sites des observatoires de Bordeaux, La Palma, San Fernando et Barcelone fut entreprise avant le lancement afin de pouvoir déterminer de manière satisfaisante la position a priori des astéroïdes sur la grille principale ([BB90]). Les résidus, sur les coordonnées équatoriales, entre les positions observées et calculées pouvaient atteindre 5 secondes d'arc, ce qui rendait impossible les observations par le satellite. Ces résidus furent diminués jusqu'à être inférieurs à 1 seconde d'arc ([BBR87], [Cal88]). Les données d'observations au sol recueillies par la suite contribuèrent à l'amélioration continue des éphémérides de ces planètes ([BB92], [BB93]).

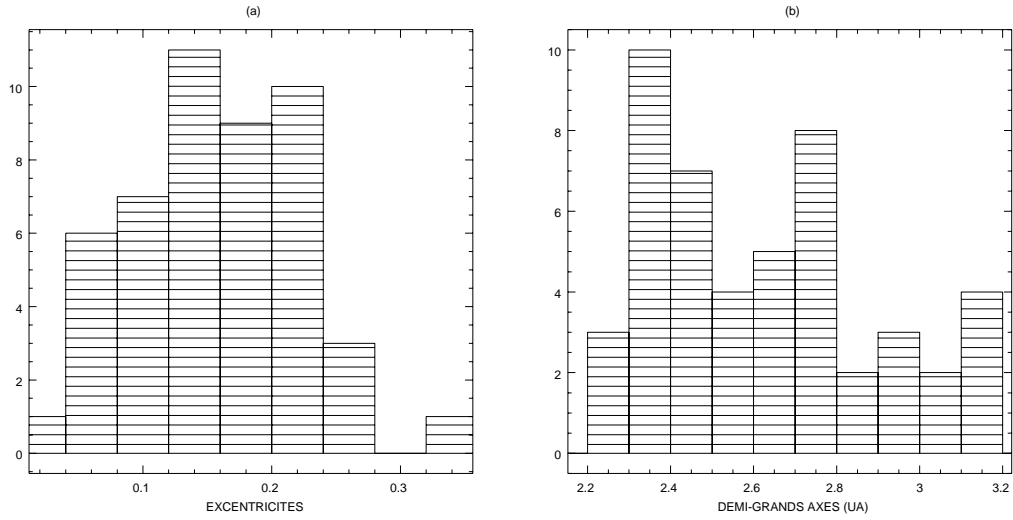


FIG. 3.2 - Histogramme des excentricités (a) et des demi-grands axes (b).

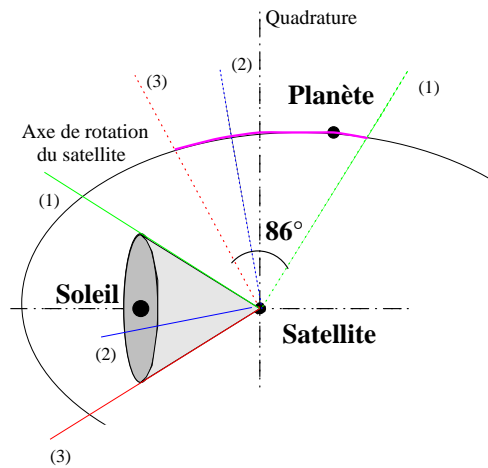


FIG. 3.3 - Les planètes sont observées au voisinage de la quadrature.

*L'axe de rotation du satellite décrit un cône, autour de la direction du soleil, d'angle au sommet  $86^\circ$ . La partie supérieure de la trace du cercle de balayage, avec le plan de la trajectoire de la petite planète, est donnée pour trois positions différentes. On obtient par symétrie les traces pour la partie inférieure.*

Les positions ainsi améliorées des petites planètes doivent être transmises au satellite. Comme ces corps se déplacent rapidement sur le ciel, et afin de limiter le volume d'informations à transmettre à l'ordinateur de bord, les éphémérides calculées par intégration numérique sont compressées sous forme de polynômes de Tchebychev ([BB89])

$$y(t) = f(x) = \sum_{k=0}^7 a_k T_k(x)$$

$$x = -1 + 2(t - t_r)/DT \quad ; \quad t \in [t_r ; t_r + DT]$$

où  $T_i(x)$  est le polynôme de Tchebychev d'ordre  $i$  et  $DT = 32 \text{ jours}$ . La précision de ces éphémérides – construites au Bureau Des Longitudes – peut être scindée en trois parties. Deux d'entre elles correspondent au calcul proprement dit, la troisième correspond à la modélisation théorique :

1. **précision interne** : C'est la différence entre l'intégration numérique et la théorie,
2. **précision de la représentation** : L'erreur introduite suite à l'approximation de la fonction du temps en somme de polynômes de Tchebychev,
3. **précision externe** : L'erreur de modélisation dans la théorie et la différence des repères auxquels se rapportent d'une part la théorie et d'autre part les positions observées "vraies".

La précision de la représentation est de  $0",5$  tandis que la précision externe varie selon les planètes de  $0",5$  à  $1"$ . Ces éphémérides ne seront pas utilisées dans ce travail puisqu'elles introduisent une erreur de modélisation trop importante.

## Ephémérides géocentriques

Les abscisses calculées sont obtenues par intégration numérique [BS66] du problème perturbé par les neuf planètes principales. L'algorithme de calcul écrit par A. Borsenberger au Bureau des Longitudes, a été testé et utilisé pour le calcul des éphémérides des astéroïdes du catalogue d'entrée. Les positions et les masses des planètes perturbatrices sont tirées des éphémérides DE 200 du Jet Propulsion Laboratory ([Sta82], [Sta90]). L'unité de distance astronomique de ce système (échelle du système solaire) est légèrement différente de celle adoptée par l'UAI en 1976 et utilisée dans la suite de ce travail ; la différence est de  $5,6 \text{ km}$  ( $\simeq 4.10^{-8}$  en valeur relative). Les conditions initiales du mouvement des petites planètes sont données par les éléments osculateurs tirées des "Ephemerides for Minor Planets" [Bat91]. Ces éléments sont exprimés dans le repère écliptique FK5 J 2000 ; on en déduit, par intégration numérique, les conditions initiales à l'époque médiane de la mission  $t_o = 1991.496$  (2 448 439 JJ). Les éléments ainsi obtenus sont pris comme conditions initiales dans le système DE 200 dont le repère est proche de celui du FK5.

A ce stade, nous ferons quelques remarques quant au modèle dynamique qui décrit

le système solaire :

- Les éphémérides DE 200 ne sont pas les plus récentes mais les plus utilisées jusqu'à aujourd'hui. D'autres modèles ou formes de solution existent : la solution VSOP82 [Bre82] dont les conditions initiales ont été ajustées à DE 200, ou le système DE 210 qui intègre l'ensemble des données recueillies avec la sonde Viking et des masses d'astéroïdes plus précises. Ces éphémérides n'entrent que dans les termes de perturbation des orbites des petites planètes, le choix est peu important au vu de la précision recherchée.
- Le système de constantes de l'UAI est cohérent et adopté par convention mais il n'est pas acceptable pour des observations intra-système solaire récentes [Sta90]. En conséquence, nous adoptons la modélisation DE 200, donc son équinoxe et son écliptique moyen à l'époque J 2000 (2 451 545 JJ) pris dans un repère tournant [Sta81].
- Les perturbations mutuelles des petites planètes ne sont pas modélisées. P.M. Fedij a montré que les perturbations dues à Ceres (1), Pallas (2), Junon (3) et Vesta (4) avaient une influence sur les positions d'astéroïdes sélectionnés [Fed88]. Son étude néanmoins ne tient pas compte des perturbations des planètes majeures, donc en particulier de Mars et Jupiter qui ont une influence notable sur la dynamique de ces corps. Suite à ces travaux, il a montré que ces effets étaient négligeables lorsqu'on s'attachait à déterminer des corrections d'équinoxe et d'équateur [Fed89]. Les effets – séculaires – des perturbations restent faibles sur la durée de la mission, ils ont par conséquent peu d'influence sur le calcul de la direction astrométrique.
- Le choix des éléments osculateurs des astéroïdes (qui intègrent en particulier les différentes campagnes d'observation menées pour la mission Hipparcos) n'a que peu d'influence sur la détermination de la direction astrométrique, ou sur l'amélioration des éphémérides des planétoïdes. Ils sont pris à une époque proche des dates d'observations et ramenés à la date médiane de la mission.
- Les périodes d'intégration sont petites, ainsi le type d'intégration employé et le modèle newtonien de la dynamique des objets restent valables.

Nous pouvons donc calculer les positions et vitesses des petites planètes pour chaque date d'observation. Nous calculons les éphémérides astrométriques  $\mathbf{u}_{ast}(t)$ , c'est à dire les positions géocentriques corrigées du temps lumière (trajet rectiligne Planète-Terre). Avec respectivement  $\mathbf{x}_{\odot}(t - \tau)$ ,  $\mathbf{x}$  les positions barycentriques de la planète et de la Terre, on écrit

$$\mathbf{u}_{ast}(t) = \mathbf{x}_{\odot}(t - \tau) - \mathbf{x}$$

Les vitesses barycentriques  $\dot{\mathbf{x}}_{\odot}(t - \tau)$  des astéroïdes sont obtenues lors de cette intégration, elles ne sont pas nécessaires à la réduction des données mais seront utilisées lors des améliorations des éphémérides des petites planètes. Les résultats de ces calculs sont regroupés dans le fichier EPHEM.

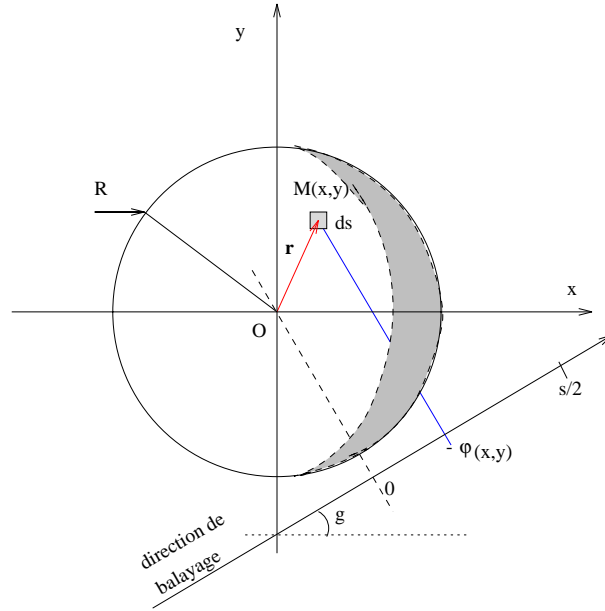


FIG. 3.4 - Modulation de la lumière d'un objet résolu.  
*L'origine des phases est prise au centre géométrique de la planète de rayon R. Le retard de phase de la source ponctuelle M(x, y) dépend de la direction du balayage définie par l'angle g.*

### 3.3 Modulation d'un objet sphérique résolu

La courbe de modulation, équation (2.2), correspond au signal reçu d'un objet ponctuel sans effet de chromatisme; la phase correspond alors à la position de la source sur une période de la grille. Dans le cas d'une planète, le signal est la résultante de la diffraction et de la modulation par le fenêtrage périodique de la lumière émise par chaque élément de surface. On écrit que le signal reçu est la somme, sur l'ensemble de la surface visible et éclairée, de signaux provenant de sources ponctuelles. Plaçons-nous dans le plan tangent à la sphère céleste contenant l'image de la planète, auquel on associe le repère (O, x, y), l'axe (O, x) étant la trace de l'équateur d'intensité (Cf figure 3.4). Soit une source ponctuelle de coordonnées différentielles  $\mathbf{r} = (x, y)$ , soit  $I_o(\mathbf{r})$  l'intensité spécifique reçue, nous avons

$$S(u) = I_o(\mathbf{r}) \left( 1 + M_o \cos(u + \varphi(\mathbf{r})) + N_o \cos(2u + 2\varphi(\mathbf{r})) \right) \quad (3.1)$$

Cette expression correspond à l'équation (2.2), la phase  $\varphi(\mathbf{r})$  est déduite du projeté de la source sur la direction de balayage ( $\mathbf{z}_\perp$ ) et rapporté à une période de la grille.

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi}{s} \mathbf{r} \cdot \mathbf{z}_\perp$$

Soit  $g$  l'angle entre l'axe des abscisses et la direction du balayage, la phase  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y)$  est dans le cas général

$$\varphi(x, y) = -\frac{2\pi}{s} (x \cos g - y \sin g) \quad ; \quad s = 1'',208 \text{ est la période de la grille}$$

En intégrant ensuite ce signal sur la surface plane visible  $\mathcal{S}$ , on obtient le signal total  $E(u)$  qui peut lui aussi s'écrire comme somme de termes de même période :

$$\begin{cases} E(u) &= \iint_{\mathcal{S}} S(u) dx dy \\ &= I_1 \left( 1 + M_1 \cos(u + \Phi) + N_1 \cos(2u + 2\Psi) \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

Le flux de lumière reçu dépend de l'angle solide sous lequel est vue la planète et de la manière dont sa surface réfléchit les rayons solaires, il est donc fonction de nombreux paramètres, à savoir :

- la distance à l'observateur ;
- l'angle de phase ;
- la taille de la planète ;
- sa forme et son orientation ;
- la diffusion de la lumière ;
- les variations d'albédo.

Considérons un petit élément de volume de la planète recevant d'une part un flux de lumière du soleil et d'autre part de la lumière diffusée par les particules voisines, cet élément diffuse à son tour de la lumière vers l'observateur. La loi de diffusion relie ces deux quantités et si nous appelons  $\pi F$  le flux solaire incident, nous écrivons [Cha50] :

$$I(\mu, \phi) = \frac{F}{4\mu} S_d(\mu, \phi; \mu_o, \phi_o, p_k)$$

$\mu, \mu_o$  : cosinus des angles de réflexion et d'incidence,

$\phi, \phi_o$  : azimut des rayons réfléchis et incidents

$p_k$  : paramètres décrivant les caractéristiques physiques du milieu (porosité, rugosité à large échelle ...)

Le principe de réciprocité [Min41] exige que la fonction de diffusion  $S_d$  soit symétrique par rapport aux rayons incidents et réfléchis

$$S_d(\mu, \phi; \mu_o, \phi_o, p_k) = S_d(\mu_o, \phi_o; \mu, \phi, p_k)$$

G. de Vaucouleurs [Dol70] et P. Descamps [Des92], pour ne citer qu'eux, donnent un aperçu de quelques lois de diffusion. Elles peuvent se répartir en deux groupes : des lois empiriques et des lois déduites de la théorie du transfert radiatif. Les lois simples ne sont pas adaptées au phénomène d'éblouissement rencontré lors des phases pleines et c'est un de leurs principaux défauts. Ceci ne se présente pas pour des observations Hipparcos puisqu'il n'y a pas d'observation à l'opposition. Les modèles photométriques les plus élaborés sont ceux de Hapke [Hap81] et de Lumme et Bowell [LB81] ; ils font intervenir de nombreux paramètres dont certains ne sont pas



déterminés, ou de manière non unique, ces modèles sont décrits et comparés par les auteurs [B<sup>+</sup>90]. Les lois empiriques ne font pas intervenir de paramètres de rugosité ou d'effets d'ombres entre les particules, elles sont fonctions des cosinus directeurs des angles d'incidence et de réflexion des rayons lumineux. Les lois suivantes sont les plus utilisées :

1. la loi de diffusion est telle que la planète est uniformément brillante ( $S_d = \mu$ ) ; aucun assombrissement centre-bord.
2. loi de Lommel-Seeliger  $S_d = \mu \mu_o / (\mu + \mu_o)$
3. loi de Hapke-Irvine  $S_d = f(i, p_k) \mu \mu_o / (\mu + \mu_o)$
4. loi de Minnaert  $S_d = \mu^k \mu_o^k$
5. loi de Lambert, la brillance est indépendante de la direction d'observation ( $S_d = \mu \mu_o$ ) ; fort assombrissement du terminateur. Cette loi est un cas particulier de la loi de Minnaert avec  $k=1$ .

Je ne considérerai que la loi de Lambert et la loi entraînant une brillance uniforme. L'intensité spécifique s'écrit alors sous la forme :

$$I_o(\mathbf{r}) = I_o h(x, y) \tag{3.3}$$

Une première remarque s'applique aux coefficients de modulation pour une petite planète, une autre concerne les phases et la position associée de la planète, elles seront développées dans les sections suivantes.

### 3.3.1 Coefficients de modulation

La courbe de modulation d'une petite planète est plus aplatie que celle d'une source ponctuelle, on a :

$$M \leq M_o \quad ; \quad N \leq N_o$$

On trouvera à la figure 3.5 un exemple de réponses théoriques pour une étoile et une planète de même magnitude, le diamètre apparent de la planète est de 0",6, l'unité sur les abscisses est en pas de grille. Cet aplatissement est d'autant plus important que le rayon de la planète est grand ; c'est pourquoi le diamètre limite des objets observés par Hipparcos est de 1 seconde d'arc.

Je me propose de déterminer les relations exprimant les coefficients de modulation  $M, N$  en fonction des coefficients de référence  $M_o, N_o$  dans le cas d'une planète :

- sphérique, de diamètre apparent  $\rho = 2R$ ,
- éclairée sous un angle de phase  $i$ ,
- ayant l'axe des  $x$  pour axe de symétrie
- balayée par la grille le long de la direction  $x$  (ainsi  $\varphi_{(x,y)} = \varphi_x$ ),

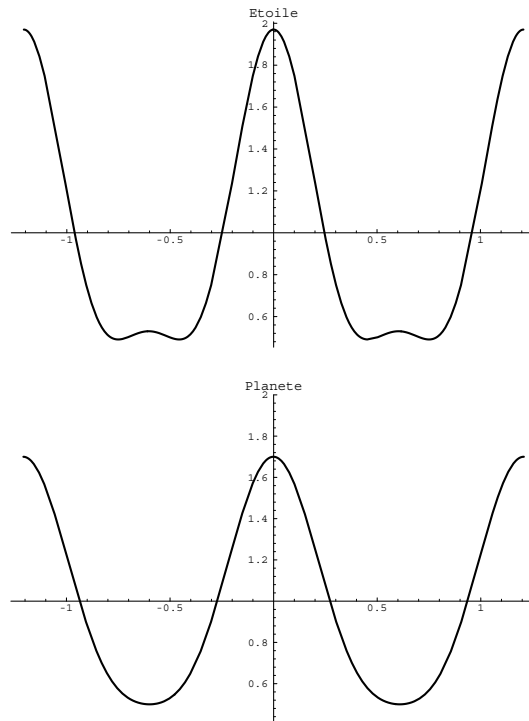


FIG. 3.5 - Courbes de modulation.

*En haut : courbe de modulation pour une étoile.*

*En bas : courbe de modulation pour une planète de même magnitude et de diamètre apparent  $0''.6$ ; l'amplitude du signal est amoindrie.*

### a. Brillance uniforme

Dans ce cas prenons  $h(x, y) = cte = 1$  dans l'équation (3.3); on obtient à partir des équations (3.1) et (3.2),

$$\begin{aligned}
E(u) &= I_o \iint_{\mathcal{D}} dx dy \\
&+ 2I_o M_o \int_{-R}^0 \cos(u + \varphi_x) dx \int_0^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \\
&+ 2I_o M_o \int_0^{+R \cos i} \cos(u + \varphi_x) dx \int_0^{+\sqrt{R^2-x^2/\cos^2 i}} dy \\
&+ 2I_o N_o \int_{-R}^0 \cos(2u + 2\varphi_x) dx \int_0^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \\
&+ 2I_o N_o \int_0^{+R \cos i} \cos(2u + 2\varphi_x) dx \int_0^{+\sqrt{R^2-x^2/\cos^2 i}} dy
\end{aligned}$$

Avec  $\varphi_x = -2\pi x/s$  et les changements de variables  $x = R \cos \alpha$  ou  $x = R \cos i \cos \alpha$ ; puis par unicité de la décomposition en série de Fourier on obtient les relations :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{I_o}{2} \pi R^2 (1 + \cos i) \\
I_1 M_1 \cos \Phi &= 2I_o M_o \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \alpha \cos\left(\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos \alpha\right) d\alpha \\
&+ 2I_o M_o \int_0^{\pi/2} R^2 \cos i \sin^2 \alpha \cos\left(\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos i \cos \alpha\right) d\alpha \\
I_1 M_1 \sin \Phi &= 2I_o M_o \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \alpha \sin\left(\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos \alpha\right) d\alpha \\
&- 2I_o M_o \int_0^{\pi/2} R^2 \cos i \sin^2 \alpha \sin\left(\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos i \cos \alpha\right) d\alpha \\
I_1 N_1 \cos 2\Psi &= 2I_o N_o \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \alpha \cos\left(2\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos \alpha\right) d\alpha \\
&+ 2I_o N_o \int_0^{\pi/2} R^2 \cos i \sin^2 \alpha \cos\left(2\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos i \cos \alpha\right) d\alpha \\
I_1 N_1 \sin 2\Psi &= 2I_o N_o \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 \alpha \sin\left(2\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos \alpha\right) d\alpha \\
&- 2I_o N_o \int_0^{\pi/2} R^2 \cos i \sin^2 \alpha \sin\left(2\frac{2\pi R}{s} \cdot \cos i \cos \alpha\right) d\alpha
\end{aligned}$$

On en déduit alors les relations sur les coefficients des deux harmoniques et les phases correspondantes à l'aide des fonctions  $J_1$  de Bessel et  $H_1$  de Struve :

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cos(x \cdot \cos \alpha) d\alpha \\
&= \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{4}\right)^k}{(k+1)(k!)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1(x) &= \frac{2x}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \sin(x \cdot \cos \alpha) d\alpha \\
&= \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{4}\right)^k}{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right)}
\end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\pi R}{s} = \frac{\pi \rho}{s} \\
j(x, i) &= J_1(x \cos i) + J_1(x) \\
h(x, i) &= H_1(x \cos i) - H_1(x)
\end{aligned}$$

et en remarquant que nous avons toujours  $(1 + \cos i) x \neq 0$  :

$$\frac{M_1}{M_o} = \frac{2}{(1 + \cos i) x} \sqrt{(j(x, i))^2 + (h(x, i))^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{N_1}{N_o} = \frac{1}{(1 + \cos i) x} \sqrt{(j(2x, i))^2 + (h(2x, i))^2} \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

et pour un diamètre apparent non nul ( $x > 0$ ) :

$$\tan \Phi = -\frac{h(x)}{j(x)} \quad \text{si } M_1 \neq 0 \quad (3.7)$$

$$\tan 2\Psi = -\frac{h(2x)}{j(2x)} \quad \text{si } N_1 \neq 0 \quad (3.8)$$

Avec la convention sur l'écriture de la fonction "tan t" permettant de lever toutes les indéterminations pour  $t \in [-\pi ; \pi]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan t = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \iff t = \arg(z) \quad \text{si } |z| \neq 0 \\ \text{L'harmonique disparaît pour } |z| = 0 \end{array} \right.$$

Les rapports des coefficients de modulation dépendent essentiellement du diamètre apparent de l'objet et très peu de l'angle de phase (Cf figure 3.6). Celui-ci est petit, si l'on néglige les termes en  $i^2$ , les phases des harmoniques s'annulent et les relations sur les amplitudes sont<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned}
\frac{M_1}{M_o} &= \frac{2 J_1(x)}{x} + o(i^2) \\
\frac{N_1}{N_o} &= \frac{J_1(2x)}{x} + o(i^2)
\end{aligned}$$

On obtient le développement en  $\frac{\rho}{s}$  ( $\rho \leq 0,7$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_1}{M_o} = 1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\rho}{s}\right)^2 + \frac{\pi^4}{192} \left(\frac{\rho}{s}\right)^4 - \frac{\pi^6}{9216} \left(\frac{\rho}{s}\right)^6 + \dots \\ \frac{N_1}{N_o} = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\rho}{s}\right)^2 + \frac{\pi^4}{12} \left(\frac{\rho}{s}\right)^4 - \frac{\pi^6}{144} \left(\frac{\rho}{s}\right)^6 + \dots \end{array} \right. \quad (3.9)$$

<sup>2</sup>Nous avons supposé pour ce calcul que le balayage se faisait dans la direction de l'équateur d'intensité, on retrouve le même résultat sur les rapports des amplitudes de modulation lorsque le balayage est perpendiculaire à cette direction ( $\varphi_{(x,y)} = \varphi_y$ )

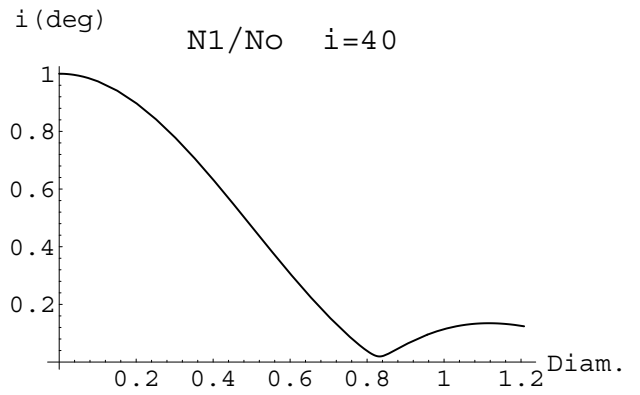
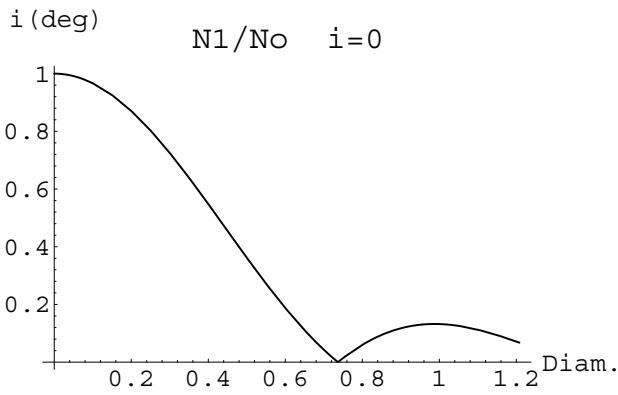
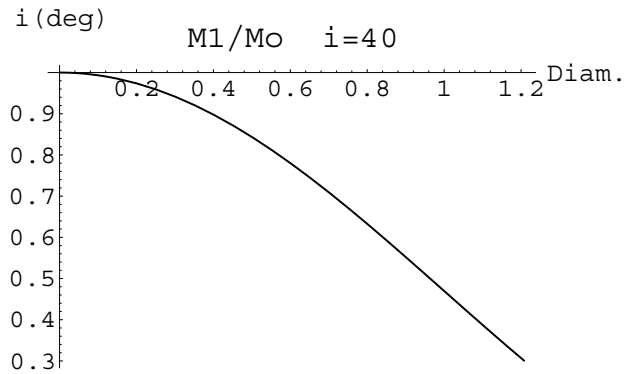
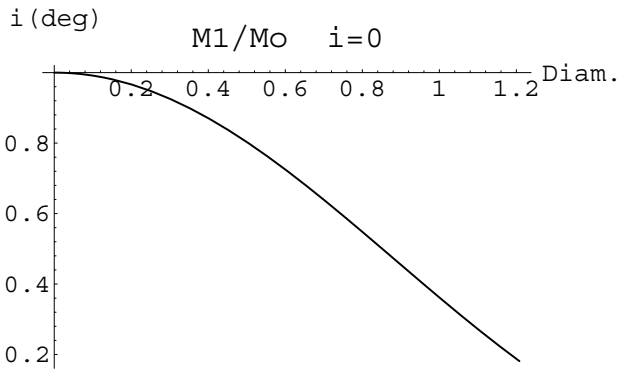
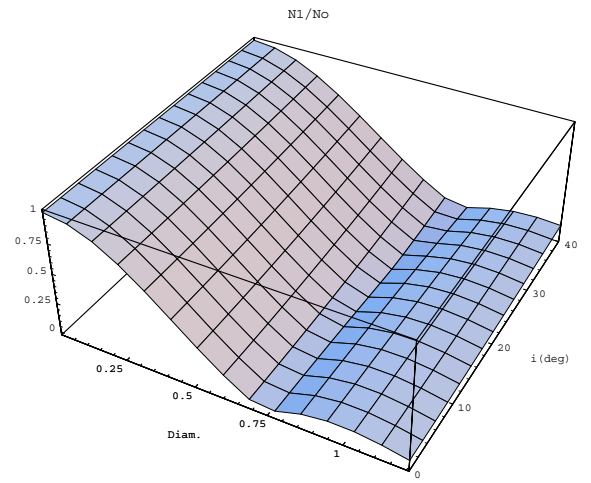
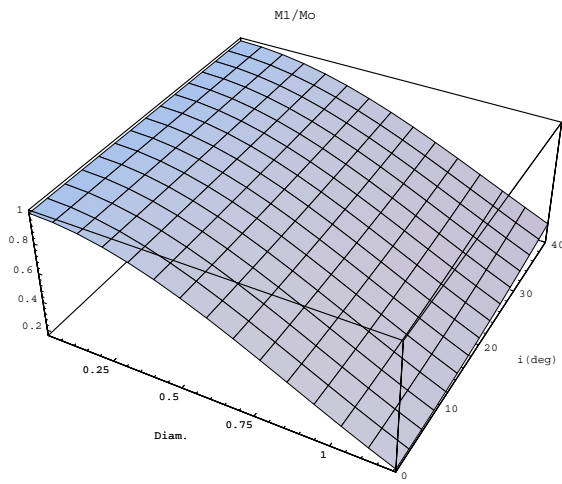


FIG. 3.6 - Coefficients de modulation.  
 Les deux surfaces du haut montrent l'évolution des rapports des coefficients de modulation  $M_1/M_0$  et  $N_1/N_0$  en fonction du diamètre apparent (Diam.) de la planète et de l'angle de phase ( $i$ ). Le diamètre apparent est inférieur au pas de grille. Les figures du bas donnent les détails pour les cas particuliers  $i = 0$  et  $i = 40^\circ$ .

## b. Loi de Lambert

Considérons maintenant, non plus la surface plane (projetée sur le ciel), mais la portion de sphère visible et les coordonnées sphériques associées. Soit le changement de variable

$$\begin{aligned}x &= R \cos \beta \cos \alpha \\y &= R \sin \beta \\z &= R \cos \beta \sin \alpha\end{aligned}$$

L'intensité spécifique pour un point de cette surface s'écrit :

$$I_o(\mathbf{r}_3) = I_o h(\alpha, \beta)$$

L'expression de la fonction de diffusion est alors plus simple et l'équation (3.2) devient :

$$E(u) = I_o \iint_{\mathcal{D}} h(\alpha, \beta) S(u, \alpha, \beta) \cos \beta \sin \alpha R^2 \cos \beta d\alpha d\beta$$

Où  $h(\alpha, \beta) = \cos \beta \sin(\alpha + i)$  est fonction uniquement de l'angle d'incidence du rayon lumineux en un point donné de la surface, le domaine de la surface de la planète  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$  étant délimité par :  
 $\alpha \in [0; \pi - i]; \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

$$\begin{aligned}E(u) &= I_o \iint_{\mathcal{D}} \cos^3 \beta \sin \alpha \sin(\alpha + i) R^2 d\alpha d\beta \\&\quad + I_o M_o \iint_{\mathcal{D}} \cos^3 \beta \sin \alpha \sin(\alpha + i) \cos\left(u - \frac{2\pi R}{s} \cos \beta \cos \alpha\right) R^2 d\alpha d\beta \\&\quad + I_o N_o \iint_{\mathcal{D}} \cos^3 \beta \sin \alpha \sin(\alpha + i) \cos\left(2u - 2\frac{2\pi R}{s} \cos \beta \cos \alpha\right) R^2 d\alpha d\beta\end{aligned}$$

On peut écrire le développement limité en  $i$  (au voisinage de  $i = 0$ ) avec le domaine  $\mathcal{D}_*$  délimité par :

$$\alpha \in [0; \pi]; \beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

On remarquera que d'une manière générale nous avons

$$\int_0^{\pi-i} \sin \alpha f(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi} \sin \alpha f(\alpha) d\alpha + o(i^2)$$

et pour tout  $t$  réel

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin \alpha \cos \alpha \cos(t \cos \alpha) d\alpha &= 0 \\ \int_0^{\pi} \sin \alpha \cos \alpha \sin(t \cos \alpha) d\alpha &> 0\end{aligned}$$

En posant  $x = \frac{2\pi R}{s}$ , on a les relations :

$$\Phi = O(i) \quad \text{si } M_1 \neq 0 \quad (3.10)$$

$$\Psi = O(i) \quad \text{si } N_1 \neq 0 \quad (3.11)$$

$$I_1 = \frac{2\pi}{3} R^2 I_o + o(i^2) \quad (3.12)$$

$$\frac{M_1}{M_o} = \frac{3}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \beta J_1(x \cos \beta) d\beta + o(i^2) \quad (3.13)$$

$$\frac{N_1}{N_o} = \frac{3}{2x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \beta J_1(2x \cos \beta) d\beta + o(i^2) \quad (3.14)$$

On remarque que, contrairement à une brillance uniforme, les phases des harmoniques varient proportionnellement à  $i$  et d'autre part, que l'on retrouve l'albedo géométrique d'un corps sphérique obéissant à la loi de Lambert. puis avec :

$$E(u) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} S(u, x) dx dy$$

on obtient, par des calculs analogues à ceux du paragraphe précédent et à l'aide de la fonction de Bessel :

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin^3 \alpha \cos(x \cdot \cos \alpha) d\alpha \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(k + 2 + \frac{1}{2})} \\ \frac{M_1}{M_o} &= 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{3/2}(x)}{x^{\frac{3}{2}}} + o(i^2) \\ \frac{N_1}{N_o} &= \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \frac{J_{3/2}(2x)}{x^{\frac{3}{2}}} + o(i^2) \end{aligned}$$

Le développement en  $\frac{\rho}{s}$  ( $\rho \leq 0,7$ ) est :

$$\begin{cases} \frac{M_1}{M_o} = 1 - \frac{\pi^2}{10} \left(\frac{\rho}{s}\right)^2 + \frac{\pi^4}{280} \left(\frac{\rho}{s}\right)^4 + \dots \\ \frac{N_1}{N_o} = 1 - \frac{2\pi^2}{5} \left(\frac{\rho}{s}\right)^2 + \frac{2\pi^4}{35} \left(\frac{\rho}{s}\right)^4 + \dots \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.3.2 Position du photocentre

TAB. 3.3 - Classification des astéroïdes

Sphériques	2 axes	3 axes	Stellaires
1 8 10	2 4 11	3 6 7 9	5 12 18 21
324	29 31 51	13 15 16	23 27 28 30
	88 451	19 20 22	37 40 42 44
	532 704	39 216 349	63 192 196
		354 511	230 471

Les planètes étudiées ici font partie de classes différentes (Cf tableau 3.3, tiré de [Gra89]). Vu leur taille et leur éloignement, certaines sont quasi-stellaires (elles

présentent un intérêt pour la construction d'un repère de référence dynamique), les autres, de forme irrégulière, sont modélisées par des ellipsoïdes de révolution en rotation autour de leur petit axe. Les petites planètes sphériques sont rares, c'est le cas de Ceres, la plus grosse d'entre elles, qui possède un diamètre variant de 913 km [Ted90] à 1025 km [B<sup>+</sup>79] selon les auteurs et le type d'observation (occultation d'étoile, ondes millimétriques). De par la particularité de la loi de balayage elles sont observées au voisinage de la quadrature, par conséquent elles présentent une phase ; de plus elles peuvent paraître moins brillantes selon qu'on s'éloigne du centre vers le limbe ou le terminateur. Il y a donc une différence entre la position calculée et la position observée ; cette différence est due à l'asymétrie de la surface éclairée mais aussi aux propriétés de diffusion de chaque élément de surface. "La contribution de ce dernier effet est plus particulièrement importante pour des angles de phase modéré, lorsque l'effet purement géométrique est atténué" [Hof90].

Le photocentre géométrique correspond au moment d'ordre un du flux reçu et rapporté au flux total de la surface plane visible  $\mathcal{S}$

$$\mathbf{p} = \frac{\iint_{\mathcal{S}} I(\mathbf{r}) \mathbf{r} dx dy}{\iint_{\mathcal{S}} I(\mathbf{r}) dx dy} \quad ; \quad \mathbf{r} = (x, y)$$

Le déplacement du photocentre est l'écart entre le **projeté sur le ciel du centre de gravité** (calculé) et le **photocentre** (observé) de l'astéroïde. Cet effet a été étudié pour des observations à bord du satellite ([Mor85], [Mor87], [ML89], [Lin87]). L'origine des coordonnées étant le projeté du centre de gravité de la planète, le vecteur  $\mathbf{p}$  correspond au déplacement du photocentre. En passant en coordonnées sphériques, nous pouvons considérer le problème dans l'espace à trois dimensions [Lin87]:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \beta \cos \alpha \\ y &= R \sin \beta \\ z &= R \cos \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_3 = \frac{\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{r}_3) \mathbf{r}_3 \mu d\sigma}{\iint_{\mathcal{D}} I(\mathbf{r}_3) \mu d\sigma} \quad (3.16)$$

$\mathbf{r}_3 = (x, y, z)$  vecteur position de l'élément de surface  $d\sigma$

$\mu d\sigma$  élément de surface projeté sur le ciel

$I(\mathbf{r}_3)$  intensité spécifique reçue

$$\mathbf{p}_3 = \frac{\iint_{\mathcal{D}} S_d \mathbf{r}_3 \cos \beta d\alpha d\beta}{\iint_{\mathcal{D}} S_d \cos \beta d\alpha d\beta}$$

Où  $S_d$  est la fonction de diffusion. Si  $\mathbf{u}_g$  est le vecteur unitaire dans la direction du centre de masse de la planète (supposée homogène), le déplacement observé sur la sphère céleste est alors obtenu par projection parallèle

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_3 - (\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{u}_g) \mathbf{u}_g \quad (3.17)$$

Les deux définitions sont équivalentes, toutefois l'expression de l'intensité spécifique est plus simple dans la formulation (3.16). Dans le cas d'une planète sphérique, ou



plus généralement si le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'équateur d'intensité (plan contenant l'observateur et les centres du soleil et de l'astéroïde) on introduira le vecteur

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sin i} \mathbf{u}_g \times (\mathbf{u}_g \times \mathbf{s}) \quad ; \quad |\mathbf{k}| = 1$$

où  $\mathbf{s}$  est le vecteur directeur de la position héliocentrique de la planète et  $i$  est l'angle de phase.

Si l'on ne modifie que la loi de diffusion, les autres paramètres étant constants, le déplacement du photocentre est borné par les valeurs qu'il prend lorsque :

1. la loi de diffusion est telle que la planète est uniformément brillante.
2. la loi de diffusion suit la loi de Lambert.

A partir d'un algorithme construit par B. Morando [Mor87], nous avons pu montrer que le décalage du photocentre dépend essentiellement du diamètre apparent de l'astéroïde et dans une moindre mesure de la diffusion de la lumière à sa surface. Un exemple est donné dans le tableau 3.4 pour des planètes supposées ellipsoïdales :

8-Flora	( $2a = 141 \text{ km}$ , $a/b = 1,10$ , $b/c = 1,28$ )	diamètre	0",1;
15-Eunomia	( $2a = 272 \text{ km}$ , $a/b = 1,44$ , $b/c = 1,00$ )		0",15;
39-Laetitia	( $2a = 159 \text{ km}$ , $a/b = 1,50$ , $b/c = 1,50$ )		0",08;
216-Cleopatra	( $2a = 140 \text{ km}$ , $a/b = 2,70$ , $b/c = 1,30$ )		0",07.

Le calcul du déplacement se fait, par intégration numérique, pour différentes orientations dans l'espace. Ces changements d'orientation sont exprimés par les différentes combinaisons de rotations (de  $90^\circ$ ) autour des trois axes principaux. La forme a une influence faible sur le déplacement du photocentre comparé au bruit de mesure. Nous formulerons donc l'hypothèse que les planètes sont sphériques. On écrit le décalage  $d\mathbf{p}$  observé pour les deux lois en intégrant l'équation (3.16) :

### loi de Lambert

La fonction de diffusion étant symétrique, le "déplacement" (non observé, déplacement vectoriel  $\mathbf{p}_3$  dans l'espace à trois dimension) du photocentre est porté par la bissectrice de l'angle de phase [Lin77] et est proportionnel au diamètre apparent de la planète  $\rho$ . On obtient les développements au voisinage de  $i = 0,35 \text{ rad}$  pour  $i \leq 0,5 \text{ rad}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= \frac{\rho}{2} \frac{3\pi}{16} \frac{1 + \cos i}{\sin i + (\pi - i) \cos i} \sin i \mathbf{k} \\ &\simeq \frac{\rho}{2} (-0,001 + 0,939 i) \mathbf{k} + o(i - 0,35)^2 \end{aligned}$$

### planète uniformément brillante

TAB. 3.4 - Décalage du photocentre (en *mas*) pour différentes orientations.

*Les angles d'aspect, d'obliquité et de rotation de la petite planète valent soit 0, soit 90°. Le code 0 correspond à un angle nul, le code 1 à un angle de 90°.*

	<b>000</b>	<b>001</b>	<b>010</b>	<b>011</b>	<b>100</b>	<b>101</b>	<b>110</b>	<b>111</b>
8-Flora								
Lambert	4,7	4,9	5,9	5,8	4,9	4,7	5,2	4,9
Uniforme	0,9	0,9	1,7	1,3	0,9	0,9	1,9	1,7
15-Eunomia								
Lambert	5,3	6,1	6,7	6,1	6,1	5,3	6,7	1,2
Uniforme	1,2	0,8	2,1	0,8	0,8	1,2	2,1	1,2
39-Laetitia								
Lambert	2,0	2,3	3,6	3,1	2,3	2,0	2,8	2,2
Uniforme	0,3	0,2	1,1	0,4	0,2	0,3	1,3	0,7
216-Cleopatra								
Lambert	1,1	1,3	2,4	1,7	1,3	1,1	2,0	1,1
Uniforme	0,0	0,0	1,2	0,0	0,0	0,0	1,2	0,3

Dans ce cas la fonction de diffusion ne suit pas le principe de réciprocité, on retrouve un résultat de Chollet [Cho84]

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{p} &= \frac{\rho}{2} \frac{8}{3\pi} \sin^2 \frac{i}{2} \mathbf{k} \\
 &\simeq \frac{\rho}{2} (-0,0252 + 0,145 i) \mathbf{k} + o(i - 0,35)^2 \\
 &\simeq \frac{\rho}{2} \frac{4}{3\pi} i \sin^2 \frac{i}{2} \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

La direction du photocentre *sur le ciel* est alors déduite de la direction géométrique par

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + d\mathbf{p} \tag{3.18}$$

La correction de photocentre est proportionnelle au diamètre apparent de la planète. Le tableau 3.5 donne ce déplacement pour les planètes les plus importantes en taille et pour les deux lois étudiées. Le diamètre apparent et l'angle de phase sont calculés lors des quadratures, les valeurs des déplacements sont en millièmes de seconde. Notons que les valeurs données dans ce tableau correspondent aux corrections sur le ciel, elles majorent donc les déplacements correspondants sur un cercle de balayage.

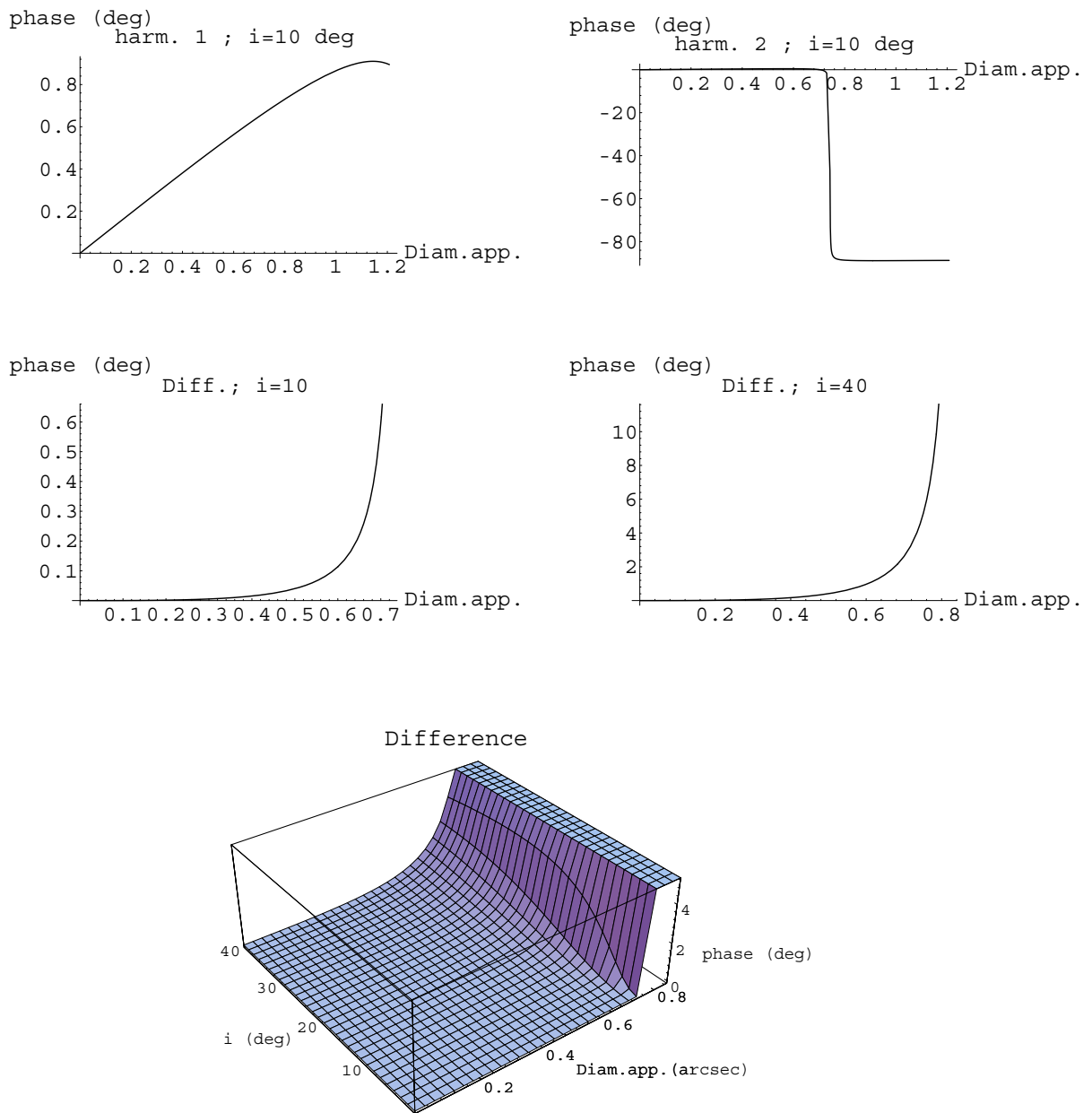


FIG. 3.7 - Phases des harmoniques.

Les deux graphes du haut donnent l'évolution des retards de phase  $\Phi$  et  $\Psi$  des deux harmoniques en fonction du diamètre apparent, et pour un angle de phase de  $10^\circ$ . La planète est supposée être uniformément brillante. Les deux graphes suivants montrent les différences  $\Phi - \Psi$  pour  $i = 0$  et  $i = 40^\circ$ . La surface du bas donne cette différence en fonction du diamètre et de l'angle de phase.

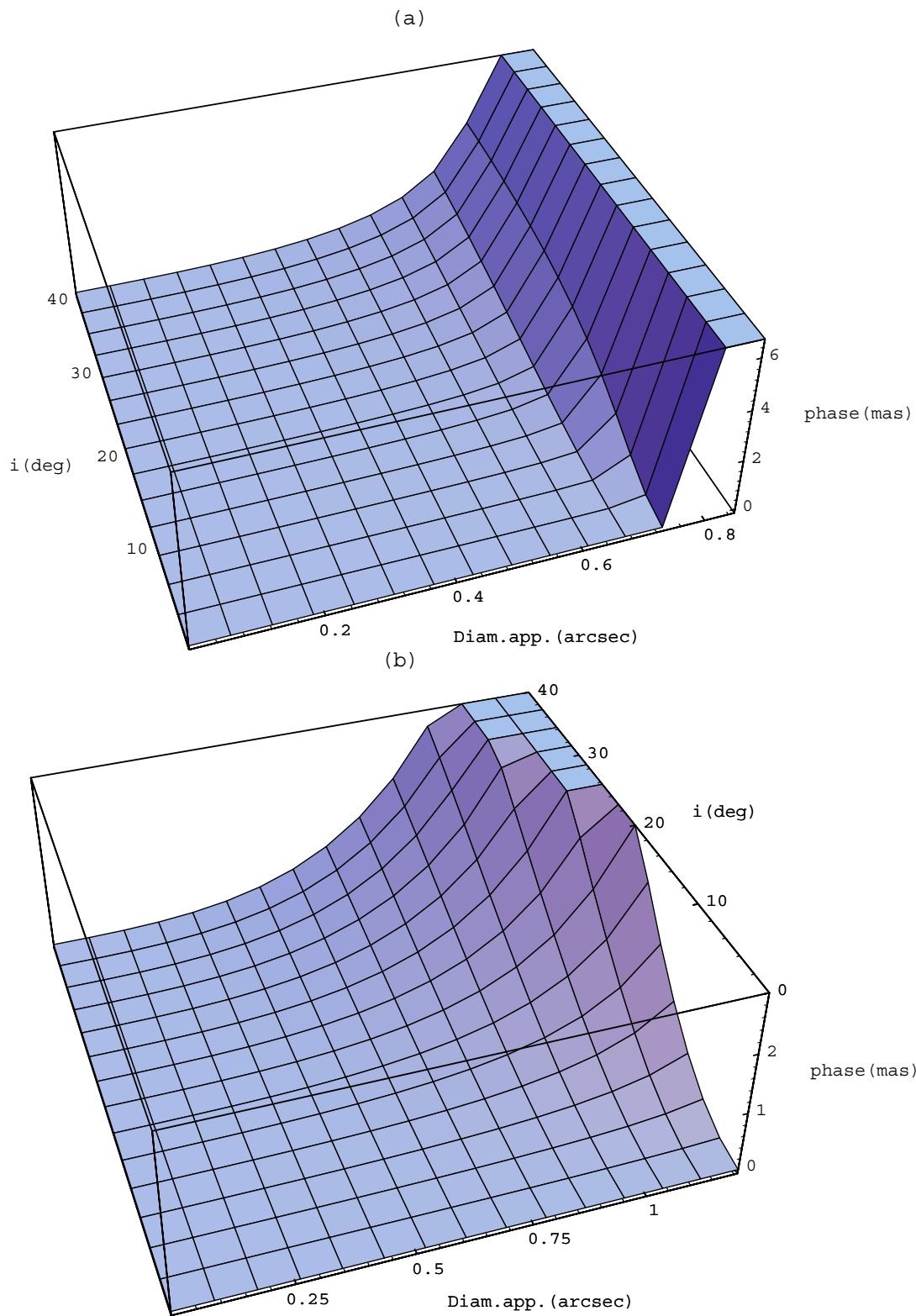


FIG. 3.8 - Ecart entre photocentre et centre de la lumière modulée.  
 La position obtenue à partir de la courbe de modulation correspond à : (a) la moyenne pondérée des phases des deux harmoniques ;  
 (b) la phase du premier harmonique.

Tab. 3.5 - Déplacement du photocentre

*Le diamètre apparent (Diam.) est donné à la quadrature, pour une orbite circulaire. Les déplacements sont donnés en mas.*

Nom	Diam. (")	Phase (deg)	Uniforme	Lambert
1-Ceres	0,49	21,2	7,0	32,4
2-Pallas	0,28	21,2	4,2	18,5
3-Junon	0,14	22,0	2,3	9,2
4-Vesta	0,32	25,1	4,0	21,2
10-Hygiea	0,20	18,6	2,3	13,2

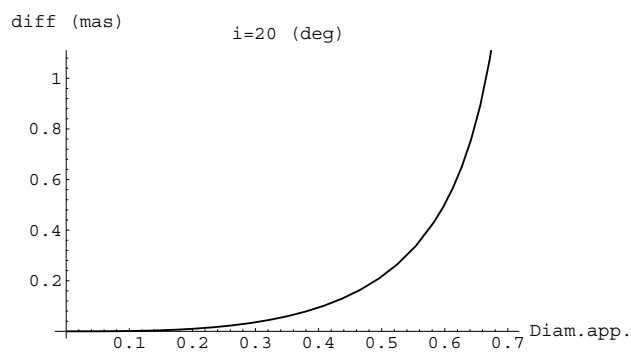


FIG. 3.9 - Exagération des phases pour  $i = 20^\circ$ .

*Ecart entre le photocentre et le centre de la lumière modulée  $\tilde{\phi} - \phi$ . Pour des diamètres apparents inférieurs à  $0''{,}7$ , un angle de phase de  $20^\circ$  et une planète uniformément brillante.*

### 3.3.3 Relation entre photocentre et direction observée

La position du photocentre projeté sur le cercle de balayage et rapporté à une période de la grille s'écrit :

$$\tilde{\phi} = \frac{2\pi}{s} \mathbf{p} \cdot \mathbf{z}_{\perp}$$

$\mathbf{p}$  est le déplacement du photocentre,  $\mathbf{z}_{\perp}$  est le vecteur tangent au cercle de balayage dirigé dans le sens direct,  $s$  est le pas de grille.

La position observée sur la grille est déduite des phases de l'équation (3.2) ou (2.1) :

$$\phi = 0.75 \Phi + 0.25 \Psi$$

Celles-ci dépendent de la diffusion de la lumière à la surface de la planète et de la nature géométrique de la face visible. Cette position ne correspond pas a priori à la position du photocentre ([Lin87]). Il existe en particulier des valeurs de diamètre apparent pour lesquelles les harmoniques disparaissent. Dans les limites pratiques que nous nous sommes fixé : diamètre inférieur au pas de grille et phase de la planète inférieure à  $40^\circ$ , la première harmonique est toujours présente, la seconde harmonique disparaît lorsque la planète est à l'opposition et pour un diamètre correspondant à un zéro de la fonction  $J_1$  de Bessel :  $\rho \approx 0''{,}74$ . Nous appellerons valeur critique du diamètre la valeur de  $\rho = \rho(i)$  telle que :

$$j \left( \frac{2\pi\rho}{s} \right) = J_1 \left( \frac{2\pi\rho}{s} \cos i \right) + J_1 \left( \frac{2\pi\rho}{s} \right) = 0$$

Cette valeur critique croît avec l'angle de la phase de la planète ( $d\rho/di > 0$ ). Pour  $i = 0$ , la valeur critique correspond au cas précédent. Pour une planète présentant une phase, la variation du retard de phase du second harmonique est alors très importante. La figure 3.7 donne, pour planète uniformément brillante présentant une phase de  $i = 10^\circ$ , la variation des retards de phases des deux harmoniques exprimée en degrés. On y trouve aussi la différence  $\Phi - \Psi$  correspondante ; pour un diamètre inférieur à  $0''{,}7$  le retard de la phase du second harmonique par rapport à celui du premier reste petit (de l'ordre de  $2 \text{ mas}$ ). Une courbe analogue est donnée pour un angle de phase  $i = 40^\circ$ , la valeur critique est de l'ordre de  $0''{,}85$  ; la différence maximale pour  $\rho < 0''{,}7$  est alors de l'ordre de  $35 \text{ mas}$ . La figure 3.7 donne aussi la variation de cette différence en fonction de l'angle de phase et pour des diamètres apparents inférieurs à  $\approx 0''{,}8$ .

Des équations (3.7, 3.8), on peut déduire, pour une planète sphérique uniformément brillante, la valeur théorique du déphasage  $\phi$  associée à la position de l'astéroïde sur le cercle de balayage. Cette position est donnée par rapport à la position du centre géométrique de la sphère. La figure 3.8(a) représente la différence entre la direction du photocentre et la direction "observée" (déduite de la courbe de modulation)  $\tilde{\phi} - \phi$  en fonction du diamètre apparent de la petite planète et de l'angle de phase  $i$ . La phase  $\tilde{\phi}$ , contrairement au retard de phase pondéré  $\phi$  est déduite d'une loi de diffusion de Lambert, on obtient ainsi un écart maximal entre ces deux angles. On pourra noter toutefois qu'il est plus simple de considérer uniquement la phase du premier harmonique pour les observations d'objets résolus ; la prise en compte de la phase du second harmonique revient à considérer virtuellement une grille d'un pas

deux fois plus petit, ce qui entraîne des variations importantes de la phase associée à la position de la planète. La figure 3.8(b) montre la différence sur les phases  $\tilde{\phi} - \phi$ , la position sur le cercle de référence que l'on obtient ainsi est donc plus proche de celle du photocentre ; en dessous de  $0",7$  de diamètre, ces deux positions diffèrent de moins d'un millièmme de seconde d'arc. Dans le cas des observations des petites planètes par Hipparcos, le diamètre apparent est inférieur à  $0",7$  (diamètre apparent maximal de Ceres) et l'angle de phase moyen est d'environ  $20^\circ$  ; la figure 3.9 donne la valeur de  $\tilde{\phi} - \phi$  pour cette valeur particulière d'angle de phase. La différence reste donc en général petite par rapport au bruit de mesure, et est de l'ordre des termes négligés jusqu'à présent.

La correction angulaire sur l'élongation de la planète, par rapport à son centre de masse, est donc donnée par la position du photocentre, elle s'exprime en fonction du diamètre apparent de l'astre et de deux paramètres fonction de la diffusion de la lumière à sa surface :  $|d\mathbf{p}| = \frac{\rho}{2} (a + i b)$ . Il ne sera pas tenu compte de cette correction lors de l'établissement de la position astrométrique (Chapitre 4), ceci afin d'éviter la prise en compte d'effets encore mal modélisés (loi de diffusion, diamètre de la planète). Par contre ces effets, souvent petits mais systématiques (déplacement dans la direction du soleil), ont une influence sur la détermination de la rotation de la sphère HIPPARCOS [SL82] ; ils seront modélisés lors du lien au repère de référence dynamique (Chapitre 5).

## Chapitre 4

# RÉDUCTION DES DONNÉES

### 4.1 Aspects théoriques

Nous allons détailler dans les sections suivantes, les corrections à apporter aux observations (et inversement aux positions calculées par des éphémérides) exprimant la transformation entre la position observée et la position géométrique (ou conventionnelle). Le fait que les observations ne dépendent pas d'un référentiel lié à la surface du globe terrestre en réduit sensiblement le nombre et la complexité. Toutefois si l'on veut déterminer l'orientation de la sphère Hipparcos par rapport à un repère inertiel à l'aide des observations des astéroïdes, il faut tenir compte d'effets de l'ordre du millième de seconde d'arc (*mas*) ([SL82], [Hes93]), ce qui nous amènera à prendre en compte des effets relativistes [Cap90].

Deux remarques générales concernent l'orbite du satellite et la datation des observés. La position et la vitesse du satellite sont exprimées en coordonnées cartésiennes dans un repère géocentrique translaté du système d'axes J2000. Les éphémérides du satellite sont fournies, indépendamment des observations faites à bord, par le système de trajectographie. Plus exactement, ce sont les termes dus aux perturbations d'un mouvement képlérien de référence qui nous sont donnés sous forme de coefficients de polynômes de Tchebychev. Cette représentation n'entraîne pas d'erreurs supérieures à  $2\text{ km}$  sur les positions et  $50\text{ cm/s}$  pour les vitesses. De ce fait, dans l'ensemble de ce travail nous sous-entendons que les grandeurs attachées aux vecteurs position et vitesse du satellite sont exemptes d'erreur.

Les données tant photométriques qu'astrométriques des planètes sont des données moyennées sur un T4, la résolution temporelle est donc d'environ  $2^s,13$ . Aussi, cela sera souvent sous-entendu : nous n'avons pas à tenir compte d'effets "petits" sur le temps (*TDB* ou *TT*, temps de lumière de la trajectoire déviée par le soleil entre deux référentiels se déplaçant l'un par rapport à l'autre, temps de lumière et distance satellitocentrique ou géocentrique, etc...)

Signalons enfin que l'ensemble des corrections sera donné sous forme vectorielle.

#### 4.1.1 Parallaxe

C'est un effet géométrique dû à la trajectoire du satellite. Les objets observés sont situés à une distance finie, il s'ensuit que la direction apparente varie selon la position du satellite sur son orbite.



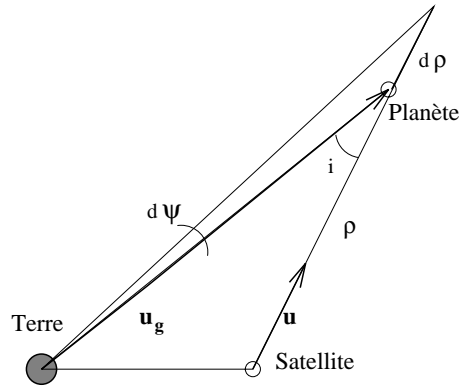


FIG. 4.1 - Position astrométrique – parallaxe

Soient les vecteurs :

- $\mathbf{u}$  : direction satellite-planète
- $\mathbf{s}$  : position terre-satellite
- $\mathbf{u}_g$  : position terre-planète

On a la relation pour la **direction apparente calculée** :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_g - \mathbf{s}}{|\mathbf{u}_g - \mathbf{s}|} \quad (4.1)$$

Inversement on déduit la **direction géocentrique**

$$\mathbf{u}_g = \frac{\rho \mathbf{u} + \mathbf{s}}{|\rho \mathbf{u} + \mathbf{s}|} \quad (4.2)$$

où  $\rho$  est la distance satellitocentrique de la planète. Celle-ci est déterminée par les éphémérides de l'astéroïde, plus précisément par les positions barycentriques  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_\odot(t - \tau))$  de la terre et de la petite planète (compte-tenu du temps de lumière  $\tau$ , section 4.1.2):

$$\rho = |\mathbf{u}_c| \quad ; \quad \mathbf{u}_c = \mathbf{x}_\odot - \mathbf{x} - \mathbf{s}$$

Une erreur sur la distance non mesurée du planétoïde implique une erreur sur la direction géocentrique ainsi calculée. On peut exprimer, de manière approchée, la variation angulaire sur la direction géocentrique en seconde d'arc (Cf figure 4.1):

$$d\psi \simeq \sin i \frac{d\rho}{\rho} \leq 55'' \cdot \frac{d\rho}{\rho}$$

L'incertitude relative sur la distance à la Terre est inférieure à  $10^{-6}$  pour les premiers astéroïdes découverts (Ceres, Pallas, Junon, Vesta). Si l'on émet l'hypothèse que cette incertitude (fonction essentiellement du moyen mouvement) reste inférieure à  $2 \cdot 10^{-5}$  pour chacune des planètes observées, alors l'erreur angulaire sur la direction astrométrique ne dépasse pas le millième de seconde d'arc.

On peut donc sans risque d'erreur ramener les observations dans un référentiel géocentrique.

### 4.1.2 Aberration

C'est un changement apparent de direction dû à la vitesse relative entre l'objet et l'observateur. Dans le cas d'observation de planètes, l'aberration planétaire se décompose en deux parties ; l'une tient compte de la vitesse de la planète par rapport au soleil (temps d'aberration ou temps de lumière) et l'autre de la vitesse de l'observateur (aberration des fixes). Le temps de lumière n'est autre que le temps  $\tau$  mis par la lumière pour parcourir la distance satellitocentrique  $\rho$  de l'astre ; on exprime alors que la position apparente de l'astre au temps d'observation  $t$  est exactement la position qu'il occupait au temps  $(t-\tau)$ , puis on en déduit le changement apparent de direction. La correction de temps de lumière dépend de la distance géocentrique de l'objet, il n'y a pas lieu de l'appliquer aux directions observées, on leur préférera les positions astrométriques. Evidemment la correction de temps de lumière s'applique aux positions calculées. On obtient la position géocentrique de l'astéroïde au temps  $t - \tau$  par convergence rapide de la suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_o = \frac{\rho(t)}{c} \\ \tau_{i+1} = \frac{\rho(t-\tau_i)}{c} \end{array} \right.$$

où  $c$  est la célérité de la lumière. Nous avons supposé ici que la trajectoire du photon est rectiligne, nous verrons (section 4.1.3) que le temps de lumière réel est légèrement supérieur, toutefois l'écart est insignifiant ( $\propto 10^{-5} s$ ). Pour la même raison, on peut supposer que la terre et le satellite sont confondus, et donner une approximation de la distance satellitocentrique par la distance géocentrique de l'objet. La différence maximale sur les temps de parcours est alors inférieure à  $\pm 0^s,15 sec$ .

La vitesse de la terre par rapport au centre de masse du système solaire est d'environ 30 km/s ; si l'on veut tenir compte de l'aberration des fixes jusqu'à une précision de l'ordre du *mas*, il faut poursuivre le développement habituel jusqu'à l'ordre deux en  $(\frac{v}{c})^1$ . Soit  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}$  les vecteurs directeurs de la position géométrique et apparente de la planète,  $\mathbf{v}$  le vecteur vitesse du satellite par rapport au barycentre du système solaire. On a en mécanique classique :

$$k \mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{\mathbf{v}}{c} \quad ; \quad k = |\mathbf{u}_g + \frac{\mathbf{v}}{c}|$$

Pour obtenir la précision recherchée il faut se placer dans le cadre de la relativité restreinte [Sei92], on écrit alors d'après V.A. Brumberg [Bru91] les vecteurs de la vitesse d'un photon dans un référentiel fixe lié à la planète et dans un référentiel en translation uniforme lié au satellite .

Soit  $M'(t', \mathbf{r}')$  un événement dans le référentiel  $S'$ ,  $M(t, \mathbf{r})$  un événement dans le référentiel  $S$  et  $\mathbf{v}$  la vitesse de translation uniforme de  $S'$  par rapport à  $S$ .

$$\text{Posons } v = |\mathbf{v}| \quad \text{et} \quad \beta = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

---

<sup>1</sup>Le rapport  $(\frac{v}{c})^3$  est de l'ordre de  $10^{-4} mas$

On obtient par la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} T \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \left[ (\beta - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} - \beta t \right] \mathbf{v} \\ t' &= \beta \left( t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) \end{cases}$$

ici la matrice de rotation  $T$  entre les référentiels est la matrice identité. On en déduit la relation sur les vitesses des photons :  $\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  et  $\mathbf{C}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$  :

$$\beta \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}}{c^2} \right) \cdot \mathbf{C}' = \mathbf{C} + \left[ (\beta - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{C}}{v^2} - \beta \right] \mathbf{v}$$

Puis, comme la vitesse de la lumière est la même constante dans les deux référentiels, on obtient les relations sur les directions apparentes et géométriques ( $\mathbf{u} = -\mathbf{C}'/c$ ,  $\mathbf{u}_g = -\mathbf{C}/c$ ) :

$$\begin{cases} \beta \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_g}{c^2} \right) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g + \left[ 1 + \frac{\beta}{\beta+1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_g}{c} \right] \beta \frac{\mathbf{v}}{c} \\ \beta \left( 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right) \cdot \mathbf{u}_g &= \mathbf{u} - \left[ 1 - \frac{\beta}{\beta+1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} \right] \beta \frac{\mathbf{v}}{c} \end{cases}$$

puisque le même raisonnement peut s'appliquer en considérant que le référentiel  $S$  se déplace avec une vitesse opposée par rapport au référentiel  $S'$ . Après avoir défini le vecteur  $\mathbf{u}'$  non normé dans la direction apparente, on obtient le développement limité :

$$\begin{cases} \mathbf{u}' &= \beta \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_g}{c^2} \right) \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u}_g + \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_g}{c} \right] \frac{\mathbf{v}}{c} + o\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|} \end{cases} \quad (4.3)$$

et inversement le passage de la direction apparente à la direction géométrique :

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_g &= \beta \left( 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right) \cdot \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}'_g &= \mathbf{u} - \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} \right] \frac{\mathbf{v}}{c} + o\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \\ \mathbf{u}_g &= \frac{\mathbf{u}'_g}{|\mathbf{u}'_g|} \end{cases} \quad (4.4)$$

Appelons alors

$$d\mathbf{u}_{aber} = \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_g}{c} \right] \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (4.5)$$

### 4.1.3 Déviation des rayons lumineux

C'est un effet purement relativiste tenant compte de la courbure de l'espace-temps en présence d'un corps massif. La lumière suit alors une géodésique de l'espace-temps. Pour un astre à l'infini et en ne considérant que le champ gravitationnel du Soleil, la correction sur l'élongation de l'astre  $\theta$  est ([MTW73], [Mur86], Cf figure 4.2):

$$d\theta = 2 \frac{GM_{\odot}}{c^2 a} \cot \frac{\theta}{2} \quad \theta \neq 0 \quad (4.6)$$

$$d\theta \simeq 4,07 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{en mas} \quad (4.7)$$

où  $GM_{\odot}$  est la constante héliocentrique de gravitation et  $a$  la distance soleil-observateur. Au voisinage immédiat du Soleil cet effet atteint 1",75. Les autres planètes massives n'entraînent des corrections significatives que dans leur voisinage immédiat. La déviation maximale, pour les petites planètes de la mission, est donnée par les deux directions asymptotiques de la trajectoire d'un photon rasant la planète massive. On a les valeurs suivantes [BBM]:

	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
$d\theta <$	0",0001	0",016	0",006	0",002	0",003

Les astéroïdes observés par le satellite gravitent entre Mars et Jupiter et les autres planètes<sup>2</sup> du système solaire ne sont pas à considérer ici. Les effets dus à Mars qui est  $3.10^6$  fois moins massive que le soleil, sont donc négligeables; par ailleurs les rayons lumineux ne rasant jamais la planète Jupiter.

La déviation du rayon lumineux est la correction à apporter à la direction euclidienne de l'objet pour qu'elle coïncide avec le vecteur tangent à la trajectoire du photon lors de la réception. Ce vecteur vitesse doit être indépendant de la métrique utilisée. Plaçons nous dans le système de référence barycentrique. Dans le cas d'objets situés à distance finie, la direction asymptotique de la trajectoire ne correspond plus à la direction euclidienne de l'objet. Il nous faut résoudre, en présence d'un champ de gravité faible, un problème de conditions aux limites. Nous avons selon V.A. Brumberg [Bru91] la métrique de Schwarzschild, dans l'approximation post-newtonienne paramétrée (PPN, voir [MTW73]) et en coordonnées isotropes :

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = \left( 1 - \frac{2m_{\odot}}{r} + 2\beta \frac{m_{\odot}^2}{r^2} + \dots \right) c^2 dt^2 \\ \quad - \left[ \delta_{ij} + \frac{2m_{\odot}}{r} \left( \gamma \delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + \dots \right] dx^i dx^j \quad ; \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ \beta = \gamma = 1 \\ m_{\odot} = \frac{GM_{\odot}}{c^2} \end{array} \right.$$

<sup>2</sup>Les effets systématiques dus à la Terre, de quelques dix-millièmes de seconde d'arc ( $\propto 0,1 \text{ mas}$ ), pourraient toutefois être pris en compte.

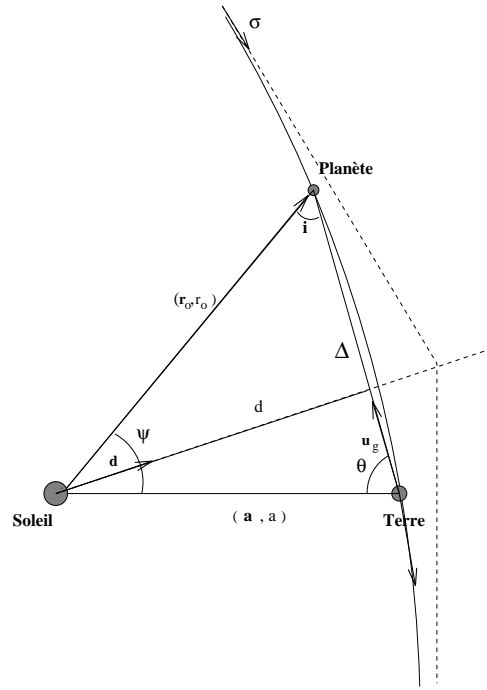


FIG. 4.2 - Déviation gravitationnelle de la lumière

Les valeurs des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  de la métrique sont déterminés à partir d'observations avec une précision de l'ordre de quelques millièmes, et le potentiel peut être supposé sphérique [Sof89]. En négligeant les termes d'ordre  $\left(\frac{m_{\odot}}{r}\right)^2$  et plus, on déduit l'équation du mouvement d'un photon :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_o + c(t - t_i) \\ &+ 2 m_{\odot} \left( \frac{\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r}_o \times \boldsymbol{\sigma})}{r_o - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}_o)} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma})}{r - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r})} - \ln \frac{r + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}}{r_o + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}_o)} \right) \\ c^{-1} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{2 m_{\odot}}{r} \left( \boldsymbol{\sigma} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma})}{r - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r})} \right) \end{aligned}$$

$\mathbf{r}_o$  est la coordonnée spatiale à  $t = t_i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  est le vecteur vitesse du photon à l'infini ( $t \rightarrow -\infty$ ). Soient  $\mathbf{r}_o$  et  $\mathbf{a}$  les positions barycentriques de la planète et de l'observateur, avec :

$$\Delta = |\mathbf{r}_o - \mathbf{a}| \quad ; \quad \mathbf{u}_g = \frac{\mathbf{r}_o - \mathbf{a}}{\Delta}$$

La direction asymptotique (fictive) de la trajectoire du photon venant de l'infini et passant par les deux planètes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{u}_g + 2 m_{\odot} \left( \frac{a - r_o + \Delta}{|\mathbf{r}_o \times \mathbf{a}|} \right) \mathbf{d}$$

le vecteur unitaire  $\mathbf{d}$ , perpendiculaire à la direction géométrique et dans le plan de la trajectoire du photon, étant défini par :

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{u}_g \times (\mathbf{r}_o \times \mathbf{u}_g)}{|\mathbf{r}_o \times \mathbf{u}_g|} \quad (4.8)$$

On obtient aussi le temps de propagation de la lumière :

$$t - t_i = c^{-1} \left( \Delta + 2 m_\odot \ln \frac{r_o + a + \Delta}{r_o + a - \Delta} \right)$$

et le vecteur vitesse – non observable – au moment de la réception :

$$c^{-1} \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{u}_g + \frac{2 m_\odot}{a} \left( \mathbf{u}_g - \frac{|\mathbf{r}_o \times \mathbf{a}|}{r_o a + (\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{a})} \mathbf{d} \right)$$

On en déduit la direction observée (indépendante du système de coordonnées) de la planète dans le système de référence barycentrique. L'équation du mouvement d'un photon en terme de coordonnées dépend du choix de la métrique, tandis que la quantité observable doit en être indépendante. On introduit alors localement un repère "naturel" à l'observateur [Mur83] ou pseudo-euclidien, et la transformation sur les vitesses [Bru91] :

$$\mathbf{u}' = - \left( 1 + 2 \frac{m_\odot}{a} \right) c^{-1} \dot{\mathbf{r}}$$

où  $\mathbf{u}'$  est la direction de l'objet dans le repère local. On a finalement le développement :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u}_g + \frac{2 m_\odot}{a} \left( \frac{|\mathbf{r}_o \times \mathbf{a}|}{r_o a + (\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{a})} \right) \mathbf{d} \\ &= \mathbf{u}_g + 2 \frac{m_\odot}{a} \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} \mathbf{d} \end{aligned}$$

A l'ordre un en  $\frac{m_\odot}{a}$  la direction  $-c^{-1} \dot{\mathbf{r}}$  et la direction observée coïncident, ceci est dû aux choix des coordonnées [MM89]. On peut écrire l'équation précédente en introduisant l'angle de phase :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}' = \mathbf{u}_g + 2 \frac{m_\odot}{d} \frac{r_o}{\Delta} (1 + \cos(i + \theta)) \mathbf{d} \\ r_o : \text{ distance héliocentrique de la planète} \\ \Delta : \text{ distance satellitocentrique de la planète} \\ i : \text{ angle de phase} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

La correction angulaire en *mas* est alors :

$$d\theta \simeq 4,07 \frac{r_o}{\Delta} \frac{1 + \cos(i + \theta)}{\sin \theta} = 4,07 \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} \quad (4.10)$$

$$\simeq 4,07 \tan \frac{\psi}{2} \quad (4.11)$$

On retrouve bien l'équation (4.7) pour un objet à l'infini ( $i = 0$ ). Les petites planètes sont observées dans un voisinage de la quadrature, dans le cas particulier ( $\theta = 90^\circ$ ) on a le développement :

$$d\theta \simeq 4,07 \frac{r_o}{\Delta} (1 - i + o(i^2))$$

Pour un angle de phase voisin de 0,35 radian, le fait de tenir compte de la proximité de la source lumineuse diminue la correction de déviation d'un terme de l'ordre du millième de seconde d'arc. On vérifie par ailleurs que la déviation des rayons par Jupiter reste négligeable pour un corps de la ceinture principale. Soit  $\gamma_J$  cette correction,  $a$  la distance Terre–Soleil et  $D$  la distance Terre–Jupiter on a :

$$\gamma_J \leq \frac{4,07 \text{ mas}}{1000} \frac{a}{D} \tan \frac{\psi_{max}}{2}$$

où  $a/D < 1$  et  $\psi_{max} \approx \pi/4$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_c = \frac{\mathbf{u}_{gc} \times (\mathbf{r}_o \times \mathbf{u}_{gc})}{|\mathbf{r}_o \times \mathbf{u}_{gc}|} \\ d\mathbf{u}_{defl} = 2 \frac{m_\odot}{a} \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} \mathbf{d}_c \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Soit  $\mathbf{u}_{gc}$  la direction géométrique calculée, la direction apparente est

$$\mathbf{u}_c' = \mathbf{u}_{gc} + d\mathbf{u}_{defl} \quad (4.13)$$

Inversement, partant de la direction observée  $\mathbf{u}'$  de la planète il nous faut pouvoir déterminer sa direction géométrique. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_g = \mathbf{u}' - 2 \frac{m_\odot}{a} \frac{\sin \psi}{1 + \cos \psi} \mathbf{d}_c \\ = \mathbf{u}' - d\mathbf{u}_{defl} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

L'écart angulaire entre les directions géométriques réelles et calculées est inférieur à la seconde d'arc or, pour une déflexion maximale d'environ 10 mas, les termes négligés, suite à la substitution du paramètre d'impact  $\mathbf{d}$  par  $\mathbf{d}_c$ , sont inférieurs au millième de seconde d'arc.

## 4.2 Corrections à apporter aux observations

### 4.2.1 Calcul de la position apparente

Avec respectivement  $\mathbf{x}_\odot(t - \tau)$ ,  $\mathbf{x}(t)$  les positions barycentriques de la planète et de la Terre obtenues par intégration numérique, on écrit le vecteur **position astrométrique** calculé, c'est à dire la position géocentrique corrigée du temps lumière (trajet rectiligne Planète-Terre)

$$\mathbf{u}_{ast}(t) = \mathbf{x}_\odot(t - \tau) - \mathbf{x}(t)$$

Au stade suivant nous déterminons la direction satellitocentrique corrigée de l'aberration, de la déviation des rayons et éventuellement d'un déplacement du photocentre. Soit l'application  $N$  qui a un vecteur associe le vecteur normé correspondant

$$N : E \rightarrow E \\ x \mapsto \frac{x}{|x|}$$

A partir des équations (4.2), (4.5), (4.12), (3.18), la direction apparente  $\mathbf{u}_{app}$  correspondante s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{app}^1 = N(\mathbf{u}_{ast} - \mathbf{s}) + d\mathbf{p} \\ \mathbf{u}_{app}^2 = N(\mathbf{u}_{app}^1 + d\mathbf{u}_{aber}) \\ \mathbf{u}_{app} = \mathbf{u}_{app}^2 + d\mathbf{u}_{defl} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Puis on applique la projection sur le RGC du vecteur unitaire  $\mathbf{u}_{app}$  dans la direction apparente. Soit (l,b) les coordonnées écliptiques du pôle du RGC, on calcule deux des trois rotations d'Euler exprimant le changement de repère : écliptique J 2000  $\mapsto$  RGC

$$\mathbf{u} = R_x\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cdot R_z\left(\frac{\pi}{2} + l\right) \mathbf{u}_{app} = (u_1, u_2, u_3) \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

$$\lambda_c = \arctan\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \quad (4.18)$$

Cette abscisse calculée est prise à partir du nœud ascendant que fait le RGC avec l'écliptique J 2000, l'origine du RGC étant déterminée comme une petite correction  $d\lambda_{org}$  lors de la synthèse sur la sphère. On appliquera cette troisième rotation non pas sur les abscisses calculées mais sur les abscisses observées.

$$\lambda_o = \lambda + d\lambda_{org}$$

En considérant que les abscisses des planètes sont indépendantes de la correction d'origine, l'erreur quadratique moyenne devient

$$\sigma(\lambda_o) = \sqrt{\sigma(\lambda)^2 + \sigma(d\lambda_{org})^2}$$

Ainsi les abscisses  $\lambda_o$  et  $\lambda_c$  sont comparables et on peut en déterminer les différences.



## 4.2.2 Calcul de la direction astrométrique

On détermine aussi l'abscisse astrométrique correspondant à la direction observée sur un RGC. Une source d'erreur provient de la distance inconnue (c'est-à-dire non mesurée) du planétoïde, cette dernière intervient au premier ordre dans :

1. La correction de temps de lumière. Elle ne dépend guère de la position du satellite ( $0^s, 1$  à comparer aux  $2^s, 13$  d'un T4), elle ne sera donc pas appliquée ici.
2. la correction de parallaxe. Nous avons vu (section 4.1.1) que l'erreur angulaire sur la direction calculée pouvait être de l'ordre du *mas*, elle reste donc faible comparée à l'erreur quadratique moyenne des observations.

Nous pouvons exprimer les différentes corrections à apporter comme une variation  $d\lambda$  sur le RGC. soit

- $\mathbf{u}''$  la direction apparente dans le repère J 2000
- $\mathbf{u} = (\cos \lambda, \sin \lambda, 0)$  la direction apparente sur le RGC
- $R$  la matrice de passage J 2000  $\mapsto$  RGC définie par l'équation (4.16)
- $\mathbf{v} = R \mathbf{v}''$  la vitesse barycentrique du satellite exprimée dans le repère lié au RGC

De la relation générale (4.4) donnant la direction géométrique en fonction de la direction apparente, on a la correction d'**aberration**

$$\mathbf{u}''_g = \mathbf{u}'' - \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{u}''}{c} \right] \frac{\mathbf{v}''}{c} + o\left(\frac{v^3}{c^3}\right)$$

sachant que  $\mathbf{u} = R \mathbf{u}''$

$$R \mathbf{u}''_g = \mathbf{u} - \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} \right] \frac{\mathbf{v}}{c} + o\left(\frac{v^3}{c^3}\right)$$

D'où la correction

$$d\mathbf{u}_{aber} = \left[ -1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c} \right] \frac{\mathbf{v}}{c}$$

On tire des expressions (4.2), (4.14) et (3.18), les corrections de parallaxe, de déviation relativiste de la lumière  $d\mathbf{u}_{defl}$  et de déplacement du photocentre  $d\mathbf{p}$ . Soit  $\rho$  la distance à priori entre le satellite et le planétoïde et  $\mathbf{s}$  le vecteur position géocentrique du satellite dans le repère J 2000. L'abscisse astrométrique  $\lambda_{astr}$  sur le RGC est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_g^1 = N(\mathbf{u} + d\mathbf{u}_{aber}) - R d\mathbf{p} \\ \mathbf{u}_g^2 = N(\mathbf{u}_g^1) - R d\mathbf{u}_{defl} \\ \mathbf{u}_g = \rho \mathbf{u}_g^2 - R \mathbf{s} = (u_1, u_2, u_3) \\ \lambda_{astr} = \arctan\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Cette abscisse est prise à partir du nœud ascendant que fait le RGC avec l'écliptique J 2000.

### 4.3 Comparaison observés-calculés : $O-C$

Pour chaque T4 nous avons la différence entre valeur observée et valeur calculée à l'aide des meilleures éphémérides disponibles

$$o - c = \lambda_o - \lambda_c \quad ; \quad r.m.s. = \sigma(\lambda_o)$$

Ces  $o-c$  sont représentés au graphe du haut de la figure 4.3 On reconnaît les deux périodes pendant lesquelles aucune observation de planète n'a été effectuée :

1. du 06/07/1991 au 02/08/1991  $t \in [48443.142 ; 48470.875]$  ( $mjd$ ): erreur d'époque des éphémérides relatives aux petites planètes
2. du 09/08/1992 au 27/10/1992  $t \in [48843.917 ; 48922.083]$  ( $mjd$ ) arrêt total des observations

Ces  $o-c$  reflètent, en plus des périodes synodiques des planètes, les périodes de 57 jours et un an de la loi de balayage du satellite. Ils comprennent aussi les valeurs erronées de quelques pas de grille, celles-ci sont corrigées au graphe du bas de la figure 4.3. Les écarts entre les abscisses observées et les abscisses calculées proviennent des bruits de mesure, des différences entre les repères auxquels se rapportent ces abscisses, et des erreurs sur les éphémérides des planètes dues à une faible connaissance des conditions initiales. Si l'on considère le rapport de ces différences par leur écart type :  $o - c / \sigma(o - c) = (\lambda_o - \lambda_c) / \sigma(\lambda_o)$ , on voit d'une part que la quantité  $o-c$  ne correspond pas à un bruit centré quelconque (pour un bruit gaussien on aurait  $|o - c / \sigma(o - c)| \leq 3$ ), et d'autre part qu'elle reflète des erreurs importantes qui sont dues essentiellement aux éphémérides mal connues des petites planètes (cf figure 4.4). Les écarts entre observation et théorie pour l'ensemble des planètes sont relativement centrés, ceci provient en partie de la loi de balayage du satellite. En effet, les pôles des RGC traversent périodiquement le plan de l'écliptique, aussi un écart algébrique positif en longitude écliptique entraîne un écart sur le RGC dont l'amplitude et le signe dépendent de l'inclinaison du plan du RGC sur l'écliptique. Suite à la particularité de la loi de balayage (section 2.2) les planètes sont observées au voisinage des quadratures sans qu'il y ait de programmation de rendez-vous. Les observations sont réparties par paquets correspondant au transit dans un des champs du télescope. Chaque transit comprend généralement 8 T4 espacés de  $2^s 13$ ; l'intervalle de temps séparant le passage dans le champ 1 de celui du champ 2 est d'environ  $20^{mn} 40^s$ , puis du champ 2 au premier  $1^h 47^{mn} 23^s$ . Ces observations sont répétées sur plusieurs rotations du satellite et, suite aux mouvements combinés de la révolution de la planète et de l'axe d'inertie du satellite autour du soleil, se retrouvent à quelques jours d'intervalles. On retrouve un tel paquet d'observations à la quadrature suivante, soit environ 200 jours plus tard. Ainsi les données d'observation relatives à une planète ne sont pas réparties de manière uniforme mais regroupées sur une douzaine "d'époques". Un exemple en est donné pour les  $o-c$  de la planète 6-Hebe sur la figure 4.5.

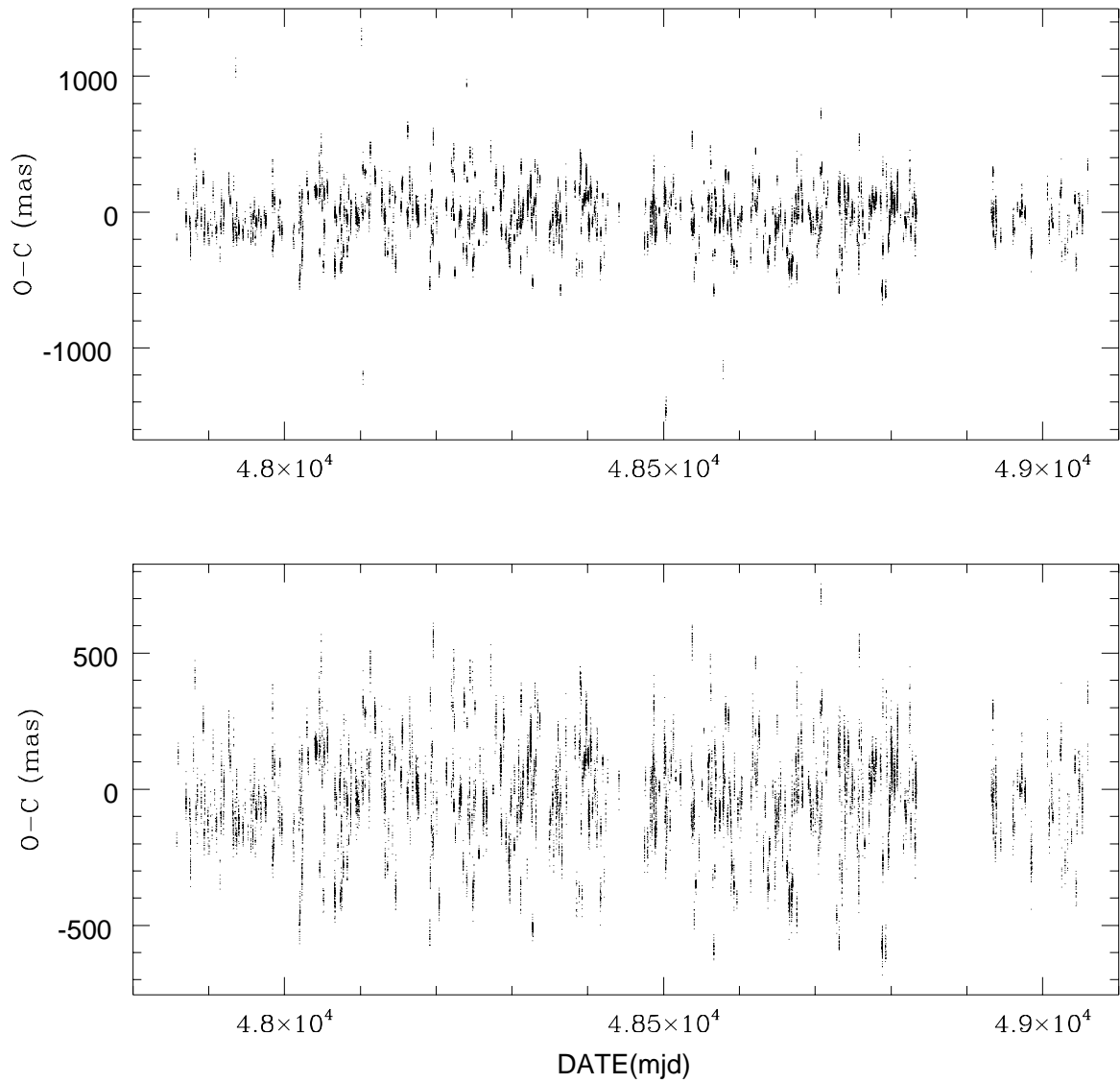


FIG. 4.3 -  $O-C$  sur 37 mois.

En haut : sans correction d'ambiguïté de pas de grille.

En bas : les corrections sont appliquées.

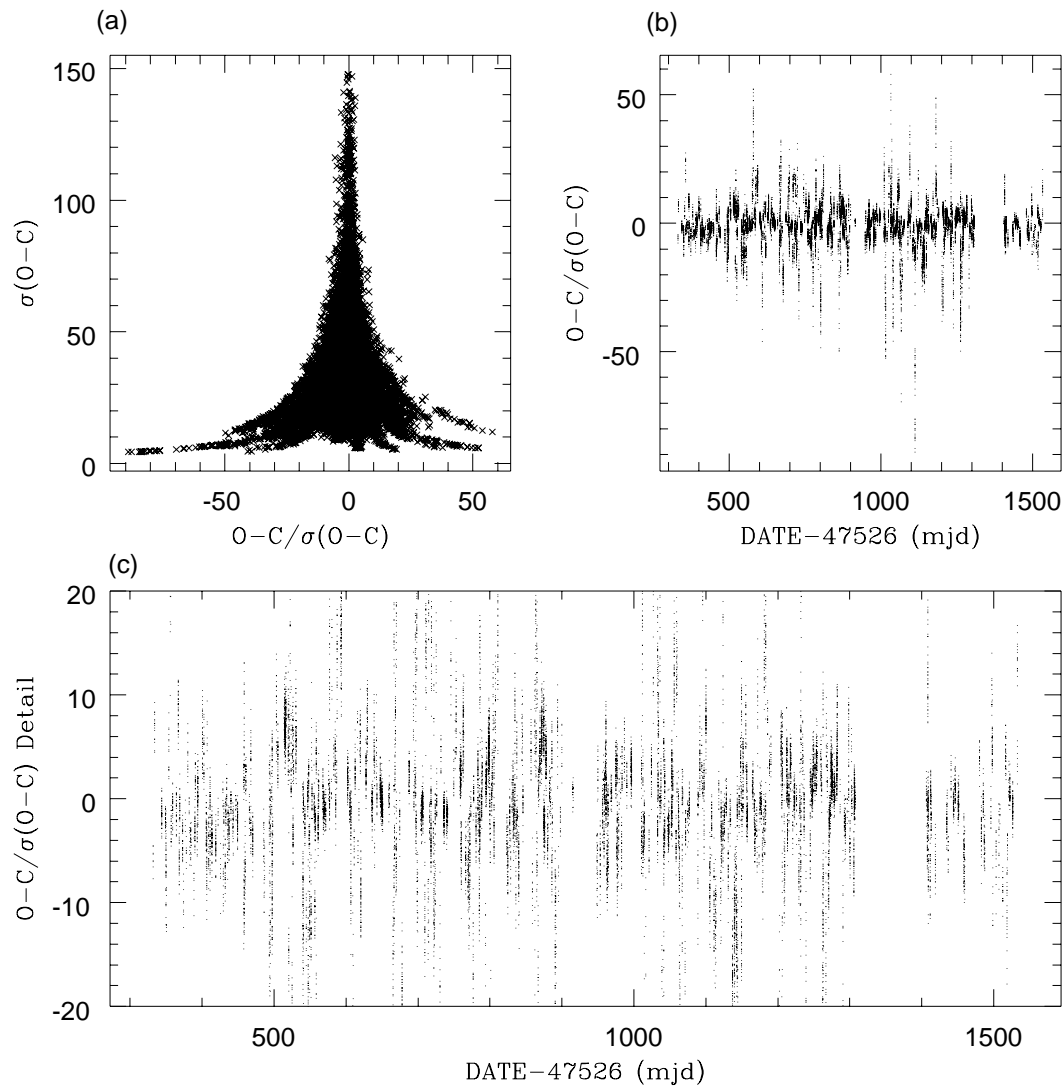
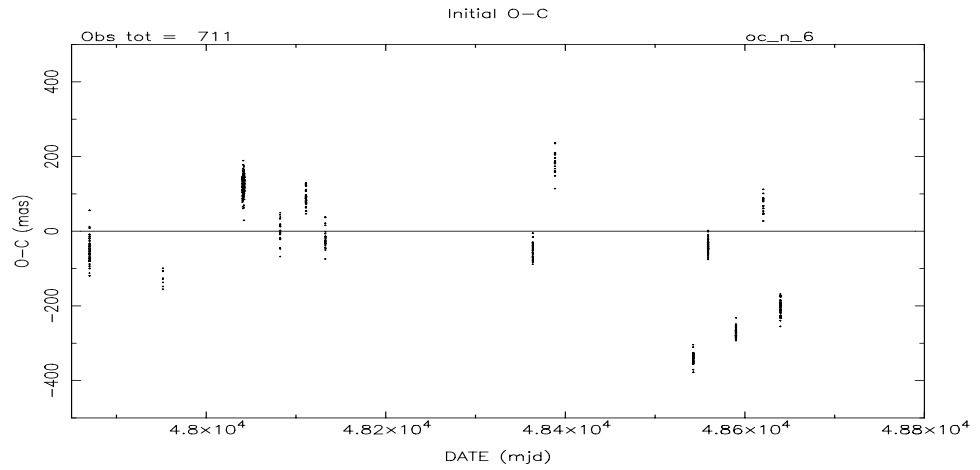


FIG. 4.4 - Quantité  $o - c/\sigma(o - c)$  sur 37 mois de données.  
 (a) : Les écarts entre observation et théorie peuvent être de dix à cinquante fois plus grands que les bruits des mesures.  
 (b) : Représentés ainsi les  $o - c$  reflètent essentiellement des erreurs occasionnelles, propres aux dates d'observation des planètes, bien plus qu'un terme périodique ou séculaire.  
 (c) : Détail du graphe (b).

(a)



(b)

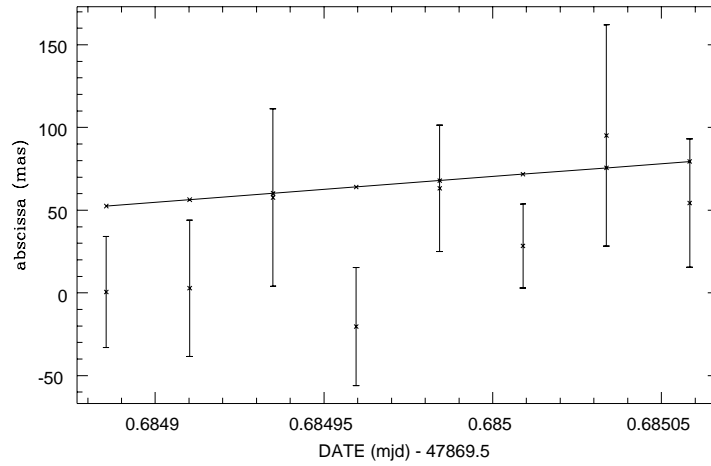


FIG. 4.5 - Planète 6-Hebe.

(a) *O-C* sur 37 mois,

(b) abscisses calculées et observées sur un transit.

## 4.4 Observations douteuses et filtrage

Rappelons que la mesure consiste en un comptage de l'ensemble des photons reçus dans un champ de  $38''$ . De plus, on ne connaît que le retard de phase (modulo le pas de grille et par rapport à une origine arbitraire) d'un point associé à la source lumineuse. On distingue plusieurs types d'observations douteuses :

- Les ambiguïtés de pas de grille ;
- Les transits suspects ;
- Les points isolés ou faibles sur un transit.

#### 4.4.1 Ambiguïté de pas de grille

Soit  $\lambda_{input}$  la longitude sur le RGC donnée par les éphémérides compressées, et  $\lambda_c$  la longitude obtenue par intégration numérique directe. L'abscisse "observée"  $\lambda$  est déterminée en fonction des éphémérides compressées et du pas de grille  $s$ , en imposant :

$$|\lambda - \lambda_{input}| \leq \frac{s}{2}$$

La précision interne de la représentation ( $|\lambda_c - \lambda_{input}|$ ) est dans le pire des cas de  $0",5$ , ce qui, ajouté à la précision des prédictions des trajectoires (avant compression), peut entraîner des erreurs sur la position de l'astéroïde supérieures à  $0",6$ . Aussi les coordonnées obtenues peuvent comporter des erreurs d'une unité de pas de grille. Nous chercherons à déterminer, **si elle existe**, la valeur  $\lambda_{max}$  à partir de laquelle l'écart entre abscisse observée et calculée comprend une telle ambiguïté. Lorsque ce cas se produit, en général tout le transit est à corriger. Ce phénomène est rare et d'amplitude assez importante pour qu'il soit détecté lors des améliorations des éphémérides de la planète (section 5.3). En effet, le ou les quelques transits douteux sont alors séparés d'un pas de grille ( $1",208$ ) des abscisses correctes alors que leur dispersion est de l'ordre de quelques centièmes de secondes.

La correction à apporter ne dépasse jamais le pas de grille. De manière *empirique* et pour l'ensemble des données de la mission on a :

$$\lambda_{max} = 801 \text{ mas}$$

Les *o-c* ainsi corrigés sont représentés à la figure 4.3b

#### 4.4.2 Effet d'éblouissement

Une source d'erreur provient de la présence d'un objet lumineux parasite dans le champ du dissecteur d'image ("veiling glare"). La courbe de lumière obtenue étant la résultante de celle de la planète et de l'intrus, la phase et par conséquent l'abscisse observée sont erronées. Le signal réel est la somme des courbes de modulation de la planète et des corps étrangers ; ces signaux sont de périodes identiques puisque le déplacement de la planète au cours d'un T4 est négligeable. Si le corps parasite est une étoile simple le signal s'écrit :

$$\begin{aligned} E(u) &= K (1 + M_o \cos(u + \varphi) + N_o \cos(2u + 2\varphi)) \\ &+ 1 + M_1 \cos(u) + N_1 \cos(2u + 2\psi) \\ &= I (1 + M \cos(u + \Phi) + N \cos(2u + 2\Psi)) \end{aligned} \tag{4.20}$$

La courbe de modulation de la planète est normalisée :  $I_{pl} = 1$ , de plus le retard de phase du second harmonique est petit  $\psi \ll 1$ . Le coefficient  $K$  est directement lié à la différence de magnitude des deux objets  $K = 10^{-0,4\Delta m}$ , différence entre la magnitude de l'étoile et celle de la planète. Le retard de phase donne la séparation, modulo le pas de grille  $s$ , des images des objets projetés sur le cercle de balayage :

cette séparation vaut  $\frac{\varphi s}{2\pi}$ . On a les relations

$$I = 1 + K \quad (4.21)$$

$$\frac{(1+K)M}{M_o} = \left( K^2 + (M_1/M_o)^2 + 2KM_1/M_o \cos \varphi \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

$$\frac{(1+K)N}{N_o} = \left( K^2 + (N_1/N_o)^2 + 2KN_1/N_o \cos(2\psi - 2\varphi) \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

$$\tan \Phi = \frac{K \sin \varphi}{M_1/M_o + K \cos \varphi} \quad (4.24)$$

$$\tan 2\Psi = \frac{N_1/N_o \sin 2\psi + K \sin 2\varphi}{N_1/N_o \cos 2\psi + K \cos 2\varphi} \quad (4.25)$$

$$(4.26)$$

avec la convention sur la fonction "tan" permettant de déterminer  $\Phi$  et  $\Psi$  de manière unique pour une amplitude non nulle. La chute en magnitude observée entre le signal réel et la magnitude escomptée de la planète est  $\Delta m' = -2.5 \log_{10}(K + 1)$ . La figure 4.6 donne différentes courbes de modulation théoriques résultant de la présence d'un corps lumineux ponctuel dans le champ de mesure du dissecteur d'images. La planète de rayon apparent  $0",6$  est supposée être à l'origine des phases ; la courbe de lumière résultante est donnée en fonction de la séparation des deux corps, pour des différences de magnitudes  $\Delta m$  entre l'étoile et la planète. Les différentes figures correspondent aux cas suivants :

- (a)  $\Delta m = -1$  ;
- (b)  $\Delta m = 0.24$  ;
- (c)  $\Delta m = 0$  ;
- (d)  $\Delta m = 0$ , séparation =  $0",6 \text{ mod } [1", 208]$ .

Lorsque l'étoile parasite est brillante, son signal est prépondérant. L'atténuation maximale de ce signal parasite a lieu pour une séparation d'un demi pas de grille ; la phase observée du couple correspond essentiellement à celle de l'étoile. Pour des écarts de magnitude moins importants, le signal est rapidement perturbé modifiant les amplitudes et les retards de phase. Avec des objets de même magnitude et pour une séparation angulaire d'un demi pas de grille, la première harmonique est nettement diminuée.

L'amplitude de cet effet sur les retards de phase, donc sur les  $\sigma$ - $c$ , peut atteindre quelques dixièmes de seconde d'arc ; elle dépend de la séparation des deux objets et de leur magnitude relative. La lumière parasite a aussi un effet sur les coefficients de modulation des harmoniques, ceux-ci sont utiles pour le calcul de la magnitude. Introduisons la quantité  $\mathcal{M} = MM_o + NN_o$ , appelons-la coefficient de magnitude, cette quantité est fonction de la nature de la source lumineuse observée (étoile simple, étoiles multiples ou planète). La figure 4.7 présente le graphe du coefficient de magnitude pour deux objets ponctuels en fonction du rapport des intensités  $K$  et de la séparation  $\varphi$ . Cette surface est symétrique par rapport au plan  $\varphi = s/2$ , la variation de ce coefficient est importante au voisinage du point  $(K, \varphi) = (1, s/2)$  où la première harmonique disparaît.

Le signal global de l'équation (4.20) est relativement complexe, mais nous pouvons considérer les deux cas particuliers suivants (on parlera en termes d'erreurs introduites par la présence de la lumière parasite) :

1.  $\varphi = \pi \text{ mod}[2\pi]$ , soit une séparation des objets de  $(k + 1/2) s$ . Dans ce cas nous avons

$$\begin{cases} \Phi & = 0 & \text{si } M_1/M_o > K; \\ \Phi & = \pi & \text{si } M_1/M_o < K; \\ M & = 0 & \text{si } M_1/M_o = K; \\ \Psi & \sim \frac{\psi}{1 + K N_o/N_1} \ll 1. \end{cases}$$

Il est possible qu'il n'y ait aucun effet sur les phases des harmoniques, donc sur la mesure de la position de la planète sur la grille. En supposant  $\psi \ll 1$ , nous obtenons la relation

$$\mathcal{M} = MM_o + NN_o \sim \frac{1}{1 + K} \left( |K - M_1/M_o| M_o^2 + (K + N_1/N_o) N_o^2 \right)$$

La figure 4.8 donne la variation de  $\mathcal{M}$  en fonction du facteur de magnitude  $K$  et pour des valeurs extrêmes des coefficients de modulation :

- figure 4.8(a)  $M_1 = M_o$ ;  $N_1 = N_o$  ce qui correspond à une source ponctuelle ;
- figure 4.8(b)  $M_1 = 0,5$ ;  $N_1 = 0,05$  ce qui correspond environ à une planète de  $0,6$  de diamètre apparent ( $i = 0$ ).

Sont données sur ces figures les valeurs correspondantes  $\mathcal{M}_o = M_o^2 + N_o^2$  pour une étoile et  $\mathcal{M}_1 = M_1 M_o + N_1 N_o$  pour la planète en question. On remarque que, quel que soit  $K$ , on a  $\mathcal{M} > \mathcal{M}_o$  (et  $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_o$  pour  $k \rightarrow \infty$ ); ceci n'est plus vérifié dans le cas d'une observation de planète, il existe alors une solution réaliste du rapport d'intensité  $K$  telle que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ .

2.  $\varphi = \pi/2 \text{ mod}[2\pi]$ , soit une séparation des objets de  $(k/2 + 1/4) s$ . On a alors en particulier

$$\begin{cases} \tan \Phi & = \frac{K}{M_1/M_o} \\ \tan 2\Psi & \sim \frac{2\psi}{N_1/N_o - K} \\ \mathcal{M} & \sim \frac{1}{K + 1} \left( \left( K^2 + (M_1/M_o)^2 \right)^{1/2} M_o^2 + |K - N_1/N_o| N_o^2 \right) \end{cases}$$

On voit que la phase du premier harmonique est fortement augmentée et que le second harmonique disparaît lorsque  $K = N_1/N_o$ . On remarque à nouveau, figure 4.8(c), qu'il existe une valeur de  $K$  telle que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ . Cette valeur est croissante pour des sources de moins en moins étendues ; figure 4.8(d). On obtient le même résultat pour une planète d'environ  $0,4$  de diamètre apparent.

Deux tests de détection sont appliqués pour chaque transit, l'un se fait sur une estimation de la pente des abscisses, l'autre sur estimation de la magnitude moyenne.



### 4.4.3 Test sur la pente

Sur un temps aussi court que celui du passage d'un astéroïde dans un champ du télescope ( $\simeq 17 \text{ sec}$ ) on peut considérer que (Cf figure 4.5b):

- son accélération est nulle,  $\frac{d\lambda}{dt} = cte$  ;
- sa vitesse est connue,  $\frac{d\lambda_o}{dt} = \frac{d\lambda_c}{dt} = b$ .

Supposons qu'une étoile brillante se trouve dans le champ de  $30''$  du dissecteur, la pente des observés reflétera la position de l'étoile et sera par conséquent quasi nulle. La pente correspondante pour les abscisses calculées peut par contre atteindre  $0''1$ . Le but de ce test est de rejeter les transits pour lesquels les pentes sont statistiquement différentes; ceci peut se faire sans estimation de la pente des observés. Pour chaque numéro de T4 ( $t_k$ ), et un temps moyen du transit ( $t_0 = E(t_k)$ , en général égal au temps médian), on impose les relations linéaires sur les abscisses observées  $\lambda_k^o$  et calculées  $\lambda_k^c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_k^o = a^o + b^o.(t_k - t_0) + r_k \quad ; \quad r_k \text{ est l'erreur vraie} \\ \phantom{\lambda_k^o} = a^o + b.(t_k - t_0) + (b^o - b).(t_k - t_0) + r_k \\ \phantom{\lambda_k^o} = a^o + b.(t_k - t_0) + v_k \\ \lambda_k^c = a^c + b.(t_k - t_0) \end{array} \right.$$

On suppose que les erreurs de mesures  $r_k$  sont des variables aléatoires centrées  $E(r_k) = 0$  (où  $E$  désigne l'espérance mathématique) et de variance  $(\sigma_k^2)$ ; le premier point implique  $E(v_k) = 0$ . Les différences  $(o-c)_k = \lambda_k^o - \lambda_k^c = a^o + v_k - a^c$  ne devraient pas contenir de terme proportionnel au temps. Soit  $\overline{o-c}$  la moyenne pondérée des  $(o-c)_k$

$$\overline{o-c} = E(a^o + v_k - a^c) = a^o - a^c$$

La même remarque s'applique à la quantité  $v_k = (o-c)_k - \overline{o-c}$ , celle-ci ne devrait représenter que les bruits de mesures. Soit  $\sigma_o$  une constante arbitraire et les poids  $p_k = \frac{\sigma_o}{\sigma_k}$ , introduisons alors l'estimateur du facteur de variance (ou de l'erreur par unité de poids : "mean error per unit weight")

$$\tilde{\sigma}_o^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^N p_k^2 v_k^2 \quad ; \quad \nu = N-1 \quad \text{où } N \text{ est le nombre de T4 du transit.}$$

Supposons que la variable aléatoire  $\nu \frac{\tilde{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté, on en déduit la probabilité

$$P\left(\nu \frac{\tilde{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \geq \chi_\nu^2(\alpha)\right) = \alpha$$

TAB. 4.1 - Valeurs du  $\chi^2$  en fonction du seuil de tolérance et de la redondance.

$Q \setminus \nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,01	6,635	9,210	11,345	13,277	15,086	16,812	18,475	20,090	21,666	23,209
0,001	10,828	13,816	16,266	18,467	20,515	22,458	24,322	26,125	27,877	29,588
0,0005	12,116	15,202	17,730	19,997	22,105	24,103	26,018	27,868	29,666	31,420

sachant que

$$\begin{aligned}
 Q(\chi^2|\nu) &= 1 - P(\chi^2|\nu) && (0 \leq \chi^2 \leq \infty) \\
 &= \left[ 2^{(\nu/2)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]^{-1} \int_{\chi^2}^{\infty} \exp(-t/2) t^{(\frac{\nu}{2}-1)} dt
 \end{aligned}$$

Les valeurs de  $\chi^2_\nu(\alpha)$  sont données dans le tableau 4.1. Si l'on impose la même valeur du  $\chi^2$  à l'ensemble des transits, le test devient plus sévère pour les passages pendant lesquels la planète est observée sur une durée plus courte. En général il y a huit T4 par transit pour une planète, si l'on applique le seuil à 0,022%, avec  $\sigma_o = 30 \text{ mas}$ , on rejettera les transits pour lesquels :

$$\tilde{\sigma}_o^2 \geq 4 \sigma_o^2$$

Ce qui donne, bien que  $\tilde{\sigma}_o$  ne soit qu'un estimateur asymptotiquement sans biais de  $\sigma_o$  la valeur limite de rejet  $\tilde{\sigma}_o \geq 60 \text{ mas}$ . Pour un transit ne possédant que cinq T4 on aurait :  $\tilde{\sigma}_o \geq 67 \text{ mas}$ , si l'on conserve le même coefficient le seuil de rejet est à 0,3% de la population. Les transits ne possédant qu'un seul T4 sont automatiquement éliminés.

La redondance  $\nu$  est relativement faible, ce test pourrait donc rejeter les transits possédant un point fortement isolé. On pourrait alors, dans un premier temps, écarter l'éventuel T4 suspect (test à  $3\sigma$ ), puis appliquer le test sur la pente. Néanmoins, la grande qualité des observations Hipparcos fait que la proportion des transits rejetés à cause de la présence d'un tel point est tout à fait négligeable.

#### 4.4.4 T4 supprimés

L'erreur quadratique moyenne  $\sigma_k$  d'une abscisse sur un T4 varie en fonction de la magnitude et du diamètre apparent de l'astéroïde. Toutes observations confondues, elle est en moyenne de  $30 \text{ mas}$  (Cf figure 4.9). On peut rejeter les points, statistiquement non représentatifs, tels que  $\sigma_k \geq 150 \text{ mas}$ . On rejette aussi les points, s'ils sont rares, s'écartant trop de l'échantillon. C'est à dire ceux pour lesquels  $|(o - c)_k - \overline{o - c}| \geq 4 \sigma_k$ .

#### 4.4.5 Test basé sur la magnitude

A partir des données photométriques, il est possible de déterminer la magnitude absolue des planètes [MM93]. Les observations sur la grille principale se font sur une large bande de longueur d'onde (tableau 2.1) et l'échelle des magnitudes est

propre au système Hipparcos. On obtient la magnitude relative  $m$  d'un objet dans ce système par

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{I}{I_o}$$

où  $I_o$  est un comptage de référence. La quantité  $I$  peut être estimée à partir des coefficients  $(I + B)$ ,  $(IM)$ ,  $(IN)$  de la courbe de lumière (2.1) de deux manières :

1. Soit en retranchant le bruit de fond (déterminé par les observations d'étoiles faibles) à la partie constante du signal :

$$\tilde{I}_b = (I + B) - \tilde{B}$$

2. Soit à partir des amplitudes des harmoniques :

$$\tilde{I}_m = \frac{(IM)M_o + (IN)N_o}{M_o^2 + N_o^2}$$

La première estimation  $\tilde{I}_b$  est de variance plus faible. La seconde est biaisée puisque les coefficients de modulation  $M_o$  et  $N_o$  ne correspondent pas aux coefficients réels  $M$ ,  $N$ . Si l'on suppose que l'estimateur  $\tilde{I}_b$  n'est pas biaisé ( $E(\tilde{I}_b) = I$ ), l'écart en magnitude entre les deux estimateurs est

$$\begin{aligned} \Delta m &= -2.5 \log_{10} \frac{\tilde{I}_m}{\tilde{I}_b} \\ &= -2.5 \log_{10} \frac{M_1 M_o + N_1 N_o}{M_o^2 + N_o^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour une source ponctuelle sans effet de chromatisme cet écart est statistiquement nul (car  $M_1 = M_o$  et  $N_1 = N_o$ ). Pour un objet résolu l'écart  $\Delta m$  est positif et est fonction du diamètre apparent de l'objet.

La magnitude absolue de la planète  $H_p$  est la magnitude qu'elle aurait à une unité de distance astronomique de la terre et du soleil avec un angle de phase nul. Elle est déduite de la magnitude apparente à partir de la relation [Tra85]

$$\begin{cases} H_p &= m - 5 \log_{10}(r \cdot \Delta) + 2.5 \log_{10}((1 - G)\phi_1 + G\phi_2) \\ \phi_i &= \exp \left\{ -A_i \left( \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^{B_i} \right\} ; (i = 1, 2) \end{cases} \quad (4.28)$$

- $r$  est la distance héliocentrique de la planète
- $\Delta$  est la distance géocentrique de la planète
- $\beta$  est l'angle de phase
- $A_1 = 3.33$  ;  $A_2 = 1.87$  ;  $B_1 = 0.63$  ;  $B_2 = 1.22$

TAB. 4.2 - Ecart théorique sur les estimations de magnitudes.

$\rho$ (")	0,05	0,1	0,2	0,5	0,7
Lambert	0.002	0,010	0,04	0,24	0,47
Uniforme	0,003	0,012	0,05	0,30	0,60

Cette magnitude est toujours propre au système Hipparcos, de plus elle fait parfois apparaître des variations encore mal modélisées [MM93]. Puisque nous voulons valider une observation, nous ne cherchons pas à comparer directement la magnitude observée à une magnitude calculée<sup>3</sup>, mais nous comparons l'écart en magnitude entre les deux estimateurs à un écart théorique.

Nous évaluons l'écart en magnitude  $\Delta m$  pour une planète sphérique en considérant deux lois de diffusion de la lumière : brillance uniforme et loi de Lambert. Soit  $\rho$  le diamètre apparent de la planète exprimé en seconde d'arc, on obtient à partir des expressions des rapports  $M/M_o$  et  $N/N_o$  données à la section 3.3.1 :

– **Lumière uniforme**

$$\Delta m_u = 1.214 \rho^2 + 0.003 \rho^4 + o(\rho^6) \quad (4.29)$$

– **Loi de Lambert**

$$\Delta m_l = 0,971 \rho^2 - 0,029 \rho^4 + o(\rho^6) \quad (4.30)$$

– Différence

$$\Delta m_u - \Delta m_l = 0,243 \rho^2 + 0,032 \rho^4 + o(\rho^6) \quad (4.31)$$

On trouvera dans le tableau 4.2 les valeurs d'écart en magnitude pour certains diamètres apparents. L'erreur moyenne sur la détermination de la magnitude est de l'ordre de 0,05 (avec l'estimateur  $\tilde{I}_b$ ), cette erreur dépend de la magnitude de la petite planète donc de son diamètre apparent (figure 4.10). Pour des diamètres apparents supérieurs à la demi-seconde d'arc, l'écart entre les deux estimateurs est donc sensible au choix de la loi de diffusion.

Soient  $\sigma(\tilde{I}_b)$  et  $\sigma(\tilde{I}_m)$  les écarts types des deux estimations de magnitude, un premier filtrage consiste à rejeter les transits pour lesquels l'écart type sur la différence est trop important :

$$\sigma(\Delta m) = \left( \sigma^2(\tilde{I}_b) + \sigma^2(\tilde{I}_m) \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0,3, \text{ soit } 0,5\% \text{ de la population}$$

Puis le test sur l'écart en magnitude (test à 5 sigma) :

$$|\Delta m - \Delta m_u| \geq 5 \sigma(\Delta m)$$

---

<sup>3</sup>Les transits pour lesquels la différence entre magnitude observée et calculée et/ou l'erreur quadratique moyenne est grande sont néanmoins rejetés

## 4.5 Positions astrométriques – Points normaux

Le but est de fournir à la communauté astronomique les positions observées des petites planètes. Après avoir rejeté les observations suspectes et corrigé les éventuelles ambiguïtés de pas de grille, les données d'observations doivent être réduites à un point conventionnel afin d'être facilement utilisables. En particulier, tous les éléments propres à la trajectographie et à l'échelle de temps du satellite doivent être transparents pour l'utilisateur. Toutefois, ceci ne doit pas se faire au prix d'une perte importante sur la qualité (précision) des observations. Nous transformons les abscisses apparentes en abscisses astrométriques, c'est-à-dire qu'elles seront comparables à des éphémérides géocentriques corrigées du temps de lumière et de l'effet de phase. Afin de s'accorder avec les autres observateurs, l'échelle de temps choisie est le temps *UTC*.

Nous avons vu que nous pouvions modéliser le parcours apparent d'une petite planète sur la grille de façon simple ; on fournit donc des positions réduites sur un passage<sup>4</sup>. La précision sur ces points normaux est de l'ordre du centième de seconde d'arc. On détermine alors, pour ce point normal, l'abscisse astrométrique sur le RGC pour une date en *UTC*. Cette transformation se fait en appliquant **une partie** des corrections données à la section 4.2.2 :

- passage de la datation en temps dynamique *TD* au temps universel *UTC*,
- correction d'aberration des fixes,
- correction de déviation des rayons lumineux,
- correction de parallaxe.

La correction de déplacement du photocentre dû à l'effet de phase est faible voire négligeable dans la majorité des cas. Pour les autres, elle n'est pas modélisable de façon fiable, aussi n'entre-t-elle pas dans cette transformation.

La progression des abscisses observées sur la durée d'un passage est linéaire. Comme les données sont en général uniformément réparties sur un transit, nous prenons donc un point moyen à l'instant du milieu du transit. Le nombre de points étant relativement faible, il sera préférable de prendre un estimateur plus robuste que l'estimateur des moindres carrés. Dans le cas simple où un seul paramètre est à déterminer, l'estimateur  $L1 \langle x \rangle$ , minimisant la somme des valeurs absolues des résidus, n'est autre que la valeur médiane de l'échantillon des  $x_k$  :

$$\sum_k |x_k - \langle x \rangle| \quad \text{est minimale pour} \quad \langle x \rangle = \text{med}\{x_k\}$$

Supposons les  $x_k$  ordonnés, et soit  $E(t)$  la partie entière de  $t$  ; la valeur médiane est définie par

$$\text{med}\{x_k\} = \begin{cases} x_{E(N/2)+1} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{1}{2} (x_{N/2} + x_{N/2+1}) & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>Sur deux passages consécutifs, le modèle linéaire est insuffisant.

En reprenant les notations de la section 4.4.3 pour les positions astrométriques, soit  $\lambda_k^o, k \in \{1, \dots, N\}$  les abscisses observées et  $\lambda_k^c$  les abscisses astrométriques déduites des éphémérides, l'abscisse moyenne  $\langle \lambda \rangle$  est

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle &= \text{med} \{ \lambda_k^o - b^o \cdot (t_k - t_0) \} \\ &= \text{med} \{ (o - c)_k \} + \frac{1}{2} (\lambda_1^c + \lambda_N^c) \end{aligned}$$

Si les pentes des abscisses astrométriques et apparentes diffèrent, les écarts entre positions observées et calculées sont par contre les mêmes dans les deux cas : soit  $T$  la transformation de la direction astrométrique à la direction apparente, on a  $o - T(c) \simeq T^{-1}(o) - c$  et  $(\mathbf{o} - \mathbf{c})_{atr.} \simeq (\mathbf{o} - \mathbf{c})_{app.}$ . Il n'est donc pas nécessaire de déterminer les abscisses astrométriques réelles pour chaque T4.

La fonction de distribution des erreurs correspondant à l'estimateur  $L1$  est la fonction de Laplace ([Bra86])

$$p(x - \langle x \rangle) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x - \langle x \rangle|}{\sigma}\right)$$

On peut évaluer l'erreur sur l'abscisse normale par

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_o^2 &= \frac{\sum_k [(o - c)_k - \text{med}\{o - c\}]^2}{N - 1} \\ \sigma^2(\langle \lambda \rangle) &= \frac{\pi}{2N} \tilde{\sigma}_o^2 \end{aligned}$$

Cette estimation est plus large que celle obtenue par la solution des moindres carrés, puisqu'on suppose que la dispersion des erreurs est plus importante que celle correspondant à une loi normale. Il est à noter que cette détermination de l'abscisse astrométrique moyenne est peu sensible à la donnée a priori de la pente puisque qu'elle est prise au temps milieu du transit  $t_0 = \frac{t_1 + t_N}{2}$  soit

$$\lambda_k^c = a^c + b^c \cdot (t_k - t_0)$$

alors

$$\frac{1}{2} (\lambda_1^c + \lambda_N^c) = a^c + b^c \cdot \left( \frac{t_1 + t_N}{2} - t_0 \right) = a^c$$

et l'abscisse normale s'écrit

$$\langle \lambda \rangle = \text{med} \{ (o - c)_k \} + a^c$$

Cette expression ne dépend pas explicitement de la pente mais uniquement de la dispersion des observés, or cette dispersion est la somme d'erreurs supposées centrées et de termes opposés par rapport au temps médian.

## 4.6 Résultats

L'ensemble des données sur 37 mois a été réduit en appliquant les différentes opérations décrites plus haut. La réduction comprend les deux calculs suivants :

1. Calcul des différences entre abscisses apparentes observées et calculées  $o-c$  pour chaque T4 retenu.
2. Calcul d'un point normal astrométrique pour chaque transit retenu.

Les planètes sont observées à des distances satellitocentriques variant de 1 à 4  $UA$  et pour des magnitudes allant de 7 à 13. La magnitude considérée est la magnitude apparente déduite d'une estimation du bruit de fond. Les diamètres apparents sont compris entre  $0",02$  et  $0",7$ ; sauf pour Ceres ( $0",35 - 0",7$ ), ils sont inférieurs à  $0",4$ . Les figures 4.11(a) et (b) montrent, pour l'ensemble des transits, les variations des magnitudes en fonction des diamètres apparents des planètes, et les diamètres apparents en fonction de la distance satellitocentrique. Sur la figure 4.11(a) on reconnaît deux groupes différents, une branche à laquelle appartiennent les planètes 1–Ceres et 324–Bamberg, et une autre pour les planètes 4–Vesta et 39–Laetitia. Pour une magnitude donnée il correspond deux valeurs caractéristiques de diamètres apparents. Rappelons que ces magnitudes ne sont pas ramenées à un angle de phase nul, cet angle varie de  $13^\circ$  à  $23^\circ$  pour Laetitia et de  $17^\circ$  à  $34^\circ$  pour Bamberg; elles ne sont pas non plus corrigées de la distance héliocentrique des planètes. Il ne faut donc pas y voir des propriétés propres aux planètes. La figure 4.11(b) fait apparaître le diamètre apparent des astéroïdes de la mission en fonction de leur distance satellitocentrique, on y retrouve les planètes dont le déplacement du photocentre est le plus important.

Les tableaux 4.3 et 4.4 résument quelques données géométriques relatives aux observations des astéroïdes au cours de la mission. Signalons que pendant les périodes du 5/8/1992 $16^h$  au 28/10/1992 $12^h$  et du 24/12/1992 $5^h$  au 5/1/1993 $5^h$  les pôles des RGC sont dans le plan de l'écliptique, il n'y a par conséquent aucune information sur la longitude écliptique des objets observés pendant ces intervalles de temps.

Un exemple de transit filtré par le test sur la pente est donné pour la planète 324-Bamberg sur la figure 4.12. La date moyenne de ce transit est 48 366, 30345 ( $mjd$ ). La décroissance des abscisses calculées sur ce transit est d'environ 150  $mas$  tandis que les abscisses observées sont presque constantes. Il s'ensuit que, même si l'on translate l'ensemble des abscisses calculées (ce qui revient à faire une correction des éphémérides), les différences entre observations et calculs sont importantes. L'estimateur de l'erreur par unité de poids pour ce transit vaut 107,8  $mas$ . Les observations sont manifestement bruitées par une étoile, on observe alors une chute d'une unité en magnitude. Pour cet exemple, le test sur l'écart en magnitude entre les deux estimateurs ne détecte pas ce transit. Nous avons évalué cet écart dans le cas d'une source étendue, mais cette différence se produit aussi dans le cas de deux ou plusieurs sources ponctuelles, il est alors fonction de la séparation angulaire des objets projetés sur la direction du balayage. Dans ce cas, la présence d'une étoile, à l'intérieur du champ retenu par le dissecteur d'image, produit sur les coefficients de modulation un effet semblable à celui d'un objet résolu.

Un autre exemple de transit filtré est donné, pour la planète 5-Astraea, (figures 4.13). Celles-ci représentent l'évolution des abscisses observées et calculées au

TAB. 4.3 - Données générales sur les observations des petites planètes

Légende:

No	:	Numéro de la petite planète
tmin, tmax	:	Date de début et de fin des observations
Mmin, Mmed, Mmax	:	Magnitude apparente (minimale, médiane et maximale)
imin, imed, imax	:	Phase de la planète (minimale, médiane et maximale)

No	tmin -47526	tmax (mjd)	Mmin	Mmed	Mmax	imin	imed (degrés)	imax
1	394.07	1451.36	7.87	9.26	9.49	14.19	16.12	22.41
2	627.60	1408.35	8.53	9.57	10.78	13.53	17.43	27.37
3	382.73	1512.37	8.42	10.66	11.62	14.20	17.53	26.21
4	558.48	1290.66	7.23	8.25	8.68	17.96	21.78	26.06
5	568.15	1305.82	10.21	11.55	12.54	15.80	18.02	28.73
6	343.92	1440.58	8.74	10.58	11.79	14.90	18.99	30.65
7	385.06	1497.88	8.32	9.91	11.34	16.56	23.29	31.67
8	390.81	1508.87	10.02	11.02	11.87	17.22	23.30	29.92
9	616.22	1300.40	9.74	10.82	12.01	19.28	21.95	28.10
10	497.17	1533.20	10.98	11.64	12.33	13.54	16.09	19.05
11	617.92	1296.50	9.79	11.16	12.38	15.78	17.78	24.92
12	353.90	1293.84	10.75	11.45	12.36	16.29	25.16	29.24
13	526.50	1213.47	11.07	12.04	12.44	18.48	21.63	24.63
14	359.14	1268.83	10.15	11.61	12.49	14.04	22.34	27.89
15	356.12	1518.45	9.52	10.63	11.68	13.59	15.13	25.89
16	368.03	1507.17	10.66	11.59	12.81	14.16	17.01	22.97
18	374.38	1533.21	10.09	11.49	12.28	15.23	20.63	27.32
19	561.49	1260.66	11.14	11.93	12.78	16.39	23.22	28.47
20	458.08	1282.78	8.45	11.36	12.24	17.96	23.02	28.59
22	496.46	1482.62	10.85	12.01	12.71	15.90	17.76	22.54
23	350.12	1495.96	11.08	12.30	12.86	13.72	17.79	28.37
27	357.81	1304.48	10.05	11.39	12.24	17.05	27.21	29.42
28	986.73	1499.10	11.52	12.14	12.60	19.39	22.95	24.07
29	459.59	1480.19	9.92	10.60	11.46	17.22	21.48	23.71
30	333.73	1225.88	10.50	12.05	12.85	16.44	17.87	28.29
31	393.19	771.71	11.17	11.89	12.33	17.53	22.61	24.00
37	357.23	1409.23	11.26	11.72	13.03	14.23	18.25	22.83
39	332.01	1298.33	10.45	11.38	12.67	13.60	17.47	23.56
40	442.97	1279.14	10.70	12.23	12.98	18.14	21.83	26.98
42	446.98	751.78	10.29	11.06	12.37	20.67	23.54	32.30
44	495.04	1282.50	9.99	11.54	12.43	20.48	23.47	28.34
51	523.57	1507.00	11.64	11.85	12.26	19.98	21.23	26.37
63	752.89	1418.89	11.52	11.93	12.64	19.53	23.52	26.52
88	434.28	1091.83	11.12	12.03	13.06	17.59	21.58	23.75
115	388.73	1446.75	11.04	12.40	13.80	21.32	23.01	28.35
129	372.96	1037.47	11.19	12.03	12.69	18.21	21.31	24.91
192	389.81	1307.14	10.91	11.14	12.23	18.89	19.67	25.90
196	466.07	1067.66	11.04	11.91	12.58	16.59	18.63	19.24
216	368.92	832.54	11.35	11.81	12.78	17.14	19.76	25.94
230	381.89	1409.48	11.35	11.70	12.48	16.68	18.46	25.26
324	794.21	1155.81	9.43	11.97	12.41	17.46	18.34	32.60
349	384.33	1108.09	10.37	11.69	12.13	13.89	14.40	21.29
354	373.02	1526.62	10.75	11.61	12.57	13.84	18.26	23.16
451	731.77	1205.13	11.58	12.05	12.70	14.35	17.69	20.29
471	493.71	1498.30	10.93	11.50	13.01	14.87	17.52	25.28
511	519.57	1503.62	11.24	12.01	12.77	14.61	18.44	22.05
532	410.94	1302.80	10.15	10.93	12.26	14.22	20.32	24.74
704	494.60	1209.03	11.12	11.78	13.08	14.05	17.71	22.04



TAB. 4.4 - Données générales sur les observations des petites planètes

Légende:

No	:	Numéro de la petite planète
Hmin, Hmed, Hmax	:	Distance héliocentrique de la planète (minimale, médiane et maximale)
Smin, Smed, Smax	:	Distance satellitocentrique de la planète (minimale, médiane et maximale)

No	Hmin	Hmed (UA)	Hmax	Smin	Smed (UA)	Smax
1	2.58	2.75	2.98	1.86	3.11	3.55
2	2.12	3.13	3.38	1.73	2.47	3.84
3	2.01	3.05	3.36	1.31	2.77	3.69
4	2.21	2.50	2.58	1.71	2.47	3.05
5	2.08	2.42	2.84	1.37	2.11	3.01
6	1.94	2.82	2.91	1.21	2.08	3.37
7	1.84	2.25	2.93	1.13	2.29	3.13
8	1.90	2.26	2.54	1.45	2.46	3.04
9	2.10	2.23	2.67	1.37	1.94	2.82
10	3.07	3.39	3.52	2.56	3.30	3.95
11	2.38	2.65	2.70	1.81	1.95	3.16
12	2.08	2.16	2.84	1.42	1.82	2.28
13	2.35	2.50	2.79	1.76	2.29	2.68
14	2.15	2.40	3.01	1.45	2.39	3.55
15	2.17	3.12	3.13	1.87	2.41	3.56
16	2.55	3.09	3.30	2.43	3.01	3.71
18	1.85	2.59	2.78	1.50	2.58	3.30
19	2.06	2.33	2.83	1.71	2.09	2.50
20	2.07	2.24	2.74	1.55	2.50	3.14
22	2.63	2.71	3.00	2.07	2.76	3.28
23	2.06	2.85	3.21	1.64	2.36	3.20
27	1.95	2.13	2.75	1.22	2.01	2.84
28	2.40	2.44	2.73	1.77	2.21	2.50
29	2.37	2.46	2.67	1.65	2.06	3.00
30	2.06	2.52	2.62	1.34	1.79	2.42
31	2.43	2.45	3.04	1.79	2.27	2.61
37	2.35	2.53	3.06	1.59	1.84	2.51
39	2.45	2.75	3.08	1.91	2.43	3.52
40	2.16	2.34	2.37	1.45	2.65	2.94
42	1.89	1.93	2.26	1.11	1.39	2.41
44	2.07	2.19	2.77	1.37	2.52	2.78
51	2.22	2.45	2.46	1.69	1.74	1.93
63	2.21	2.40	2.45	1.69	1.97	2.16
88	2.35	2.45	2.72	1.70	2.11	2.73
115	2.01	2.15	2.57	1.34	2.24	2.57
129	2.29	2.34	2.78	1.83	2.57	2.80
192	2.14	2.29	2.55	1.43	1.48	2.08
196	3.03	3.04	3.10	2.40	2.66	2.95
216	2.23	2.60	2.73	1.86	2.22	2.76
230	2.27	2.50	2.52	1.72	1.78	2.49
324	1.77	2.38	2.40	0.94	2.91	2.97
349	2.68	3.02	3.17	2.11	3.59	3.62
354	2.48	2.58	3.00	1.95	3.00	3.59
451	2.85	2.97	3.04	2.12	2.34	2.72
471	2.28	2.61	3.35	1.70	1.87	3.15
511	2.63	2.96	3.35	2.21	2.93	3.56
532	2.33	2.45	3.13	1.91	2.47	3.65
704	2.61	2.79	3.12	2.14	2.88	3.36

cours du transit, l'évolution des  $\sigma$ - $c$  sur une durée d'environ trois jours et les différentes valeurs du  $\chi^2$  (normalisé à 30 *mas*) au cours de ces différents passages. L'erreur par unité de poids vaut 85,7 *mas* et, bien que le nombre de T4 pour ce transit suspect soit inférieur à la moyenne, la probabilité pour que la dispersion observée soit due uniquement à un bruit blanc est négligeable. Nous pouvons aussi comparer ce transit aux passages voisins. Il apparaît alors clairement que ce transit est à rejeter; aucune variation de cette amplitude (sur un temps aussi court), tant sur les  $\sigma$ - $c$  que les dispersions des abscisses, ne peut-être liée aux éphémérides ou à des caractéristiques physique de la planète. Par ailleurs, ce transit n'est pas isolé sur un RGC, il n'y a donc pas d'erreur liée à la réduction sur ce cercle.

Le test sur la pente ne détecte pas l'ensemble des transits suspects. La différence entre pentes observées et calculées peut être relativement faible. Pour une étoile fixe pendant un transit, et une planète se déplaçant perpendiculairement au cercle de balayage, les deux pentes sont égales; mais ceci n'empêche pas une erreur constante sur l'ensemble des positions observées du couple planète-étoile. Les amplitudes du signal modulé fournissent aussi des renseignements sur la présence d'objets doubles. La figure 4.14 montre sur un transit l'ensemble des abscisses observées et calculées (figure du haut). La dispersion des mesures par rapport à la pente théorique est acceptable, le facteur d'écart type obtenu après régression linéaire ne reflète pas d'écarts systématiques linéairement dépendants du temps, on a  $\tilde{\sigma}_o \approx 55$ ; le test sur la pente ne filtre pas ce transit ni les transits voisins (figure 4.14 en bas). La magnitude apparente par contre chute pour certains transits et d'une amplitude qui n'est pas la même selon l'estimateur de magnitude utilisé (magnitude corrigée du bruit de fond ou magnitude biaisée obtenue par les amplitudes des modulations du signal). La figure 4.15 donne les variations de ces deux estimations de magnitudes au cours du temps, la figure en haut à gauche correspond à la magnitude apparente déduite du bruit constant, la figure en haut à droite à la magnitude résultant des coefficients de modulation. La distance satellitocentrique croît au cours du temps passant de  $\simeq 2,5$  à  $\simeq 3,5$  *UA*, l'écart théorique sur les magnitudes est quasi-constant et voisin de 0,02, la différence observée est par contre significative pour trois transits consécutifs (figure 4.15 du bas). La chute en magnitude  $dm$  observée entre la planète et le couple planète-étoile(s) est de l'ordre de 1, nous pouvons estimer la magnitude  $m_*$  de l'étoile connaissant la magnitude de la petite planète  $m_p \approx 12$  et à partir de l'équation (4.21):

$$m_p - m_* = -2,5 \log_{10} \frac{1}{K}$$

$$dm = -2,5 \log_{10} \frac{1}{1 + K}$$

$$m_* = m_p - 2,5 \log_{10}(10^{0,4dm} - 1) \approx 11,55$$

La différence de magnitude  $\Delta m$  entre les deux estimateurs est elle aussi de l'ordre de 1 magnitude, le diamètre apparent étant voisin de 0",1 nous pouvons supposer que son signal est celui d'un objet ponctuel, on a alors la relation sur le coefficient de magnitude  $MM_o + NN_o$ :

$$MM_o + NN_o \simeq 10 - 0,4\Delta m(M_o^2 + N_o^2)$$

où  $M$  et  $N$  sont les coefficients de modulation du couple. On peut déduire la valeur théorique de cette dernière expression en utilisant les équations (4.22),(4.23) dans le cas d'une planète quasi-stellaire

$$MM_o + NN_o = \frac{M_o^2 (K^2 + 1 + 2K \cos \varphi)^{1/2} + N_o^2 (K^2 + 1 + 2K \cos(2\varphi))^{1/2}}{K + 1}$$

Avec  $K \approx 1,5$  nous pouvons donner le graphe du coefficient de magnitude en fonction de la séparation des corps sur la grille (figure 4.16). Par symétrie du problème, il y a deux solutions, elles sont voisines de  $0",52$  et  $0",68$ . L'étoile était approximativement de magnitude 11.55 et était séparée de la planète de  $\approx s \pm 0",52 \text{ mod}[s]$ .

Le tableau 4.5 donne quelques statistiques sur le volume des observations des petites planètes par Hipparcos. Chaque petite planète est observée sur environ 15 RGC (de 5 à 28) avec en moyenne 430 T4 ou 50 transits (variant de 13 pour 63-Ausonia à 110 pour 39-Laetitia). Le filtrage des T4 et le test sur la pente rejettent moins de 1% des données, le test sur la magnitude en écarte 3,4%.

Nous pouvons faire une remarque concernant la population des mesures correspondant aux abscisses sur le cercle. La figure 4.17 donne un histogramme des estimateurs des erreurs par unité de poids  $\tilde{\sigma}_o$ ; on obtient les statistiques suivantes (la fréquence corrigée correspond à l'échantillon obtenu après le test sur la pente):

$\tilde{\sigma}_o$	$\geq 20$	$\geq 25$	$\geq 30$	$\geq 35$	$\geq 40$	$\geq 45$	$\geq 50$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 75$
fréquence (%)	85.43	64.94	40.84	22.19	10.45	4.82	2.06	0.96	0.59	0.33
fréq. corrigée	85.34	64.73	40.49	21.72	9.92	4.26	1.48	0.37	0.00	0.00

Nous pouvons supposer qu'il y a huit T4 par transit. Si la variable  $\nu \tilde{\sigma}_o^2 / \sigma_o^2$  suit une loi du  $\chi^2$ , on obtient alors, avec  $\nu = 7$ , les probabilités :

$\tilde{\sigma}_o$	$\geq 20$	$\geq 25$	$\geq 30$	$\geq 35$	$\geq 40$	$\geq 45$	$\geq 50$	$\geq 55$	$\geq 60$	$\geq 75$
$\chi^2$	3,11	4,86	7,00	9,53	12,44	15,75	19,44	23,52	28,00	43,75
Q (%)	87,45	67,70	42,89	21,69	8,69	2,75	0,69	0,14	0,022	$< 10^{-6}$

Les probabilités cumulées, pour l'échantillon de mesure, sont données à la figure 4.18. La population des estimateurs  $\tilde{\sigma}_o$  du facteur de variance ne correspond pas à celle obtenue par la loi du  $\chi^2$ . Ceci ne contredit pas forcément le modèle employé : variation linéaire des positions sur le cercle pendant un passage (en fait, elle est assurée à mieux de  $0,1 \text{ mas}$ ), et égalité des pentes des abscisses observées et calculées sur un transit. Par contre la population des abscisses par T4 ne suit pas rigoureusement une loi normale.

Contrairement au test sur la pente, le test sur les magnitudes est "sévère". Rappelons que la différence en magnitude est fonction essentiellement du diamètre de la planète, et qu'elle est toujours plus grande si l'on considère une planète uniformément brillante. Cette différence sur les estimations de magnitudes décroît rapidement lorsque le diamètre apparent diminue ( $\propto \rho^2$ ). Par contre, l'incertitude  $\sigma(\Delta m)$  ( $\approx 0,1$ ) associée à cette différence est plus importante pour des planètes quasi-punctuelles (Cf figure 4.19 (a) et (b)). Ainsi, lorsque le diamètre apparent est inférieur à  $\approx 0",2$  les modèles deviennent équivalents. Ceci peut se voir par exemple, à la

figure 4.20, avec les données de la planète 15–Eunomia. Pour un diamètre apparent de  $0",2$ , les deux modèles diffèrent d'un centième de magnitude, soit approximativement le cinquième du bruit de mesure. Pour des diamètres apparents compris entre  $0",2$  et  $0",4$  la dispersion des mesures reste importante. Il y a peu d'observations correspondant à cet éventail de diamètres, seules les planètes 2–Pallas et 4–Vesta en font partie. On peut voir à la figure 4.21 les dispersions sur les écarts en magnitude pour ces deux planètes.

La figure 4.22 montre les courbes théoriques et l'écart en magnitude observé pour la planète Ceres ; unique planète observée avec un diamètre supérieur à  $0",4$ . Il est clair que la loi de diffusion la plus adaptée à cette planète est la loi entraînant une brillance uniforme. Nous avons par conséquent modélisé l'écart en magnitude en supposant une planète uniformément brillante.

Pour certaines planètes le nombre de transits rejetés par le test sur les magnitudes est important, les données sont récapitulées dans le tableau suivant :

Planète	Ntr	STM	%
7–Iris	72	6	8.33
11–Parthenope	73	6	8.22
16–Psyche	52	6	11.54
18–Melpomene	110	7	6.36
39–Laetitia	110	7	6.36
324–Bamberga	73	7	9.59
349–Dembowska	102	6	5.88

La figure 4.23 donne cette différence sur les estimations en magnitude en fonction du diamètre apparent, ainsi que la courbe théorique, pour certaines d'entre elles. D'une manière générale, la dispersion des "mesures" est grande pour des petits diamètres apparents. On peut noter aussi que, pour les planètes 7–Iris et 324–Bamberga, l'estimateur obtenu à partir des coefficients de modulation du signal est en général plus grand que celui obtenu par une estimation du bruit de fond.

La figure 4.24(a) donne un histogramme des erreurs associées aux points astrométriques normaux. On voit que la précision, après réduction sur un passage, est globalement de l'ordre de  $0",010 \sim 0",015$ , et elle est en général meilleure que  $0",04$ . Cet histogramme est à comparer avec celui de la figure 4.9, où sont données les précisions des abscisses par T4 ; le gain apporté par la réduction est donc de l'ordre de 2,5. La précision varie en fonction de la magnitude de ces objets (albédo et diamètre apparent essentiellement), cette variation est représentée à la figure 4.24(b) ; la masse la plus importante des observations a lieu entre les magnitudes 10 et 12,5. On a la relation *empirique* donnant l'erreur  $\sigma$  (donnée en millième de seconde d'arc), sur l'abscisse d'un point normal, en fonction de la magnitude apparente  $m$  et du diamètre apparent  $\rho$  (exprimé en seconde d'arc) :

$$\sigma = \frac{\sigma_o}{\sqrt{k_1 k_2}}$$

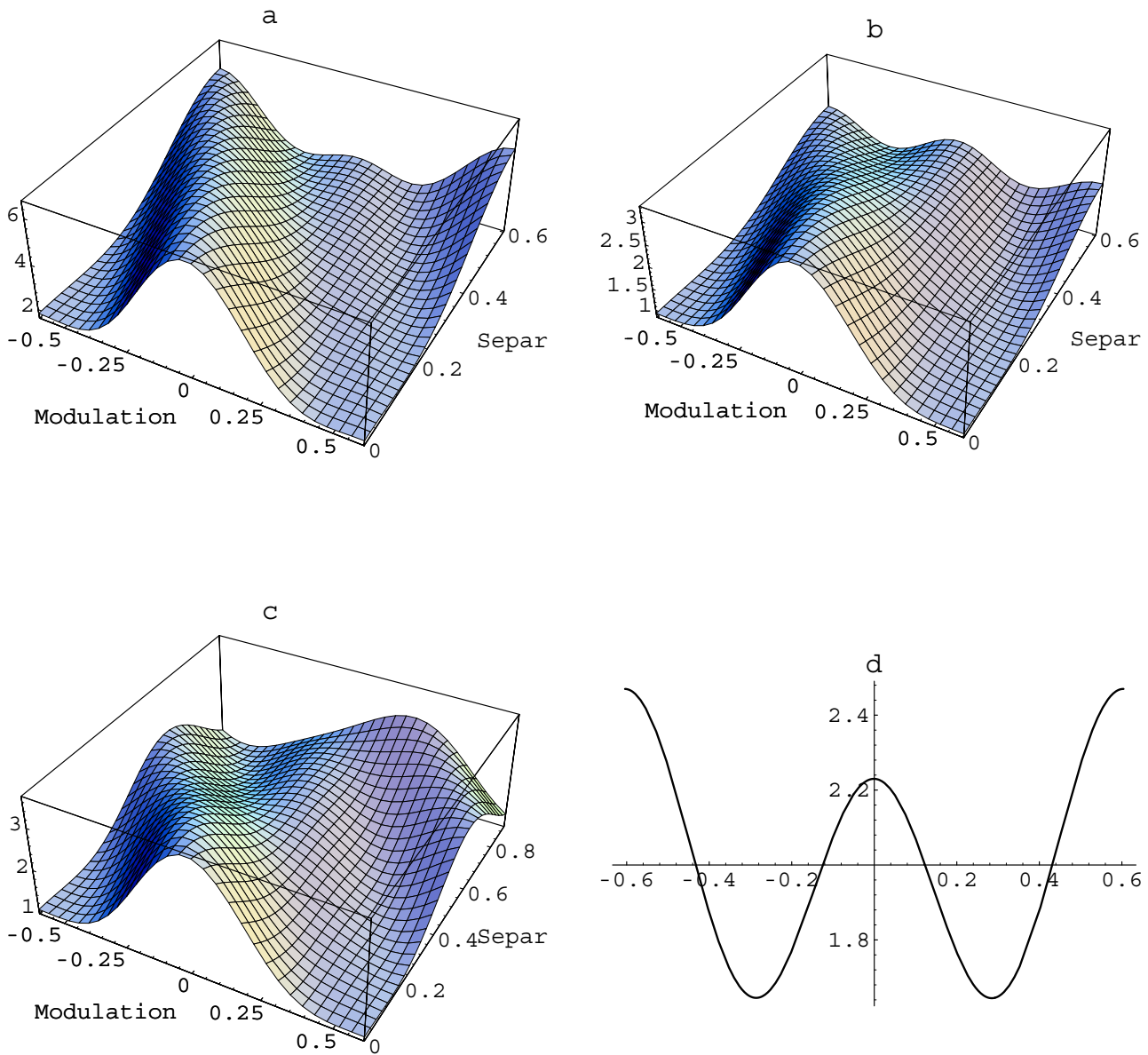
$$\begin{aligned}
k_l &= 3 \frac{\sin F_l - F_l \cos F_l}{F_l^3} \quad l = 1, 2 \\
F_l &= \pi l \frac{\rho}{s} \\
\sigma_o &= 15 \text{ mas} \cdot 10^{\frac{1}{2}(a m + b)} \\
a &= 0.328 \\
b &= -3.85
\end{aligned}$$

les coefficients  $k_l \leq 1$  sont liés à l'aplatissement de la courbe de modulation pour des objets non ponctuels, ils sont calculés en supposant une loi de diffusion de Lambert [SL82]. Les paramètres  $a$  et  $b$  sont calculés par régression linéaire ; les figures 4.25 donnent l'exposant linéaire calculé et la loi *empirique* ainsi déterminée.

La figure 4.26 représente des tracés analogues, l'erreur quadratique moyenne  $y$  est donnée en fonction du diamètre apparent des planètes et en fonction de leur distance satellitocentrique. La précision sur les positions est optimale pour des diamètres compris entre  $0",1$  et  $0",5$ , il en est d'ailleurs de même pour l'incertitude  $\sigma(\Delta m)$  sur l'écart en magnitude. Pour des planètes quasi-ponctuelles, la magnitude est élevée et le rapport signal sur bruit est plus faible. D'autre part, pour des objets identiquement brillants, l'amplitude de la courbe de modulation décroît avec des sources de plus en plus étendue ; ceci a pour effet de diminuer, à nouveau, le rapport signal sur bruit. Il subsiste quelques points isolés, en particulier quatre transits pour lesquels l'erreur moyenne est supérieure à  $60 \text{ mas}$ . Contrairement au test sur la pente, l'estimation de l'erreur sur un point astrométrique normal se fait sans pondération des résidus, ainsi les points isolés contribuent de manière identiques sur l'estimation de la précision. Ces points sont rares, montrant par là la grande qualité des observations en position des petites planètes avec le satellite Hipparcos.

Les données sur les positions des astéroïdes telles qu'elles sont fournies par le satellite Hipparcos sont donc d'une précision inégalée pour ce genre de corps. Le volume de ces données, leur répartition sur la trajectoire ou selon l'angle de phase est cependant variable selon les planètes. Combinées avec d'autres observations astrométriques (au sol ou par un satellite post-Hipparcos), ces observations des petites planètes permettront d'améliorer sensiblement les éphémérides de ces corps. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est d'ores et déjà possible, avec les observations Hipparcos seules, d'apporter des contraintes très précises sur les orbites osculatrices des petites planètes de la mission, voire de les déterminer entièrement.

FIG. 4.6 - Courbe de lumière pour un couple planète-étoile. Le centre de la planète est à l'origine des phases. On donne la courbe de modulation sur une période, en fonction de la séparation (*Separ.* exprimée en seconde d'arc) sur le cercle de balayage des deux objets. (a)  $\Delta m = -1$ ; (b)  $\Delta m = 0.24$ ; (c)  $\Delta m = 0$ ; (d)  $\Delta m = 0$ , séparation =  $0''6$ .



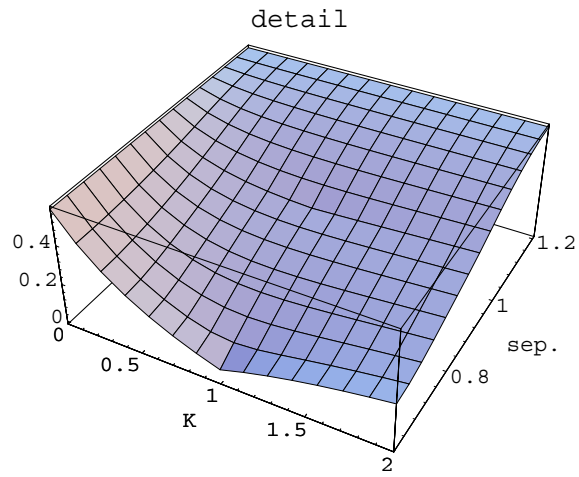
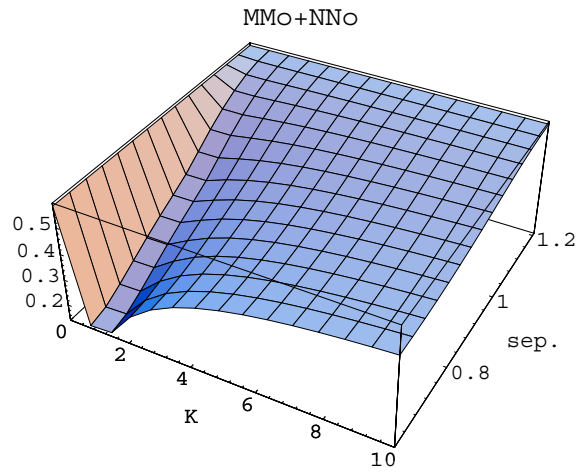


FIG. 4.7 - Coefficient de magnitude pour deux objets ponctuels.  
*En fonction de la séparation (sep.) et du rapport d'intensité  $K$  des objets. La surface est symétrique par rapport au plan  $sep = s/2$ .*

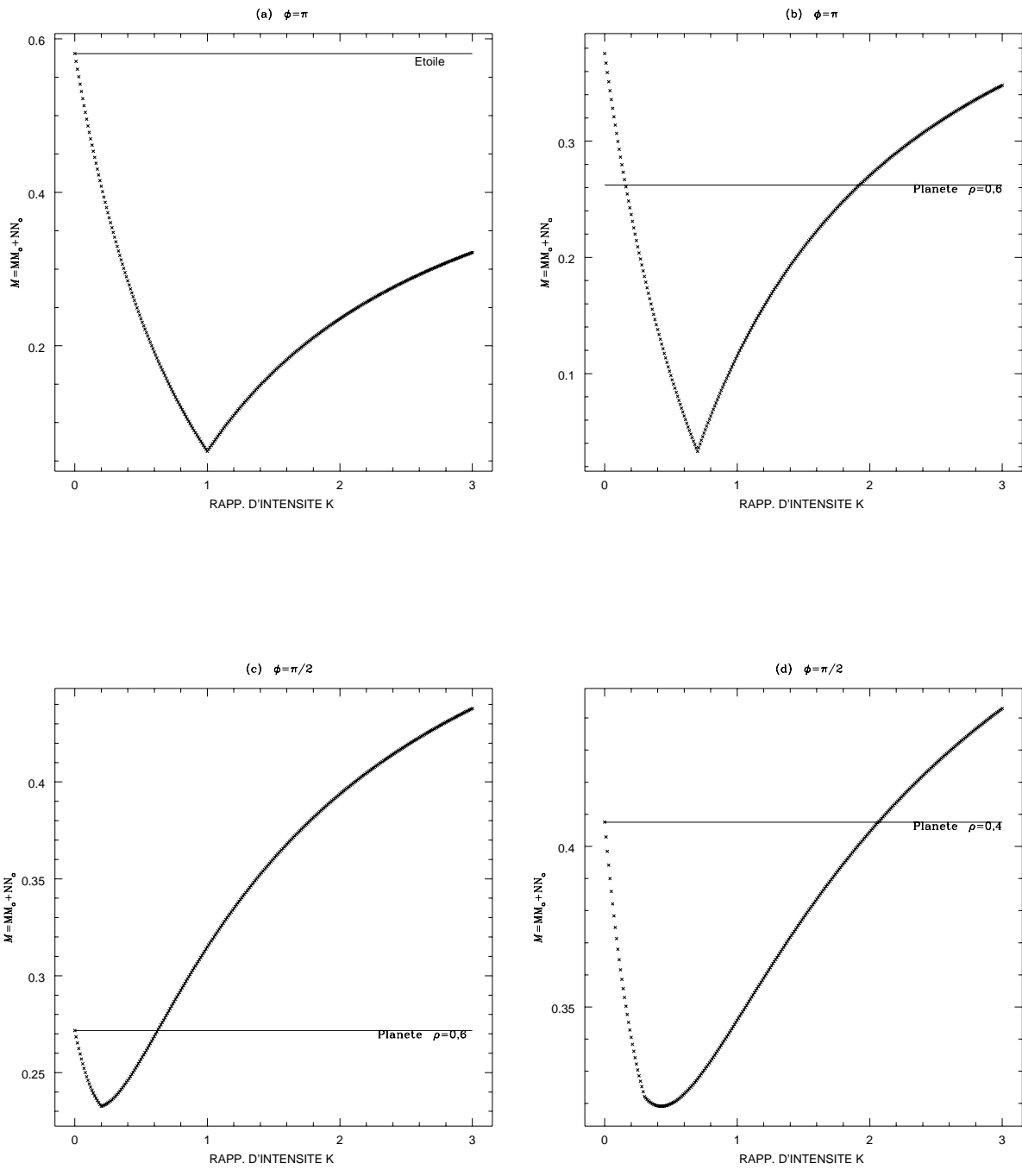


FIG. 4.8 - Influence d'une lumière parasite sur le coefficient de magnitude.



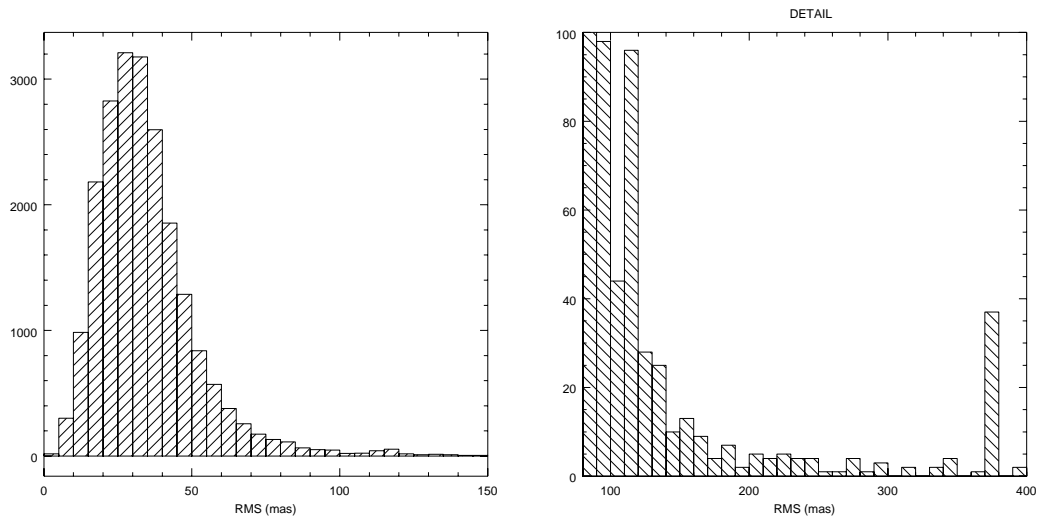


FIG. 4.9 - Précision des positions sur un T4.  
*La précision des abscisses sur un RGC, après réduction des données photométriques de la courbe de modulation, est de l'ordre de 30 mas.*

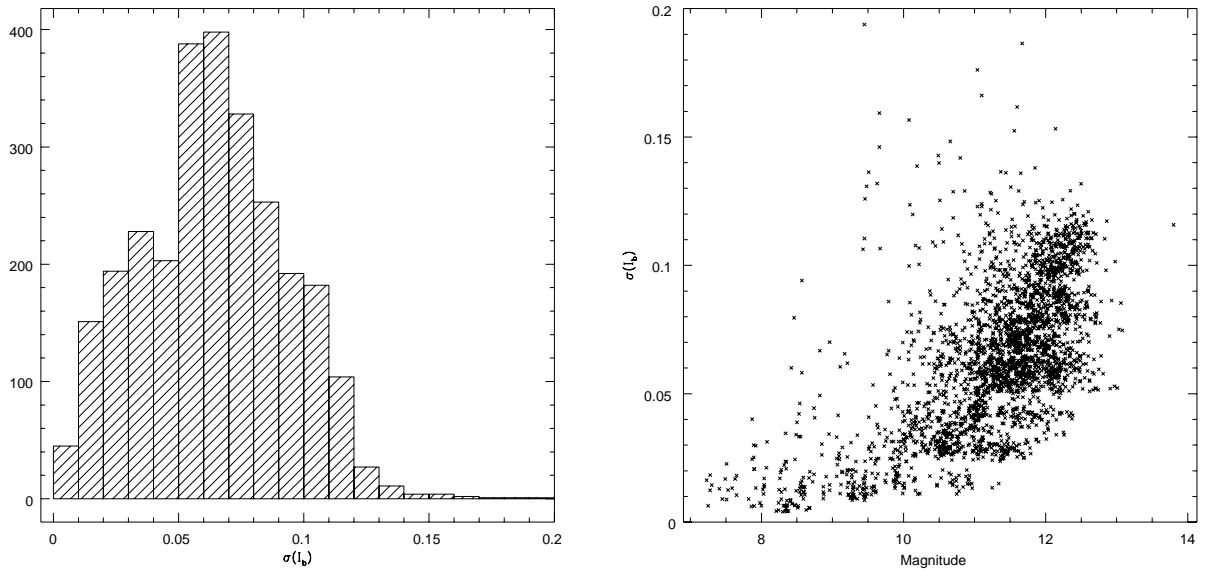


FIG. 4.10 - Précision des magnitudes sur un transit.

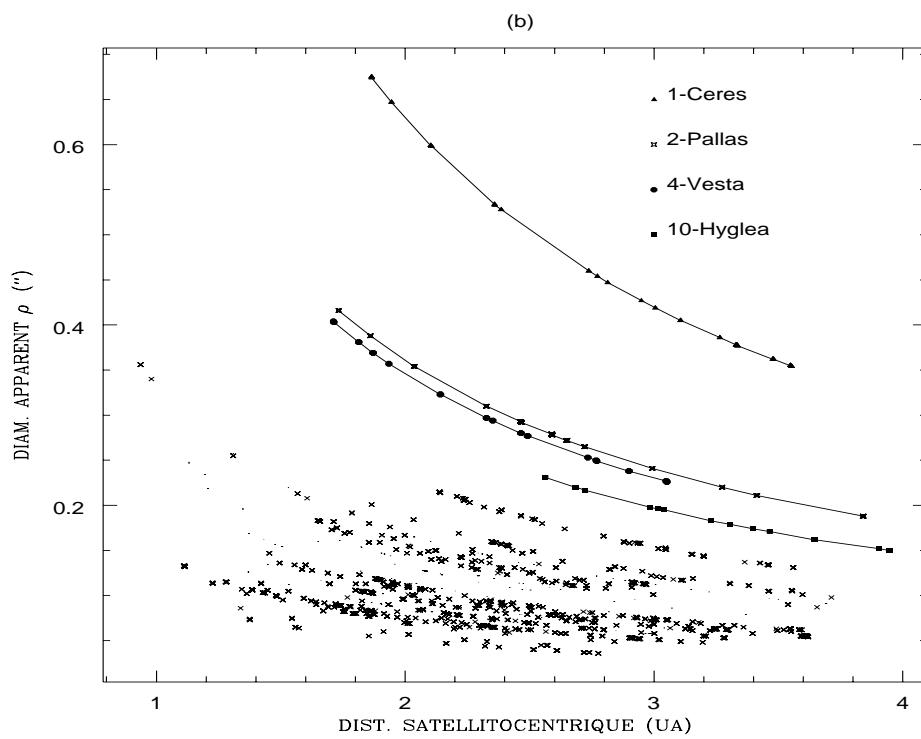
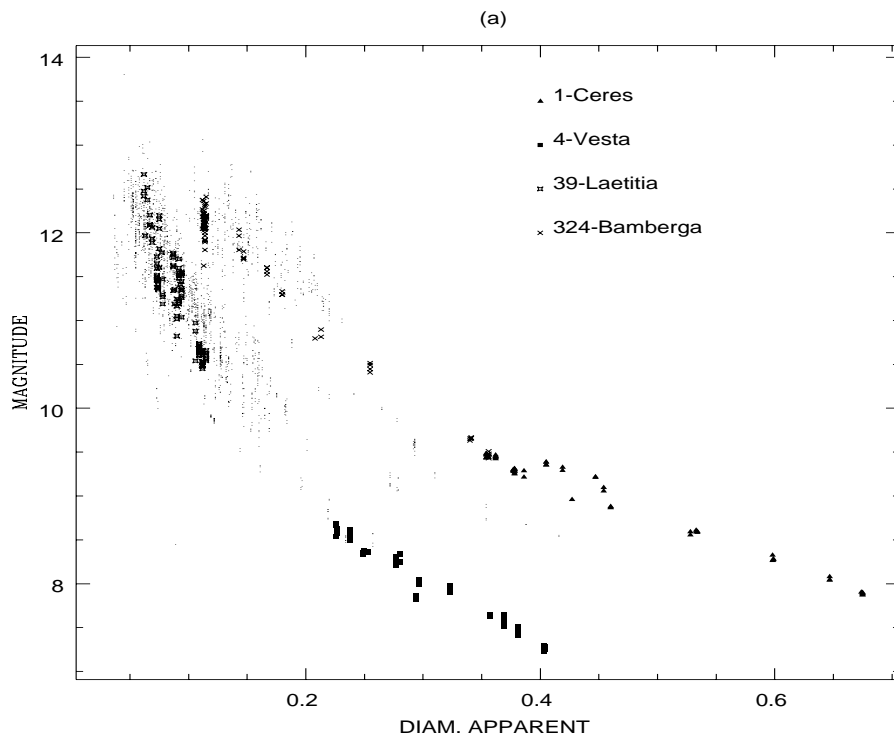


FIG. 4.11 - Magnitudes et diamètres apparents des planètes.

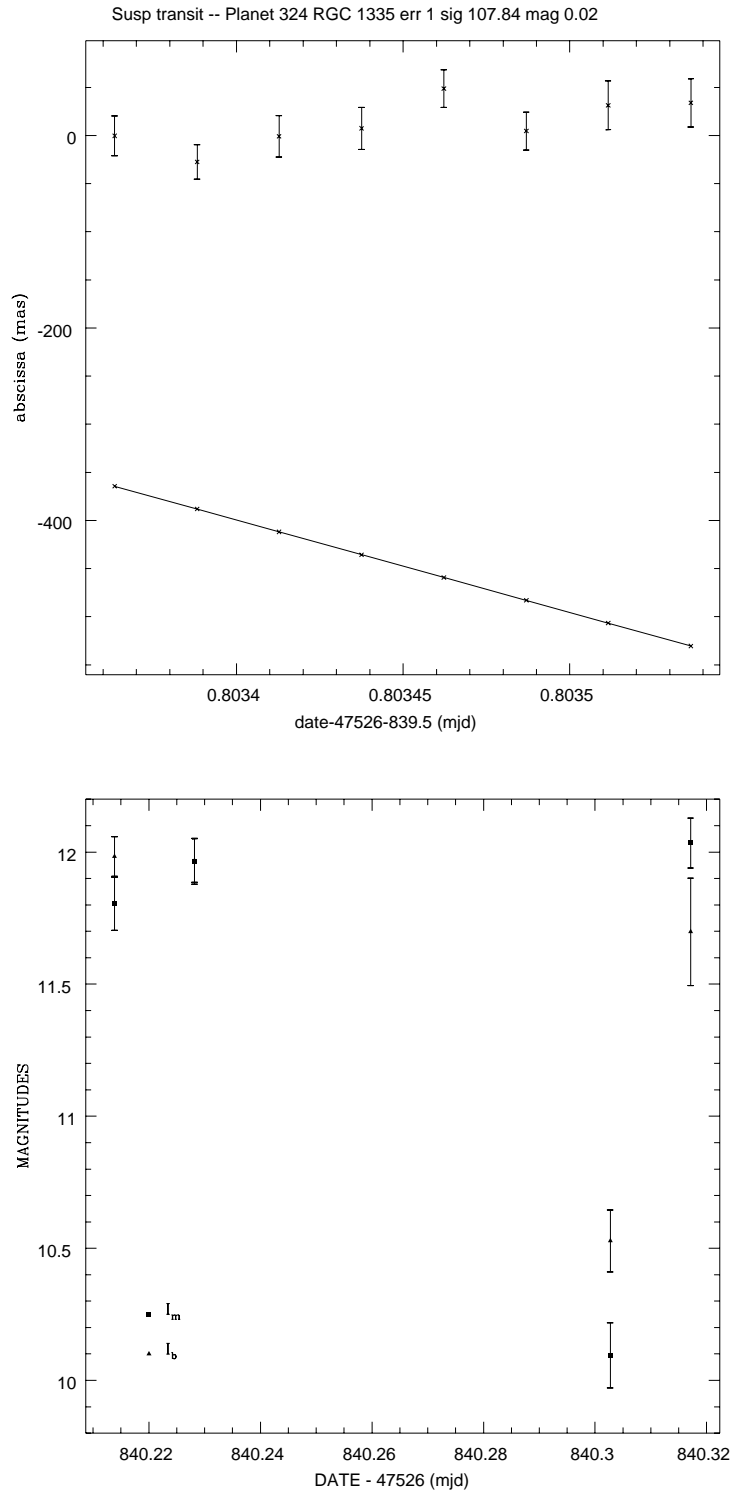


FIG. 4.12 - Transit douteux pour 324-Bamberga  
*En haut : abscisses observées et calculées sur le transit.*  
*En bas : deux estimations de la magnitude apparente pour plusieurs transits successifs.*

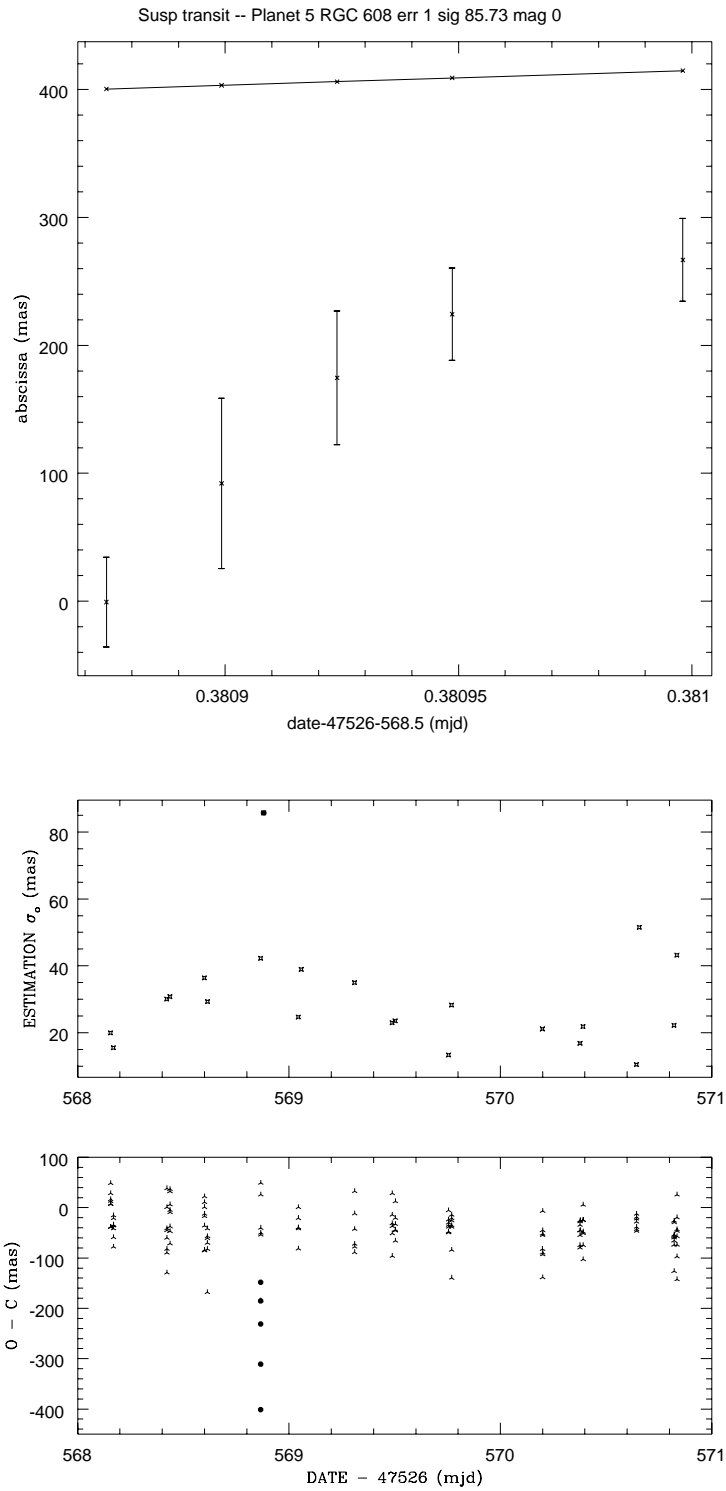


FIG. 4.13 - Transit douteux pour 5-Astraea.  
*En haut* : abscisses observées et calculées sur le transit.  
*Au milieu* : facteur d'écart type par transit, pour plusieurs transits successifs.  
*En bas* : o-c pour ces différents transits.

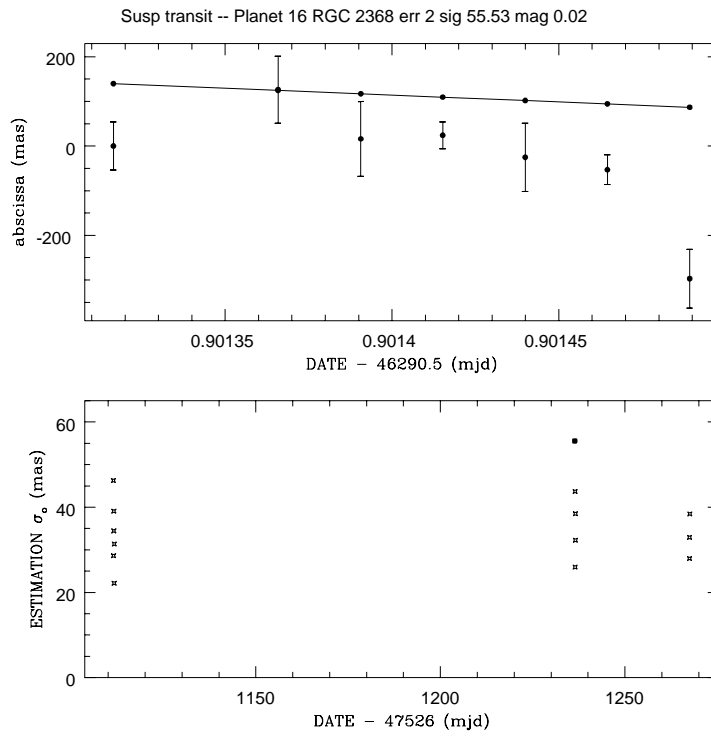


FIG. 4.14 - Transit douteux pour 16-Psyche : pente

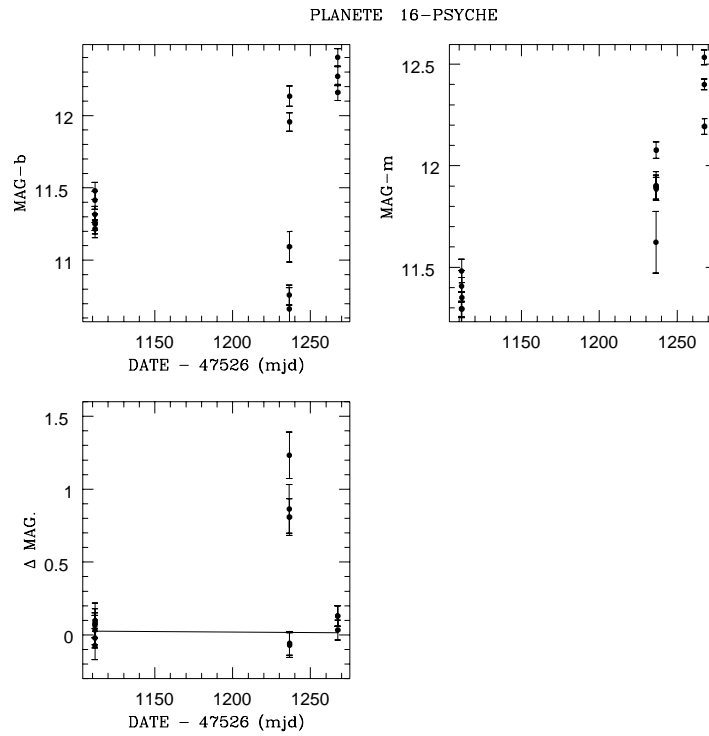


FIG. 4.15 - Transit douteux pour 16-Psyche : magnitudes

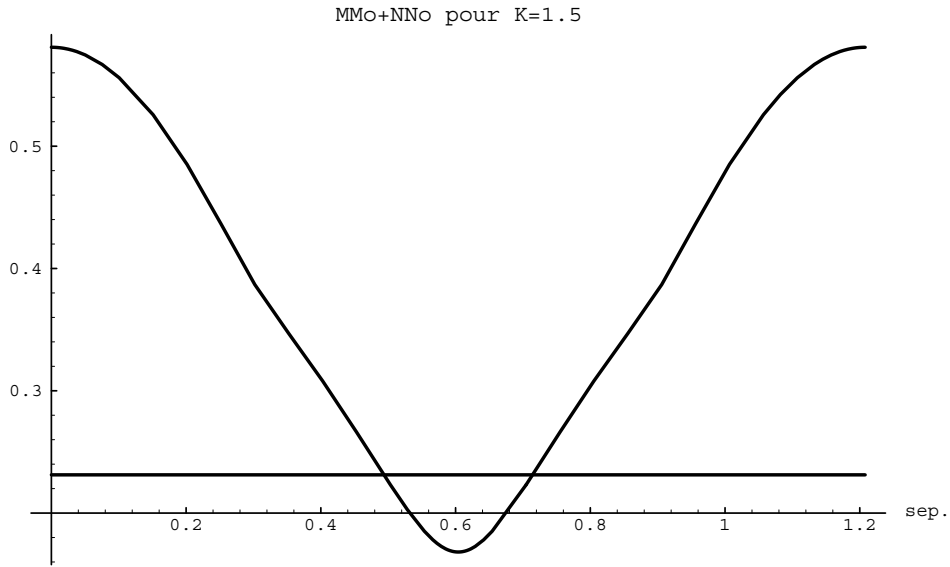


FIG. 4.16 - Coefficient de magnitude fonction de la séparation des objets.

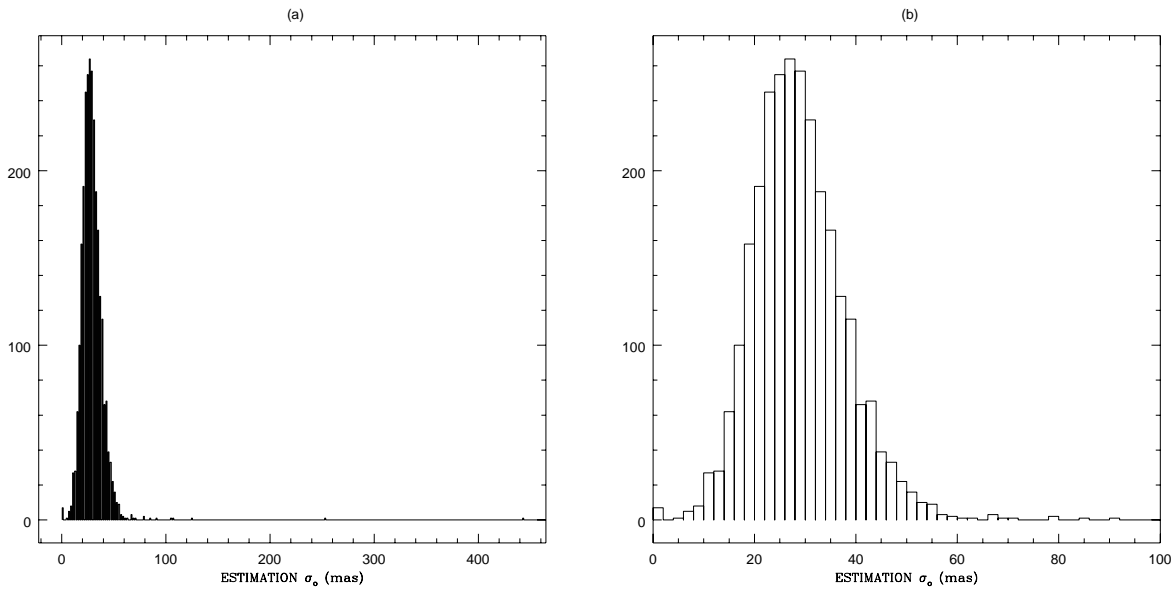


FIG. 4.17 - Test sur la pente. Erreurs par unité de poids.

*Légende :*

*Num* : numéro de la petite planète ; *Nrgc* : Nombre de RGC contenant des observations de la planète ; *NT4* : nombre de *T4* retenus ; *Ntr* : nombre de transits retenus.

*T4* : Nombre de *T4* filtrés tels que  $\sigma(T4) \geq 150$  mas ; *Obs* : Total de *T4* filtrés ; *STP* : Nombre de transits filtrés - test sur la pente ; *STM* : Nombre de transits filtrés - test sur la magnitude ; *STS* : Nombre de transits filtrés tels que  $\sigma(\Delta m) \geq 0.3$  ; *ShT* : Nombre total de transits filtrés.

Num	Nrgc	NT4	Ntr	T4	Obs	STP	STM	STS	ShT
1	19	592	67	1	19	1	1	0	2
2	16	517	62	1	10	0	2	0	2
3	21	496	63	0	16	0	2	0	2
4	16	473	51	38	63	0	3	0	3
5	24	619	80	4	36	1	4	0	5
6	21	750	93	1	9	0	1	0	1
7	21	526	66	0	48	0	6	0	6
8	17	450	57	0	24	0	3	0	3
9	15	367	47	0	8	1	0	0	1
10	17	369	47	4	4	0	0	0	0
11	23	521	67	4	47	1	6	0	7
12	8	188	24	0	0	0	0	0	0
13	11	283	36	1	1	0	0	0	0
14	14	372	47	1	1	0	0	0	0
15	21	673	87	1	10	1	1	0	2
16	16	355	46	5	49	0	6	0	6
18	25	798	103	5	60	0	7	0	7
19	10	230	31	1	1	0	0	0	0
20	17	483	61	0	16	0	2	1	2
22	20	488	64	3	4	1	0	0	1
23	17	494	66	8	19	2	0	0	2
27	10	277	36	3	17	0	2	0	2
28	10	276	36	4	7	0	1	1	1
29	19	494	63	0	16	0	2	0	2
30	15	375	48	1	8	0	1	1	1
31	5	118	15	0	0	0	0	0	0
37	9	259	33	0	7	0	1	0	1
39	28	801	103	3	55	0	7	0	7
40	26	799	105	7	23	1	1	1	2
42	15	400	50	0	16	0	2	0	2
44	14	421	53	2	26	0	3	0	3
51	6	111	15	0	0	0	0	0	0
63	5	103	13	0	0	0	0	0	0
88	10	269	36	2	9	0	1	0	1
115	9	246	32	4	12	0	1	1	1
129	11	328	43	0	0	0	0	0	0
192	8	249	32	0	0	0	0	0	0
196	5	117	16	1	9	1	0	0	1
216	6	153	20	2	17	0	2	0	2
230	13	272	35	1	1	0	0	0	0
324	18	522	66	2	66	1	7	7	8
349	24	715	96	3	55	2	6	0	8
354	25	757	97	18	34	0	2	0	2
451	8	223	29	0	0	0	0	0	0
471	25	845	108	4	11	1	0	0	1
511	18	495	65	4	20	0	2	0	2
532	13	295	38	0	17	0	3	0	3
704	19	557	72	2	18	1	1	0	2

	NT4	Ntr	T4	Obs	STP	STM	STS	ShT
Total :	20521	2620	141	889	15	89	12	104
Pourcentage:			0.7	4.3	0.6	3.4	0.5	4.0

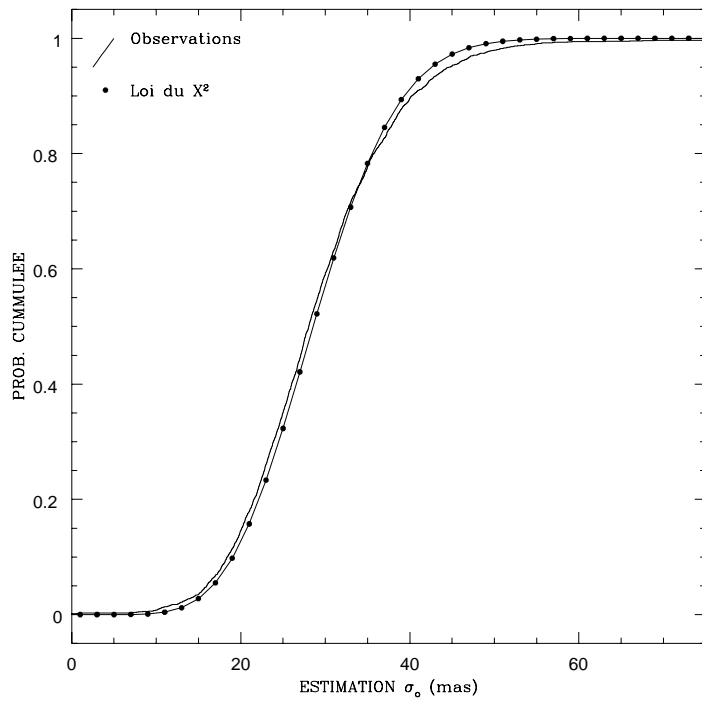


FIG. 4.18 - Test sur la pente. Probabilité cumulée.

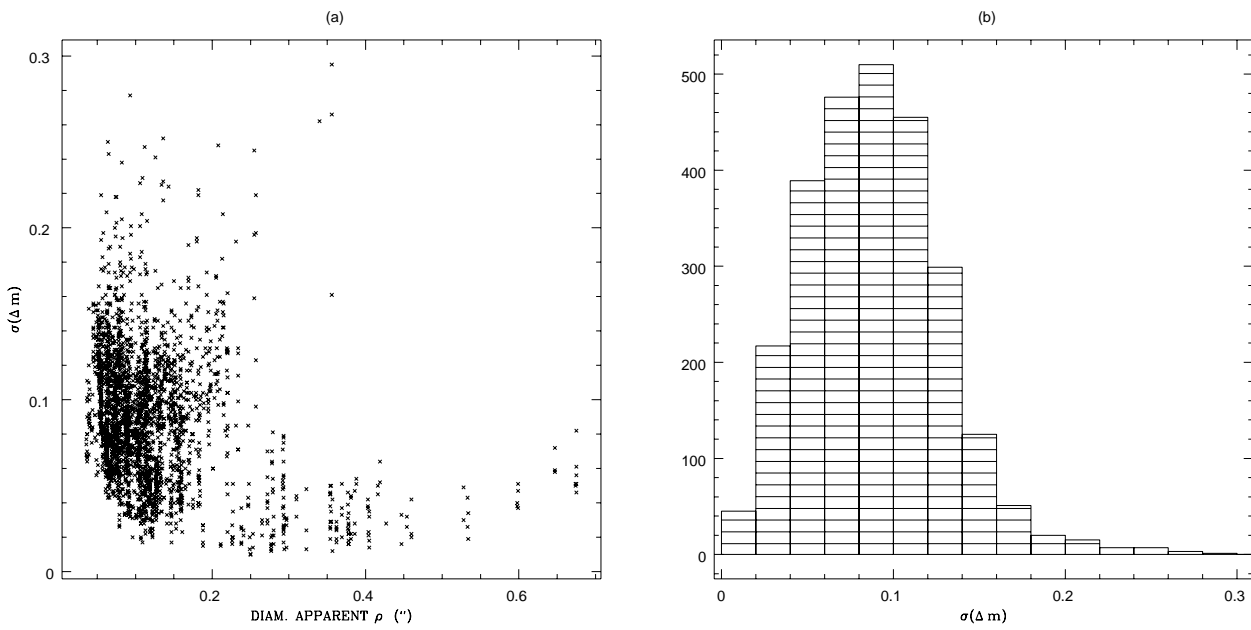


FIG. 4.19 - Erreur quadratique moyenne sur l'écart en magnitude.



PLANETE 15-EUNOMIA

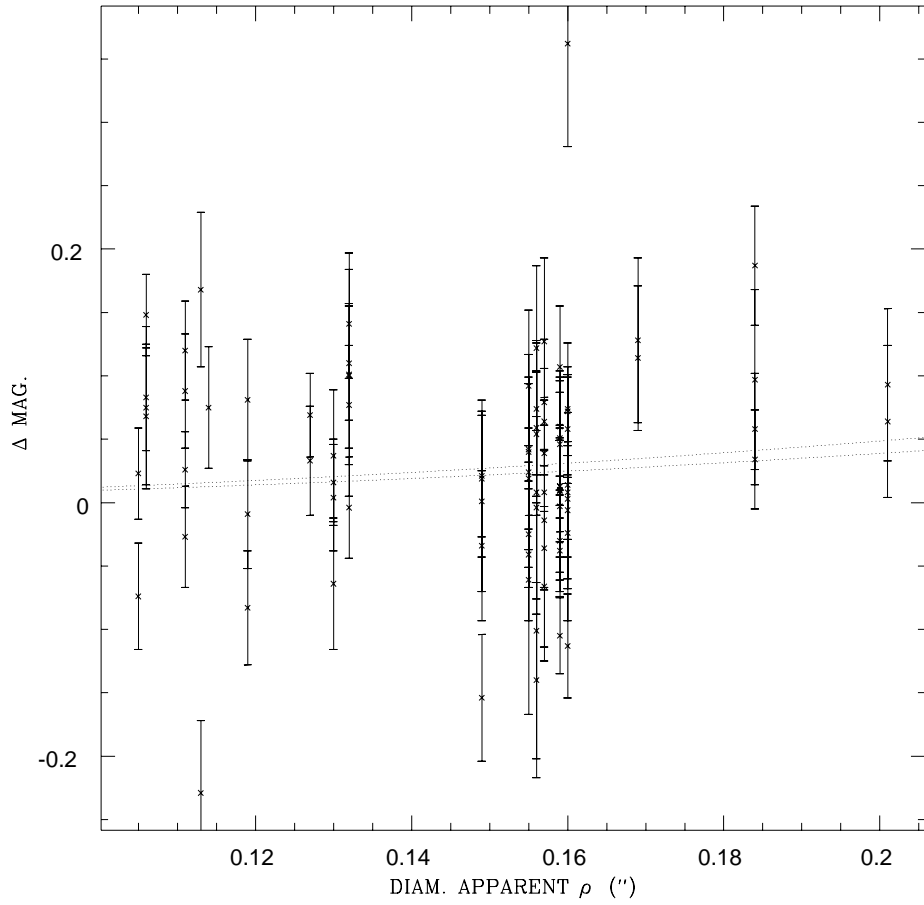


FIG. 4.20 - Ecart sur les estimations de magnitude.

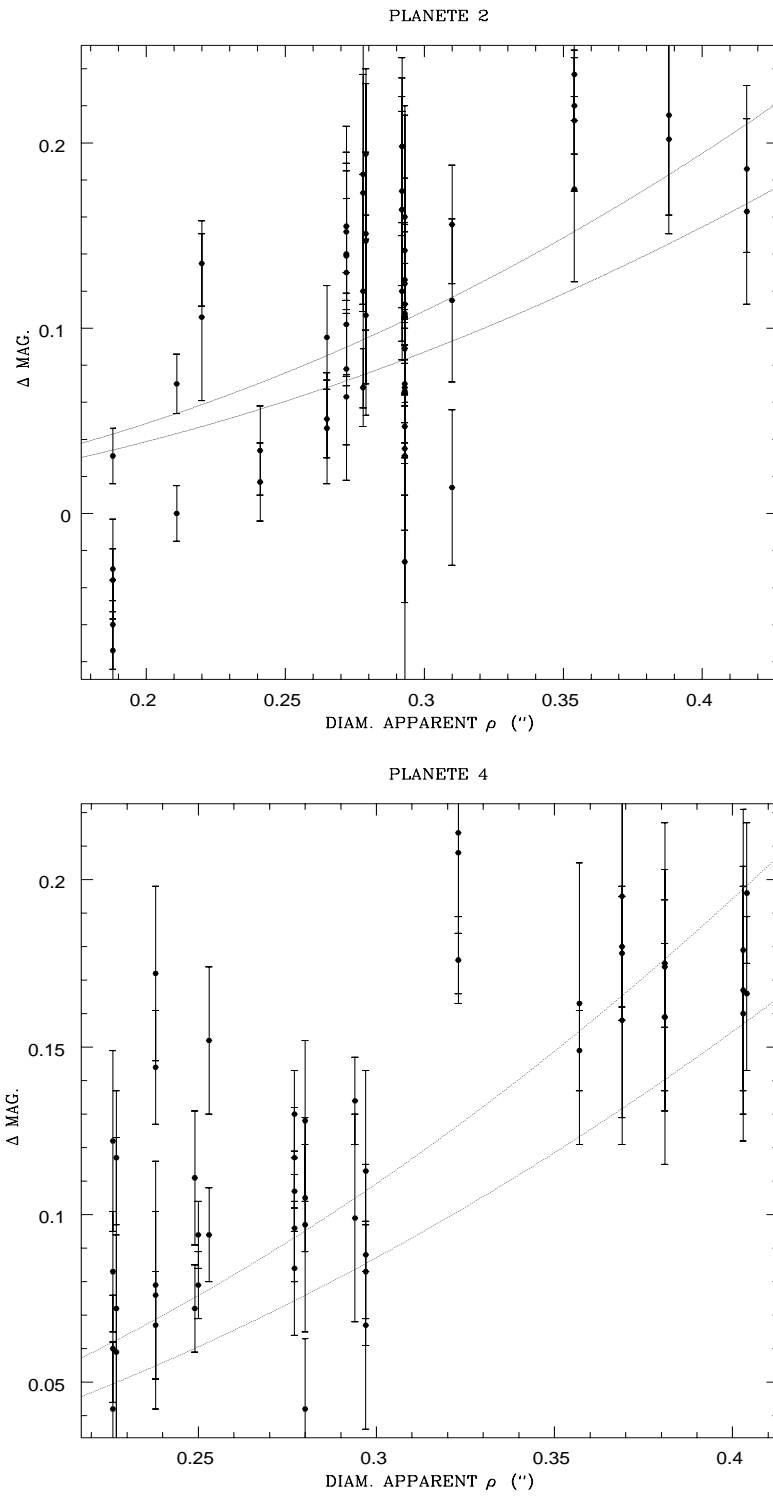


FIG. 4.21 - 2-Pallas et 4-Vesta. Ecart sur les magnitudes.

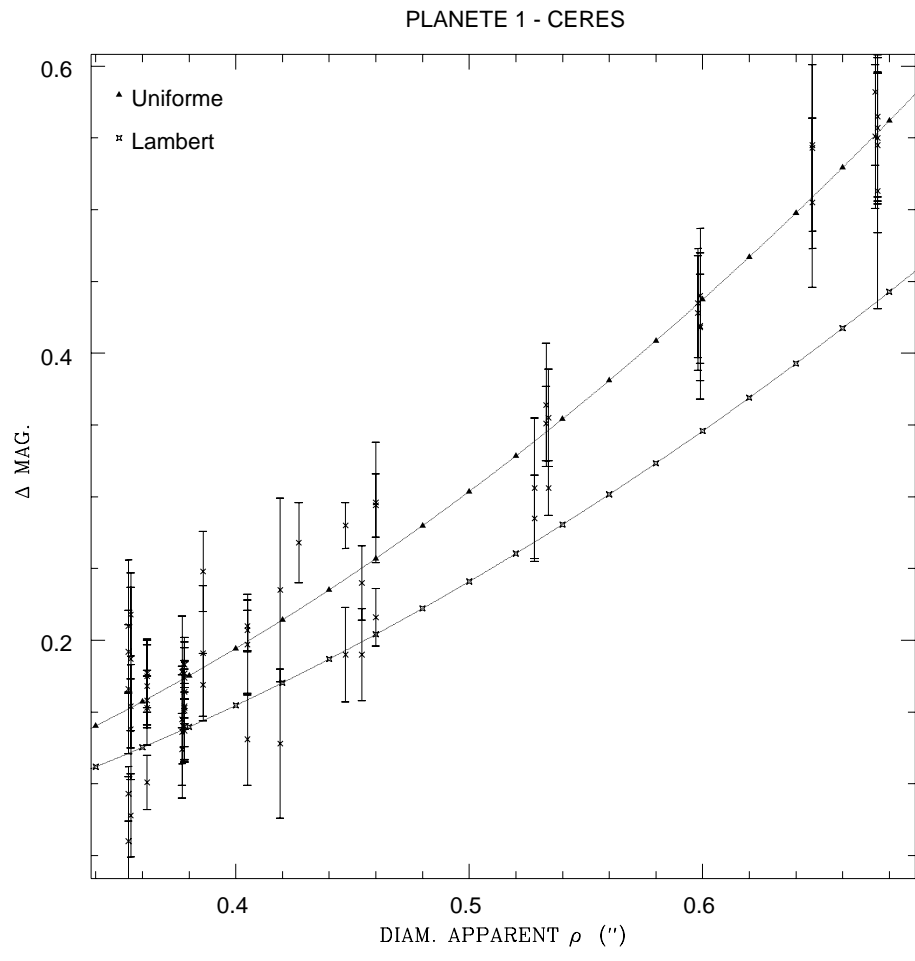


FIG. 4.22 - 1-Ceres. Ecart sur les magnitudes.

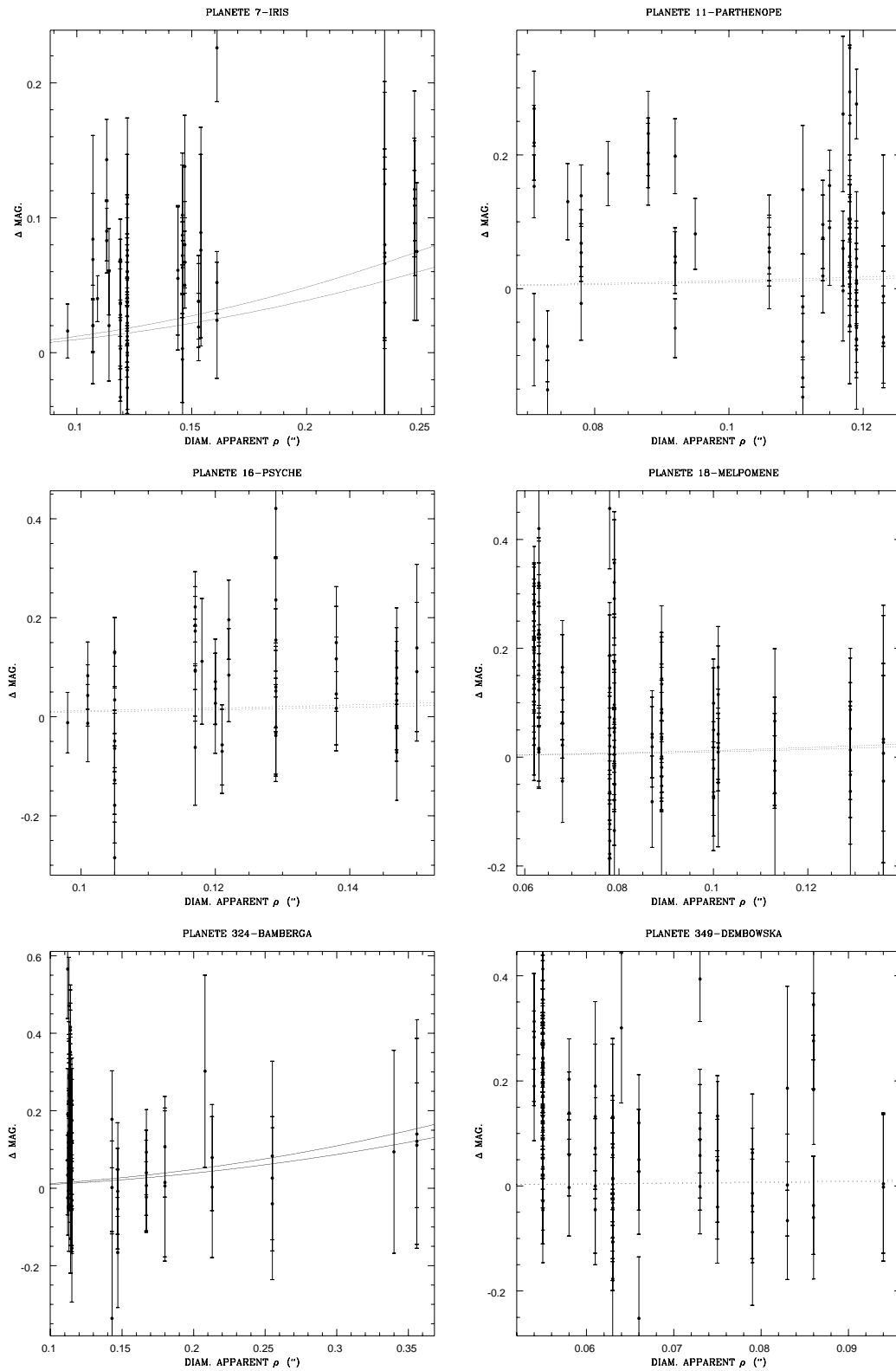


FIG. 4.23 - Différences sur les estimations de magnitudes

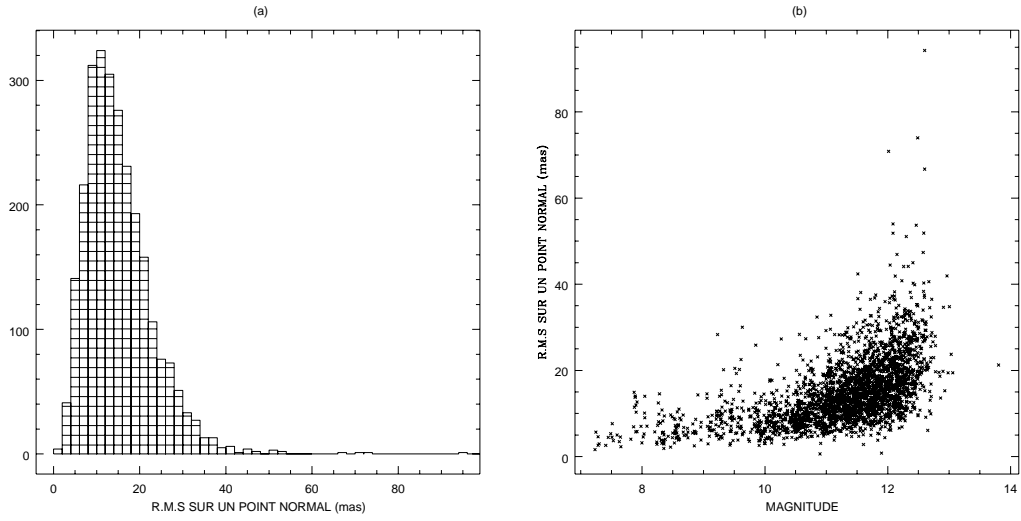


FIG. 4.24 - Précisions relatives aux positions astrométriques.  
Après réduction sur un passage, les précisions des points normaux sont de l'ordre de 10 mas  $\sim$  15 mas.

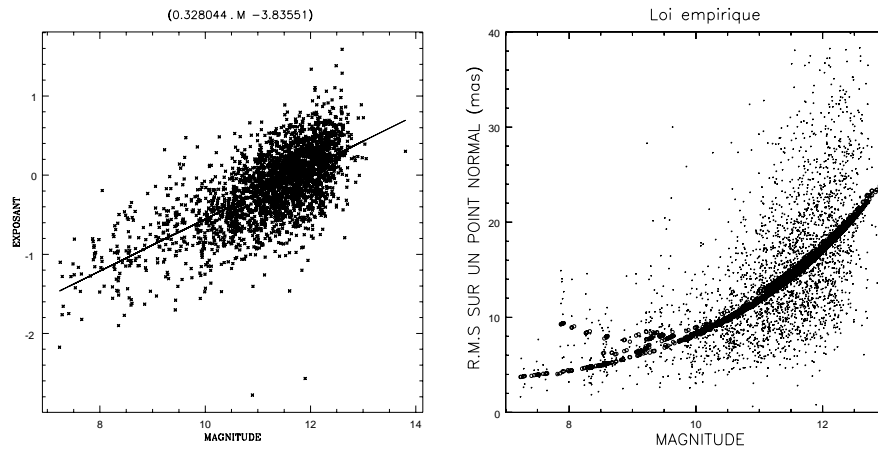


FIG. 4.25 - Précision empirique sur les positions normales.  
Les cercles représentent cette précision en fonction de la magnitude et du diamètre apparent. L'écart sensible sur les points théoriques, pour des magnitudes inférieures à dix, est dû aux diamètres apparents des astéroïdes.

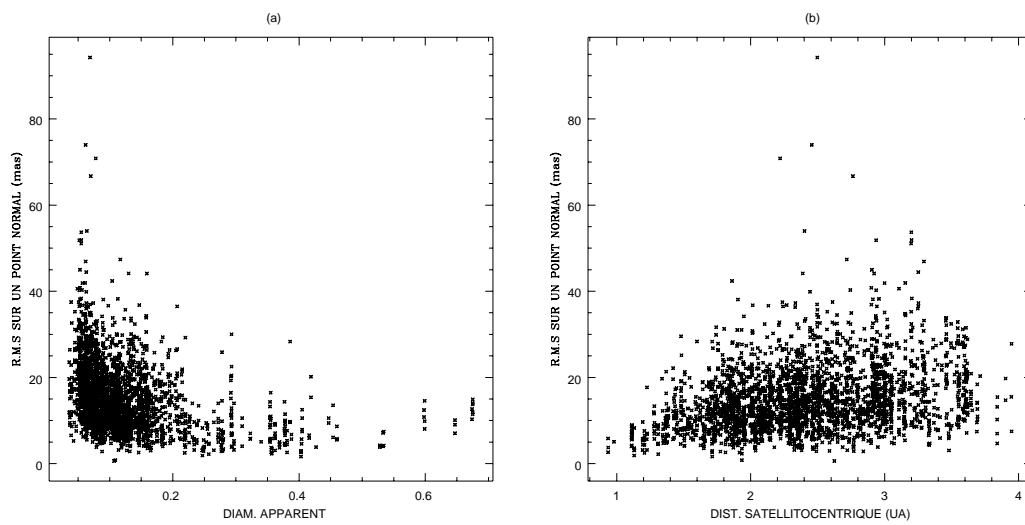


FIG. 4.26 - Précisions sur un transit.

## Chapitre 5

# LIEN AU REPÈRE DE RÉFÉRENCE DYNAMIQUE

La sphère des étoiles Hipparcos est en rotation par rapport au repère dynamique défini par l'écliptique et l'équinoxe de la date, ce mouvement à différentes origines :

- rotation propre à la méthode d'observation, les origines des RGC ne sont pas déterminées explicitement ;
- rotation galactique des étoiles du catalogue Hipparcos ;
- précession en longitude.

Or une condition primordiale d'un système de référence est qu'il ne possède pas de rotation. Les observations se rapportant à des dates différentes, il faut connaître ou déterminer la précession, en particulier la précession en longitude, c'est à dire le mouvement de l'équinoxe sur son écliptique. La précession planétaire provient des perturbations dues au système des masses et positions des planètes perturbatrices, elle a donc un effet séculaire sur la position de l'équinoxe de la date. La sphère Hipparcos représente un système homogène, néanmoins elle ne matérialise qu'indirectement un système de référence. Cette sphère, puisque qu'elle possède une rotation arbitraire, est reliée au système cinématique d'objets extra-galactiques [KLR89], [K<sup>+</sup>92] et au système semi-dynamique du FK5 [Rös83], [F<sup>+</sup>94b]. Les orientations de ces deux repères de référence sont totalement indépendantes ; elles sont par contre, pour des raisons pratiques proches l'une de l'autre. En revanche, ces deux repères ne doivent pas montrer de différence significative de la rotation au cours du temps. Le système du FK5 est un système semi-dynamique ; il englobe, en plus du modèle dynamique du mouvement du soleil et des planètes, des considérations sur les mouvements propres des étoiles et la rotation galactique [Fri82], [Fri67], [Fri85]. Le lien entre la sphère Hipparcos et le FK5 est obtenu à partir de la comparaison des positions des étoiles du catalogue FK5 (intégrées au programme d'observation de la mission) dans chacun des référentiels. Nous nous proposons ici de calculer la rotation de la sphère d'étoiles Hipparcos par rapport à un système inertiel, en tenant compte uniquement des positions des astéroïdes données dans ce système (plus exactement des positions des astéroïdes, obtenues par le satellite, par rapport aux étoiles Hipparcos). Les positions des astéroïdes sont liées à l'orbite de la Terre. La rotation séculaire

entre le modèle DE 200 et DE 210 (qui contient une nouvelle estimation des perturbations des astéroïdes sur l'orbite de la Terre) est d'environ  $0,5 \text{ mas/an}$ , alors que la précision de la détermination du moyen mouvement de la Terre par rapport à un système inertiel est peu différente de  $3 \text{ mas/siècle}$  [WS89]. Les éphémérides de la Terre sont données dans le système DE 200 (soit par calcul semi-analytique [CFM84], soit par intégration numérique). La précision de ces éphémérides dépend désormais des observations sur lesquelles elles sont ajustées (qualité, quantité, variété et étendue dans le temps); les éléments sont donnés avec une précision de l'ordre de quelques *mas* [Sta90], [WS89].

Nous devons donc déterminer le mouvement sidéral des petites planètes de la mission et celui de la Terre. En regard de la durée des observations, nous n'introduisons pas dans le modèle de termes linéairement dépendant du temps autres que celui de la rotation de la sphère Hipparcos (rotation sur les mouvements propres). La comparaison des différents liens de la sphère Hipparcos peut par contre apporter des renseignements sur la rotation galactique et la constante de précession. Le lien au FK5 met en évidence les erreurs zonales de ce catalogue et fixe l'écliptique et l'équinoxe J 2000 du FK5 sur la sphère Hipparcos. La comparaison des résultats obtenus par cette dernière méthode et une méthode dynamique est donc particulièrement intéressante. Toutefois, le mouvement des objets du système solaire est confiné dans une certaine bande centrée sur le plan de l'écliptique; ainsi le lien de la sphère Hipparcos au référentiel dynamique est limité par la position des points de références des éphémérides. De par l'inhomogénéité du FK5, les résultats obtenus pour le rattachement varient en fonction des zones retenues (hémisphère nord, hémisphère sud, bande zodiacale, etc...); toute comparaison nécessitera par conséquent une attention particulière. Par ailleurs, Folkner et al. ont déterminés le lien du système des sources extragalactiques au repère défini par le système DE 200, à partir d'une étude conjointe d'observations VLBI et LLR [F<sup>+</sup>94a].

Ce travail s'apparente aux déterminations d'équinoxe et d'équateur des catalogues FK3, FK4, FK5, Yale-Zone, GC de Boss... Ces déterminations consistent en un calcul de correction d'ascension droite et de déclinaison communes à toutes les observations, en plus des corrections d'éphémérides des planètes. Les corrections de déclinaisons ne sont pas liées à un terme de rotation, mais correspondent à une erreur constante sur les déclinaisons des objets observés au voisinage de l'équateur. Les corrections d'équinoxe et d'obliquité correspondent à la transformation entre le repère dynamique et le repère lié aux étoiles (voir section 1.3). Comme l'intervalle de temps sur lequel se répartissent les observations Hipparcos est relativement court, nous négligeons dans la suite les effets des perturbations mutuelles des petites planètes; et nous admettons aussi que les masses des planètes sont connues avec toute la précision nécessaire (effets séculaires). Le lien de la sphère Hipparcos au système dynamique (des petites planètes dans le système DE 200) se fait alors en calculant la rotation et le taux de rotation de cette sphère et indirectement en améliorant les orbites des petites planètes et de la Terre.



## 5.1 Rappels sur la méthode des moindres carrés

### 5.1.1 Probabilités

Rappelons les définitions de quelques lois utilisées dans ce chapitre :

#### Loi normale :

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ ,  $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  si, pour tout  $x$  réel, la probabilité que  $X$  soit inférieur ou égal à  $x$  est donnée par :

$$Pr(X \leq x) = P\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Pour  $x \geq 0$ , on a alors :

$$Pr\left(\frac{|X - \mu|}{\sigma} \leq x\right) = 2P(x) - 1 \text{ et } Q(x) = 1 - P(x)$$

Rappelons aussi la propriété suivante : une variable aléatoire, combinaison linéaire de  $n$  variables indépendantes et de même loi, est asymptotiquement normale (théorème de la limite centrale).

#### Loi du $\chi^2$ :

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_\nu$  des variables aléatoires normales, centrées réduites et indépendantes,  $X_i \in \mathcal{N}(0, 1)$ . Alors la variable  $X^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$  suit la loi du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté. La probabilité que  $X^2 \leq \chi^2$  est donnée par :

$$P(\chi^2 | \nu) = \left[2^{(\nu/2)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1} \int_0^{\chi^2} \exp(-t/2) t^{(\frac{\nu}{2}-1)} dt \quad (0 \leq \chi^2 \leq \infty)$$

Lorsque  $\nu$  est grand cette loi est asymptotiquement normale et

$$P(\chi^2 | \nu) \sim P\left(\frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}\right) \quad \text{ou bien} \quad \chi^2 \rightarrow \mathcal{N}(\nu, \sqrt{2\nu})$$

#### Loi de Student :

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite,  $X \in \mathcal{N}(0, 1)$ , et  $\chi^2$  une variable aléatoire indépendante suivant une loi du  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté. Alors la variable  $S = X/\sqrt{\chi^2/\nu}$  suit une loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté. La probabilité que  $0 \leq |S| \leq t$  est donnée par :  $A(t|\nu) = 1 - I_x\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . On a  $E(X) = 0$ ,  $var(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$  et lorsque  $\nu$  est grand :

$$A(t|\nu) \sim 2P(x) - 1 \quad ; \quad x = \frac{t(1 - 1/(4\nu))}{\sqrt{1 + t^2/(2\nu)}}$$

#### Loi F de Fisher :

Si  $X_1^2$  et  $X_2^2$  sont des variables indépendantes suivant des lois du  $\chi^2$  à  $\nu_1$  et  $\nu_2$  degrés

de libertés. Alors la variable  $F = \frac{X_1^2/\nu_1}{X_2^2/\nu_2}$  suit la loi F de rapport de variances à  $\nu_1$  et  $\nu_2$  degrés de liberté.

On a  $E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ ,  $var(X) = \frac{2\nu_2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu - 2)^2(\nu_2 - 4)}$  pour  $\nu > 4$ .

### 5.1.2 Estimateur des moindres carrés

Soit  $c \in \mathcal{M}(n, 1)$  le vecteur des mesures,  $x \in \mathcal{M}(p, 1)$ ,  $p \leq n$  le vecteur des paramètres inconnus, et le système linéaire des équations de conditions :

$$Ax = c \quad ; \quad A \in \mathcal{M}(n, p) \quad (5.1)$$

L'estimateur  $\bar{x}$  des moindres carrés minimise la norme des résidus  $v = c - Ax$  ; il est parmi tous les estimateurs linéaires sans biais, celui de précision maximale.

$$\bar{x} = \{x \text{ tel que } |c - Ax|_2 \text{ minimal} \}$$

On obtient, en différentiant la norme des résidus ( $dv^2 = 0 \Leftrightarrow dv^t v = 0$ ), le système à résoudre :

$$A^t A \bar{x} = A^t c \quad (5.2)$$

La variance d'un vecteur  $\mathbf{z}$  quelconque est :  $var(\mathbf{z}) = E((\mathbf{z} - E(\mathbf{z}))(\mathbf{z} - E(\mathbf{z}))^t)$   
Soit la relation matricielle  $\mathbf{z} = M\mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$  est un vecteur composé de variables aléatoires, on a la relation :  $var(\mathbf{z}) = M var(\mathbf{u}) M^t$ .

La matrice  $A^t A$  est symétrique et positive. Si elle est inversible, elle est liée à la variance du vecteur  $\bar{x}$  par :

$$var(\bar{x}) = var\left((A^t A)^{-1} A^t c\right) = (A^t A)^{-1} A^t var(c) A (A^t A)^{-1}$$

Si les mesures sont indépendantes et de même variance  $\sigma_o^2$ , la matrice  $var(c)$  est diagonale, et on a les relations :

$$\begin{cases} var(c) &= \sigma_o^2 Id \\ var(\bar{x}) &= \sigma_o^2 (A^t A)^{-1} \end{cases}$$

La matrice de corrélation est déduite de la matrice de variance du vecteur  $\bar{x}$  par

$$cor(\bar{x}) = (r_{ij}) \quad \text{où} \quad r_{ij} = \frac{var(\bar{x})_{ij}}{\sqrt{var(\bar{x})_{ii}} \sqrt{var(\bar{x})_{jj}}}$$

Dans le cas où la matrice  $A^t A$  n'est pas de rang maximal, il existe une infinité de solutions au système des équations (5.2). Soit  $e_i$  une base du noyau de la matrice normale, et  $x_o$  une solution de l'équation (5.2) tout vecteur  $\bar{x} = x_o + \sum_i \alpha_i e_i$  ;  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  est encore solution. La solution des moindres carrés est alors la solution de norme minimale [Elf80] :

$$\bar{x} = \{x \text{ tel que } |c - Ax|_2 \text{ minimal et } |x|_2 \text{ minimal} \}$$

Soit maintenant le système à "deux" inconnues écrit sous forme de matrices blocs

$$Ax + By = c$$

La solution  $(\bar{x}, \bar{y})$  minimisant la norme  $|c - (Ax + By)|$  s'obtient pour

$$(v^2 = (c - (Ax + By))^2 \text{ minimal}) \Leftrightarrow (dv^t v = 0)$$

le système des équations normales correspond aux minima des vecteurs  $((c - Ax) - By)$  et  $((c - By) - Ax)$  :

$$\begin{cases} A^t(Ax + By - c) = 0 \\ B^t(Ax + By - c) = 0 \end{cases}$$

La solution des moindres carrés peut alors s'obtenir à partir du système suivant :

$$\begin{cases} B^t B y = B^t (c - Ax) \\ A^t (I - B(B^t B)^{-1} B^t) Ax = A^t (I - B(B^t B)^{-1} B^t) c \end{cases} \quad (5.3)$$

Le facteur de conditionnement d'une matrice  $A$  est par définition le scalaire  $c_o \geq 1$

$$c_o = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Pour une matrice réelle symétrique définie positive, de valeurs propres données dans l'ordre croissant  $(\lambda_{min}, \dots, \lambda_{max})$ , on a  $c_o = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ . Si la matrice  $A$  est orthogonale, son facteur de conditionnement est alors  $c_o = 1$ . Ce facteur, bien plus que le déterminant de la matrice, permet de voir si, d'un point de vue numérique, la matrice est inversible. Soit le système linéaire :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

on a l'inégalité :

$$\frac{|d\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leq c_o \frac{|d\mathbf{y}|}{|\mathbf{y}|}$$

Un nombre de conditionnement important assure qu'une petite variation  $d\mathbf{y}$  sur le vecteur des mesures entraîne une grande variation  $d\mathbf{x}$  sur le vecteur des inconnues  $\mathbf{x}$ .

#### Remarques :

- L'hypothèse faite sur les variances des mesures n'est pas contraignante. Si les mesures sont non corrélées mais de variance différentes :  $var(c_k) = \sigma_k^2$ , on introduit un scalaire arbitraire  $\sigma_o^2$  et la matrice diagonale des poids

$$p = (p_{kk}) = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \sigma_o^2/\sigma_k^2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Les équations de conditions (5.1) s'écrivent

$$\sqrt{p}Ax = \sqrt{p}c$$

La solution cherchée vérifie alors

$$A^t p A \bar{x} = A^t p c$$

La matrice  $A^t p A$  s'appelle matrice normale, et nous avons par exemple la relation sur la variance du vecteur solution des moindres carrés :

$$var(\bar{x}) = \sigma_o^2 (A^t p A)^{-1}$$

On en déduit l'ensemble des relations données plus haut avec les équations normalisées.

– On peut faire un test sur la construction de la matrice normale et l'inversion, avec  $p$  la matrice de pondération :

1. système  $Ax = c$ , il faut  $A^t p v = 0$  avec  $v = c - A\bar{x}$ ;
2. système  $Ax + By = c$ , il faut  $A^t p v = 0$  et  $B^t p v = 0$  avec  $v = c - (A\bar{x} + B\bar{y})$ .

### 5.1.3 Modèle stochastique

Nous rappelons dans ce qui va suivre des propriétés liées au modèle stochastique des erreurs sur le test du facteur de variance, et sur l'ellipsoïde de confiance de la solution. Nous focaliserons notre attention sur les deux cas où :

- l'estimateur correspond à un point normal pour un transit ;
- l'estimateur correspond à une solution générale déduite de ces points normaux.

### Réduction sur un passage

Nous supposons que les erreurs de mesure  $e_k$  sur les abscisses pour chacun des T4 sont non corrélées et qu'elles suivent une loi normale centrée

$$e \in \mathcal{N}(0, \sigma) \quad ; \quad \sigma \text{ est une matrice diagonale}$$

Au cours d'un passage, les abscisses sur le RGC varient linéairement au cours du temps et nous supposons que la pente est connue (égale à la pente théorique). Si l'on détermine une abscisse moyenne sur un passage par la méthode L2, qui se réduit à une moyenne arithmétique dans ce cas, nous obtenons l'estimateur noté  $\bar{x}$ . Les équations reliant les vraies valeurs  $\dot{x}$  et  $\dot{l}$  sont :

$$A.\dot{x} = \dot{l} = l - e$$

Soient les équations de conditions pondérées

$$\sqrt{p}.A.x = \sqrt{p}.l \quad ; \quad \sqrt{p} = \sigma_o \sigma^{-1}$$

L'estimateur, combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes,  $\bar{x}$  tel que  $(A^t p A) \bar{x} = A^t p l$ , suit une loi normale

$$\bar{x} \in \mathcal{N}(\dot{x}, \sigma_{\bar{x}}) \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \text{var}(\bar{x}^2) = \sigma_o^2 (A^t p A)^{-1} \quad (5.4)$$

Un estimateur sans biais du facteur de variance  $\sigma_o^2$  est donné par :

$$\tilde{\sigma}_o^2 = \frac{v^t p v}{n - r} \quad \text{avec} \quad v = \bar{l} - l = A\bar{x} - l$$

De plus la variable aléatoire  $X^2 = (n - r) \tilde{\sigma}_o^2 / \sigma_o^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $(n - r)$  degrés de liberté.

Les équations et propriétés écrites jusqu'ici sont générales, dans le cas d'une réduction sur un passage nous avons :  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  ; en posant

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2 = \tilde{\sigma}_o^2 (A^t p A)^{-1}$$

nous pouvons écrire que la variable scalaire  $\frac{\bar{x} - \dot{x}}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}}$  suit une loi de Student à  $(n - r)$  degrés de liberté.

Ainsi, puisque la redondance  $(n - r)$  est faible, la substitution de  $\sigma_{\bar{x}}^2$  par  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2$  dans l'équation (5.4) n'est pas justifiée :  $\bar{x} - \dot{x} \notin \mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_{\bar{x}})$ . On peut toutefois donner un ellipsoïde de confiance en calculant le scalaire  $k_\alpha$  tel que :

$$Pr(|x - \bar{x}| < k_\alpha \tilde{\sigma}_{\bar{x}}) = \alpha$$

### Analyse sur l'ensemble des passages

Les erreurs de mesure des abscisses compensées (point normal sur un transit) sont, suite aux hypothèses faites, des erreurs centrées possédant variance<sup>1</sup>. Nous allons voir maintenant, en gardant les notations précédentes, les différences apportées par le changement de notre modèle stochastique, à savoir si les erreurs ne sont plus normales. Nous écrivons de la même manière les équations de conditions :

$$\sqrt{p}.A.x = \sqrt{p}.x_{tr}$$

Ici l'observé est l'abscisse compensée  $x_{tr}$  obtenue sur un transit, on peut donc écrire que  $(\bar{x}_{tr} - \dot{x}) / \tilde{\sigma}_{\bar{x}_{tr}}$  suit une loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté (avec  $\nu = 7$  en général).

Soit l'estimateur des moindres carrés  $\bar{x} = (A^t p A)^{-1} . A^t p x_{tr}$ , et la propriété vérifiée de manière asymptotique (puisque  $\bar{x}$  est combinaison linéaire de variables indépendantes de même loi) :

$$\bar{x} \in \mathcal{N}(\dot{x}, \sigma_{\bar{x}}) \quad ; \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \text{var}(\bar{x}) = \sigma_o^2 (A^t p A)^{-1}$$

Partant du résidu  $v$  que nous écrivons en fonction de l'erreur  $e$  [Hot90] :

$$\sqrt{p} v = (\sqrt{p} A (A^t p A)^{-1} A^t \sqrt{p} - I) . \sqrt{p} e \equiv M . \sqrt{p} e$$

---

<sup>1</sup>Nous avons déterminé le point normal sur un transit par la méthode des moindres carrés. Si l'on minimise la somme des valeurs absolues des résidus sur un transit, les erreurs sont encore centrées et de variance finie.

Nous pouvons calculer un estimateur  $\tilde{\sigma}_o^2$  du facteur de variance. Comme la variance du vecteur  $\sqrt{p}e$  est  $\sigma_o^2.I$  (choix des poids), et que la matrice  $M$  est idempotente, la variance du vecteur aléatoire centré  $\sqrt{p}v$  est :

$$E\left((\sqrt{p}v)(\sqrt{p}v)^t\right) = \sigma_o^2 M$$

En prenant les traces des matrices on obtient :

$$Tr\left(E\left((\sqrt{p}v)(\sqrt{p}v)^t\right)\right) = E\left((\sqrt{p}v)^t(\sqrt{p}v)\right) = \sigma_o^2(n-r)$$

Et ensuite l'estimateur du facteur de variance :

$$\tilde{\sigma}_o^2 = \frac{v^t p v}{n-r}$$

Nous voulons maintenant comparer cette valeur à la valeur arbitraire  $\sigma_o^2$ , une différence significative peut provenir d'erreurs occasionnelles importantes, d'erreurs systématiques (erreur de modèle) ou d'un mauvais choix des poids. Soit la variable aléatoire

$$X^2 = (n-r)\tilde{\sigma}_o^2/\sigma_o^2$$

La matrice  $M$  idempotente, symétrique de rang  $(n-r)$ , peut être diagonalisée dans une base orthonormale :

$$M = U^t D U$$

où la matrice diagonale  $D$  possède  $(n-r)$  termes égaux à 1. En posant  $u = U \sqrt{p}e$ , on peut écrire :

$$X^2 = \frac{v^t p v}{\sigma_o^2} = u^t D u = \sum_{i=1}^{n-r} u_i^2$$

Si les erreurs pondérées sont des variables  $\in \mathcal{N}(0, \sigma_o)$ , alors  $X^2/\sigma_o^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $(n-r)$  degrés de libertés. Si  $\sqrt{p}e$  est une variable centrée de variance  $\sigma_o^2$ ,  $u$  suit asymptotiquement une loi normale tel que :

$$E(u) = E(e) = 0 \quad ; \quad var(u) = var(\sqrt{p}e) = \sigma_o^2.I$$

Dans notre cas nous avons sur chaque transit :

$$\frac{\sqrt{p}e}{\sigma_o} \in St_\nu \quad \text{et} \quad \left(E(u) = 0 \quad ; \quad Var(u) = \sigma_o^2\right)$$

Pour une solution ne comportant que les conditions initiales des planètes comme inconnues la redondance est  $n-r = n-6$ , où  $n$  est le nombre de transits ; celui-ci est variable selon les planètes (cf. table 4.5). Dans certains cas ( $n \leq 30 \sim 40$ ), l'approximation : ( $X^2/\sigma_o^2$  suit une loi du  $\chi^2$ ) n'est pas justifiée. Par ailleurs, nous avons supposé la variance des positions normales connue ; l'erreur quadratique moyenne sur un point normal est  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}_{tr}}$ , et la variable  $\frac{e}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}_{tr}}}$  suit une loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté. Prenons pour matrice des poids la matrice  $\sqrt{p} = (\sigma_o/\tilde{\sigma}_{\bar{x}_{tr}})$  ; comme pour

un terme diagonal  $var(e_k) > \tilde{\sigma}_{\bar{x}_k}^2$ , on a  $var(u_k) > \sigma_o^2$ . La variable  $X^2/\sigma_o^2$  ne suit pas une loi du  $\chi^2$ , et le facteur de variance estimé est supérieur à  $\sigma_o^2$ . Prenons alors comme estimateur de la variance de  $\bar{x}_{tr}$  la quantité :

$$\check{\sigma}_{\bar{x}_{tr}} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu - 2}} \tilde{\sigma}_{\bar{x}_{tr}}$$

Dans ce cas  $var(u) = \sigma_o^2 \cdot I$  mais  $X^2/\sigma_o^2$  ne suit une loi du  $\chi^2$  que de manière asymptotique.

Soit maintenant

$$X^2 = (\bar{x} - \dot{x})^t (\tilde{\sigma}_{\bar{x}})^{-2} (\bar{x} - \dot{x}) \quad , \quad \text{et} \quad \bar{y} = (\tilde{\sigma}_{\bar{x}})^{-1} (\bar{x} - \dot{x})$$

Lorsque la redondance  $(n - r)$  est élevée on a :  $\bar{x} \in \mathcal{N}(\dot{x}, \tilde{\sigma}_{\bar{x}})$  et  $\bar{y} \in \mathcal{N}(0, I)$ . De ce fait la variable  $X^2 = \sum_{k=1}^r y_k^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $r$  degrés de liberté et on peut donner l'ellipsoïde de confiance :

$$Pr\left((\bar{x} - \dot{x})^t (\tilde{\sigma}_{\bar{x}})^{-2} (\bar{x} - \dot{x}) < \chi_r^2(\alpha)\right) = 1 - \alpha$$

Lorsque la redondance est faible cette estimation est optimiste.

Le nombre de T4 par transit est pratiquement toujours égal à huit ; les solutions obtenues en considérant la position normale ou la position par T4 ne sont donc pas sensiblement différentes (la moyenne de l'ensemble correspond approximativement à la "moyenne des moyennes"), en revanche l'interprétation, à partir des seules données Hipparcos, des résidus ou de l'ellipsoïde confiance est plus délicate. Dans la suite nous considérerons les observations sur chaque T4.

## 5.2 Définition du problème

### 5.2.1 Équation fondamentale sur un RGC

Les positions calculées des astéroïdes correspondent au centre de masse et se réfèrent à un système inertiel fixe. Elles sont obtenues par intégration numérique du problème newtonien des deux corps, perturbé par les planètes principales (les positions de ces planètes perturbatrices sont données par les éphémérides DE 200). Les positions observées se rapportent à une moyenne de centres de gravité de la lumière modulée, et nous avons vu que l'on pouvait les confondre avec le photocentre de la planète (section 3.3.3). Ces dernières sont données dans un système homogène lié aux étoiles. L'écart entre la théorie dépend des éphémérides satellitocentriques de l'astéroïde, de la transformation entre le référentiel dynamique et le référentiel Hipparcos auquel sont reliés les observations, et enfin de la position du photocentre par rapport au centre de masse. Nous supposons, dans un premier temps, que la diffusion de la lumière sera modélisée de la même manière pour l'ensemble des planètes. Nous exprimons les différences, entre les positions apparentes calculées et observées sur un RGC, en fonction des corrections ou paramètres suivants :

- correction sur les éléments osculateurs des astéroïdes :  $d\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^6$ ,  $\{i = 1, \dots, 48\}$  ;
- correction sur les éphémérides de la Terre :  $d\mathbf{q}_o \in \mathbb{R}^6$  ;
- rotation de la sphère Hipparcos :  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_o + (t - t_o) \cdot \mathbf{W}_1 \in \mathbb{R}^6$  ;

– loi de diffusion de la lumière :  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  .

Soit  $N(\mathbf{r})$  l'application qui au vecteur  $\mathbf{r}$  non nul associe le vecteur unitaire dans la même direction et tel que  $\mathbf{r} \cdot N(\mathbf{r}) > 0$ . Définissons les vecteurs

- $\mathbf{u}$  : vecteur position satellitocentrique de la planète ;
- $\mathbf{u}_{\parallel} = N(\mathbf{u})$  : le vecteur unitaire correspondant ;
- $\mathbf{x}$  : vecteur position héliocentrique de la planète ;
- $\mathbf{X}$  : vecteur position héliocentrique de la Terre ;
- $\mathbf{s}$  : vecteur position géocentrique du satellite ;
- $\mathbf{s}_{\parallel} = N(\mathbf{s})$  : le vecteur unitaire correspondant ;
- $\mathbf{k}_{\parallel}$  : direction du décalage du photocentre.

On a les relations vectorielles :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} - \mathbf{s}$$

$$\mathbf{k}_{\parallel} = \mathbf{u}_{\parallel} \times \frac{\mathbf{u}_{\parallel} \times \mathbf{s}_{\parallel}}{|\mathbf{u}_{\parallel} \times \mathbf{s}_{\parallel}|}$$

On suppose que la position du satellite est exempte d'erreurs ; alors la variation de la position satellitocentrique de la planète s'écrit :

$$d\mathbf{u}_{eph} = d\mathbf{x} - d\mathbf{X}$$

Les corrections sur les positions de la Terre et des petites planètes sont exprimées uniquement en fonction de corrections sur les conditions initiales. Soit alors les éphémérides héliocentriques :

$$\mathbf{x} = f_x(\mathbf{q}_i, t, \dots) \quad ; \quad \mathbf{X} = f_X(\mathbf{q}_o, t, \dots)$$

avec les variations correspondantes

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= f_x(\mathbf{q}_i + d\mathbf{q}_i) - f_x(\mathbf{q}_i) \\ &= \frac{\partial f_x(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} d\mathbf{q}_i + \dots \\ d\mathbf{X} &= f_X(\mathbf{q}_o + d\mathbf{q}_o) - f_X(\mathbf{q}_o) \\ &= \frac{\partial f_X(\mathbf{q}_o)}{\partial \mathbf{q}_o} d\mathbf{q}_o + \dots \end{aligned}$$

Les écarts entre observation et théorie étant petits nous pouvons linéariser le problème. Ces vecteurs sont établis dans le repère dynamique. Les observés sont dans un repère lié à la sphère Hipparcos, la transformation de repère peut s'écrire comme une rotation infinitésimale :

$$\begin{aligned} d\mathbf{u}_{rot} &= \mathbf{u} \times \mathbf{W} \\ &= \mathbf{u} \times [\mathbf{W}_o + (t - t_o) \cdot \mathbf{W}_1] \end{aligned}$$



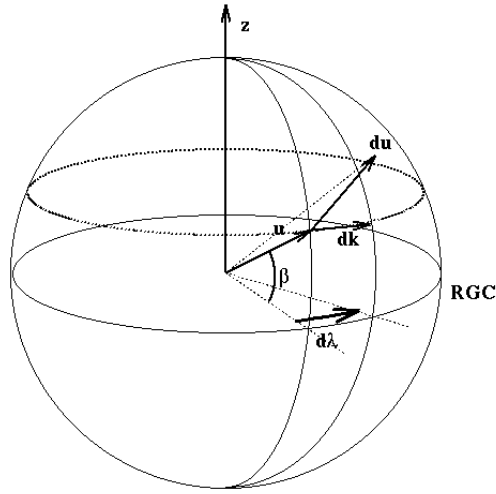


FIG. 5.1 - Equation de condition sur un RGC.  
*Correction angulaire  $d\lambda$  sur un grand cercle de pôle  $\mathbf{z}$  pour un déplacement infinitésimal quelconque  $d\mathbf{u}$ .*

Cette expression diffère de celle donnée par Söderhjelm et Lindegren [SL82] qui ne considèrent que la partie fonction du temps  $W_1$ . La rotation  $\mathbf{W}$  exprime la transformation de repère amenant le repère lié à la sphère Hipparcos sur celui du système inertiel :  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{Hip}^{iner}$ .

Le déplacement du photocentre est donné par une fonction  $C(i) = a + ib$  représentant la partie purement géométrique et la loi de diffusion, où  $i$  est l'angle de phase ; soit  $\rho$  le diamètre apparent :

$$d\mathbf{u}_{phot} = \rho \sin\left(\frac{i}{2}\right) C(i) \mathbf{k}_{\parallel} = \rho \sin\left(\frac{i}{2}\right) (1 - i) \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_{\parallel}, \quad \text{avec } \mathbf{p} = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

Soit maintenant  $P$  l'application qui associe au vecteur position satellitocentrique  $\mathbf{u}$ , de variation  $d\mathbf{u}$ , la correction angulaire  $d\lambda$  sur le RGC de pôle  $\mathbf{z}$ . Celle-ci peut s'écrire à partir de la projection sur un petit cercle parallèle au plan du RGC et contenant la planète (voir figure 5.1)

$$d\mathbf{k} = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{(\mathbf{z} \times \mathbf{u})} \cdot d\mathbf{u}$$

avec  $\cos \beta = \frac{|\mathbf{z} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$ , l'application est

$$P : \quad \mathbb{R}^6 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u}, d\mathbf{u}) \quad \longrightarrow \quad d\lambda = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{(\mathbf{z} \times \mathbf{u})^2} \cdot d\mathbf{u}$$

l'angle  $\beta$  entre la direction de la planète et le plan du RGC est de l'ordre du degré, on a l'approximation

$$d\lambda \simeq \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{\mathbf{u}^2} d\mathbf{u}$$

On obtient l'équation fondamentale sur un RGC reliant, pour chaque observation  $k$ , les  $(o - c)_k$  aux corrections vectorielles de la position satellitocentrique de la planète dans le référentiel dynamique. Les équations de conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned}(o - c)_k &= P(\mathbf{u}, d\mathbf{u}) \\ &= P(\mathbf{u}, \widetilde{M} d\mathbf{q}) + o(d\mathbf{q}^2) \\ &= M d\mathbf{q} + o(d\mathbf{q}^2)\end{aligned}$$

### Unités

Les  $(o - c)_k$  et le vecteur  $\mathbf{W}_o$  sont exprimés en *mas*, le vecteur  $\mathbf{W}_1$  en *mas/an*, et le vecteur  $\mathbf{p}$  est sans unité. Les variations des éléments osculateurs  $d\tilde{e}$  et  $d\tilde{a}$  (excentricité et demi-grand axe) seront données par des nombres sans unités  $de$  et  $da/a$

$$d\tilde{e} \equiv \frac{\pi}{180 \times 3,6 \cdot 10^6} de \approx 4,85 \cdot 10^{-9} de$$

$$d\tilde{a} \equiv a \frac{\pi}{180 \times 3,6 \cdot 10^6} da/a \approx 4,85 \cdot 10^{-9} a \cdot da/a$$

Les autres éléments sont des angles donnés en *mas*. Par abus de langage nous dirons que les vecteurs  $d\mathbf{q}_i$ ,  $d\mathbf{q}_o$  sont exprimés en *mas*. L'époque de référence, pour la rotation de la sphère et pour les éléments osculateurs, est  $t_o = 1991,496 = 2\,448\,439,0 \text{ JJ} = 1^{er} - juillet - 1991\ 12^h$ .

### 5.2.2 Écriture sous la forme de matrices blocs

Prenons  $d\mathbf{q} = (d\mathbf{q}_o \ \mathbf{W} \ \mathbf{p} \ d\mathbf{q}_i)$  La matrice aux dérivées partielles  $M$  peut s'écrire sous la forme de matrice blocs :

$$M = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ B_i) \equiv (A \ B_i)$$

avec

$$A_1 \in \mathcal{M}(1,6); A_2 \in \mathcal{M}(1,6); A_3 \in \mathcal{M}(1,2); B_i \in \mathcal{M}(1,6) \text{ et } A \in \mathcal{M}(1,14)$$

La matrice  $A$  correspond aux inconnues communes à toutes les planètes, et la matrice  $B_i$  correspond aux corrections de conditions initiales de la  $i^{ème}$  planète. On scindera de la même manière le vecteur des inconnues  $d\mathbf{q} \equiv (\mathbf{g}; d\mathbf{q}_i)$ . Pour des raisons de commodité d'écriture, nous conserverons la même notation pour l'ensemble des observations relatives à une planète  $i$  donnée, c'est-à-dire :

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c})_i = (A_i \ B_i) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ d\mathbf{q}_i \end{pmatrix}$$

Avec  $(\mathbf{o} - \mathbf{c})_i \in \mathcal{M}(n_i, 1)$  où  $n_i$  est le nombre d'observations pour la planète  $i$ .

En ordonnant les équations de conditions par planète ( $N$  étant le nombre de planètes), le système linéaire se présente sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{o} - \mathbf{c})_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i \\ \vdots \\ \vdots \\ (\mathbf{o} - \mathbf{c})_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ A_i & \vdots & B_i & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & 0 \\ A_N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{q}_o \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{p} \\ d\mathbf{q}_i \end{pmatrix}$$

La matrice des équations de conditions est formée d'une matrice colonne et d'une matrice bloc-diagonale. Nous cherchons la solution des moindres carrés de ce système, la matrice normale associé est :

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \sum_i A_i^t A_i & \cdots & A_i^t B_i & \cdots & \cdots & \cdots & A_N^t B_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & 0 \\ B_i^t A_i & \cdots & B_i^t B_i & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ B_N^t A_N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & B_N^t B_N \end{pmatrix}$$

Plutôt que de calculer l'inverse de cette matrice, la solution  $(\mathbf{g}; d\bar{\mathbf{q}}_i)$  peut s'obtenir à partir du système suivant :

$$\begin{cases} U_n = \sum_i A_i^t A_i - A_i^t B_i (B_i^t B_i)^{-1} B_i^t A_i \\ \bar{\mathbf{g}} = U_n^{-1} \sum_i [A_i^t - A_i^t B_i (B_i^t B_i)^{-1} B_i^t] (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i \\ d\bar{\mathbf{q}}_i = (B_i^t B_i)^{-1} B_i^t [(\mathbf{o} - \mathbf{c})_i - A_i \bar{\mathbf{g}}] \end{cases} \quad (5.5)$$

qui est déduit du système d'équations 5.3. On déduit le système des équations pondérées en introduisant la matrice des poids  $p_i$  relative à la  $i^{\text{ème}}$  planète. Cette matrice est diagonale car on peut supposer que les observations sont indépendantes ; elle est définie à une constante  $\sigma_o^2$  près (facteur de variance). Si  $\sigma_{k,i}$  est l'erreur associée à la  $k^{\text{ème}}$  observation de la  $i^{\text{ème}}$  planète, la matrice des poids s'écrit :  $p_i = (\sigma_o^2 / \sigma_{k,i}^2)$ . Soit

alors la matrice diagonale  $\sqrt{p_i} = (\sigma_o/\sigma_{k,i})$ , la solution générale s'obtient à partir du système (5.5) :

$$\begin{cases} U_n = \sum_i A_i^t p_i A_i - A_i^t p_i B_i (B_i^t p_i B_i)^{-1} B_i^t p_i A_i \\ \bar{\mathbf{g}} = U_n^{-1} \sum_i [A_i^t \sqrt{p_i} - A_i^t p_i B_i (B_i^t p_i B_i)^{-1} B_i^t \sqrt{p_i}] \sqrt{p_i} (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i \\ d\bar{\mathbf{q}}_i = (B_i^t p_i B_i)^{-1} B_i^t \sqrt{p_i} [\sqrt{p_i} (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i - \sqrt{p_i} A_i \bar{\mathbf{g}}] \end{cases} \quad (5.6)$$

On trouve aussi les variances des différents paramètres :  $var(\bar{\mathbf{g}})$ ,  $var(d\bar{\mathbf{q}}_i)$ ,  $covar(\bar{\mathbf{g}}, d\bar{\mathbf{q}}_i)$  avec  $var(\mathbf{o} - \mathbf{c}) = \sigma_o^2 Id$ . Afin de simplifier les écritures nous garderons, pour ces calculs, les mêmes notations pour les matrices des équations non pondérées et les matrices normalisées :

$$\begin{aligned} A_i &\equiv \sqrt{p_i} A_i \\ B_i &\equiv \sqrt{p_i} B_i \end{aligned}$$

Variance de  $\bar{\mathbf{g}}$  :

Ecrivons la matrice normale associée à l'ensemble des inconnues

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \left( \sum_{i=1}^N A_i^t A_i \right); \quad B = (\dots A_i^t B_i \dots)$$

$$\text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & B_i^t B_i & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$A$  est une matrice carrée symétrique,  $B$  est une matrice blocs ligne et  $D$  est une matrice blocs diagonale. Soit alors la matrice de variance-covariance du vecteur  $d\mathbf{q} = (\bar{\mathbf{g}}, d\bar{\mathbf{q}}_i)$  :

$$\mathcal{N}^{-1} = \begin{pmatrix} T & U \\ U^t & W \end{pmatrix}$$

Elle est l'inverse de la matrice normale, d'où les systèmes d'équations suivants

$$\begin{cases} AT + BV = Id \\ AU + BW = 0 \\ B^t T + DV = 0 \\ B^t U + DW = Id \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} TA + UB^t = Id \\ TB + UD = 0 \\ VA + WB^t = 0 \\ VB + WD = Id \end{cases}$$

Et si  $D$  est inversible, autrement dit si pour toute planète  $i$  :  $B_i^t B_i$  est inversible, on a

$$T = (A - BD^{-1}B^t)^{-1}$$

On remarque que  $T$  est l'inverse d'une matrice donnée à l'équation (5.6) :  $T = U_n^{-1}$ . Ainsi la variance des inconnues communes à toutes les planètes est :

$$\text{var}(\bar{\mathbf{g}}) = \sigma_o^2 U_n^{-1}$$

#### Covariance de $\bar{\mathbf{g}}$ et $d\bar{\mathbf{q}}_i$ :

De l'expression de la matrice normale globale on obtient aussi la relation  $U = -TBD^{-1}$ . On en déduit la covariance entre les paramètres globaux et les variations des conditions initiales de la planète  $i$  :

$$\text{covar}(\bar{\mathbf{g}}, d\bar{\mathbf{q}}_i) = -\sigma_o^2 U_n^{-1} A_i^t B_i (B_i^t B_i)^{-1}$$

#### Variance de $d\bar{\mathbf{q}}_i$ :

Introduisons l'inverse intrinsèque  $M^-$  d'une matrice  $M$  quelconque, celle-ci vérifie les quatre propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} MM^-M &= M \quad ; \quad M^-MM^- = M^- \quad ; \\ (MM^-)^t &= MM^- \quad ; \quad (M^-M)^t = M^-M \quad . \end{aligned}$$

Si  $M$  est une matrice carrée inversible on retrouve  $M^- = M^{-1}$ . Appelons  $B^-$  l'inverse intrinsèque de la matrice normalisée  $B_i$ . Lorsque  $(B_i^t B_i)$  est inversible, on a la relation suivante :

$$B^- = (B_i^t B_i)^{-1} B_i^t$$

Posons aussi  $U = Id - BB^-$  ; alors la solution des éléments relatifs à la planète  $i$  est :

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{q}}_i &= B^- ((\mathbf{o} - \mathbf{c})_i - A_i \bar{\mathbf{g}}) \\ &= B^- (Id - A_i (A_i^t U A_i)^{-1} A_i^t U) (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i \end{aligned}$$

En notant que la matrice  $BB^-$  est idempotente, et en utilisant les propriétés de l'inverse intrinsèque, on obtient les relations :

$$U^2 = U \quad ; \quad B^-U = 0 \quad ; \quad UB = 0 \quad ; \quad UB^{-t} = 0 \quad .$$

Et la variance du vecteur solution qui s'écrit :

$$\text{var}(d\bar{\mathbf{q}}_i) = \sigma_o^2 (B_i^t B_i)^{-1} + B^- A_i \text{var}(\bar{\mathbf{g}}) (B^- A_i)^t$$

La principale source d'erreur des différences *observés-calculés* provient des positions mal connues des petites planètes, c'est pourquoi nous nous attacherons dans un premier temps à ne considérer que les corrections relatives à leurs éphémérides.

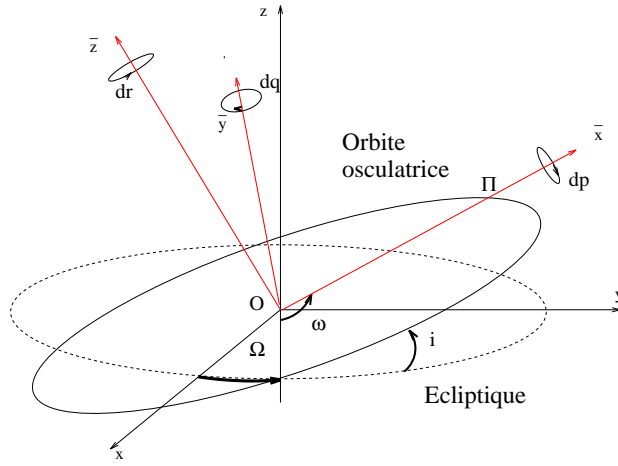


FIG. 5.2 - Repère lié à la trajectoire.

Le repère  $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est lié à l'orbite osculatrice.  $(O, \bar{x})$  est dirigé vers le périhélie  $\Pi$ ,  $(O, \bar{y})$  est dans le plan de la trajectoire et perpendiculaire à  $(O, \bar{x})$  dans le sens du mouvement,  $(O, \bar{z})$ , perpendiculaire à ce plan, complète le trièdre direct.

## 5.3 Éphémérides des astéroïdes

### 5.3.1 Matrices aux dérivées partielles

#### Formulation analytique

Soient les éphémérides héliocentriques calculées et corrigées du temps lumière  $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{q}, t - \tau)$ , dépendant des conditions initiales  $\mathbf{q}$  ( $\tau$  est le temps lumière); nous écrivons la variation de la position de la planète :

$$d\mathbf{x} = f(\mathbf{q} + d\mathbf{q}, t - \tau) - f(\mathbf{q}, t - \tau) = \frac{\partial f(\mathbf{q}, t - \tau)}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + o(d\mathbf{q}^2)$$

La matrice aux dérivées partielles  $\frac{\partial f(\mathbf{q}, t - \tau)}{\partial \mathbf{q}}$  peut être calculée lors de l'intégration numérique, on peut aussi prendre la forme analytique approchée en considérant l'orbite képlérienne au voisinage de l'instant d'observation [BC61]. Soit  $\mathbf{q}' = (a, e, i, l_o, \omega, \Omega)$  les éléments osculateurs à l'époque initiale  $t_o$  (demi-grand axe, excentricité, inclinaison, anomalie moyenne, argument du périhélie et argument du nœud ascendant), on en déduit le moyen mouvement  $n$  à l'aide de la troisième loi de Kepler :  $n^2 a^3 = G M_\odot$ ; l'époque  $t_o$  est prise au temps médian de la mission. Plaçons nous ensuite dans un repère direct lié à l'orbite osculatrice  $(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , tel que l'axe  $(O, \bar{x})$  soit dirigé vers le périhélie, et l'axe  $(O, \bar{z})$  soit porté par le moment cinétique de l'orbite  $\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$  à  $t_o$ . Les corrections des éléments  $(i, \omega, \Omega)$  peuvent être exprimées en fonction de rotations  $(dp, dq, dr)$  autour de ces trois axes (cf figure 5.2) :

$$\begin{pmatrix} di \\ \sin i d\Omega \\ d\omega + \cos i d\Omega \end{pmatrix} = R_z(\omega) \begin{pmatrix} dp \\ dq \\ dr \end{pmatrix} ; \quad (\sin i \neq 0) \quad (5.7)$$

où  $R_\xi(\alpha)$  désigne la rotation directe d'axe  $\xi$  et d'angle  $\alpha$ .  
Introduisons les termes

$$r = |\mathbf{x}| \quad ; \quad r\dot{r} = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$H = \frac{r - a(1 + e^2)}{ae(1 - e^2)} \quad ; \quad K = \frac{r\dot{r}}{a^2n^2e} \left( 1 + \frac{r}{a(1 - e^2)} \right)$$

et la rotation de passage entre le repère lié à l'écliptique et le repère lié à l'orbite, que nous écrirons sous la forme de matrice colonnes suivante :

$$R = R_z(\Omega) R_x(i) R_z(\omega) = \begin{pmatrix} R(\mathbf{e}_1) & R(\mathbf{e}_2) & R(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

On obtient la variation du vecteur position

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \frac{\dot{\mathbf{x}}}{n} & R(\mathbf{e}_1) \times \mathbf{x} & R(\mathbf{e}_2) \times \mathbf{x} & R(\mathbf{e}_3) \times \mathbf{x} & H\mathbf{x} + K\dot{\mathbf{x}} & \mathbf{x} - \frac{3}{2}(t - \tau - t_o)\dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} d\mathbf{q} \\ &\equiv B d\mathbf{q} \end{aligned} \tag{5.8}$$

avec  $d\mathbf{q} = (dl_o, dp, dq, dr, de, da/a)$ , et où la matrice aux dérivées partielles  $B$  de dimension  $(3 \times 6)$  est donné sous forme de matrice colonnes. Les éléments osculateurs sont donnés à la date de référence  $t_o$ ,  $t$  est la date d'observation et  $\tau$  le temps de lumière. Le facteur temporel  $(t - \tau - t_o)$  ne correspond pas à celui donné par Brouwer et Clemence [BC61], toutefois la différence sur les *observés-calculés* est négligeable.

### Intégration numérique

Soit maintenant

$$\tilde{b}_u = \frac{\partial f(\mathbf{q}, t)}{\partial u} = \frac{f(\mathbf{q} + du, t) - f(\mathbf{q} - du, t)}{2 du} + o(du^2) \tag{5.9}$$

la dérivée partielle approchée à l'ordre deux, par rapport à l'élément osculateur  $u$ , et déduite de l'intégration numérique. La matrice aux dérivées partielles correspondante est

$$\tilde{B} = \frac{\partial f(\mathbf{q}_o, t)}{\partial \mathbf{q}} + o(d\mathbf{q}^2)$$

Pour une même variation des conditions initiales nous obtenons la différence sur les variations en position :

$$d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} = (\tilde{B} - B) d\mathbf{q} + o(d\mathbf{q}^2)$$

Il faut s'assurer que la forme analytique donnée par l'équation (5.8) n'entraîne pas des erreurs trop importantes, c'est-à-dire que la différence  $d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}$  entraîne des erreurs de l'ordre de grandeur des termes négligés jusqu'à présent (le millième de seconde d'arc). Celle-ci dépend néanmoins de la correction sur les conditions initiales, nous avons la relation sur les normes :

$$|d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}| \leq \|\tilde{B} - B\| |d\mathbf{q}|$$

Nous pouvons calculer les matrices  $B$  et  $\tilde{B}$  pour différentes planètes et pour des dates différentes (en particulier éloignées de l'époque  $t_o$  des conditions initiales). Le choix de l'accroissement  $du$  dans l'équation (5.9) se fait en fonction de :

- l'amplitude  $du^2$  des termes négligés, afin d'introduire un minimum d'erreur interne,
- l'accroissement correspondant sur les éphémérides, pour éviter des problèmes numériques.

Prenons  $du = 10^{-6} \simeq 200 \text{ mas}$ , le tableau 5.1 donne un exemple des différences sur les matrices aux dérivées partielles pour deux dates (au début et proche du temps médian de la mission).

Les écarts les plus importants apparaissent pour le calcul de la dérivée partielle par rapport à l'excentricité, et nous pouvons écrire :

$$\text{Max}_u (|\tilde{b}_u - b_u|) \propto 0,01$$

Or les éléments osculateurs sont connus avec une précision de l'ordre de :

- $10^{-4}$  degrés pour les angles  $l_o, \omega, \Omega, i$ ,
- $10^{-6}$  pour l'excentricité et le demi-grand axe.

Nous pouvons ainsi donner la majoration :

$$|d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}|_\infty \leq 10^{-2} \cdot 10^{-4} \frac{\pi}{180} \leq 1,75 \cdot 10^{-8} UA$$

Soit  $\mathbf{u}$  le vecteur position satellitocentrique de la planète, l'erreur angulaire  $d\theta$  correspondante est majorée par

$$d\theta \leq \frac{|d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}|}{|\mathbf{u}|}$$

avec  $|\mathbf{u}| \geq 1 UA$  nous avons  $d\theta \leq 3,6 \text{ mas}$  Nous pouvons noter que cette majoration est large puisque nous nous sommes placés dans les quatre cas défavorables suivants :

1. déplacement tangent à la sphère céleste ( $d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$ ),
2. déplacement tangent au grand cercle de référence ( $d\tilde{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0$ , où  $\mathbf{z}$  est le pôle du RGC),
3. petite planète à une unité astronomique du satellite,
4. excentricité de la planète connue à  $10^{-4}$  degrés près.

Nous en déduisons que les erreurs introduites par la formulation analytique adoptée dans ce travail, restent faibles.

### 5.3.2 Corrélation des variables

Les petites planètes de la mission gravitent entre Mars et Jupiter, les périodes de révolution sidérale s'échelonnent de 39 à 69 mois environ. Elles varient quasi-linéairement en fonction du demi-grand axe de l'orbite, voir la figure 5.3, cette figure donne aussi (à droite) les effectifs cumulés des planètes. Or les observations



TAB. 5.1 - Approximation sur les dérivées partielles.

Planète 6-Hebe.

		$\tilde{B}^t$			$\tilde{B}^t - B^t$		
$t = 47869, 9181$ (mjd)							
$(rad) \setminus \begin{matrix} (U A) \\ dx \\ dy \\ dz \end{matrix}$							
$dl_o$	0.26963	-1.93615	0.33909	-0.00173	-0.00117	0.00029	
$dp$	0.07074	0.08143	0.40899	0.00008	-0.00017	0.00025	
$dq$	0.48116	0.55414	2.78099	0.00011	0.00001	-0.00050	
$dr$	0.49960	-2.82535	0.47645	-0.00120	-0.00109	0.00039	
$de$	-2.19112	-1.10277	0.59878	0.00429	-0.00397	0.00009	
$da/a$	-1.77185	-7.92251	1.88488	-0.00339	-0.00163	0.00008	
$t = 48542, 4771$ (mjd)							
	0.14774	2.87022	-0.59742	-0.00056	-0.00079	-0.00003	
	-0.14205	-0.16360	-0.82108	-0.00041	0.00038	-0.00126	
	-0.29697	-0.34202	-1.71652	-0.00019	0.00028	0.00261	
	0.24122	1.90707	-0.42170	0.00193	-0.00200	0.00007	
	-2.37714	-1.53420	0.71693	-0.00592	-0.02554	0.00711	
	1.82023	-2.34260	0.15183	-0.00170	-0.00167	0.00015	

Planète 29-Amphitrite.

$t = 47985, 5907$ (mjd)						
	2.15817	1.17419	0.13906	-0.00190	-0.00053	0.00000
	0.01361	0.23172	-2.16787	-0.00002	0.00001	0.00011
	-0.00946	-0.15977	1.49509	-0.00002	0.00005	-0.00002
	2.39556	1.11968	0.13473	-0.00112	0.00039	0.00001
	-3.26761	-3.12017	-0.35403	0.01549	0.01255	0.00132
	7.30833	0.97706	0.15048	-0.00366	-0.00251	0.00001
$t = 48484, 4867$ (mjd)						
	-2.44004	1.24750	0.11795	-0.00042	-0.00115	0.00001
	-0.00084	-0.01432	0.13395	0.00023	-0.00022	0.00080
	0.01484	0.25166	-2.35475	0.00012	-0.00003	0.00247
	-2.11410	1.07083	0.10112	0.00175	-0.00196	-0.00020
	-1.40628	-2.13242	-0.23676	-0.00978	-0.02736	-0.00326
	1.78475	1.73889	0.19709	-0.00173	-0.00144	0.00007

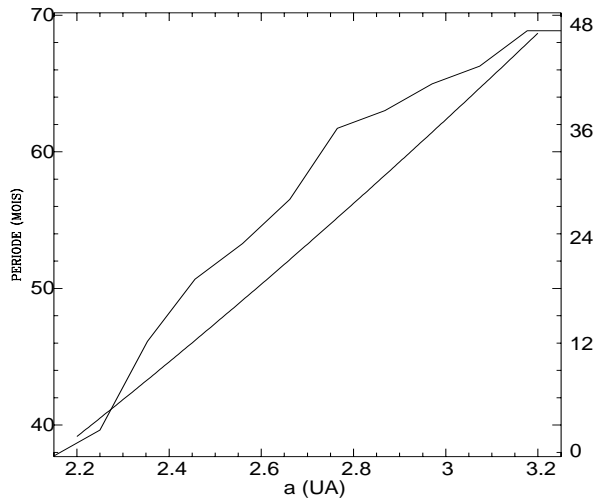


FIG. 5.3 - Périodes de révolution des astéroïdes.  
*La courbe inférieure montre les périodes de révolution sidérales des planètes. La ligne polygonale donne les effectifs cumulés des 48 astéroïdes de la mission.*

Hipparcos se répartissent au maximum sur 41 mois, il s'en suit que très peu de planètes ont décrit complètement leur orbite. Avec 12 mois de données supplémentaires la situation serait améliorée, un tiers des planètes aurait été observé sur au moins une révolution. On donne à la figure 5.4 une visualisation, dans le plan équatorial J 2000, de la trajectoire de quelques astéroïdes pendant la période du 1<sup>er</sup> novembre 1989 au 15 mars 1993 ; les valeurs données de demi-grand axe et d'excentricité sont les éléments propres calculés par J.G. Williams [Wil90]. Il est alors plus difficile de déterminer l'orbite (en particulier les grandeurs telles que le demi-grand axe et l'excentricité, l'argument du périhélie et l'anomalie moyenne) des corps éloignés du soleil ou observés au voisinage de l'aphélie. De plus, les positions unidimensionnelles sont obtenues sur un cercle qui oscille, avec une amplitude de  $43^\circ$ , autour d'un plan instantané perpendiculaire au plan de l'écliptique ; de ce fait l'orientation de la trajectoire osculatrice est mieux mesurée que ne l'est la position de la planète sur cette trajectoire. Les données d'observations ne sont pas réparties uniformément ni dans le temps ni par rapport à la trajectoire des astéroïdes. Nous avons déjà vu que les planètes sont observées au voisinage des quadratures, les observations sont alors regroupées par "paquets" que nous nommerons époques. Une époque correspond donc aux observations ayant lieu sur un ou plusieurs RGC voisins, soit une durée de l'ordre du jour (variant de  $\simeq 0,1$  à  $\simeq 5$  jours). Le nombre d'époques correspondant aux observations Hipparcos des petites planètes est de l'ordre de la douzaine, et concernant les seules améliorations d'éphémérides des astéroïdes, une époque détermine une position normale<sup>2</sup>.

Comme les erreurs dues aux éphémérides héliocentriques des planètes sont grandes, on peut chercher à ne déterminer que les corrections sur les conditions initiales de

<sup>2</sup>Comme pour la construction d'une observation moyenne par transit, on pourrait déterminer une position normale par époque ; la modélisation ferait alors intervenir un nombre de paramètres trop important.

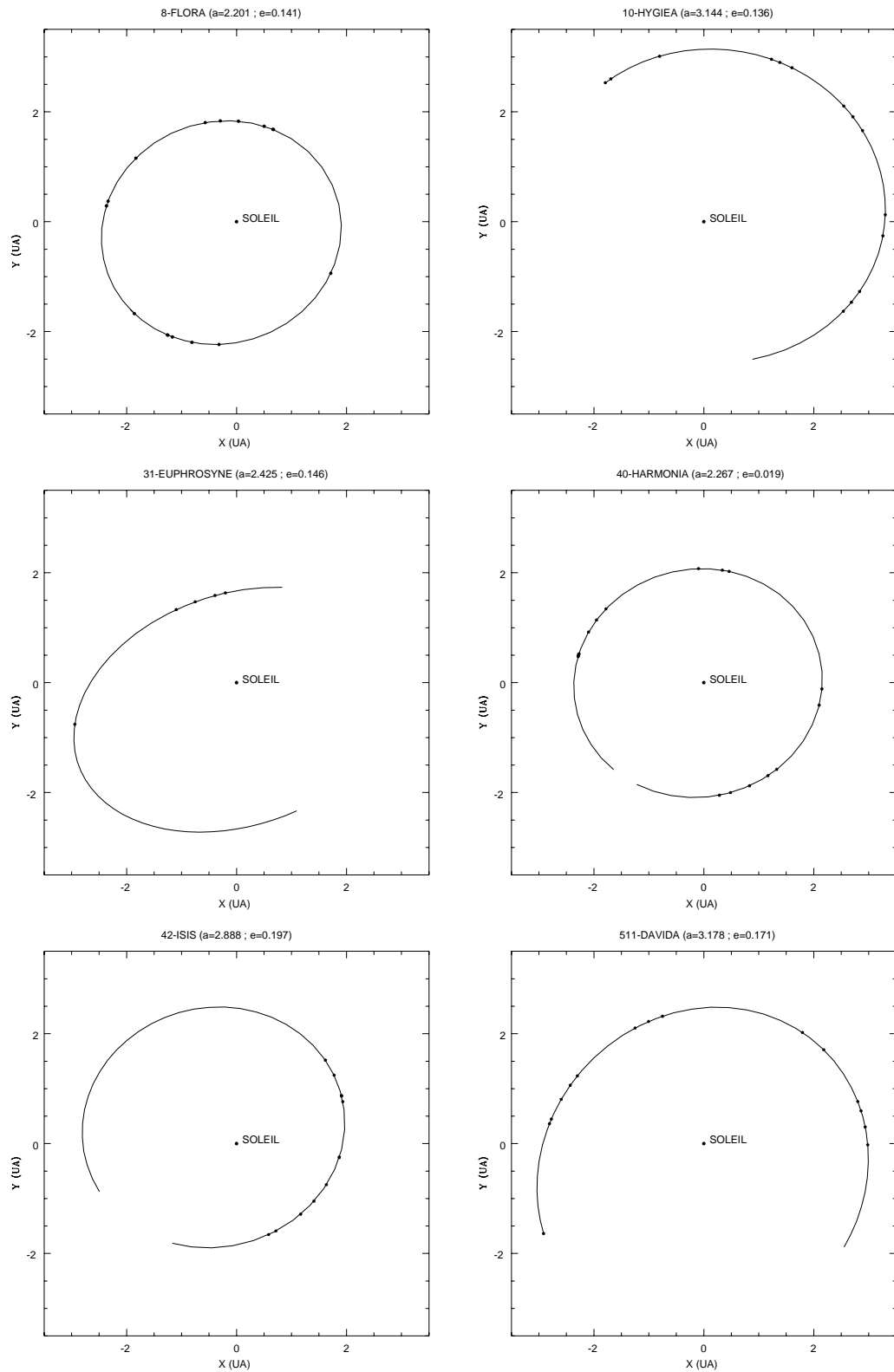


FIG. 5.4 - Trajectoire et observations de certains astéroïdes pendant la mission. *Coordonnées héliocentriques dans le plan équatorial J2000. Les points correspondent aux différentes époques d'observations. Les répartitions de ces époques sont variables et ne couvrent pas toujours la trajectoire décrite pendant la durée de la mission.*

TAB. 5.2 - Corrélation des variables.

*Planètes 3-Juno et 37-Fides après 30 mois d'observations.*

Planète 3-Juno					
$dr + dl_o$	$dp$	$dq$	$e dr$	$de$	$da/a$
1.00					
0.37	1.00				
-0.02	0.60	1.00			
-0.23	-0.09	-0.24	1.00		
0.70	0.26	-0.18	0.53	1.00	
-0.37	-0.14	0.23	-0.81	-0.92	1.00

Solution (mas)					
$dr + dl_o$	$dp$	$dq$	$e dr$	$de$	$da/a$
= 54.11	57.89	103.40	16.46	1.22	30.70
± 44.81	3.41	2.54	32.78	26.68	38.35

Planète 37-Fides					
$dr + dl_o$	$dp$	$dq$	$e dr$	$de$	$da/a$
1.00					
-0.49	1.00				
-0.67	0.79	1.00			
-0.21	-0.42	-0.52	1.00		
-0.60	0.63	0.91	-0.61	1.00	
-0.04	-0.42	-0.61	0.95	-0.77	1.00

Solution (mas)					
$dr + dl_o$	$dp$	$dq$	$e dr$	$de$	$da/a$
= 35.68	-123.84	69.21	91.95	76.90	-48.03
± 129.15	2.71	15.15	47.40	117.65	66.86

chaque planète.

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c}_i) = B d\mathbf{q}_i + \dots \quad (5.10)$$

Cette solution n'est évidemment pas rigoureuse, la rotation au cours du temps de la sphère Hipparcos entraîne par exemple des variations sur l'ensemble des moyens mouvements des planètes, l'orientation de cette sphère à une époque donnée se retrouve sur l'ensemble des orientations des orbites oscultrices des planètes ; elle permet néanmoins de reconnaître des observations ou transits suspects, et de voir que les paramètres à déterminer sont fortement corrélés. Les corrections d'anomalie moyenne et de position du périhélie sont en général fortement corrélées pour les observations Hipparcos ; ceci est indirectement lié à la durée de la mission. Le coefficient de corrélation étant voisin de  $-1$ , on ne peut en fait déterminer convenablement qu'une combinaison linéaire de ces deux paramètres. En particulier, si l'orbite de l'astéroïde est circulaire, la correction  $dr$  est indéterminée ; cette corrélation des variables se rencontrait aussi dans une certaine mesure lors des déterminations d'équinoxe et d'équateur des catalogues d'étoiles. Introduisons alors, sans plus

d'explication, le changement de variables [BC61] :

$$(dr; dl_o) \rightarrow (dr + dl_o; e dr)$$

Le tableau 5.2 donne les matrices de corrélation obtenues pour deux planètes et à partir des observations recueillies sur **30 mois** de mission (tables du haut), bien que le conditionnement des matrices normales soit bon (de l'ordre de 100), il subsiste des coefficients de corrélation supérieurs en norme à 0,9. La situation se dégrade encore davantage pour des facteurs de conditionnement plus faibles. Ceci entraîne deux effets : les estimations des paramètres sont plus importantes en norme que les valeurs vraies, et les écarts types correspondants aux variables corrélées sont grands. Les tables du bas du tableau 5.2 donnent à la première ligne les solutions obtenues pour ces deux planètes, et à la seconde ligne les écarts type directement déduits de la matrice normale. La solution ainsi obtenue n'est pas réaliste. Les paramètres  $dr + dl_o$ <sup>3</sup> et  $e dr$  ne sont pas bien séparés, cela montre que la combinaison linéaire choisie n'est pas optimale ; mis à part la détermination du paramètre  $dp$  (rotation de l'orbite autour de la direction du périhélie), les erreurs associées aux autres grandeurs sont importantes.

Les corrélations étant en général fortes (les deux exemples précédents correspondaient à des cas favorables pour 30 mois d'observation), il n'est pas possible de déterminer l'ensemble des inconnues relatives aux corrections orbitale d'une planète. Soit  $\bar{\mathbf{x}}_o$  la solution des moindres carrés du système  $B \mathbf{x} = (\mathbf{o} - \mathbf{c})$ , soit  $\{\mathbf{e}_i\}$  une famille de vecteurs telle que  $B \mathbf{e}_i = \varepsilon \approx 0$ , c'est-à-dire de l'ordre des termes négligés jusqu'à présent ; alors pour des valeurs réelles  $\alpha_i(\varepsilon)$  appartenant à un certain domaine fini (fonction de  $\varepsilon$ ), le vecteur  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_o + \sum_i \alpha_i(\varepsilon) \mathbf{e}_i$  est tel que

$$|v| = |(\mathbf{o} - \mathbf{c}) - B \bar{\mathbf{x}}| \approx |(\mathbf{o} - \mathbf{c}) - B \bar{\mathbf{x}}_o|$$

Autrement dit, bien que d'un point de vue numérique la solution des moindres carrés soit bien définie (problème bien conditionné), la matrice normale est quasi-singulière, et la solution n'est pas unique au sens des précisions des mesures. De plus, nous n'extrayons pas le maximum d'information en exprimant les variations des conditions initiales avec les paramètres donnés plus haut.

Nous chercherons alors à déterminer :

1. les combinaisons linéaires des variables les plus adaptées au problème engendrant : le noyau (s'il peut être considéré non vide) et l'image de la matrice aux équations de conditions ;
2. le "rang" maximal  $r$  de la matrice normale  $B^t B$ , c'est-à-dire la dimension minimale de la matrice  $\tilde{B}$  telle que  $\tilde{B}^t \tilde{B} \approx B^t B$ .

Nous déterminons ainsi le minimum de variables pouvant modéliser les différences  $\mathbf{o}-\mathbf{c}$ , c'est-à-dire telles que les résidus soient statistiquement acceptables par rapport aux résidus obtenus avec un nombre plus grand de variables. Ceci concerne le rang effectif de la matrice normale, quant aux variables supprimées, ce sont celles dont on ne peut pas obtenir d'informations à partir des observations Hipparcos seules.

---

<sup>3</sup>Pour une orbite d'inclinaison nulle, le paramètre  $dr + dl_o$  est égal à la correction sur la longitude moyenne à l'instant initial.

L'orientation de l'orbite osculatrice est, *en général*, bien déterminée (la précision relative aux paramètres  $dp$  et  $dq$  est de l'ordre du *mas*), par contre nous ne pouvons pas présager de la détermination ou de l'indétermination des autres éléments osculateurs : par exemple, pour ce genre corps, il n'y a pas a priori de raison de supposer que le demi-grand axe est connu avec toute la précision requise (et imposer  $da/a = 0$ ), pas plus que pour les autres éléments. Nous procédons alors à la décomposition sur les axes principaux de la matrice normale associée aux observations d'une planète.

### 5.3.3 Décomposition sur les axes principaux

Soit  $B \in \mathcal{M}(n, 6)$  la matrice associée aux équations de condition. La matrice normale  $B^t B$ , à coefficients réels, symétrique et positive, est diagonalisable dans une base orthogonale ; on a la décomposition :  $B^t B = P^t D P$ , où  $P$  est orthogonale et où la matrice diagonale  $D = (\lambda_i)$  est composée des valeurs propres. On peut déduire cette décomposition, sans le calcul explicite de la matrice normale, à partir de la décomposition en valeurs singulières de  $B$ . Cette dernière peut se décomposer de manière unique sous la forme

$$B = U W V^t \quad (5.11)$$

où  $W = (w_i) \in \mathcal{M}(6, 6)$  est une matrice diagonale,  $V \in \mathcal{M}(6, 6)$  est une matrice orthogonale  $V V^t = V^t V = I_6$ ,  $U \in \mathcal{M}(n, 6)$  est une matrice orthogonale à gauche  $U^t U = I_6$ . Les termes diagonaux  $w_i$  de la matrice  $W$  sont les valeurs singulières de la matrice  $B$ , ils sont liés aux valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice normale  $B^t B$  : en écrivant la matrice normale à partir de la décomposition en valeurs singulières

$$B^t B = V W^2 V^t$$

on a  $\lambda_i = w_i^2$ . On remarque une autre particularité, due à cette décomposition, pour la solution des moindres carrés au système  $Bx = y$  : on a

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (B^t B)^{-1} B^t y = V W^{-1} U^t y \\ \text{var}(\bar{x}) &= V W^{-2} V^t \text{var}(y) \end{aligned}$$

Ainsi la solution est obtenue sans l'inversion de la matrice normale ; elle fait intervenir des termes de l'ordre de  $1/w_i$ , à comparer à  $1/w_i^2$  pour l'inversion de la matrice normale. Cependant cette méthode n'offre pas d'avantages particuliers ni du point de vue du temps de calcul, ni pour l'obtention de la matrice de covariance du vecteur solution. Par contre, on voit que les paramètres des sous-espaces propres associés aux valeurs singulières petites sont mal déterminés.

Il en est de même pour les paramètres corrélés, soient  $x_i$  et  $x_j$  deux paramètres du vecteur solution, leur covariance s'écrit :

$$\text{covar}(x_i, x_j) = \sum_k \frac{1}{w_k^2} V_{ik} V_{jk}$$

On en déduit le facteur de corrélation  $r(x_i, x_j)$  de ces deux variables :

$$r(x_i, x_j) = \frac{\text{covar}(x_i, x_j)}{\sqrt{\text{var}(x_i)} \cdot \sqrt{\text{var}(x_j)}}$$

Soient les vecteurs non unitaires

$$\tilde{V}_i = (V_{ik}/w_k) \text{ et } \tilde{V}_j = (V_{jk}/w_k),$$

ce sont les vecteurs lignes de la matrice  $VW^{-1}$ , on a

$$(|r(x_i, x_j)| = 1) \Leftrightarrow (\tilde{V}_i \text{ et } \tilde{V}_j \text{ colinéaires})$$

$$(|r(x_i, x_j)| \rightarrow 1) \Leftrightarrow (\tilde{V}_i = \alpha \tilde{V}_j + \varepsilon \tilde{V}_j^\perp) \quad (\alpha, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2,$$

$\varepsilon \ll 1$  est un petit paramètre;  $\tilde{V}_i \cdot \tilde{V}_j^\perp = 0$ .

Alors les fortes corrélations sont associées aux petites valeurs singulières  $w_k$  si  $V_{ik}V_{jk} \gg \varepsilon$ . Soit  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots)$  l'estimateur des moindres carrés où les paramètres  $x_i$  et  $x_j$  correspondent aux vecteurs quasi-colinéaires, on a

$$\bar{x} = VW^{-1}U^t y = VW^{-1}y'$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{V}_i \\ \vdots \\ \tilde{V}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot y'$$

Les paramètres  $x_i$  et  $x_j$  s'écrivent en fonction des projections de  $y'$  sur  $\tilde{V}_i$  et  $\tilde{V}_j$  :

$$\begin{cases} x_j &= \tilde{V}_j y' \\ x_i &= \alpha \tilde{V}_j y' + \varepsilon \tilde{V}_j^\perp y' \\ x_i &= \alpha x_j + o(\varepsilon) \end{cases}$$

On obtient les relations :  $\alpha x_j - x_i = 0 + o(\varepsilon)$  et  $\alpha^2 \text{var}(x_j) \approx \text{var}(x_i)$ . Il s'en suit que pour un paramètre  $\varepsilon$  suffisamment petit, seule une combinaison linéaire des paramètres est déterminée  $x_i + x_j = (\alpha + 1) \tilde{V}_j y'$ .

Plus généralement, lorsque les vecteurs colonnes de la matrice  $V$  associés aux petites valeurs singulières constituent une base du noyau de  $B$ , on a la relation

$$B \simeq U\tilde{W}V^t$$

où  $\tilde{W} \simeq W$  est la matrice diagonale des valeurs singulières dont certaines sont égalées à zéro. Soit la solution

$$d\bar{\mathbf{q}}_i = V\tilde{W}^{-1}U^t(\mathbf{o} - \mathbf{c})$$

et  $x \in \text{Ker}(B)$ , alors

$$|d\bar{\mathbf{q}}_i + x| = |\tilde{W}^{-1}U^t(\mathbf{o} - \mathbf{c}) + V^t x|$$

est minimale pour  $x = 0$  car  $V^t x \cdot \widetilde{W}^{-1} U^t (\mathbf{o} - \mathbf{c}) = 0$ . Le vecteur  $d\bar{\mathbf{q}}_i$  est donc le vecteur de norme minimale minimisant la somme des carrés des résidus. Le sous-espace propre associé à l'image de la matrice définit le rang de  $B$  et les combinaisons linéaires des paramètres engendrant  $Im(B)$ . La décomposition en valeurs singulières nous donne les combinaisons linéaires des paramètres appropriées au problème. Nous remarquerons qu'il n'y a pas lieu de fixer a priori une combinaison linéaire sur les paramètres, en particulier pour l'anomalie moyenne et le déplacement du périhélie dans le plan de l'orbite. Si l'on considère la variable  $dr + dl_o$ , la variable conjuguée est, pour des raisons numériques (termes de la matrice aux dérivées partielles de même ordre de grandeur),  $e dr$ . Nous introduisons alors un facteur d'échelle arbitraire sur la variable  $dr$ , ce qui n'est plus adapté à la recherche de solution minimale en norme. Il nous reste encore à déterminer la dimension minimale de l'espace des solutions.

### 5.3.4 Tests statistiques

#### Test de $\tilde{\sigma}_o^2$

Nous avons une estimation du facteur de variance à partir des résidus  $v$  de la solution des moindres carrés :

$$\tilde{\sigma}_o^2 = \frac{v^t p v}{n - r}$$

Si l'on suppose que les résidus ne reflètent qu'un bruit blanc de mesure, alors la quantité :

$$X^2 = (n - r) \frac{\tilde{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2}$$

suit une loi du  $\chi^2$  à  $(n - r)$  degrés de liberté. Nous calculons cette estimation lors de la détermination des conditions initiales d'une planète, il faut alors déterminer six paramètres ( $r = 6$ ), le nombre d'équations indépendantes correspond au nombre de T4 pour la planète. Soit  $p$  le seuil de probabilité négligeable

$$Q(\chi^2 | n - r) = p$$

Lorsque la redondance est forte, on a  $Q(\chi^2 | n - r) \approx Q(x)$  avec  $x \approx \frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$ , d'où

$$\chi_{p,\nu}^2 \approx \exp\left(x_p, \sqrt{\frac{2}{\nu}}\right), \quad x_p \text{ étant déduit de la loi normale}$$

Pour un seuil à 0,135 %, on a  $x_p = 3$  et  $\chi_\nu^2 = \exp\left(3\sqrt{\frac{2}{\nu}}\right)$

$\nu$	200	300	400	500	600	700	800
$\chi_\nu^2$	1.35	1.28	1.24	1.21	1.19	1.17	1.16

Ce test permet de reconnaître, lorsque la différence entre les facteurs de variance arbitraire et estimé est significative, la présence de transits douteux, d'erreurs de pas de grille ou d'erreurs de modélisation.



## Test de Fisher

Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux vecteurs résidus déduits de deux solutions différentes  $q_1$  et  $q_2$  du problème restreint à la détermination des conditions initiales d'une planète, équation (5.10). Soient alors  $\tilde{\sigma}_k^2$ ,  $k = 1, 2$  et les estimations des facteurs de variance correspondants

$$\tilde{\sigma}_k^2 = \frac{v_k^t p_i v_k}{\nu_k}$$

Le rapport de ces deux variances suit la loi de Fisher ; de plus les redondances sont telles que  $\nu_k = n - r_k$ , où  $n$  est le nombre d'observations et  $r_k \leq 6$  le nombre de paramètres indépendants estimés, on peut supposer  $\nu_1 \approx \nu_2 = \nu$ . En fixant un seuil de probabilité négligeable, on peut donc valider l'hypothèse que les deux résidus ont la même variance (qu'ils reflètent les mêmes bruits de mesures et écarts systématiques non modélisés). Prenons  $r_2 < r_1$ , si l'hypothèse est vérifiée, ceci revient à dire que nous pouvons modéliser les  $o-c$  par les corrections  $q_2$ , donc par un nombre plus petit de paramètres indépendants. Soit  $p$  le seuil de probabilité négligeable et

$$Q(F_p | \nu_1, \nu_2) = p$$

Comme la redondance est forte, on a  $Q(F | \nu, \nu) \approx Q(x)$  avec  $x \approx \frac{F - 1}{2/\sqrt{\nu}}$ , d'où

$$F_{p,\nu} \approx \exp\left(\frac{2x_p}{\sqrt{\nu}}\right), \quad x_p \text{ étant déduit de la loi normale.}$$

Pour un seuil à 0,135 %, on a  $x_p = 3$  et  $F_\nu \approx \exp\left(\frac{6}{\sqrt{\nu}}\right)$

$\nu$	200	300	400	500	600	700	800
$F_\nu$	1.53	1.41	1.35	1.31	1.28	1.25	1.24

A partir de la décomposition donnée à l'équation (5.11), nous pouvons déterminer successivement les solutions en éliminant les inconnues associées aux petites valeurs singulières. Nous procédons dans l'ordre croissant des valeurs singulières (régression en arrière). Soient alors  $q_1 = UW^{-1}V^t$  la solution des moindres carrés et  $q_i = U\tilde{W}^{-1}V^t$  la solution où l'on impose  $w_k = 0$ ,  $\forall k \leq i$ . Notons les estimations des deux facteurs d'écart type correspondants  $\tilde{\sigma}_1$  et  $\tilde{\sigma}_i$ , on sait que  $\tilde{\sigma}_i \geq \tilde{\sigma}_1$ . Le processus est arrêté lorsque  $\frac{\tilde{\sigma}_i}{\tilde{\sigma}_1} > F_\nu$  et la solution  $q_i$  est rejetée. Nous avons ainsi obtenu une solution des variations des conditions initiales des planètes et déterminé le nombre optimal de paramètres à ajuster. La figure 5.5 donne pour chaque planète le rang associé à la matrice aux équations de conditions, celui-ci varie de 3 à 6. Les planètes 27–Euterpe et 31–Euphrosyne n'apparaissent pas sur ce diagramme, les données relatives à Euterpe nécessitent un traitement plus particulier qui sera détaillé plus bas. L'orbite de la planète 31–Euphrosyne n'est pas complètement déterminée, ceci peut se comprendre en regardant la répartition des observations sur sa trajectoire donnée à la figure 5.4 ; de plus, les résidus varient sensiblement pour un rang inférieur ou égal à quatre (époque isolée). Ces résidus sont donnés à la figure 5.6 ; les facteurs d'écart type valent respectivement 25,9 et 33,3 selon que le rang considéré est de 5 ou de 4. Le nombre d'observations est relativement faible (118 T4), aussi le test

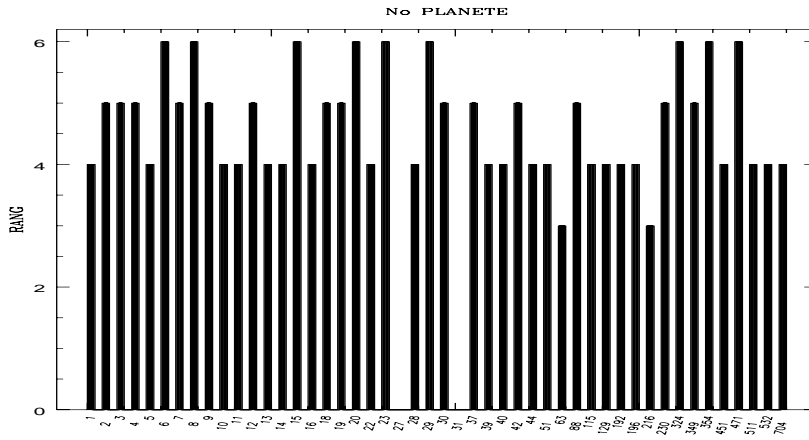


FIG. 5.5 - Corrections sur les conditions initiales des astéroïdes. *Le rang est le nombre de paramètres indépendants déterminés par planète. Les planètes 27-Euterpe et 31-Euphrosyne n'apparaissent pas sur ce diagramme ; nous pouvons considérer qu'ils valent respectivement 6 et 5.*

de rapport de variances est large ; néanmoins la variation du facteur d'écart type est très importante, et de plus, les précisions des paramètres déterminés lors de la solution de rang 5 sont acceptables. C'est pourquoi nous considérons que le rang associé aux observations de la planète 31-Euphrosyne vaut 5. Par contre pour les planètes 6-Hebe et 471-Papagena, l'ensemble des variations des conditions initiales a pu être déterminé, nous donnons à la figure (5.7) la représentation dans le plan équatorial J 2000 des trajectoires de ces planètes et la distribution des observations. La figure 5.8 donne, en fonction de la redondance, les valeurs maximales des rapports  $\bar{\sigma}_o/\sigma_o$  pour les tests de rapport de variances ( $\sqrt{F_\nu}$ ) et le test sur  $\bar{\sigma}_o^2$  ( $\sqrt{\chi_\nu^2}$ ).

### 5.3.5 Discussion

La décomposition en valeurs singulières permet de déterminer le changement de variables donnant les paramètres de variance minimale. Dans le cas favorable où le rang est maximal, la détermination des variations d'anomalie moyenne et de position du périhélie sur l'orbite est plus faible que pour les autres paramètres. Ces deux paramètres sont toujours fortement anti-corrélés ( $r \approx -1$ ) et, comme nous l'avons vu plus haut, dans les études précédentes de correction d'orbite, il est effectué le changement de variables faisant intervenir la correction sur la longitude moyenne à l'instant initial :  $(dl_o, dr) \rightarrow (dr + dl_o, e dr)$ , où d'après le système d'équations (5.7) on a :  $dr + dl_o = \cos I . d\Omega + d\omega + dl_o$ . Les solutions faisant intervenir les inconnues  $\bar{\mathbf{x}} = (dl_o, dr)$  ou  $(dr + dl_o, e dr)$  sont pratiquement équivalentes. En revanche le paramètre  $(dr + dl_o)$  est de variance plus faible. Ceci est schématisé à la figure 5.9 où  $\chi_\alpha^2$  est l'ellipsoïde de confiance pour un seuil de probabilité  $\alpha$ . Donnons un exemple avec la planète 8-Flora pour laquelle le rang de la matrice normale vaut 6, l'excentricité à l'époque  $t_o$  est  $e \simeq 0.15598$ . Il y a 440 observations et la matrice de corrélation est

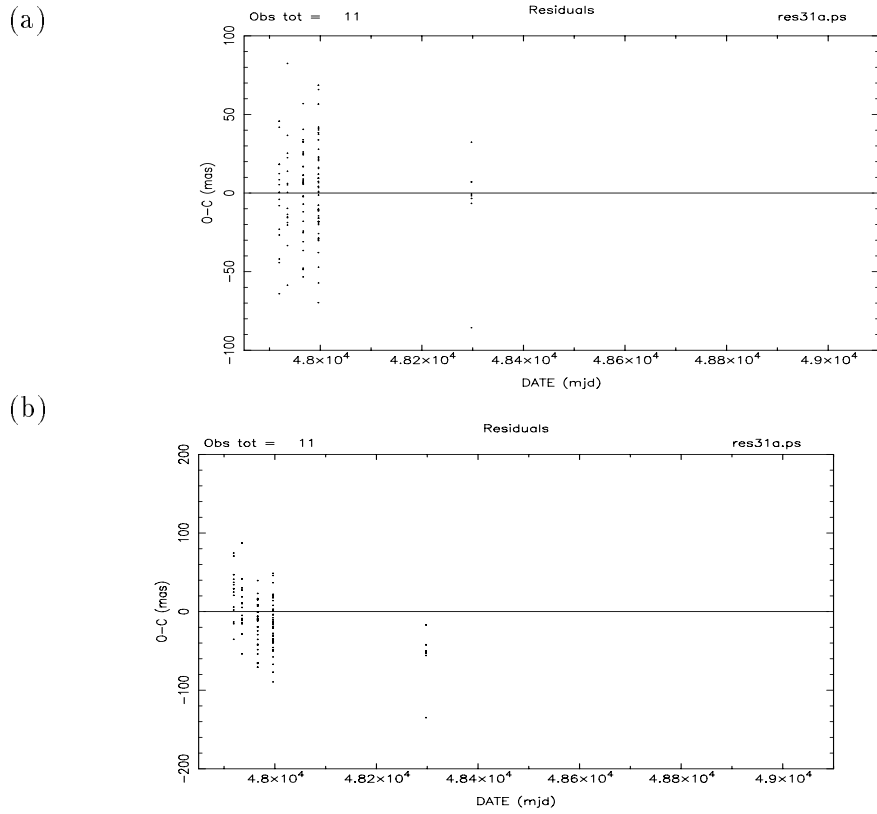


FIG. 5.6 - Résidus de la planète 31-Euphrosyne.

(a)  $\text{rang}=5$ . La solution est satisfaisante.

(b)  $\text{rang}=4$ . Les résidus sont, au vu du test de Fisher, statistiquement semblables, mais la solution n'est pas satisfaisante pour les cinq époques.

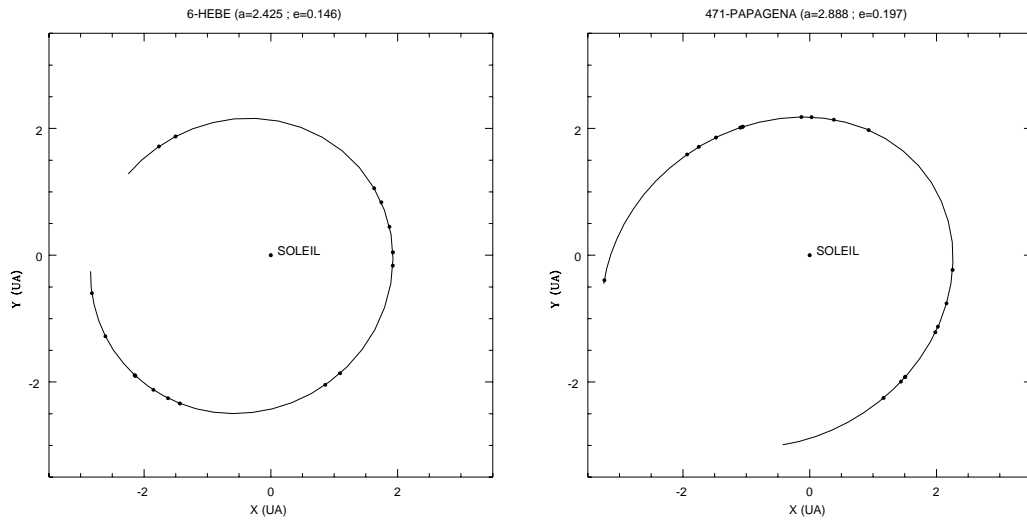


FIG. 5.7 - Trajectoire et observations des planètes 6-Hebe et 471-Papagena.  
Coordonnées héliocentriques dans le plan équatorial J 2000.

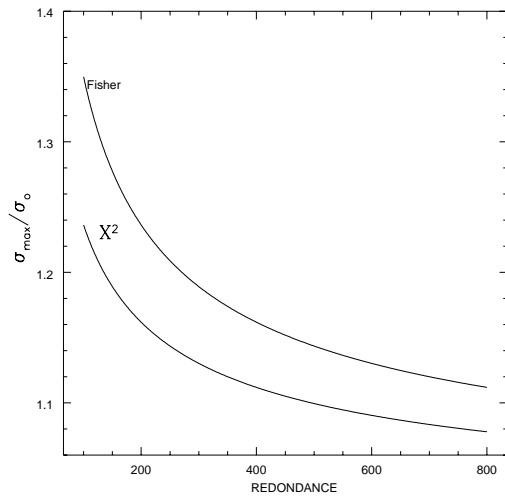


FIG. 5.8 - Test de rapport de variances et test sur  $\tilde{\sigma}_o$ .

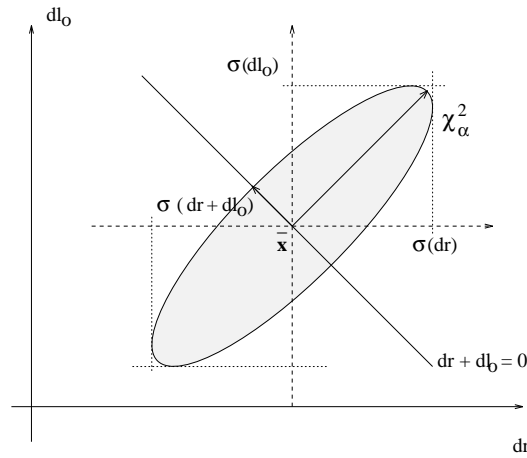


FIG. 5.9 - Ellipsoïde de confiance restreint aux corrections  $dr$  et  $dl_o$ .  
*Les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde sont inversement proportionnelles aux valeurs singulières associées au sous-espace propre correspondant.*

la suivante :

$dl_o$	$dp$	$dq$	$dr$	$de$	$da/a$
1.00					
-0.26	1.00				
0.04	0.18	1.00			
-0.97	0.22	-0.10	1.00		
-0.48	0.21	0.32	0.32	1.00	
-0.29	0.18	0.28	0.18	0.89	1.00

La solution pour les corrections  $d\mathbf{q}_i$  est (en *mas*) :

$\tilde{\sigma}_o = 32.6$	$dl_o$	$dp$	$dq$	$dr$	$de$	$da/a$
=	1228.03	177.78	-65.72	-949.78	-284.72	-19.15
$\pm$	25.43	1.84	2.74	24.35	6.17	4.52

On voit que les paramètres d'orientation de l'orbite  $dp$ ,  $dq$  sont déterminés avec une excellente précision ( $\approx 5^\circ.10^{-7}$  et  $\approx 8^\circ.10^{-7}$ ); les variations de demi-grand axe et d'excentricité avec une précision de l'ordre de  $1^\circ.10^{-6}$  sont acceptables. En revanche les écarts type des estimations  $dr$  et  $dl_o$  sont très larges et presque égaux. Soit alors la solution pour laquelle on a effectué le changement de variables sur ces deux derniers paramètres. La matrice de corrélation est :

$dl_o$	$dp$	$dq$	$dr$	$de$	$da/a$
1.00					
-0.21	1.00				
-0.22	0.18	1.00			
-0.08	0.22	-0.10	1.00		
-0.80	0.21	0.32	0.32	1.00	
-0.54	0.18	0.28	0.18	0.89	1.00

et la solution :

$\tilde{\sigma}_o = 32.6$	$dl_o + dr$	$dp$	$dq$	$\epsilon dr$	$de$	$da/a$
=	278.25	177.78	-65.72	-148.15	-284.72	-19.15
$\pm$	5.69	1.84	2.74	3.80	6.17	4.52

La corrélation  $r(dr + dl_o, \epsilon dr)$  est petite, la combinaison linéaire optimale est du type  $dl_o + \alpha dr + \sum \beta_i dx_i$  avec  $\alpha \approx 1$ , et où les coefficients des quatre autres inconnues  $dx_i$  vérifient  $\beta_i \ll 1$ . Les paramètres  $dl_o$ ,  $dr$ ,  $dr + dl_o$  sont égaux pour les deux solutions. L'écart type de l'estimation  $dl_o + dr$  est diminuée d'un facteur cinq par rapport à celui de chacun des paramètres  $dr$  et  $dl_o$ . Toutefois, la nouvelle orbite osculatrice est donnée soit par les éléments osculateurs, soit par les positions et vitesses initiales ; ainsi ni la théorie du mouvement de ces corps, ni le calcul numérique ne font intervenir ces nouvelles variables. Par contre, ceci montre que, malgré la forte corrélation sur les corrections d'anomalie moyenne et d'argument du périhélie, la rotation globale autour d'un axe perpendiculaire au plan osculateur (voisin du pôle de l'écliptique) est calculée avec une précision de quelques millièmes de seconde d'arc.

Les corrections obtenues sur les orbites osculatrices sont donc de valeurs différentes. Ceci se dégrade encore davantage lorsque les variances des paramètres associés aux petites valeurs singulières deviennent plus grandes ; jusqu'à diminuer la dimension de l'espace des corrections aux conditions initiales permettant de modéliser les *o-c*. Lorsque le rang n'est pas maximal et que les paramètres sont fortement

multi-corrélés, ce changement de variables n'est pas toujours le plus adapté. Autrement dit le sous-espace engendré par cette nouvelle base n'est pas forcément un sous-espace propre associé aux valeurs singulières. En particulier pour des observations peu étendues dans le temps, les corrections de demi-grands axes et excentricités sont liés à la rotation globale dans le plan de l'orbite. Le calcul de la solution des variations aux conditions initiales de norme minimale pourrait avoir une influence sur le lien de la sphère Hipparcos au repère inertiel ; mais c'est l'orientation et le mouvement global qui importe plus que la séparabilité des variables. En revanche, le calcul de l'orbite osculatrice est partiel et il impose, pour être plus exact, la diffusion des composantes des vecteurs associés aux valeurs singulières annulées.

Nous pouvons remarquer les différences sur les déterminations des éléments osculateurs en terme de stabilité des paramètres au cours de la recherche du rang maximal. Nous donnons ci-dessous les solutions, pour les éléments osculateurs et les écarts type associés, au cours des différentes étapes pour les planètes 22-Kalliope et 28-Bellona. Le rang retenu pour ces deux planètes est de quatre.

Planète 22						
$\tilde{\sigma}_o = 31.62$		rang=6				
sol.	83.40	80.32	38.81	-99.83	-29.74	-0.44
±	32.12	2.84	3.96	39.39	17.06	14.97
$\tilde{\sigma}_o = 31.81$		rang=5				
sol.	5.33	81.25	38.22	-1.59	-1.36	23.42
±	7.29	2.82	3.95	1.44	12.71	11.51
$\tilde{\sigma}_o = 31.83$		rang=4				
sol.	0.37	81.46	38.72	-1.07	-10.13	15.49
±	1.33	2.80	3.89	1.23	0.77	0.99
$\tilde{\sigma}_o = 39.65$		rang=3				
sol.	-4.10	50.62	-24.09	-4.15	-11.86	15.25
±	1.30	2.12	1.07	1.21	0.77	0.99
Planète 28						
$\tilde{\sigma}_o = 30.89$		rang=6				
sol.	1302.46	-11.26	-275.13	98.58	373.41	522.85
±	613.15	10.89	7.53	355.59	293.56	350.28
$\tilde{\sigma}_o = 31.06$		rang=5				
sol.	263.49	4.32	-266.09	-349.92	-134.40	-83.89
±	136.53	6.19	5.45	244.67	28.63	28.93
$\tilde{\sigma}_o = 31.20$		rang=4				
sol.	47.16	-1.74	-270.99	37.77	-89.19	-38.10
±	0.98	4.87	4.49	0.80	2.40	1.34
$\tilde{\sigma}_o = 69.04$		rang=3				
sol.	27.98	145.27	-147.30	24.41	-43.78	-27.78
±	0.79	1.92	2.45	0.69	1.96	1.30

Les paramètres  $dp$  et  $dq$  (liés à l'inclinaison et l'argument du nœud ascendant) sont bien déterminés ; ils sont plus ou moins bien séparés des autres variables. Les variations de ces paramètres et de leurs écarts type, au cours des différentes solutions, sont minimales pour la planète 22-Kalliope. Néanmoins, dans le cas général, les précisions données par l'inverse de la matrice normale ne correspondent pas à la variance des paramètres cherchés mais à la variance de la solution particulière de norme minimale. Pour les cas limites lors du test de Fisher : variation relativement importante de l'erreur par unité de poids estimée mais restant dans les bornes fixées, nous choisissons la solution conservant le maximum de stabilité.

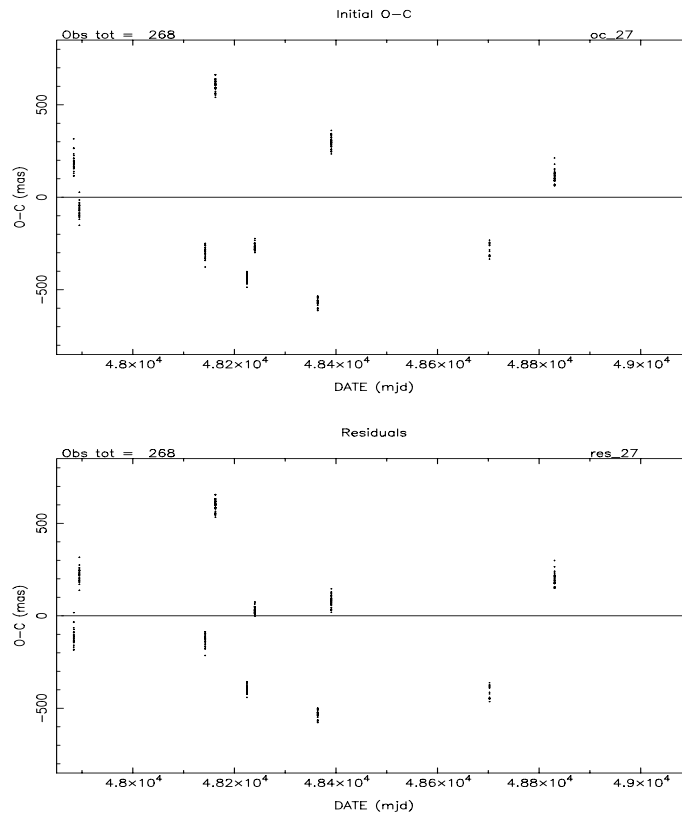


FIG. 5.10 - Planète 27–Euterpe :  
*O-C et résidus pour l'ensemble des observations.*

## 5.4 Cas particuliers

Nous avons déjà exposé dans le chapitre précédent le traitement d'observations douteuses, il peut néanmoins subsister après ces filtrages des erreurs occasionnelles. Par ailleurs pour certaines planètes les résidus après détermination des conditions initiales peuvent exhiber des erreurs systématiques significatives.

### 5.4.1 Planète 27–Euterpe

Les observations retenues, après les différents filtrages, conduisent à des résidus aberrants (figure 5.10). Cette planète est observée à dix époques différentes, on cherche alors à modifier (correction de pas de grille) ou à supprimer les observations sur une ou plusieurs époques de manière à obtenir des résidus satisfaisants. La solution retenue sera celle qui conserva le maximum d'époques et dont les résidus seront minimaux en norme. Le nombre minimal d'époques pour avoir une solution réaliste doit être égal à sept, une solution comprenant six époques n'est pas fiable puisqu'on peut considérer que les observations réparties sur une époque correspondent approximativement à une seule position normale.

La figure 5.11 donne les résidus correspondant à deux vecteurs d'*o-c* (solutions "res\_1" et "res\_2b"), ils ont six époques en commun sur les huit retenues. Les tableaux ci-dessous donnent pour chacune des solutions : les époques suspectes, le nombre de T4 (nobs), une erreur quadratique moyenne par T4 ( $\sigma_m$ ), le coefficient

d'écart type  $\sigma_o$  et l'estimation  $\tilde{\sigma}_o$  déduite des résidus, le conditionnement de la matrice des équations de conditions (cond), les valeurs singulières de cette matrice (W), et finalement la solution des moindres carrés pour la correction sur les éléments osculateurs de l'orbite ( $d\mathbf{q}_i$ ).

1. solution **res\_1**

observations supprimées :  $t \in [48\,200 ; 48\,300]$  (*mjd*)

nobs= 200	$\sigma_m = 35.3$						
$\sigma_o = 30.0$	$\tilde{\sigma}_o = 31.9$						
cond = 27.6							
W= (18.47    12.22    0.67    4.33    8.56    7.32)							
$d\mathbf{q}_i$ ( <i>mas</i> )							$dr + dl_o = 513.41$
	$dl_o$	$dp$	$dq$	$dr$	$de$	$da/a$	
	1230.41	-43.03	194.79	-717.00	-96.02	-62.63	

2. solution **res\_2b**

correction de pas de grille :  $t \in [48\,200 ; 48\,240]$  (*mjd*)

$$(o - c) \rightarrow (o - c) + s$$

observations supprimées :  $t \in [48\,240 ; 48\,380]$

nobs= 210	$\sigma_m = 33.9$						
$\sigma_o = 30.0$	$\tilde{\sigma}_o = 30.1$						
cond = 36.5							
W= (24.11    12.16    9.96    0.66    5.97    3.77)							
$d\mathbf{q}_i$ ( <i>mas</i> )							$dr + dl_o = 515.31$
	$dl_o$	$dp$	$dq$	$dr$	$de$	$da/a$	
	1260.17	-3.66	188.70	-744.86	-128.25	-66.21	

Les estimations du facteur de variance sont dans les deux cas acceptables, et le nombre d'observations à peu près identique. En revanche la solution "res\_2b" contient, en plus des observations écartées, une correction de pas de grille sur l'ensemble des observations d'une époque. La solution "res\_1" fait intervenir un nombre plus faible d'opérations sur les données, elle peut donc, paraître plus fiable. De plus chacune des trois époques suspectes est reliée à un RGC, il peut donc subsister des erreurs liées aux grands cercles. Les données pour la planète 27-Euterpe sont donc à prendre avec précaution, elles ne sont pas utilisées dans ce travail pour le lien au système dynamique. Les deux solutions étudiées ici sont de rang maximal (6).

### 5.4.2 Transits excentrés

Les origines des RGC sont données comme des corrections à apporter à la position du nœud ascendant que fait le RGC avec l'écliptique ; ces corrections sont de l'ordre de 0,2 *mas* avec une précision  $\propto 0,002$  *mas* (cf figure 5.12). Ces données sont encore provisoires, de plus certains RGC sont construits sur des intervalles de temps plus courts, ou comportent des observations d'étoiles douteuses. Il se peut que



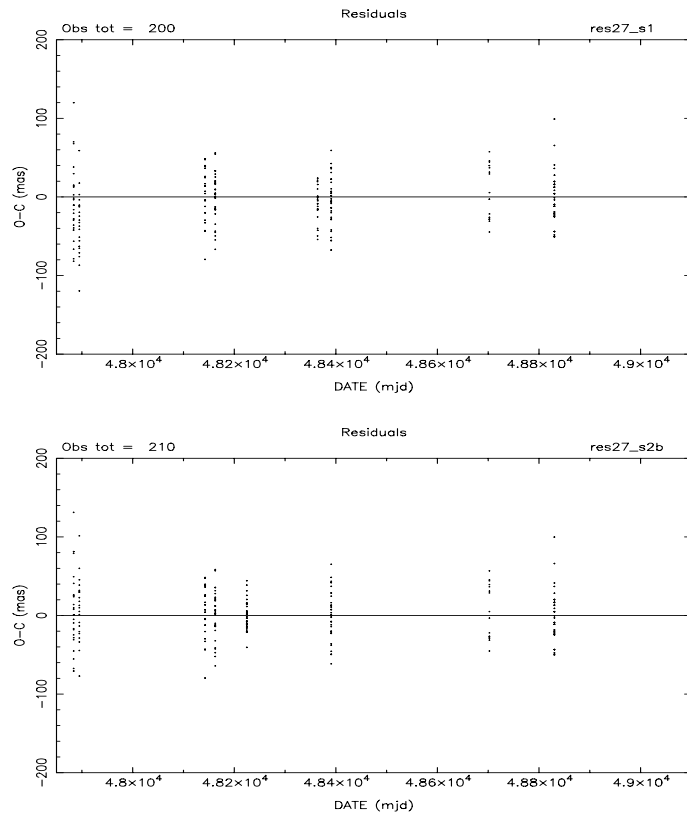


FIG. 5.11 - Planète 27-Euterpe :  
*Résidus après suppression d'observations.*

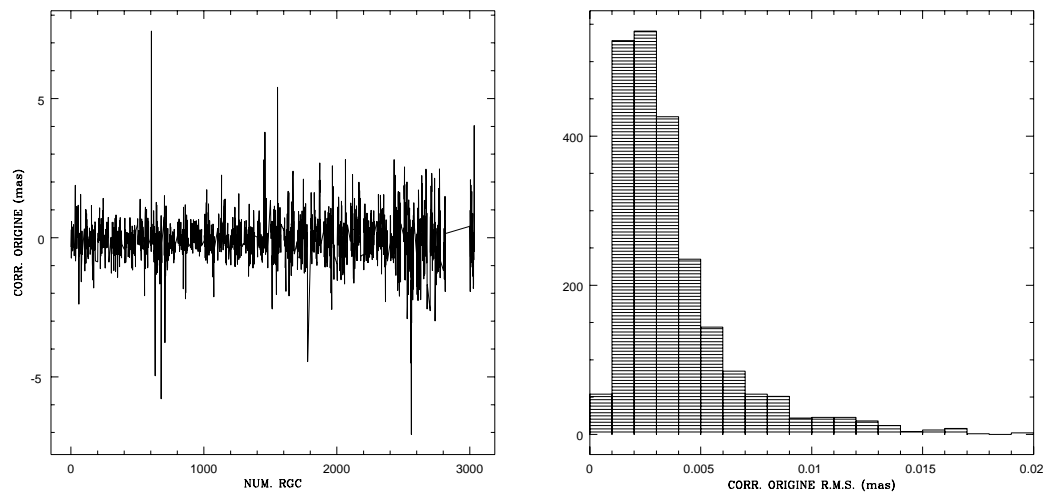


FIG. 5.12 - Origines des RGC.  
*La figure de gauche montre les corrections d'origine des RGC; celle de droite un histogramme des précisions rattachées à ces corrections.*

cette origine soit erroné par la présence d'erreurs systématiques. La sphère Hipparcos utilisée n'est pas définitive, une réduction complète avec les nouvelles positions des étoiles obtenue sera réalisée au CERGA pour le consortium FAST, puis une comparaison avec la solution du consortium NDAC amènera à la sphère Hipparcos finale.

Par ailleurs les résidus de certaines époques restent excentrés. Le tableau ci-dessous donne, pour les planètes 10–Hygiea et 18–Melpomene, l'estimation du facteur d'écart type, le coefficient correspondant au seuil à 0, 135% et la valeur maximale acceptable :

No	Nobs	$\sqrt{\sigma_o^2}$	$\sqrt{\chi^2}$	$\sigma_{max}$
10	366	37.95	1.118	33.54
18	778	37.42	1.079	32.37

La figure 5.13 montre les résidus obtenus, pour ces deux astéroïdes, après calcul par la méthode des moindres carrés des corrections aux éléments osculateurs. Il apparaît des transits excentrés, l'écart est de  $\approx 50 mas$  et correspond aux données du RGC 2812. Cet écart dépend des observations compensées donc des poids et distributions des autres observations, c'est pourquoi il n'est pas a priori identique pour les résidus des deux astéroïdes. Les magnitudes apparentes, les différences entre les deux estimations de magnitudes et les pentes sont cohérentes pour ces transits. Les résidus sont néanmoins importants et les transits, relativement isolés, correspondent pour ces deux planètes à un même RGC. De tels transits restent donc momentanément en suspens.

### 5.4.3 Déplacement du photocentre

#### Généralités

La correction angulaire, sur un grand cercle de pôle  $\mathbf{z}$ , due à un déplacement de photocentre est donnée à partir de l'équation 3.17. La correction vectorielle de photocentre est dans le plan contenant les directions de la Terre et du Soleil, nous la décomposons en une partie portée par la direction de la Terre (qui n'apporte pas de déplacement visible) et une partie portée par la bissectrice des directions Terre-Soleil. Cette dernière composante a pour valeur algébrique :  $R.C(i) = R.[C(i_o) + b.(i - i_o)] + o(i - i_o)^2$ , où  $i$  est l'angle de phase. Donnons les développements en  $i$  de la fonction  $C(i)$  pour trois types de loi de diffusion :

$$\begin{aligned}
 \text{Lambert : } C_l &= \frac{3\pi}{4} \frac{\cos^3 \frac{i}{2}}{\sin i + (\pi - i) \cos i} \\
 &= 0.75875 + 0.0437(i - 0.35) + o(i - 0.35)^2 \\
 &= 0.74346 + 0.0437i + o(i - 0.35)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Uniforme : } C_u &= \frac{8}{3\pi} \sin \frac{i}{2} \\
 &= 0.14779 + 0.41793(i - 0.35) + o(i - 0.35)^2 \\
 &= 0.0015 + 0.41793i + o(i - 0.35)^2
 \end{aligned}$$

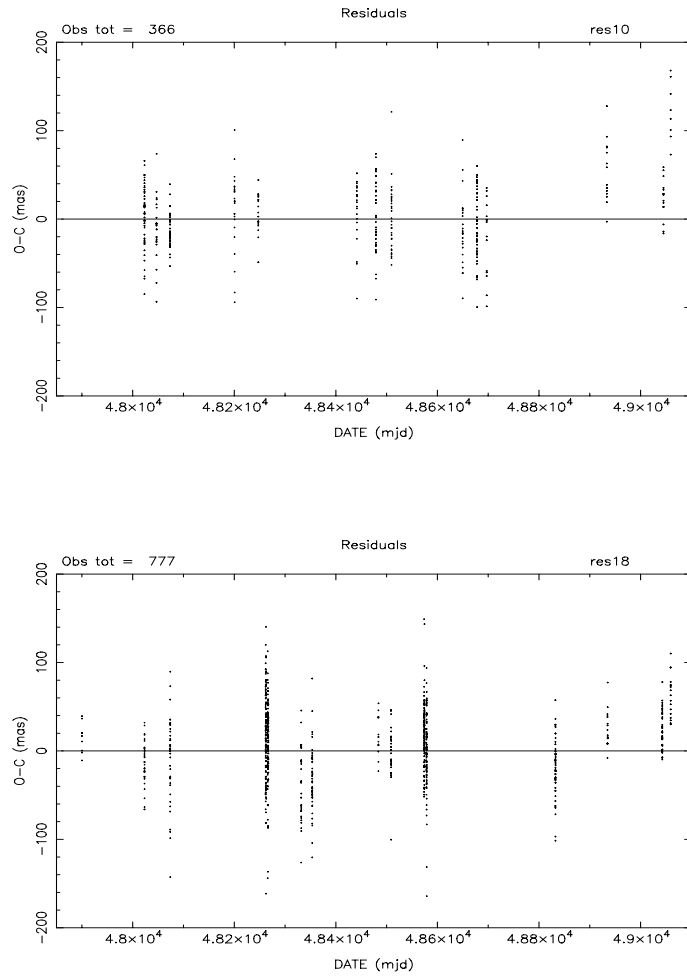


FIG. 5.13 - Planètes 10–Hygia et 18–Melpomene :  
*Les résidus de la dernière époque sont rattachés à un même RGC.*

$$\text{Minnaert : } C_k = \frac{2k+1}{2k+2} + o(i)$$

La dernière égalité est déduite de la loi de Minnaert dont la loi de Lambert est un cas particulier ( $k = 1$ , voir section 3.3.2). Les o-c s'écrivent dans le cas général :

$$o - c = -\frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{(\mathbf{z} \times \mathbf{u})^2} \cdot R \sin \frac{i}{2} [a + b.i]$$

Nous cherchons à évaluer les précisions avec lesquelles on peut déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  associés au déplacement du photocentre. Nous supposons que la trajectoire de la planète est dans le plan de l'écliptique perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{z}$  considéré fixe. On peut alors écrire la correction angulaire  $\Delta\alpha$  sur la direction géométrique de la petite planète (cf figure 5.14) :

$$\Delta\alpha = \frac{R}{u} \cdot \sin \frac{i}{2} [a + b.i]$$

En exprimant la distance satellitocentrique  $u$  en fonction de la distance héliocentrique  $x$ , et en supposant la Terre à une unité de distance astronomique, on a :

$$u \simeq x \cos i \pm \sqrt{1 - x^2 \sin^2 i}$$

Des deux solutions pour  $u$  prenons celle conduisant aux corrections  $\Delta\alpha$  maximales ; on a le système d'équations à résoudre :

$$\Delta\alpha = \sin \frac{i}{2} \left( \cos i - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \sin^2 i} \right)^{-1} \frac{R}{x} (a + b.i) \equiv A(i).(a + b.i)$$

En supposant que les mesures sont de même variance  $\sigma_o^2$ , on a une estimation des variances des paramètres à partir de l'expression de la matrice normale :

$$\begin{pmatrix} \sum A^2(i_k) & \sum i_k A(i_k) \\ \sum i_k A(i_k) & \sum i_k^2 A^2(i_k) \end{pmatrix}$$

Prenons  $x = 2,63 UA$ , et  $N$  observations uniformément réparties sur l'intervalle  $i \in [0, 25; 0, 45]$  ; on obtient

$$\sigma(a) \approx \frac{0.03}{\sqrt{N}} \sigma_o \quad ; \quad \sigma(b) \approx \frac{0.9}{\sqrt{N}} \sigma_o$$

Avec  $N = 500$  et  $\sigma_o = 30$  cela donne  $\sigma(a) \approx 0.04$  et  $\sigma(b) \approx 1.2$ . L'incertitude sur le paramètre  $b$  (ordre deux en  $i$  du déplacement du photocentre) est très grande, on ne peut donc pas espérer déterminer correctement la partie linéairement dépendante de l'angle de phase de la fonction  $C(i)$ .

### Déplacement du photocentre pour Ceres et Vesta

Ces deux planètes présentent un intérêt particulier. Les résidus obtenus pour les corrections aux variations de conditions initiales ne sont pas satisfaisants : la dispersion est grande, ce même en imposant une valeur de la rotation de la sphère

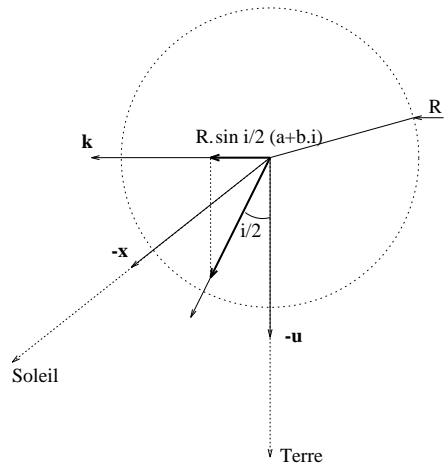


FIG. 5.14 - Déplacement du photocentre.  
*Le déplacement observé sur le ciel correspond à la projection sur le vecteur  $\mathbf{k}$  de la partie portée par le vecteur bissecteur des directions planète-Terre et planète-Soleil.*

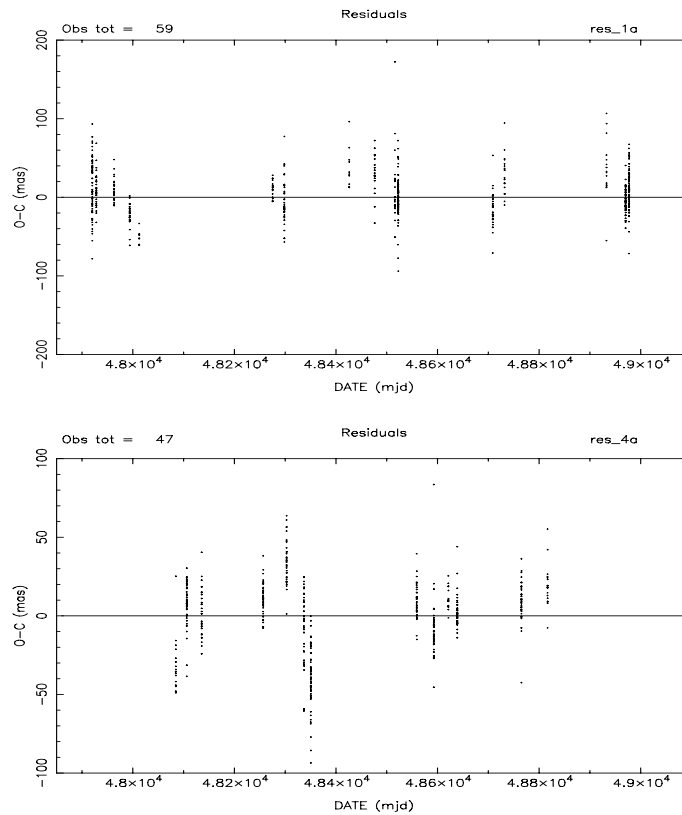


FIG. 5.15 - Planètes 1-Ceres et 4-Vesta :  
*Résidus pour l'ensemble des observations, seules les variations de conditions initiales sont modélisées. Les estimations des facteurs de variance sont de : 40, 73, pour Ceres et : 58, 12, pour Vesta.*

Hipparcos (fournie par M. Froeschlé suite au lien avec le FK5 pour 30 mois d'observations). Ces résidus sont donnés à la figure 5.15.

Calculons pour ces deux planètes les solutions des moindres carrés avec pour inconnues les corrections sur les éléments osculateurs, et les deux paramètres de la loi de diffusion. Les valeurs calculées pour ces deux derniers paramètres sont :

1-Ceres ; $\tilde{\sigma}_o^2 = 35.07$		4-Vesta ; $\tilde{\sigma}_o^2 = 46.30$			
	$a$	$b$		$a$	$b$
=	0.28	1.65	=	-2.72	8.52
±	0.50	1.40	±	0.48	1.20

Les corrélations entre ces paramètres sont importantes :  $-0.995$  pour Ceres et  $-0.998$  pour Vesta. On peut déterminer la combinaison linéaire sur les paramètres  $a$  et  $b$  effectivement mesurée, en remarquant que ces variables sont anti-corrélées, et que le rapport des écarts type est environ 2,5. Nous ne déterminons alors qu'une variable ; la partie relative aux corrections de photocentre s'écrit :

$$dt = a + i.b = (a + 2,5.b) + (i - 2,5).b \approx (a + 2,5.b)$$

on obtient alors  $a + 2,5.b = 0.87 \pm 0.05$  pour Ceres et  $a + 2,5.b = 0.71 \pm 0.03$  pour Vesta, et les résidus donnés à la figure 5.16. Ces résidus font apparaître des époques douteuses pour chacune de ces deux planètes, les écarts sont de l'ordre de  $50 \text{ mas}$ .

En imposant une rotation de la sphère Hipparcos, et après avoir supprimé les observations douteuses ; on obtient les résidus de la figure 5.17 avec  $a + 2,5.b = 0.90 \pm 0.05$  pour Ceres et  $a + 2,5.b = 0.78 \pm 0.03$  pour Vesta. Le modèle de loi de diffusion calculé est proche de la loi "uniforme" pour Ceres et de la loi de Lambert pour Vesta. Néanmoins, les résidus de la planète Vesta ne sont pas centrés, ils exhibent des erreurs systématiques non modélisées. Ces erreurs sont propres à la planète et peuvent provenir du modèle de diffusion de la lumière. Nous avons supposé que la planète était sphérique et de surface homogène, or cette planète possède une tache sombre, ce qui entraîne des variations sur la magnitude absolue de  $\simeq 0,1$  unité. Il faudra donc affiner le modèle de diffusion pour cette planète et tenir compte de l'inhomogénéité de la surface.

## 5.5 Solution générale

### 5.5.1 Observations extérieures

Dans deux articles écrits en 1936, B.V. Numerov a étudié la séparabilité des corrections sur les éphémérides de la Terre et d'une planète, et plus particulièrement la séparabilité des longitudes moyennes de ces deux corps [Num36a], [Num36b]. Il a montré alors qu'il est préférable d'avoir des observations réparties d'une quadrature à l'autre, et d'autre part, que la longitude de la Terre est moins bien déterminée que celle de la petite planète, en particulier lorsque celle-ci est distante du soleil. On remarque aussi que : la longitude moyenne de la petite planète est mieux déterminée, pour des observations réparties sur des arcs de trajectoire équivalents, lorsque les observations ont lieu autour des quadratures. Pour un télescope terrestre, la limitation en magnitude fait que les observations sont réparties autour des oppositions ;

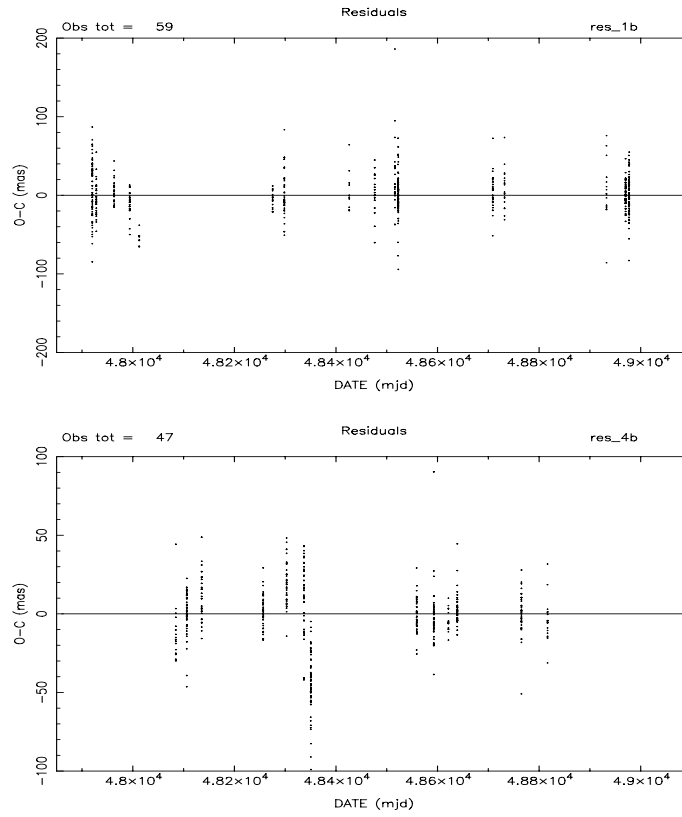


FIG. 5.16 - Résidus pour les planètes 1-Ceres et 4-Vesta :  
*Résidus pour l'ensemble des observations, en plus des variations de conditions initiales, le modèle contient un des paramètres de déplacement du photocentre. Les estimations des facteurs de variance sont alors de : 32.63, pour Ceres et : 47.33, pour Vesta.*

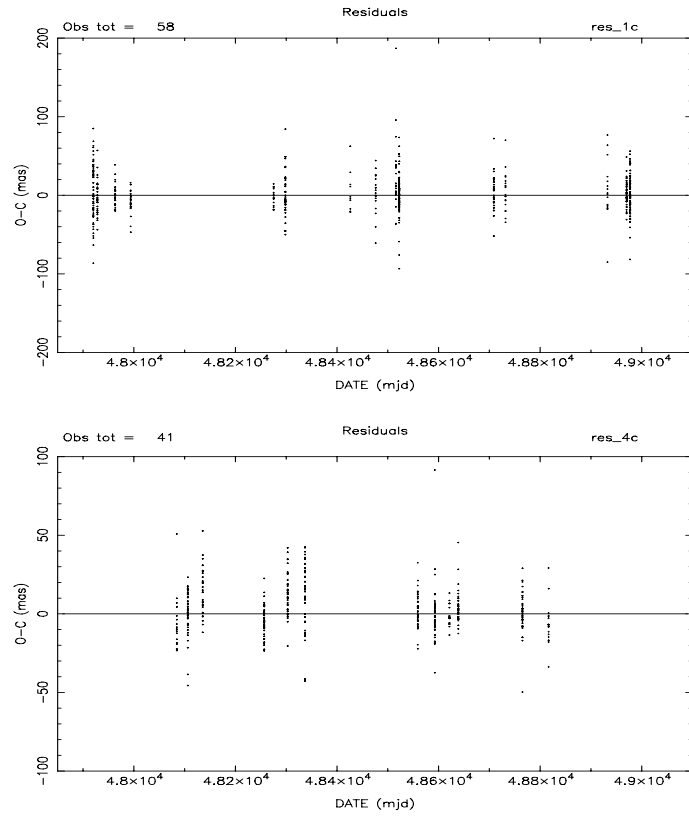


FIG. 5.17 - Résidus pour les planètes 1-Ceres et 4-Vesta :  
*Résidus après rejet des époques douteuses. Les estimations des facteurs de variance sont de : 32.63, pour Ceres et : 37.28, pour Vesta. Il subsiste des effets systématiques non modélisés pour la planète Vesta.*



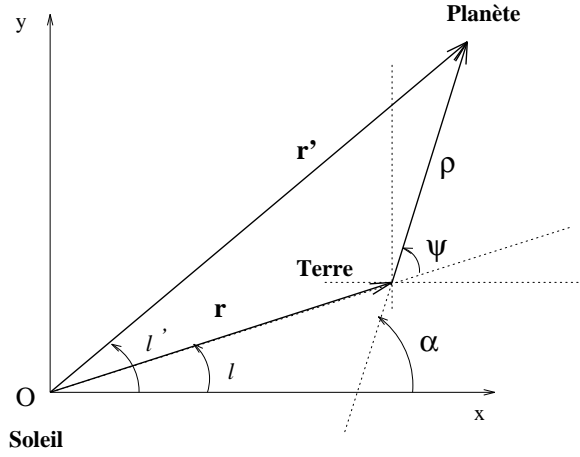


FIG. 5.18 - Apport d'observations extérieures.

*Coordonnées polaires héliocentriques de la Terre et d'une petite planète. L'élongation  $\psi = \pm 90^\circ$  correspond aux quadratures; et  $\psi = 0^\circ$  correspond à l'opposition.*

les observations Hipparcos sont par contre réparties autour des quadratures. Nous nous proposons d'étudier dans cette partie l'apport d'observations moins précises, faites au sol et au voisinage de l'opposition sur les déterminations des longitudes moyennes (à l'instant des conditions initiales) des astéroïdes et de la Terre.

Supposons que les orbites de la petite planète et de la Terre soient coplanaires. Soient alors  $\mathbf{r} = (r, l)$  et  $\mathbf{r}' = (r', l')$  les positions héliocentriques de ces deux corps en coordonnées polaires (où les quantités primées réfèrent à la Terre); soit aussi  $\rho = (\rho, \alpha)$  la position géocentrique de la petite planète (cf figure 5.18). En introduisant :

$$\gamma = \frac{r}{r'} \quad ; \quad \psi = l' - l$$

on obtient la variation  $d\alpha$ , reliée à l'écart observé en longitude de la planète, en fonction des variations sur les coordonnées polaires de la Terre et de la planète. Ces dernières variations s'expriment en fonction des quatre corrections de moyen mouvement  $d\mu$ , d'excentricité  $de$ , d'anomalie moyenne à l'instant initial  $dl_o$  et de longitude du périhélie  $dr$ . Avec  $M$  l'anomalie moyenne, et la correction de longitude moyenne à l'instant initial :  $dL_o = dl_o + dr$ , Numerov donne :

$$\begin{aligned} (\gamma + 1/\gamma - 2 \cos \psi) d\alpha = & a(M, \psi, \gamma).de + a'(M', \psi, 1/\gamma).de' \\ & + b(\mu, \psi, \gamma, t).d\mu + b'(\mu', \psi, 1/\gamma, t).d\mu' \\ & + c(M, \psi, \gamma).e.dl_o + c'(M', \psi, 1/\gamma).e.dl'_o \\ & + (\gamma - \cos \psi).dL_o + (1/\gamma - \cos \psi).dL'_o \end{aligned}$$

Il apparaît alors que les corrections de longitude moyenne dépendent uniquement de la géométrie des observations, tandis que les coefficients des autres inconnues sont variables au cours des observations. Ainsi, si les observations d'une planète sont telles que  $\gamma = cte$  et  $\psi = cte$ , les deux paramètres  $dL_o$  et  $dL'_o$  ne peuvent être déterminés. Soit alors :

$$m = \gamma - \cos \psi \quad ; \quad n = 1/\gamma - \cos \psi \quad ; \quad \Gamma = \gamma + 1/\gamma \quad (5.12)$$

l'équation de condition réduite aux corrections sur les longitudes moyennes devient :

$$d\alpha = \frac{m}{m+n} \cdot dL_o + \frac{n}{m+n} \cdot dL'_o \quad (5.13)$$

on voit ainsi que si les observations sont faites au moment des quadratures, la longitude moyenne  $dr' + dl'_o$  de la Terre est indéterminée. Nous nous proposons de donner une expression analytique des écarts type  $\sigma(dL_o)$  et  $\sigma(dL'_o)$ ; ceux-ci peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sigma(dL_o) = \xi \cdot \sigma_o / \sqrt{N} \quad ; \quad \sigma(dL'_o) = \eta \cdot \sigma_o / \sqrt{N} \quad (5.14)$$

où  $\sigma_o$  est le facteur de variance,  $N$  le nombre d'observations, et où  $\xi$  et  $\eta$  sont représentatifs de la précision des résultats. Soit  $\mathcal{N}$  la matrice normale associée aux équations de conditions (5.13):

$$\mathcal{N} \equiv N \cdot \begin{pmatrix} A'' & C'' \\ C'' & B'' \end{pmatrix}, \text{ on a : } \xi = \left( \frac{B''}{A''B'' - C''^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \eta = \left( \frac{A''}{A''B'' - C''^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En supposant que les  $N$  observations sont réparties uniformément sur un arc délimité par  $\psi \in [\psi_1; \psi_2]$ , on peut écrire :

$$A'' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \frac{m}{m+n} \right)^2 = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left( \frac{m}{m+n} \right)^2 d\psi \quad (5.15)$$

$$B'' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \frac{n}{m+n} \right)^2 = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left( \frac{n}{m+n} \right)^2 d\psi \quad (5.16)$$

$$C'' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{1}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{mn}{(m+n)^2} d\psi \quad (5.17)$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} f(\psi) &= \left( \frac{m}{m+n} \right)^2 = \frac{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos \psi - \sin^2 \psi}{(\Gamma - 2 \cos \psi)^2} \\ g(\psi) &= \left( \frac{n}{m+n} \right)^2 = \frac{1 + 1/\gamma^2 - 2/\gamma \cos \psi - \sin^2 \psi}{(\Gamma - 2 \cos \psi)^2} \\ h(\psi) &= \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{2 - \Gamma \cos \psi - \sin^2 \psi}{(\Gamma - 2 \cos \psi)^2} \end{aligned}$$

ces trois fonctions sont de la forme :

$$k(\psi) = \frac{a' + b' \cos \psi}{(a + b \cos \psi)^2} - \frac{\sin^2 \psi}{(a + b \cos \psi)^2}$$

Soit alors la primitive :

$$\mathbf{I} = \int \frac{a' + b' \cos \psi}{(a + b \cos \psi)^2} d\psi - \int \frac{\sin^2 \psi}{(a + b \cos \psi)^2} d\psi$$

on obtient :

$$\mathbf{I} = \left[ \frac{ab' - a'b}{a^2 - b^2} - \frac{1}{b} \right] \frac{\sin \psi}{a + b \cos \psi} + \left[ \frac{aa' - bb'}{a^2 - b^2} - \frac{a}{b} \right] \cdot \int \frac{d\psi}{a + b \cos \psi} + \frac{\psi}{b^2}$$

avec

$$\int \frac{d\psi}{a + b \cos \psi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan(\psi/2)}{a + b} \right)$$

Les observations Hipparcos ne donnent pas la variation en longitude  $d\alpha$ , mais la variation sur le RGC  $d\alpha' = \cos g d\alpha$ , où  $g$  est l'inclinaison du RGC sur l'écliptique. L'équation de condition (5.13) devient

$$d\alpha' = \cos g \left( \frac{m}{m+n} \cdot dL_o + \frac{n}{m+n} \cdot dL'_o \right)$$

De plus, nous supposons dans la suite que les orbites de la Terre et de la petite planète sont circulaires ( $\gamma \simeq r = cte$ ). Avec  $\phi = 47^\circ$ , complémentaire de l'angle constant entre la direction de l'axe du satellite et la direction du soleil, on trouve :

$$\cos^2 g = 1 - \sin^2 \phi \frac{\Gamma - 2 \cos \psi}{\gamma \sin^2 \psi}$$

on obtient, pour des observations uniformément réparties, les composantes de la matrice normale, en fonction des composantes des équations (5.15) à (5.17) :

$$A' = A'' - \frac{\sin^2 \phi}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{(\gamma - \cos \psi)^2}{\gamma \sin^2 \psi (\Gamma - 2 \cos \psi)} d\psi \quad (5.18)$$

$$B' = B'' - \frac{\sin^2 \phi}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{(1/\gamma - \cos \psi)^2}{\gamma \sin^2 \psi (\Gamma - 2 \cos \psi)} d\psi \quad (5.19)$$

$$C' = C'' - \frac{\sin^2 \phi}{\psi_2 - \psi_1} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{(\gamma - \cos \psi)(1/\gamma - \cos \psi)}{\gamma \sin^2 \psi (\Gamma - 2 \cos \psi)} d\psi \quad (5.20)$$

où

$$\begin{aligned} \int \frac{(1/\gamma - \cos \psi)^2}{\gamma \sin^2 \psi (\Gamma - 2 \cos \psi)} d\psi &= \frac{\cos \psi}{\sin \psi} + \frac{1}{\gamma} \int \frac{d\psi}{\Gamma - 2 \cos \psi} \\ \int \frac{(\gamma - \cos \psi)^2}{\gamma \sin^2 \psi (\Gamma - 2 \cos \psi)} d\psi &= \frac{\cos \psi}{\gamma \sin \psi} + \frac{1}{\gamma} \int \frac{d\psi}{\Gamma - 2 \cos \psi} \\ \int \frac{(\gamma - \cos \psi)(1/\gamma - \cos \psi)}{\gamma \sin^2 \psi (\Gamma - 2 \cos \psi)} d\psi &= \frac{1}{\gamma \sin \psi} + \frac{1}{\gamma} \int \frac{d\psi}{\Gamma - 2 \cos \psi} \end{aligned}$$

Le calcul des coefficients  $\xi$  et  $\eta$  de l'équation (5.14) se fait alors en supposant que les observations sont uniformément réparties, et avec la même densité, sur les trois intervalles  $[\psi_1; \psi_2]$ ,  $[-\psi_2; \psi_1]$  et  $[-\psi_3; \psi_3]$ . Les intervalles délimités par les élongations  $\psi_1$  et  $\psi_2$  représentent les observations autour des quadratures, et l'angle  $\psi_3$  correspond aux observations au voisinage de l'opposition. Les angles  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont fonctions de la distance héliocentrique  $\gamma$ ; soient  $L$  et  $\psi$  les élongations géocentrique et héliocentrique de l'astéroïde, on a pour les observations Hipparcos (cf figure 5.19) :

$$\sin \psi = \Delta \cdot \frac{\sin L}{\gamma} = \frac{\sin L}{\gamma} \cdot \left( \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 L} + \cos L \right) \quad ; \quad L \in [\phi; \pi - \phi]$$

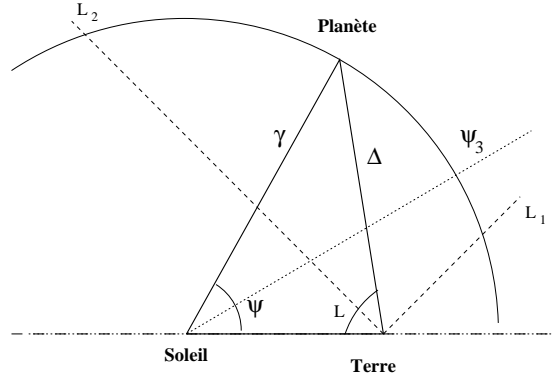


FIG. 5.19 - Observations autour de l'opposition et d'une quadrature.

*Les observations autour de l'opposition ont lieu sur l'arc  $[-\psi_3; \psi_3]$ . L'observation au voisinage de la quadrature a lieu sur l'arc sous tendu par les élongations  $L_1$  et  $L_2$ ; on obtient par symétrie la portion de la trajectoire observée à l'autre quadrature.*

et les relations sur les valeurs limites des élongations héliocentriques<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sin^{-1} \left[ \frac{\sin \phi}{\gamma} \left( \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \phi} - \cos \phi \right) \right] \\ \psi_2 &= \pi - \sin^{-1} \left[ \frac{\sin \phi}{\gamma} \left( \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \phi} + \cos \phi \right) \right]\end{aligned}$$

On suppose de plus que les observations Hipparcos sont de même précision  $\sigma_o$ , et que les observations au sol sont faites avec une erreur d'écart type  $\sigma_T$ . Soit le poids  $\sqrt{p} = \frac{\sigma_o}{\sigma_T}$ , et la densité  $\delta = N_q/(\psi_2 - \psi_1) = N_T/(2\psi_3)$  identique pour les  $N_q$  observations autour des quadratures et les  $N_T$  observations au voisinage de l'opposition. La matrice normale pour l'ensemble des observations devient :

$$\mathcal{N} \equiv 2\delta \cdot \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$$

$$A = A' + p \int_0^{\psi_3} \left( \frac{m}{m+n} \right)^2 d\psi \quad (5.21)$$

$$B = B' + p \int_0^{\psi_3} \left( \frac{n}{m+n} \right)^2 d\psi \quad (5.22)$$

$$C = C' + p \int_0^{\psi_3} \frac{mn}{(m+n)^2} d\psi \quad (5.23)$$

où les termes  $A, B$  et  $C$  sont déduits des équations (5.15) à (5.20).

Nous pouvons donc calculer les précisions sur les corrections de longitude moyenne à l'instant initial, en fonction de la distance héliocentrique de la planète  $r \simeq \gamma$ , des élongations maximales autour de l'opposition  $\psi_3$ , et pour une pondération  $p$  donnée.

<sup>4</sup>Pour des petites planètes de la ceinture principale on a la propriété :  $(\gamma \geq 2 > \tan \phi \Rightarrow \psi_2 > \pi/2)$

Les coefficients  $\xi$  et  $\eta$  s'écrivent :

$$\xi = \left( \frac{2B}{AB - C^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta = \left( \frac{2A}{AB - C^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si on détermine simultanément les corrections de longitude moyenne de la Terre et celles de plusieurs planètes, l'équation de condition (5.13), pour la  $k^{\text{ème}}$  observation de la  $i^{\text{ème}}$  planète s'écrit :

$$d\alpha_i = \frac{m}{m+n} \cdot dL_{o,i} + \frac{n}{m+n} \cdot dL'_o$$

où, par souci de simplicité, les indices  $k$  ne sont pas marqués. On en déduit l'équation normale, relative aux observations de la  $i^{\text{ème}}$  planète, pour l'inconnue  $dL'_o$  :

$$\left( A'_i - \frac{C'^2_i}{B'_i} \right) dL'_o = \sum_k \left( \frac{n}{m+n} d\alpha_i \right) - \frac{C'_i}{A'_i} \sum_k \left( \frac{m}{m+n} d\alpha_i \right)$$

avec :

$$A'_i = \sum_k \left( \frac{m}{m+n} \right)^2 \quad ; \quad B'_i = \sum_k \left( \frac{n}{m+n} \right)^2 \quad ; \quad C'_i = \sum_k \frac{mn}{(m+n)^2}$$

On obtient finalement le facteur de précision pour l'ensemble des observations :

$$\eta_g = \left( \sum_i \frac{AB - C^2}{2A} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

où les coefficients  $A, B$  et  $C$  sont donnés par les équations (5.21) à (5.23). Les demi-grands axes des petites planètes varient entre 2,2 et 3,2  $UA$  (cf histogramme 3.2). Afin de remarquer la progression des coefficients de précisions, nous découpons cet intervalle en tranches de 0,1  $UA$ . Dans le tableau ci-dessous, on donne, pour les 48 planètes, les valeurs des coefficients de précision  $\xi$  et  $\eta$  pour les observations Hipparcos uniquement, les coefficients  $\xi_p$  et  $\eta_p$  avec les observations au sol (pour des poids tels que  $p = 0,05$ , et  $\psi_3 = 75^\circ$ ), et le nombre de planètes appartenant à l'intervalle de distance héliocentrique considérée. On donne enfin le facteur de précision  $\eta_g$  pour l'ensemble des observations, avec ou sans observations au voisinage

de l'opposition.

$\gamma = 2.25$	nbre pla: 3	$\gamma = 2.75$	nbre pla: 6
$\eta = 1.67$	$\eta_p = 1.55$	$\eta = 1.49$	$\eta_p = 1.38$
$\xi = 0.33$	$\xi_p = 0.33$	$\xi = 0.24$	$\xi_p = 0.23$
$\gamma = 2.35$	nbre pla: 9	$\gamma = 2.85$	nbre pla: 4
$\eta = 1.02$	$\eta_p = 0.94$	$\eta = 1.90$	$\eta_p = 1.76$
$\xi = 0.19$	$\xi_p = 0.19$	$\xi = 0.29$	$\xi_p = 0.28$
$\gamma = 2.45$	nbre pla: 8	$\gamma = 2.95$	nbre pla: 3
$\eta = 1.13$	$\eta_p = 1.05$	$\eta = 2.28$	$\eta_p = 2.11$
$\xi = 0.20$	$\xi_p = 0.20$	$\xi = 0.33$	$\xi_p = 0.33$
$\gamma = 2.55$	nbre pla: 4	$\gamma = 3.05$	nbre pla: 2
$\eta = 1.68$	$\eta_p = 1.55$	$\eta = 2.90$	$\eta_p = 2.69$
$\xi = 0.29$	$\xi_p = 0.28$	$\xi = 0.41$	$\xi_p = 0.40$
$\gamma = 2.65$	nbre pla: 5	$\gamma = 3.15$	nbre pla: 4
$\eta = 1.57$	$\eta_p = 1.45$	$\eta = 2.12$	$\eta_p = 1.97$
$\xi = 0.26$	$\xi_p = 0.25$	$\xi = 0.29$	$\xi_p = 0.28$

observations Hipparcos	: $\eta_g = 0.493$
observations au sol $p = 0,05$	: $\eta_g = 0.456$

Sont donnés dans la table suivante, les valeurs des facteurs de précision pour différents rapports d'erreurs d'observations. A titre indicatif, si l'on complète les observations Hipparcos par des observations de *même précision*, le facteur de précision sur  $\sigma(dL'_o)$  est :  $\eta_g = 0.286$  ; soit un gain d'environ 40% :

$\sigma_T \approx$	0",03	0",04	0",07	0",10	0",15
$p =$	1	0.5	0.2	0.1	0.05
$\eta_g =$	0.286	0.331	0.391	0.428	0.456

Avec des erreurs d'observations au sol de l'ordre de 0",15 et des observations précises à 0",03 pour Hipparcos, on obtient des poids  $\sqrt{p} \simeq 0,2$ . L'arc de trajectoire correspondant aux observations au sol est déterminé par l'angle  $\psi_3 = \pm 75^\circ$ . L'apport d'observations complémentaires pour le calcul de la correction  $dL_o$  d'une planète est négligeable ( $\xi_p \simeq \xi$ ). En complétant les observations Hipparcos par des observations, de précision moindre, faites à partir du sol, la détermination de la longitude moyenne de l'orbite osculatrice de la Terre à l'instant initial est légèrement améliorée : le gain en précision est de 7%.

Le gain est donc faible, de plus nous n'avons pas tenu compte de la différence d'orientation entre le repère lié à la sphère Hipparcos et le repère lié aux positions calculées. Soit  $w_{o,z}$  la correction constante à apporter aux longitudes observées, l'équation de condition (5.13) devient alors :

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= -w_{o,z} + \frac{m}{m+n} \cdot dL_o + \frac{n}{m+n} \cdot dL'_o \\
 &= \frac{m}{m+n} \cdot (dL_o - w_{o,z}) + \frac{n}{m+n} \cdot (dL'_o - w_{o,z})
 \end{aligned}$$

On remarque alors que le système est indéterminé : les longitudes moyennes sont déterminées à une constante près. Nous avons supposé dans cette partie que les trajectoires de la Terre et de la petite planète étaient coplanaires, nous verrons dans la section suivante que cette indétermination subsiste dans le cas général.

### 5.5.2 Indétermination en orientation

Considérons uniquement les termes d'orientation des orbites des planètes et de la Terre, et l'orientation de la sphère Hipparcos par rapport au repère inertiel. En conservant les mêmes notations pour les paramètres à déterminer, on écrit :

$$d\mathbf{q}_i \equiv (dr, dp, dq) \quad ; \quad d\mathbf{q}_o \equiv (dr_o, dp_o, dq_o)$$

Les équations de conditions s'écrivent alors :

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c}) = P(\mathbf{u}, d\mathbf{u})$$

avec  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} - \mathbf{s}$ , et :

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{q}_i \times \mathbf{x} - d\mathbf{q}_o \times \mathbf{X} + \mathbf{u} \times [\mathbf{W}_o + (t - t_o) \cdot \mathbf{W}_1]$$

Ecrivons cette équation en faisant apparaître la position géocentrique du satellite :

$$d\mathbf{u} = (d\mathbf{q}_i - \mathbf{W}_o) \times \mathbf{x} - (d\mathbf{q}_o - \mathbf{W}_o) \times \mathbf{X} - \mathbf{s} \times \mathbf{W}_o + (t - t_o) \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{W}_1$$

les différences observées sur les RGC sont alors

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{(\mathbf{z} \times \mathbf{u})^2} \cdot \left\{ (d\mathbf{q}_i - \mathbf{W}_o) \times \mathbf{x} - (d\mathbf{q}_o - \mathbf{W}_o) \times \mathbf{X} + \mathbf{W}_o \times \mathbf{s} + (t - t_o) \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{W}_1 \right\}$$

La partie dépendante du temps est entièrement séparée des autres paramètres considérés ici. En revanche le vecteur  $\mathbf{s} \times \mathbf{W}_o$  est de norme faible par rapport aux distances des planètes intervenant dans cette équation :

$$\frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{x}|} \leq \frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{X}|} \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$$

et on peut considérer que ces inégalités restent vérifiées pour les différentes rotations entrant dans cette somme (les déplacements infinitésimaux sont à peu près du même ordre de grandeur :  $\approx 100 \text{ mas}$ ). Ainsi la contribution de la position du satellite sur les  $o-c$  est négligeable, et on a **pour la partie constante** de la rotation :

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \simeq \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{(\mathbf{z} \times \mathbf{u})^2} \cdot \left\{ (d\mathbf{q}_i - \mathbf{W}_o) \times \mathbf{x} - (d\mathbf{q}_o - \mathbf{W}_o) \times \mathbf{X} \right\}$$

L'orientation de la sphère Hipparcos (ou de l'orbite de la Terre) à l'époque  $t_o$  intervient par conséquent comme un terme de jauge et ne peut pas être déterminée explicitement. Nous pouvons toutefois imposer cette orientation par le résultat du lien de la sphère Hipparcos au FK5, ou bien chercher la solution de norme minimale, ou encore apporter une contrainte supplémentaire sur l'inconnue  $d\mathbf{q}_o$  (réduite aux termes d'orientations). En posant alors  $d\mathbf{q}_o = 0$  nous pouvons calculer les corrections sur les conditions initiales des planètes et la rotation de la sphère Hipparcos par rapport au système DE 200.

### 5.5.3 Rotation de la sphère Hipparcos

La rotation de la sphère Hipparcos est la matrice de passage (rotation infinitésimale) des coordonnées dans le repère DE 200 à celles du repère Hipparcos :  $\mathbf{u}_{Hipp} = \mathbf{u}_{DE\ 200} + \mathbf{u}_{DE\ 200} \times \mathbf{W}$ . La solution générale, s'écrit en utilisant la décomposition SVD de l'équation (5.11); factorisation de la matrice aux équations associées aux corrections  $d\mathbf{q}_i$  des éphémérides héliocentriques des petites planètes. Soit  $\sqrt{p_i}B_i = U_i W_i V_i^t$  cette décomposition; notons  $\widetilde{W}_i$  la matrice diagonale dont certaines valeurs singulières sont nulles, et  $\widetilde{B}_i = U\widetilde{W}_iV^t \simeq \sqrt{p_i}B_i$  la nouvelle matrice pondérée associée à la solution de norme minimale. On a la relation :

$$\sqrt{p_i}\widetilde{B}_i(\widetilde{B}_i^t p_i \widetilde{B}_i)^{-1} \widetilde{B}_i^t \sqrt{p_i} = \widetilde{U}_i \widetilde{U}_i^t$$

où la matrice  $\widetilde{U}_i$  est définie par :

$$\begin{cases} \widetilde{U}_i[j, k] = \frac{U_i[j, k]}{w_k} & \text{si } w_k \neq 0 \\ \widetilde{U}_i[j, k] = 0 & \text{si } w_k = 0 \end{cases}$$

Cette matrice dépend de la solution choisie, plus exactement de la famille génératrice de l'espace  $Im(B)$  retenue. Les équations générales (5.6) s'écrivent :

$$\begin{cases} U_n = \sum_i A_i^t \sqrt{p_i} (I - \widetilde{U}_i \widetilde{U}_i^t) \sqrt{p_i} A_i \\ \bar{\mathbf{g}} = U_n^{-1} \sum_i [A_i^t \sqrt{p_i} (I - \widetilde{U}_i \widetilde{U}_i^t)] \sqrt{p_i} (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i \\ d\bar{\mathbf{q}}_i = V_i \widetilde{W}_i^{-1} \widetilde{U}_i^t \sqrt{p_i} [(\mathbf{o} - \mathbf{c})_i - A_i \bar{\mathbf{g}}] \end{cases} \quad (5.24)$$

avec éventuellement  $\widetilde{W}_i = W_i$  et  $\widetilde{U}_i = U_i$ .

Les corrections  $d\bar{\mathbf{q}}_i$  dépendent évidemment de la dimension retenue pour la matrice  $B_i$ . En revanche la solution globale  $\bar{\mathbf{g}}$  en est presque indépendante, elle ne dépend que des approximations  $Im(B_i) \approx Im(\widetilde{B}_i)$ . Si le choix de la matrice  $\widetilde{U}_i$  pour une planète donnée (ou plusieurs) est inadéquat, les deux solutions sur les paramètres globaux : solution directe sans recherche du rang, et solution de norme minimale pour les paramètres  $d\mathbf{q}_i$ , seront sensiblement différentes.

Les résidus s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= (\mathbf{o} - \mathbf{c})_i - (A_i \bar{\mathbf{g}} + B_i \bar{\mathbf{q}}_i) \\ &= (I - \widetilde{U}_i^t \widetilde{U}_i) ((\mathbf{o} - \mathbf{c})_i - A_i \bar{\mathbf{g}}) \end{aligned}$$

Et les vérifications de la construction de la matrice normale et son inversion sont

$$\begin{cases} B_i^t p_i \mathbf{v}_i = 0 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^N A_i^t p_i \mathbf{v}_i = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons donc calculer deux types de solutions fonction du choix de la décomposition SVD retenue ( $W_i$  ou  $\widetilde{W}_i$ ). La matrice  $U_n$  définie à l'équation (5.24) est liée à la variance du vecteur solution  $d\bar{\mathbf{g}}$  (voir section 5.2); par abus de langage, nous l'appellerons matrice normale puisque nous nous intéresserons désormais plus particulièrement à la solution des paramètres communs à toutes les observations.

Remarque :



Si on émet l'hypothèse<sup>5</sup> que  $d\mathbf{q}_o = d\mathbf{q}_i = \mathbf{0}$ , et que l'on considère les approximations :  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u} \simeq \mathbf{0}$  et  $(\mathbf{z} \times \mathbf{u})^2 \simeq \mathbf{u}^2$ ; les écarts entre abscisses observées et abscisses calculées sur les RGC deviennent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{o} - \mathbf{c}) &= \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{u}}{(\mathbf{z} \times \mathbf{u})^2} \cdot \left( \mathbf{u} \times [\mathbf{W}_o + (t - t_o) \cdot \mathbf{W}_1] \right) \\ &\simeq -\mathbf{z} \cdot [\mathbf{W}_o + (t - t_o) \cdot \mathbf{W}_1] \end{aligned}$$

On voit ainsi que la rotation de la sphère Hipparcos apporte des termes périodiques, d'amplitude linéairement croissante au cours du temps, sur les  $o-c$ .

#### 5.5.4 Solution classique des moindres carrés

C'est la solution des moindres carrés pour l'ensemble des inconnues et avec l'ensemble des observations retenues. Celle-ci fait apparaître l'indétermination en orientation et les variances des paramètres associés à la loi de diffusion (linéarisée par rapport à l'angle de phase). Nous obtenons aussi une estimation du facteur de variance servant de valeur de référence. Les données de la planète 27–Euterpe ne sont pas considérées; par contre les solutions, des paramètres communs à toutes les observations, ne sont pas sensibles aux observations de la planète 31–Euphrosyne. Les résultats portent donc sur 47 planètes.

Données générales :

$\sigma_o$	: 30.0	estimation $\tilde{\sigma}_o$	: 33.1
nombre d'observations	: 20 229	rms moyen par T4	: 34.3
nombre de planètes	: 47	nombre de $d\mathbf{q}_i$	: 47
conditionnement	: $3.7 \cdot 10^{11}$	déterminant	: $1.2 \cdot 10^{+17}$

Les données relatives aux petites planètes (corrélation, valeurs singulières,...) sont données en annexe A.1. L'inversion de la matrice normale se fait à l'aide de la décomposition SVD; soit  $U_n = U \cdot W \cdot V^t$  cette décomposition, les valeurs singulières  $w_i$  de la matrice normale sont données dans le tableau suivant :

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_3$	$w_5$	$w_6$	$w_7$
2.220E+06	8.321E+03	3.354E+03	2.582E+03	2.154E+03	1.592E+03	1.247E+03
$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$w_{11}$	$w_{12}$	$w_{13}$	$w_{14}$
5.747E+02	1.063E+02	7.030E+01	1.812E-02	2.179E-05	5.962E-06	1.673E-05

Quatre paramètres, correspondant aux valeurs singulières  $w_{11}$  à  $w_{14}$  sont donc faiblement déterminés (le rang de ce système est égal à 10), en prenant comme inconnues les paramètres  $(dl_o + dr)$ ,  $dp$ ,  $dq$  et  $edr$  pour l'orbite osculatrice de la Terre, on fait apparaître les indéterminations sur les orientations données plus haut. Ici l'orientation de l'orbite est donnée par ces composantes dans le repère J 2000, et non pas dans un repère lié au périhélie de l'époque de référence; ainsi la rotation de la sphère Hipparcos et la correction sur l'orientation de l'orbite terrestre sont exprimées dans le même repère. Les paramètres:  $W_{o,x}$  et  $dp$ ,  $W_{o,y}$  et  $dq$ ,  $W_{o,z}$  et  $(dl_o + dr)$  sont directement comparables (la rotation globale pour la position de la Terre est exprimée par  $dl_o + dr$ ). Les solutions pour l'orientation de la sphère  $\mathbf{W}_o$  et pour les paramètres  $dp$ ,  $dq, dl_o$  et  $dr$  sont d'une part aberrantes ( $\approx 5''$ ), et

<sup>5</sup>Hypothèse sur les corrections de conditions initiales irréaliste avec les données traitées ici.

d'autre part de l'ordre des écarts type associés à ces déterminations. La matrice de corrélation complète est donnée en annexe A.2, nous présentons ci-dessous la partie correspondant aux orientations des repères liés à la sphère Hipparcos et à l'orbite osculatrice de la Terre. Les fortes corrélations (en gras) sont associées à l'indétermination d'ordre 3 du système.

$dl_o + dr$	$dp$	$dq$	$W_{o,x}$	$W_{o,y}$	$W_{o,z}$	$W_{1,x}$	$W_{1,y}$	$W_{1,z}$
1.000								
0.149	1.000							
-0.017	0.077	1.000						
0.149	<b>1.000</b>	0.077	1.000					
-0.017	0.077	<b>1.000</b>	0.077	1.000				
<b>1.000</b>	0.149	-0.017	0.149	-0.017	1.000			
-0.059	0.196	0.016	0.196	0.016	-0.059	1.000		
0.035	0.089	0.196	0.089	0.196	0.035	-0.008	1.000	
-0.054	0.187	0.147	0.187	0.147	-0.054	0.398	0.323	1.000

De plus, la corrélation entre les deux paramètres de loi de diffusion est forte :  $r(a, b) = -0.989$  (cf annexe A.2). En imposant l'orientation de l'orbite de la Terre et  $C(i) = a$ , on a la solution :

$\tilde{\sigma}_o = 33.2$		
<hr/>		
$d\mathbf{q}_o$ pour la Terre	(mas)	
$edr =$	2.24	$\pm 3.04$
$de =$	11.97	3.05
$da/a =$	0.95	0.47
<hr/>		
rotation	(mas)	
$W_{o,x} =$	16.95	1.10
$W_{o,y} =$	-8.83	1.11
$W_{o,z} =$	-84.96	2.22
<hr/>		
	(mas/an)	
$W_{1,x} =$	2.14	0.72
$W_{1,y} =$	-7.42	0.68
$W_{1,z} =$	-4.14	3.41
<hr/>		
fonction C(i)		
a =	0.73	0.03

La correction d'excentricité est significative :  $\simeq 6.10^{-8}$ ; les correction de demi-grand axe et d'argument du périhélie sont en revanche négligeables. Le demi-grand axe de l'orbite de la Terre est liée à l'unité de distance astronomique, échelle fondamentale du système solaire ; celle-ci est bien déterminée par d'autres méthodes. Nous pouvons alors considérer que  $dr = da \simeq 0$ .

### 5.5.5 Solution de norme minimale (SVD)

Nous entendons par ce titre, la solution générale des moindres carrés pour laquelle : les corrections, des éléments osculateurs des astéroïdes, sont données en fonction du rang retenu lors de la décomposition en valeurs singulières des matrices aux

équations de conditions relatives aux petites planètes. Alors, les orbites des petites planètes sont déterminées de manière plus réaliste, et il est tenu compte de la rotation globale du système des étoiles Hipparcos. Les corrections obtenues sur les éléments des petites planètes et les nouveaux éléments osculateurs sont donnés en annexes (C.2 et C.3).

Données générales :

$\sigma_o$	: 30.0	estimation $\tilde{\sigma}_o$	: 34.0
nombre d'observations	: 20 229	rms moyen par T4	: 34.3
nombre de planètes	: 47	nombre de $d\mathbf{q}_i$	: 47
conditionnement	: $2 \cdot 10^4$	déterminant	: $8.5 \cdot 10^{+31}$

$$\tilde{\sigma}_o = 34.0$$

$d\mathbf{q}_o$ pour la Terre	(mas)
$edr = 0.00$	$\pm 2.70$
$de = -0.50$	2.55
$da/a = 1.35$	0.39

rotation	(mas)
$W_{o,x} = 15.84$	1.03
$W_{o,y} = -8.82$	1.05
$W_{o,z} = -86.46$	1.79
	(mas/an)
$W_{1,x} = 1.68$	0.63
$W_{1,y} = -7.18$	0.63
$W_{1,z} = -8.15$	2.63

fonction C(i)	
$a = 0.82$	0.02

Cette solution sur les paramètres globaux est voisine de la solution précédente, les principales différences apparaissent sur les termes de rotation autour du pôle de l'écliptique. Les approximations faites, sur les corrections des éléments osculateurs des petites planètes, portent principalement sur les termes de rotation dans le plan de l'orbite, sur le demi-grand axe et sur l'excentricité. Celles-ci se répercutent sur le paramètre de la loi de diffusion, l'excentricité de l'orbite terrestre et le taux de rotation de la sphère Hipparcos autour du pôle de l'écliptique. Par ailleurs les corrélations sont bien plus importantes pour les paramètres  $da/a$ ,  $W_{1,z}$  et  $a$  ( $\approx \pm 0,5$ ), ces paramètres sont donc plus sensibles aux variations induites par les approximations de la décomposition SVD. On trouvera en annexe (B) la solution pour laquelle les observations des planètes Ceres et Pallas ont été écartées; les mêmes remarques s'appliquent, le paramètre de la loi de diffusion est toutefois plus petit pour cette solution. Mis à part la correction d'excentricité, ces variations restent néanmoins d'amplitude modérée si on les compare aux écarts type des estimations.

### 5.5.6 Validation

Nous pouvons recalculer pour chaque T4 les différences *observés - calculés*, où les positions calculées sont désormais déduites des éphémérides corrigées des petites

planètes. Nous donnons ici les résultats sur les nouveaux  $o-c$  en ne considérant que les corrections  $d\mathbf{q}$ ; des éphémérides des astéroïdes; ces corrections sont calculées soit en introduisant la rotation de la sphère Hipparcos dans le modèle (solution rigoureuse), soit en négligeant tous les autres paramètres (solution non rigoureuse). Nous obtenons alors deux solutions pour les variations sur les conditions initiales, et deux solutions correspondantes pour les résidus et les nouveaux  $o-c$ . Ces nouveaux  $o-c$ , calculés sans effet de phase, sont à comparer aux résidus. On donne à la figure 5.20 ces différents vecteurs en fonction du temps pour la planète 6–Hebe. Les résidus, figures 5.20(b) et (d), pour les deux solutions sont équivalents. Les nouveaux écarts obtenus de la figure 5.20(c) reflètent les variations dues à la rotation de la sphère Hipparcos, puisque cette rotation est modélisée lors du calcul des moindres carrés. Les nouveaux  $o-c$  de la figure 5.20(e) sont équivalents aux résidus, ceci valide la linéarisation du problème. La figure 5.21 représente des données analogues pour la planète 63–Asonia. Le nombre de paramètres déterminés pour cette planète est de trois; les nouveaux  $o-c$  obtenus (figure 5.21(e)) sont, ici aussi, analogues aux résidus. En plus de la validation de la linéarisation du problème, nous voyons que les observés sont bien représentés avec un nombre réduit de paramètres.

## 5.6 Résultats

On donne à la figure 5.22 les résidus obtenus en fonction du temps; ceux-ci contiennent les erreurs systématiques de la planète 4–Vesta, et les transits ou époques non filtrés par les test sur les abscisses et les tests sur les magnitudes. Le modèle peut être amélioré pour la planète Vesta. La validité de quelques données reste en suspens: si aucune amélioration ne peut être apportée, elles devront être supprimées. A la figure 5.23 on trouvera un histogramme de ces résidus et les effectifs cumulés correspondants ainsi que les graphes obtenus pour une loi normale centrée  $\mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_o)$ . Les résidus obtenus sont dans l'ensemble centrés, la moyenne pondérée est d'environ  $0,4 \text{ mas}$ ; leur distribution n'est qu'approximativement normale, la dispersion des résidus est plus importante que celle déduite de la loi normale. On donne à la figure 5.24 le graphe, en fonction du temps, du rapport des résidus par les erreurs quadratiques moyennes correspondantes. La dispersion des erreurs de mesure par T4 ne correspond pas à une loi normale, l'ensemble de l'échantillon des mesures en position est atteint non pas à  $3.\sigma$  mais à  $4.\sigma$ .

Nous avons calculé la rotation de la sphère Hipparcos par rapport à un référentiel inertiel, et indirectement, nous avons déterminé les corrections sur les orbites oscultrices de 47 astéroïdes de la mission. Les précisions sur les conditions initiales des petites planètes sont inégales. Les erreurs sont grandes pour les paramètres  $dr$  et  $dl_o$  pris séparément (quelques dizaines de  $mas$ ), en revanche la variable  $dr + dl_o$  est déterminée avec une précision de quelques  $mas$ . Les corrections d'excentricité et de demi-grand axe sont déterminées avec des précisions variables selon les planètes (de quelques  $mas$  à quelques dizaines de  $mas$ ), tandis que l'orientation de l'orbite oscultrice à l'époque de référence est donnée avec une excellente précision (de l'ordre du  $mas$ ). Ces généralités ne s'appliquent pas aux planètes dont le facteur de conditionnement du problème est grand, auquel cas les solutions et précisions correspondantes sont aberrantes. Nous donnons aux figures 5.25 et 5.26 les précisions rattachées aux déterminations des paramètres  $dp$  et  $dq$  en considérant la solution des moindres car-

New O-C for planet 6-HEBE

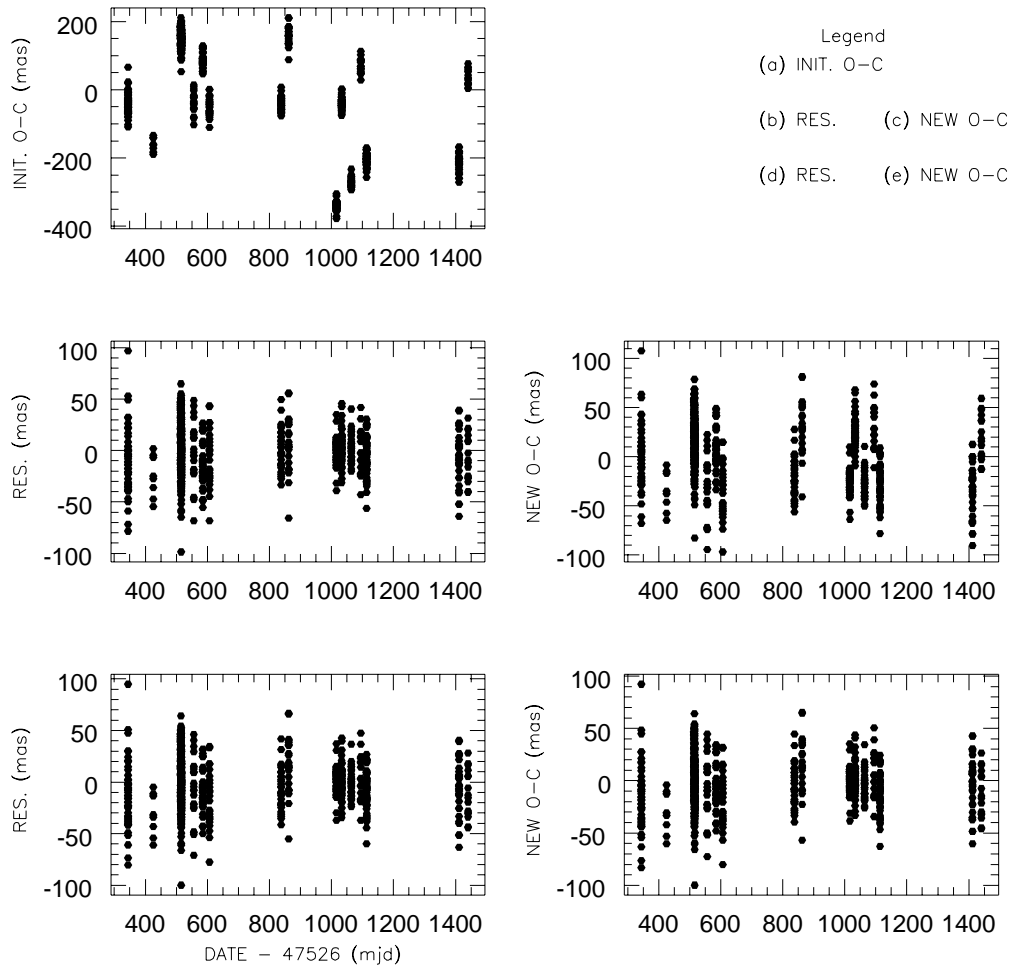


FIG. 5.20 - Nouveaux  $o-c$  pour la planète 6-Hebe.

*Des différences  $o-c$  initiales (a) on obtient la solution rigoureuse pour les variations de conditions initiales et les résidus (b). De cette solution sont déduits les nouveaux  $o-c$  (c), leurs variations reflètent la rotation de la sphère Hipparcos. On obtient aussi la solution, non rigoureuse, des variations sur les conditions initiales, les résidus (d) et les nouveaux  $o-c$  (e). Ces derniers  $o-c$  sont analogues aux résidus.*

New O-C for planet 63-AUSONIA

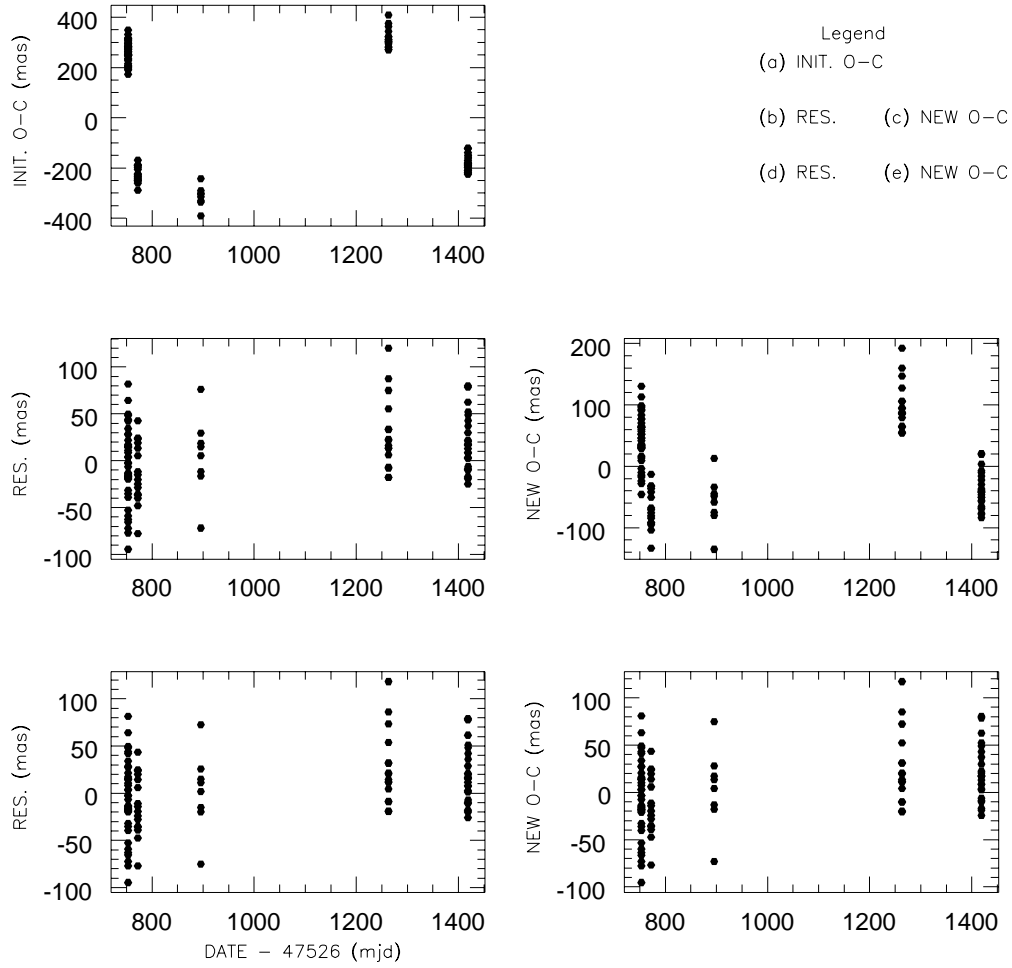


FIG. 5.21 - Nouveaux  $o-c$  pour la planète 63-Ausonia.  
 Le rang associé à la détermination des conditions initiales de cette planète est de trois. Les nouveaux  $o-c$  (e) sont analogues aux résidus (d).

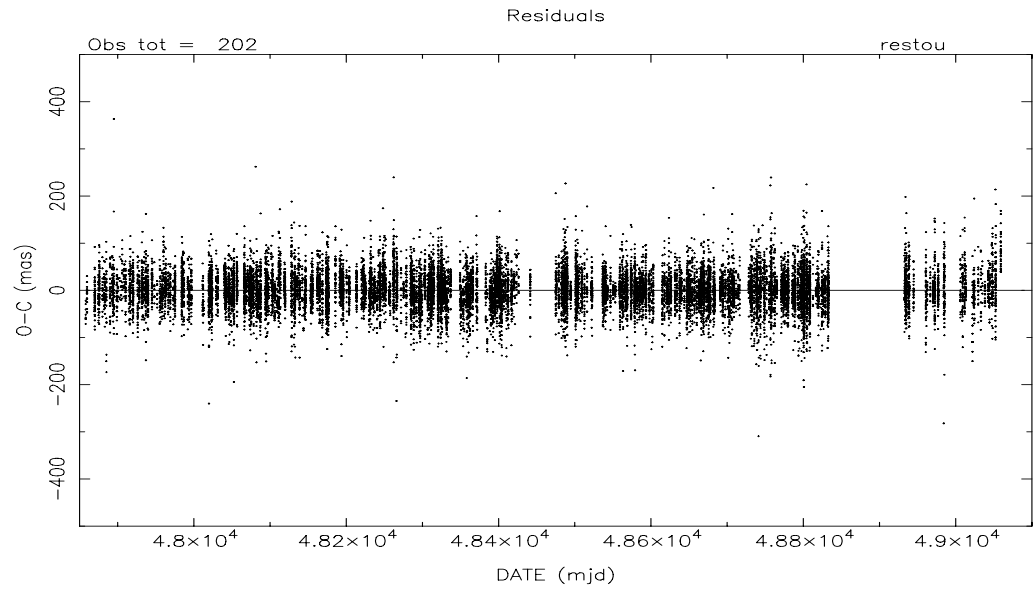


FIG. 5.22 - Résidus pour l'ensemble des observations retenues.  
*Solution des moindres carrés. Le modèle comprend les variations de conditions initiales des planètes, la rotation de la sphère Hipparcos ( $\mathbf{W}_0$ ,  $\mathbf{W}_1$ ), les paramètres liés à l'orbite osculatrice de la Terre ( $e dr$ ,  $de$ ,  $da/a$ ) et le paramètre de la loi de diffusion  $a$ .*

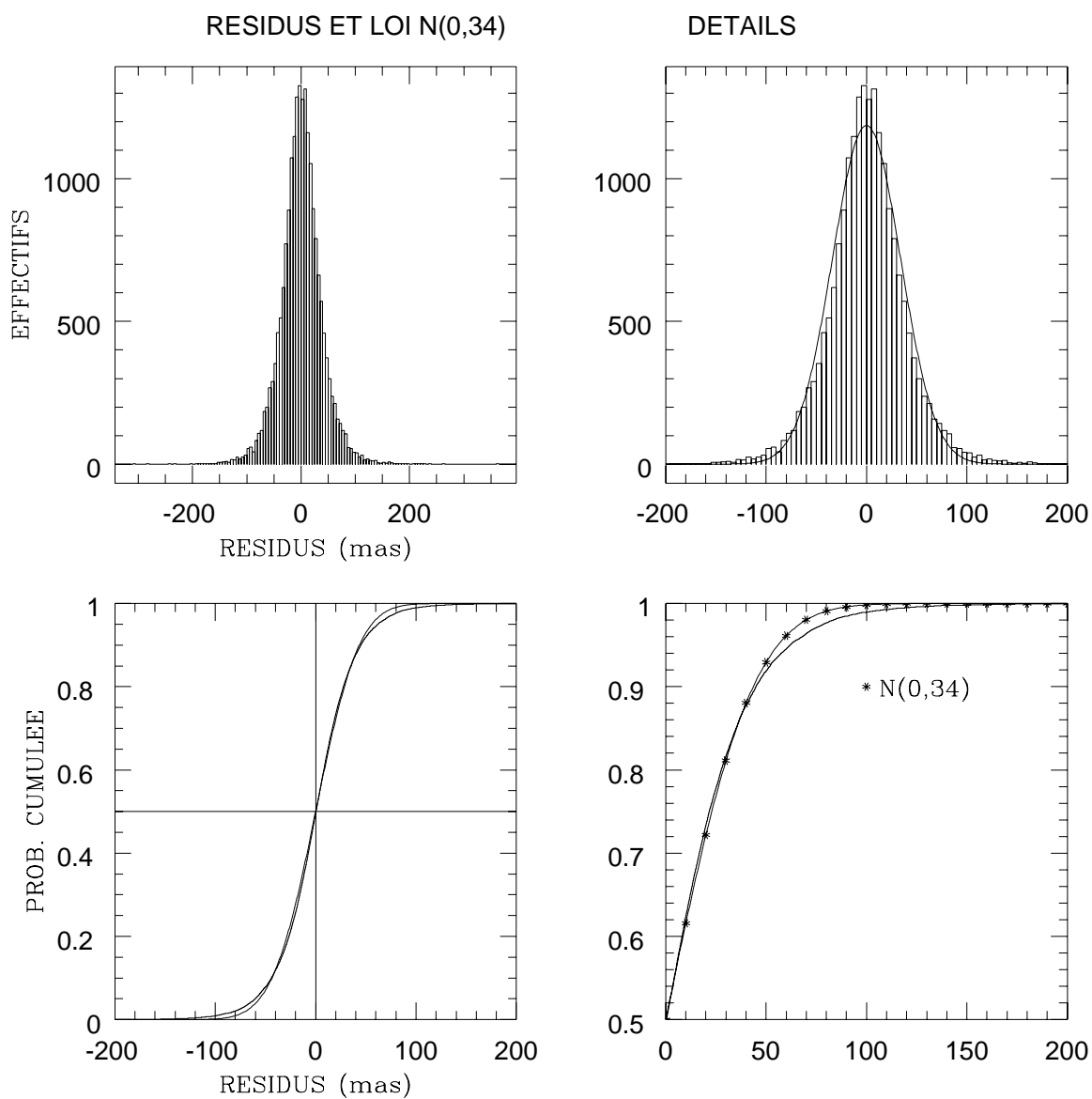


FIG. 5.23 - Résidus pour l'ensemble des observations des astéroïdes retenus.

*Les variations des conditions initiales des planètes sont celles de norme minimale. Les autres paramètres modélisés sont la rotation de la sphère et la partie constante de la fonction  $C(i)$  d'une loi de diffusion commune à toute les planètes.*



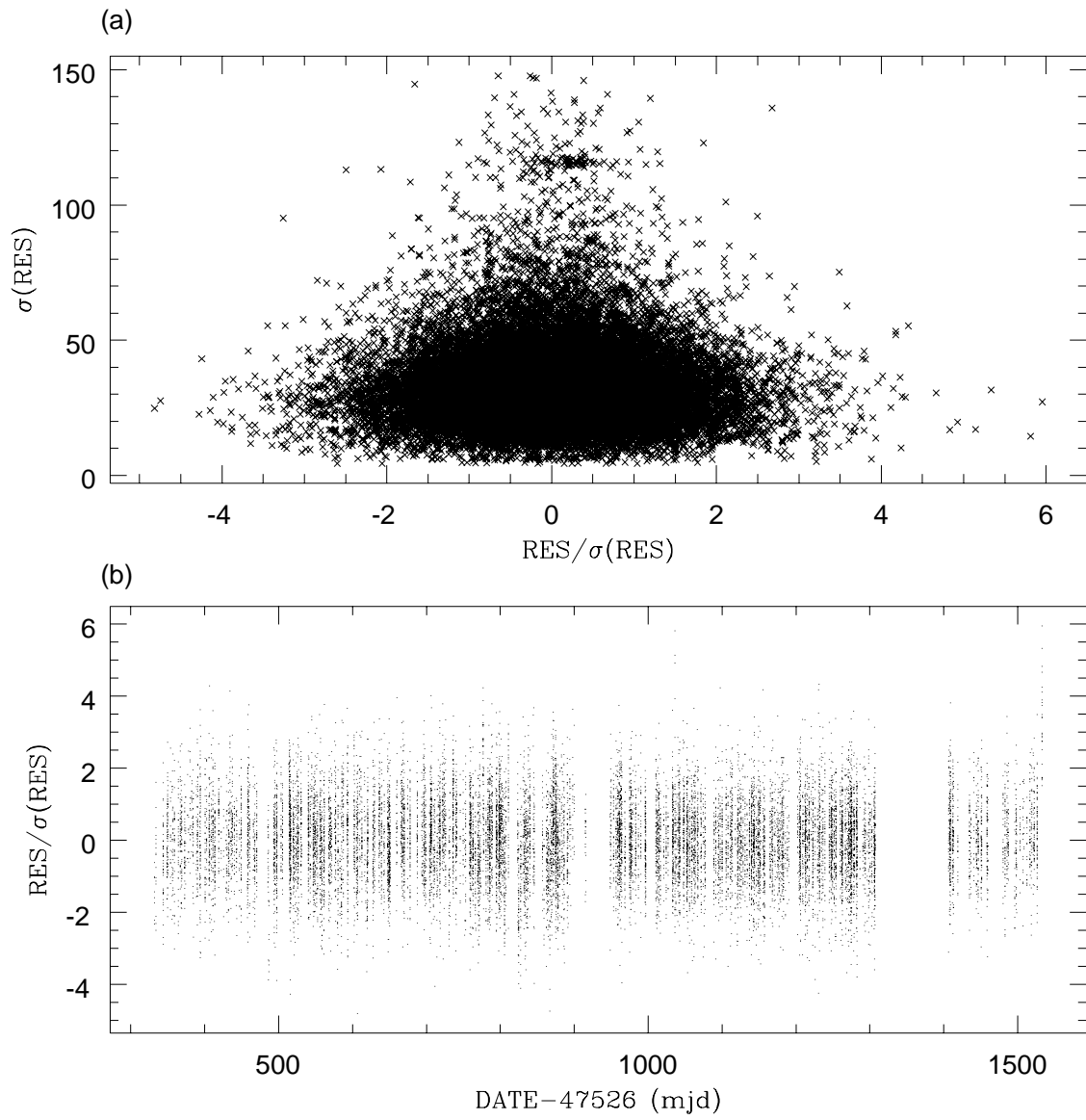


FIG. 5.24 - Quantité  $res/\sigma(res)$  sur 37 mois de données..  
*La dispersion des bruits de mesure est plus importante que prévu ;  
 les erreurs ne suivent pas une loi normale, mais une loi telle que le  
 seuil de probabilité négligeable se trouve à quatre fois l'écart type.*

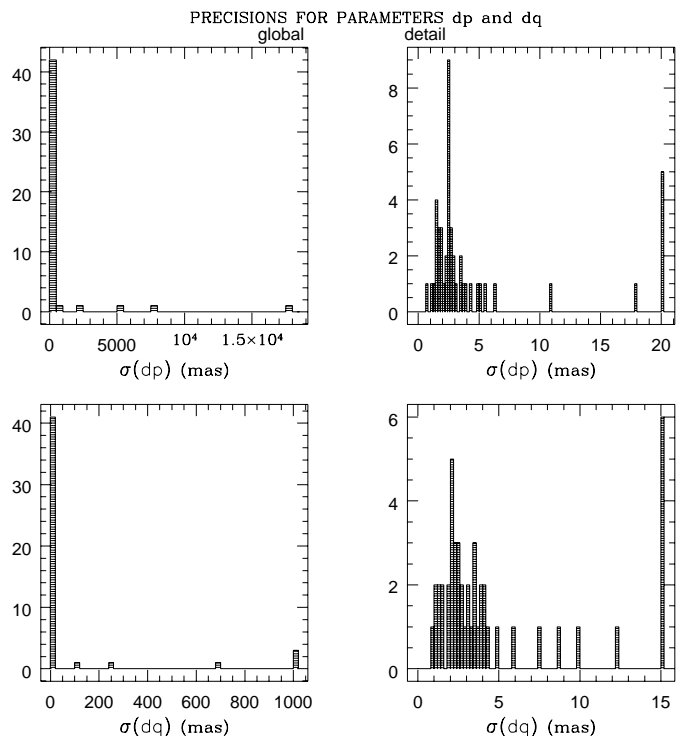


FIG. 5.25 - Précisions pour les paramètres  $dp$  et  $dq$ .  
*La solution retenue ici est la solution des moindres carrés générale comprenant les 14 inconnues globales, et les solutions des corrections sur les conditions initiales des astéroïdes.*

rés ou la solution de norme minimale. Les orientations des orbites oscultrices des 47 planètes retenues ne sont pas toutes données avec grande précision, cette orientation peut être donnée à quelques *mas*, ou rester indéterminée. Néanmoins pour la grande majorité des astéroïdes, elle est déterminée à mieux de 5 *mas* près (figure 5.25). On trouvera sur la figure 5.26 les histogrammes correspondant aux solutions de norme minimale. On donne aussi, à la figure 5.27, les précisions des déterminations des paramètres  $dr$  et  $dl_o$ , pour la solution de norme minimale. Les précisions sont en général inférieures à 5 *mas*, pour une douzaine de planètes elles sont comprises entre 10 et 100 *mas*; on retrouve aussi le fait que ces deux variables sont fortement anti-corrélées ce qui implique :  $\sigma(dr) \approx \sigma(dl_o)$ .

Les solutions, sur les variations des conditions initiales des petites planètes, présentées ici sont les solutions – réalistes – de norme minimale  $\mathbf{x}_o$ ; lorsque le rang attaché à cette solution est inférieur à six, la solution générale s'écrit:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \sum_i \alpha - i V_i$$

où  $V_i$  est le vecteur normal correspondant à la valeur singulière annulée, avec approximativement  $|\alpha - i| \propto 100$ ; ces derniers coefficients sont fonctions du facteur de conditionnement.

La rotation de la sphère est donnée dans le référentiel écliptique J 2000, par

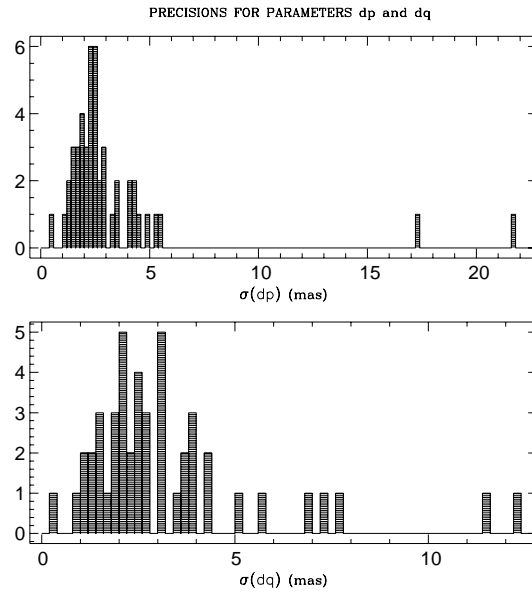


FIG. 5.26 - Précisions rattachées aux paramètres  $dp$  et  $dq$ . Ces précisions sont celles correspondant à la solution SVD, pour laquelle les variations sur les conditions initiales sont de norme minimale.

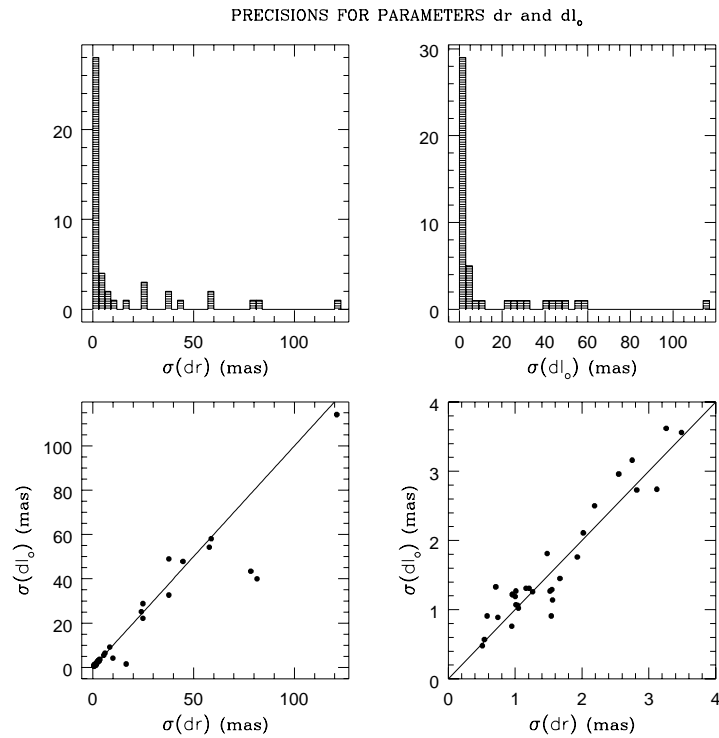


FIG. 5.27 - Précisions pour les paramètres  $dr$  et  $dl_0$ .

rapport au repère du système DE 200 :

$$\mathbf{W}_{Hipp}^{DE\ 200} |_{\text{écl.}} = \begin{vmatrix} 17 \pm 1\ mas \\ -9 \pm 1 \\ -85 \pm 2 \end{vmatrix} + (t - t_o) \cdot \begin{vmatrix} 2 \pm 1\ mas/an \\ -7 \pm 1 \\ -4 \pm 3 \end{vmatrix}$$

avec  $\varepsilon = 23^\circ 26' 21",448$  : obliquité de l'écliptique J 2000, on a la rotation exprimée dans le repère équatorial :

$$\mathbf{W}_{Hipp}^{DE\ 200} |_{\text{équ.}} = \begin{vmatrix} 17\ mas \\ 26 \\ -82 \end{vmatrix} + (t - t_o) \cdot \begin{vmatrix} 2\ mas/an \\ -8 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Les composantes de cette rotation sur le pôle de l'écliptique sont données avec une précision de  $2\ mas$  et  $3\ mas/an$ , tandis que le plan de l'écliptique est rattaché à la sphère Hipparcos avec une précision de  $1\ mas$  et  $1\ mas/an$ . Cette différence est due à la durée des observations et dans une moindre mesure à la particularité des observations Hipparcos (pas d'observation directe en longitude écliptique). Ces précisions sont comparables à celles obtenues par Folkner et al. [F<sup>+</sup>94a], pour le lien du repère de l'IERS avec celui des systèmes DE 200 et DE 210, obtenu à partir d'observations VLBI sur 14 ans et d'observations LLR depuis 1969.

Rappelons que l'orientation de la sphère Hipparcos par rapport au référentiel inertiel est donnée a priori à une rotation près. De manière plus rigoureuse, et avec  $dp$ ,  $dq$ ,  $dr + dl_o$  les rotations infinitésimales de l'orbite osculatrice de la Terre exprimées dans le repère écliptique J 2000, on a pour la rotation à l'instant  $t_o$  :

$$\begin{aligned} W_{o,x} &= 17 + dp \\ W_{o,y} &= -9 + dq \\ W_{o,z} &= -85 + (dr + dl_o) \end{aligned}$$

avec  $\Omega = 0$  et  $\varepsilon$  l'obliquité de l'écliptique on a les relations sur les éléments osculateurs déduites des équations (5.7) :

$$\begin{aligned} dp &= d\varepsilon \\ dq &= \sin \varepsilon d\Omega \\ dr &= \cos \varepsilon d\Omega + d\omega \end{aligned}$$

A la date de référence, la rotation de passage, de la sphère Hipparcos au repère dynamique, est essentiellement une rotation autour de l'axe du pôle de l'écliptique de norme  $\simeq 85\ mas$ . Néanmoins l'écliptique et l'équinoxe dynamique de la théorie (numérique DE 200, DE 210, ou analytique VSOP) sont définis dans un repère inertiel, tandis que l'écliptique et l'équinoxe des catalogues d'étoiles sont déterminés dans un repère tournant [Fri82]; ceci introduit une rotation entre les deux repères [Sta81]. Soit  $\bar{\mathbf{h}} = \langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle$  le moment angulaire moyen du barycentre Terre-Lune dans le référentiel inertiel, et  $\bar{\mathbf{h}}'$  ce moment dans un référentiel tournant; avec  $\mathbf{b}$  le vecteur rotation d'entraînement, Standish donne :

$$\bar{\mathbf{h}}' = \langle \mathbf{h} - \mathbf{r} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \rangle \quad ; \quad \bar{\mathbf{h}}' = \bar{\mathbf{h}} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

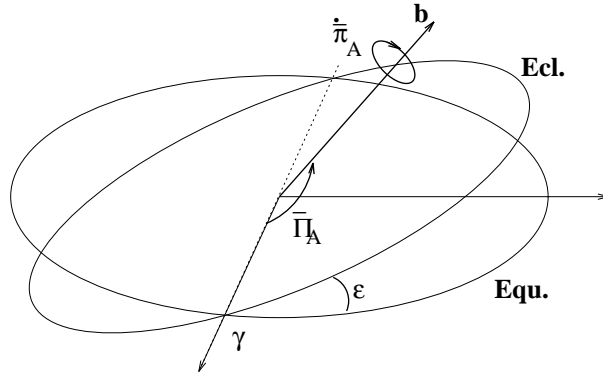


FIG. 5.28 - Repère dynamique tournant.

La rotation instantannée de l'écliptique est donnée par le vecteur  $\mathbf{b}$  de module  $\dot{\bar{\pi}}_A$ . Ce vecteur est dans le plan de l'écliptique.

l'expression, dans le repère *équatorial*, de la rotation est [L<sup>+</sup>77] (cf figure 5.28):

$$\mathbf{b}|_{\text{équ.}} = \dot{\bar{\pi}}_A \cdot \begin{vmatrix} \cos \bar{\Pi}_A \\ \sin \bar{\Pi}_A \cos \varepsilon \\ \sin \bar{\Pi}_A \sin \varepsilon \end{vmatrix}$$

$$\bar{\Pi}_A = 174^\circ,876 + 0^\circ,914 T_{2000}$$

$$\dot{\bar{\pi}}_A = (47'',003 - 0'',066 T_{2000})/cty$$

Pour J 2000 Standish donne la rotation autour de l'équinoxe et du pôle de l'écliptique en termes de "corrections" d'obliquité et d'équinoxe:  $E_{rot} - E_{ine} = -93.66 mas$ ,  $\varepsilon_{rot} - \varepsilon_{ine} = 3,34 mas$ ; on écrit alors :

$$R_{ine}^{rot}|_{\text{équ.}} = \begin{vmatrix} -3,34 mas \\ 0 \\ 93.66 mas \end{vmatrix}$$

Il faut donc tenir compte de cette rotation supplémentaire si l'on veut relier la sphère Hipparcos à un repère dynamique tournant:  $\mathbf{W}_{Hipp}^{rot} = \mathbf{W}_{Hipp}^{DE200} + R_{ine}^{rot}$ .

# CONCLUSION

Cette étude nous a permis de réduire les données en positions des astéroïdes de la mission Hipparcos. Grâce à une analyse conjointe du signal photométrique et du mouvement des petites planètes nous avons pu établir des positions astrométriques normales, réduites sur la durée d'un transit. La précision obtenue pour ces positions est d'environ  $0''.010 \sim 0''.015$ . Nous avons aussi démontré que les positions déduites du signal photoélectrique correspondent de manière approchée au photocentre de la partie éclairée des planètes ; la validité de cette approximation dépend néanmoins du diamètre apparent des objets, de l'angle phase et de la pondération des retards de phase du signal enregistré. Par ailleurs nous avons étudié la réponse du signal de modulation pour une source étendue parasité par un corps lumineux ponctuel, et nous avons mis en évidence quelques conséquences de cette lumière parasite sur les retards de phase et amplitudes de l'approximation en série de Fourier du signal observé. Ceci nous a permis alors de filtrer les observations erronées dues à l'observation simultanée d'une petite planète et d'un corps lumineux parasite. Les effets relativistes d'aberration et de déviation des rayons lumineux sont appliqués, en revanche les effets de phases ne sont pas modélisés. Ces derniers effets, proportionnels aux diamètres apparents des objets, sont en général petits par rapport aux bruits des mesures (astrométriques et photométriques) ; ils ont toutefois pu être modélisés pour les planètes Ceres et Vesta. Le modèle de diffusion de la lumière pour la planète Vesta reste néanmoins incomplet, celui-ci devrait prendre en compte les régions d'albédo contrasté de la surface de la planète.

De plus, à partir des positions des petites planètes de la mission, nous avons établi le lien de la sphère des étoiles Hipparcos au référentiel inertiel du système DE 200. L'orientation à l'époque médiane de la mission est toutefois donnée à une rotation près, celle-ci correspond aux corrections d'orientation de l'orbite terrestre. En supposant que cette erreur est de l'ordre du millième de seconde d'arc, le lien des référentiels dynamique et stellaire est déterminé avec une précision d'environ  $0'',0035$  et  $0'',0035/an$ . Parallèlement nous avons développé une méthode permettant d'améliorer les éphémérides des astéroïdes, nous avons montré que les orientations des orbites osculatrices sont alors données, pour la grande majorité des petites planètes, avec une précision de quelques millièmes de seconde d'arc. Les précisions des autres éléments osculateurs varient selon les planètes, certains d'entre eux peuvent même rester indéterminés.

Une comparaison des résultats obtenus sur la rotation de la sphère Hipparcos avec ceux obtenus par d'autres méthodes : lien au système semi-dynamique du FK5, lien au système cinématique des objets extra-galactiques, etc..., est bien sûr à envisager. La confrontation des différents résultats permettra, par le biais de la sphère

homogène des étoiles Hipparcos, de détecter des erreurs occasionnelles mais aussi de relier les différents systèmes. Ainsi par exemple, les observations des petites planètes dans le référentiel de la sphère Hipparcos permettront de positionner l'écliptique et l'équinoxe dynamique dans le système du FK5 ; et ce avec une bien meilleure précision que ne le permettaient les études réalisées jusqu'à présent.

Les résultats astrométriques fournis par le satellite Hipparcos pour les astéroïdes de la mission sont d'une grande valeur. Non seulement les positions des astéroïdes sont mesurées avec une grande précision, mais elles sont de plus rattachées à une sphère homogène et un référentiel très précis. Néanmoins, si les observations spatiales s'affranchissent des problèmes liés aux observations terrestres, elles restent limitées dans le temps. De plus, la mission Hipparcos n'est pas spécialement dédiée à une observation systématique des petites planètes, ceci limite la valeur des résultats que l'on peut obtenir. Les observations ne sont pas réparties uniformément dans le temps, ni sur la durée de la mission (ou la durée des révolutions des astéroïdes), ni sur la durée des périodes de rotation des ces astéroïdes. Il apparaît qu'il est nécessaire de compléter ces observations d'astéroïdes par des mesures de précision équivalente. Aussi, les données Hipparcos concernant les petites planètes seront d'un grand intérêt si les astéroïdes sont intégrés dans une prochaine mission spatiale à but astrométrique.

# Glossaire

angle de phase	angle au centre d'une planète entre les directions du Soleil et de l'observateur.
position ou direction astrométrique	position ou direction géométrique d'une planète, corrigée du temps de lumière, dans un référentiel géocentrique.
attitude	orientation du repère lié au satellite par rapport au repère de référence.
ceinture principale	région du système solaire située entre Mars et Jupiter, on y trouve la majorité des astéroïdes.
cercle de balayage	cercle instantané contenant les deux directions d'observation du satellite et perpendiculaire à l'axe de rotation du satellite.
coefficient de magnitude	quantité $MM_o + NN_o$ où $(M_o, N_o)$ sont les coefficients de modulation de référence et $(M, N)$ ceux de l'objet observé
coefficients de modulation	coefficients des deux harmoniques de la courbe de lumière : $M, N$ . $M_o = 0,72$ et $N_o = 0,25$ sont les coefficients de références pour une source ponctuelle sans effet de chromatisme.
cosmogonie	science de la formation des objets célestes.
courbe de lumière	fonction périodique développée au second harmonique, $\mathcal{S}(t) = I + B + IM \cos(\omega t + \phi) + IN \cos(2\omega t + \psi)$ .
direction apparente	direction observée de la planète.
écart type	racine carrée de la variance.
éléments osculateurs	éléments $(a, e, i, l_o, \omega, \Omega)$ . Ils sont liés aux vecteur positions et vitesses définissant l'orbite képlérienne instantanée.
époque	période d'observation d'une planète comprenant un ou plusieurs RGC voisins ; cette période varie de $\approx 0,1$ à $\approx 5$ jours.
équateur d'intensité	grand cercle passant par le centre d'un astéroïde et contenant les centres de la Terre et du Soleil.
FAST	Fundamental Astronomy by Space Techniques. Consortium international pour la réduction des données Hipparcos regroupant des équipes d'Italie, des Pays-Bas, d'Allemagne et de France.
fonction de diffusion	fonction reliant le flux solaire incident à l'intensité spécifique reçue, $S_d(\mu, \phi; \mu_o, \phi_o; p_k)$ .



grille principale	grille de modulation dont sont issues toutes les données relatives aux astéroïdes.
IERS	International Earth Rotation Service.
INCA	Consortium préparant le catalogue d'entrée (Input Catalogue).
LLR	Télemétrie laser-Lune (Lunar Laser Ranging).
loi du $\chi^2$	une variable aléatoire réelle $X$ suit la loi du $\chi^2_\nu$ à $\nu$ degrés de liberté si elle est la somme des carrés de $\nu$ variables aléatoires de loi normale $x$ , $X = \sum_\nu x^2$ .
loi de Student	une variable aléatoire réelle $S$ suit la loi de Student à $\nu$ degrés de liberté si elle s'écrit comme le rapport $S = \frac{X}{\sqrt{\chi^2_\nu}}$ où $X$ est une variable aléatoire réelle de loi normale.
$m_\odot$	rayon gravitationnel du soleil = $\frac{GM_\odot}{c^2} \approx 1,48 \text{ km}$ .
magnitude absolue	magnitude d'un astéroïde à une unité de distance astronomique de la Terre et du Soleil et pour un angle de phase nul.
mjd	jour julien modifié = jour julien $-2\,400\,000,5$ (modified julian day).
matrice normale	matrice symétrique positive $A^t p A$ associée à la matrice des équations de conditions $A$ .
matrice de variance-covariance	la variance d'un vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ est la matrice $E((\mathbf{x} - E(\mathbf{x})) \cdot ((\mathbf{x} - E(\mathbf{x})))^t)$ .
NDAC	Northern Data Analysis Consortium. Second Consortium pour la réduction des données Hipparcos .
opposition	configuration présentée par deux astres dont l'écart angulaire sur la sphère céleste est de $180^\circ$ .
orbite képlérienne	mouvement elliptique d'un corps .
orbite osculatrice	(voir aussi éléments osculateurs).
phase, retard de point normal	angle $\varphi$ associé au signal périodique $\cos(\omega t + \varphi)$ . position ou direction moyenne d'une planète après réduction des données sur un certain intervalle de temps (normal place).
quadrature	configuration présentée par deux astres dont l'écart angulaire sur la sphère céleste est de $90^\circ$ .
$\rho$	diamètre apparent d'une petite planète.
repéreur d'étoiles	grille placée à côté de la grille principale, utilisée pour la détermination de l'attitude du satellite et l'expérience TYCHO.
RGC	Grand Cercle de Référence, cercle moyen sur environ 0,3 jour des cercles de balayage (Reference Great Circle).
$rms$	erreur quadratique moyenne (root mean square).
$s$	pas de grille = $1''/208$ .

$\sigma_o$	erreur par unité de poids. Si cette quantité est inconnue, $\tilde{\sigma}_o$ en est un estimateur asymptotiquement sans biais.
$\tilde{\sigma}_o$	estimation de $\sigma_o$ , $E(\sigma_o) = \tilde{\sigma}_o$
SVD	méthode de factorisation d'une matrice en produits de matrices orthogonales et diagonale (Singular Value Decomposition).
T4	durée fondamentale de réduction du signal photo-électrique = $\frac{32}{15}$ s.
TDB	temps dynamique barycentrique
TE	temps des éphémérides
test de Fisher	probabilité que deux variables aient la même variance.
TT	temps terrestre
TYCHO	mission parallèle à la mission Hipparcos, les données recueillies par le repéreur d'étoiles sont exploitées.
$t_o$	époque de référence = 1 991.496 = 1 - 7 - 1991 12 <sup>h</sup>
temps de lumière	temps mis par un photon pour parcourir le trajet planète-centre de la Terre.
terminateur	ligne de séparation entre la partie éclairée d'une planète et sa partie obscure.
transit	temps de passage d'un objet dans un des champs du télescope $\approx 18$ s.
UAI	Union Astronomique Internationale (International Astronomical Union).
UTC	temps universel coordonnées.
VLBI	Very Long Baseline Interferometry.
variance	la variance d'une variable aléatoire réelle $x$ est l'espérance $E((x - E(x))^2)$ .
$\mathbf{z}$	pôle du RGC.
$\mathbf{z}_\perp$	vecteur tangent au cercle de balayage, dirigé dans le sens direct.

# Bibliographie

- [A<sup>+</sup>87] D.T. Van Aalen et al. *in: Third FAST Thinkshop*. P.L. Bernacca, J. Kovalevsky eds., 1987. p. 369.
- [A<sup>+</sup>94] W.J. Altenhoff et al. Millimeter-wavelength observations of minor planets. *A&A*, 287:641, 1994.
- [AS74] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. U.S. Departement of Commerce, 1965, 1974.
- [B<sup>+</sup>79] E. Bowell et al. *Asteroids*. Univ. Arizona Press, 1979.
- [B<sup>+</sup>87] B. Betti et al. *in: Third FAST Thinkshop*. P.L. Bernacca, J. Kovalevsky eds., 1987. p. 391.
- [B<sup>+</sup>90] E. Bowell et al. *in: Asteroids II*. Univ. Arizona Press, 1990. p. 524.
- [Bat91] Y.V. Batrakov, editor. *Ephemerides of Minor Planets for 1992*. Institute of Theoretical Astronomy, 1991.
- [BB89] A. Bec-Borsenberger. *in: The Hipparcos Mission Pre-launch Status*, volume 2. ESA SP-1111, 1989. p. 213.
- [BB90] A. Bec-Borsenberger. Ephemerides of the 48 Hipparcos minor planets for the year 1991. *A&A Suppl. Ser.*, 86:299, 1990.
- [BB92] A. Bec-Borsenberger. Ephemerides of the 48 Hipparcos minor planets for the year 1992. *A&A Suppl. Ser.*, 93:11, 1992.
- [BB93] A. Bec-Borsenberger. Ephemerides of the 48 hipparcos minor planets for the year 1993. *A&A Suppl. Ser.*, 98:77, 1993.
- [BBM] A. Bec-Borsenberger and B. Morando. Hipparcos – First approach to relativistic effects processing in the reduction. Communication privée, Bureau des Longitudes.
- [BBR87] A. Bec-Borsenberger and P. Rocher. *Table ronde de planétologie dynamique*. Aussois, 1987.
- [BC61] D. Brouwer and L. Clemence. *Celestial Mechanics*. Academic Press inc., 1961.
- [Ber92] J. Berthier. Rapprochements et occultations entre étoiles et astéroïdes. Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes S038, Bureau des Longitudes, 1992.
- [BM91] M.L. Bougeard and C. Michelot. Colinearity in the linear model statistical and numerical alternatives to least squares. *Journées systèmes de référence spatio-temporels*, page 86, 1991.
- [Bra78] R. L. Branham Jr. The orbits of five minor planets and corrections to the FK4 equator and equinox. *Astron. J.*, 83:675, 1978.

- [Bra86] R. L. Branham Jr. Error estimates with  $L_1$  solutions. *Celestial Mechanics*, 39:239, 1986.
- [Bra92] R. L. Branham Jr. The FK5 equator and equinox from observations of minor planets. *Astron. J.*, 103:2099, 1992.
- [Bre82] P. Bretagnon. Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82. *A&A*, 114:278, 1982.
- [Bro35] D. Brouwer. On the determination of systematic corrections to star positions from observations of minor planets. *Astron. J.*, 44:57, 1935.
- [Bro41] D. Brouwer. The reference system with a view to planetary dynamics. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 42:133, 1941.
- [Bru91] V.A. Brumberg. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Adam Hilger, 1991.
- [BS66] R. Bulirsch and J. Stoer. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. *Num. Math.*, 8:1, 1966.
- [Cal88] J. Calaf. *Scientific Aspects of the Input Catalogue Preparation*. Proc. Sitges Coll., Torra, January 1988.
- [Cap90] N. Capitaine. *Astronomie Fondamentale*. Observatoire de Paris, 1990. Cours de D.E.A.
- [CFM84] J. Chapront, G. Francou, and B. Morando. The calculation of the positions and velocities of the earth during the Hipparcos mission. Notes scientifiques et techniques du Bureau Des Longitudes S004, Bureau des Longitudes, 1984.
- [Cha50] S. Chandrasekhar. *Radiative transfert*. Clarendon, 1950.
- [Cho84] F. Chollet. Evaluation des corrections de phase dans l'observation des positions de planètes. *A&A*, 139:215, 1984.
- [Cle48] G.M. Clemence. The value of minor planets in meridian astronomy. *Astron. J.*, 54:10, 1948.
- [Dan59] A. Danjon. *Astronomie Générale*. J. & R. Sennac eds., 1959.
- [Des92] P. Descamps. *Etude des effets de surface sur la réduction astrométrique des observations de phénomènes des satellites galiléens de Jupiter*. PhD thesis, Observatoire de Paris, 1992.
- [Dol70] A. Dollfus, editor. *Surfaces and Interiors of Planets and Satellites*. Academic Press, 1970.
- [Dys28] F. Dyson. *Trans. IAU*, 3:227, 1928.
- [E<sup>+</sup>92] D.W. Evans et al. Hipparcos photometry: NDAC reductions. *A&A*, 258:149, 1992.
- [Elf80] T. Elfving. Block-iterative methods for consistent and inconsistent linear equations. *Num. Math.*, 35:1, 1980.
- [F<sup>+</sup>87] M. Froeschlé et al. *in: Third FAST Thinkshop*. P.L. Bernacca, J. Kovalevsky eds., 1987. p. 129.
- [F<sup>+</sup>94a] W.M. Folkner et al. Determination of the extragalactic-planetary frame tie from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging measurements. *A&A*, 287:279, 1994.
- [F<sup>+</sup>94b] M. Froeschlé et al. Comparaison des repères FK5 et VLBI en utilisant le catalogue Hipparcos provisoire. *in: Journées systèmes de référence spatio-temporels*, 1994. p. 146.

- [Fed88] P.M. Fedj. On the precision of the ephemerides of selected minor planets derived by not taking into account their mutual perturbations. *Kinematika i fizika neb. tel.*, 4(6):86, 1988.
- [Fed89] P.M. Fedj. The influence of mutual perturbations of minor planets on systematic corrections of star catalogues. *Kinematika i fizika neb. tel.*, 5(1):94, 1989.
- [FFM84] J.L. Falin, M. Froeschlé, and F. Mignard. Calcul de la position apparente des étoiles pour l'expérience Hipparcos. Hipparcos Note Technique 10, F.A.S.T., 1984.
- [Fri67] W. Fricke. Precession and galactic rotation derived from McCormik and Cape proper motions in the systems of FK3, N30, and FK4. *Astron. J.*, 72:642, 1967.
- [Fri72] W. Fricke. Fundamental systems of positions and proper motions. *Ann. Rev. of A&A*, 10:101, 1972.
- [Fri82] W. Fricke. Determination of the equinox and equator of the FK5. *A&A*, 107:L13, 1982.
- [Fri85] W. Fricke. Fundamental catalogues, past, present and future. *Celestial Mechanics*, 36:207, 1985.
- [FSL88] W. Fricke, H. Schwan, and T. Lederle. Fk5. *Veröffentlichungen Astronomisches Rechen-Institut*, 32, 1988.
- [G<sup>+</sup>89] I. Galligani et al. in: *The Hipparcos Mission Pre-launch Status*, volume 3. ESA SP-1111, 1989. p. 141.
- [GK81] E.M. Gaposchkin and B. Kolaczek, editors. *Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*. D. Reidel Publishing Company, 1981.
- [Gli63] W. Gliese. *Veröffentlichungen Astronomisches Rechen-Institut*, 12, 1963.
- [Gra89] A.M. Graffan. Réduction des données d'Hipparcos concernant les petites planètes. Mémoire de D.E.A., Observatoire de Paris, 1989.
- [Hap81] B. Hapke. Bidirectional reflectance spectroscopy. I: Theory. *J. Geophys. Res.*, 86:3039, 1981.
- [Hes93] D. Hestroffer. in: *Developments in Astrometry and their Impact on Astrophysics and Geodynamics*. I.I. Mueller, B. Kolaczek eds., 1993. p. 19.
- [Hof90] M. Hoffman. in: *Asteroids II*. Univ. Arizona Press, 1990. p. 228.
- [Hog80] E. Hog. Space astrometry as NASA and ESA projects. *Mitt. der Astron. Gesellschaft*, 48:127, 1980.
- [Hot90] Hottier. *Analyse Numérique*. Observatoire de Paris, 1990. Cours de D.E.A.
- [Jac68] E.S. Jackson. Determination of the equinox and equator from meridian observation of the minor planets. *Astron. Papers of AENA*, 20:1, 1968.
- [JKK89] I.I. Mueller J. Kovalevsky and B. Kolaczek, editors. *Reference Frames in Astronomy and Geophysics*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [K<sup>+</sup>64] A. Kopff et al. FK4. *Veröffentlichungen Astronomisches Rechen-Institut*, 14, 1964.
- [K<sup>+</sup>92] J. Kovalevsky et al. The FAST Hipparcos Data Reduction Consortium: overview of the reduction software. *A&A*, 258:7, 1992.
- [Kah31] A. Kahrstedt. Über die Verbesserung des Äquinoktiums des NFK. *Astron. Nachrichten*, 244:33, 1931.

- [KLR89] J. Kovalevsky, J.F. Lestrade, and R.A.Preston. *in: The Hipparcos Mission Pre-launch Status*, volume 3. ESA SP-1111, 1989.
- [KM90] Z. Knežević and A. Milani. *in: Asteroids II*. Univ. Arizona Press, 1990. p. 1073.
- [Kov90] J. Kovalevsky. *Astrométrie moderne*. Lecture Notes in Physics. Springer Verlag, 1990.
- [Küs02] F. Küstner. Beobachtete Correctionen des Fundamental-Cataloges von Auwers. *Astron. Nachrichten*, 158:129, 1902.
- [L<sup>+</sup>77] J.H. Lieske et al. Expression for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants. *A&A*, 58:1, 1977.
- [Lac68] P. Lacroute. *Trans. IAU*, XIII B:63, 1968.
- [Las92] J. Laskar. Le mouvement chaotique du système solaire. Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes S038, Bureau des Longitudes, 1992.
- [LB81] K. Lumme and E. Bowell. Radiative transfert in the surfaces of atmosphereless bodies. I: Theory. *Astron. J.*, 86:1694, 1981.
- [LH74] C.L. Lawson and R.J. Hanson. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, 1974.
- [Lin77] L. Lindegren. Meridian observations of planets with a photoelectric multislit micrometer. *A&A*, 57:55, 1977.
- [Lin87] L. Lindegren. *in: Third FAST Thinkshop*. P.L. Bernacca, J. Kovalevsky eds., 1987. p. 285.
- [Lin89] L. Lindegren. *in: The Hipparcos Mission Pre-launch Status*, volume 3. ESA SP-1111, 1989. p. 171.
- [Lin92] L. Lindegren. *Status on early results of the Hipparcos astrometry project*. European International Space Year Conference, Munich, April 1992. Satellite Symposium 3, Space Sciences with particular emphasis on High Energy Astrophysics.
- [Lon95] Bureau Des Longitudes. *Connaissance des temps*. Service Hydrographique et Océanographique de la Marine, 1995.
- [M<sup>+</sup>87] F. Mignard et al. *in: Third FAST Thinkshop*. P.L. Bernacca, J. Kovalevsky eds., 1987. p. 247.
- [M<sup>+</sup>89] F. Mignard et al. *in: The Hipparcos Mission Pre-launch Status*, volume 3. ESA SP-1111, 1989. p. 205.
- [M<sup>+</sup>92] F. Mignard et al. Hipparcos photometry: FAST main mission reduction. *A&A*, 258:142, 1992.
- [Mag90] P. Magnusson. *in: Asteroids II*. Univ. Arizona Press, 1990. p. 1180.
- [Min41] M. Minnaert. *Astrophys J*, 93:403, 1941.
- [ML89] B. Morando and L. Lindegren. *in: The Hipparcos Mission Pre-launch Status*, volume 3. ESA SP-1111, 1989. p. 269.
- [MM89] F. Mignard and B. Morando. Déflexion des rayons lumineux. *Journées systèmes de référence spatio-temporels*, page 73, 1989.
- [MM93] B. Morando and F. Mignard. *in: Developments in Astrometry and their Impact on Astrophysics and Geodynamics*. I.I. Mueller, B. Kolaczek eds., 1993. p. 25.
- [Mol78] O. Moller. *in: Astronomical Papers Dedicated to Bengt Strömberg*, 1978. p. 355.
- [Mor85] B. Morando. *in: Second FAST Thinkshop*. J. Kovalevsky ed., 1985.

- [Mor87] B. Morando. *in: Third FAST Thinkshop*. P.L. Bernacca, J. Kovalevsky eds., 1987. p. 277.
- [Mor89] B. Morando. *L'age d'or de la mécanique céleste. Les développements de la Mécanique Céleste Théorique*. Bureau des Longitudes, 1989. General History of Astronomy.
- [MTW73] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and company, 1973.
- [Mur83] C.A. Murray. *Vectorial Astrometry*. Adam Hilger., 1983.
- [Mur86] C.A. Murray. *in: Relativity in Celestial Mechanics and Astrometry*. J. Kovalevsky and V.A. Brumberg eds., 1986.
- [New95] S. Newcomb. On the principal fundamental constants of astronomy. *Astron. J.*, 14:185, 1895.
- [Num33] B. Numerov. On the problem of determination of systematic errors of declinations of fundamental stars. *Bull. Inst. Astron.*, 32, 1933.
- [Num36a] B. Numerov. On the problem of simultaneous determination of corrections to the elements of the planet and of the earth. *Astron. J.*, 45:105, 1936.
- [Num36b] B. Numerov. Zur Schaffung eines Fundamentalsystems schwacher Sterne. *Astron. Nachrichten*, 260:306, 1936.
- [P+86] W.H. Press et al. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.
- [P+92] M.A.C. Perryman et al. In-orbit performance of the Hipparcos astrometry satellite. *A&A*, 258:1, 1992.
- [Per85] M.A.C. Perryman. *Ad Astra Hipparcos. The European Space Agency's Astrometry Mission*. ESA BR-24, 1985.
- [Pet58] W. Petri. Praktische auswertung von Meridianbeobachtungen Kleiner Planeten. *Astron. Nachrichten*, 284:219, 1958.
- [Pie71] D.A. Pierce. Star catalogue corrections – determined from photographic observations of selected minor planets. *Astron. J.*, 76:177, 1971.
- [RB91] S. Röser and U. Bastian. *PPM Star Catalogue*. Spectrum Akademischer Verlag, 1991.
- [Rös83] S. Röser. *in: The FAST Thinkshop*. P. L. Bernacca ed., 1983. p. 391.
- [Sch58] F. Schmeidler. Über die Bestimmung absoluter Koordinatensysteme mit Hilfe von Planetenbeobachtungen. *Astron. Nachrichten*, 284:205, 1958.
- [Sch79] F. Schmeidler. Auswertung von Meridianbeobachtungen von Planeten an der Sternwarte München von 1941 bis 1961. *Astron. Nachrichten*, 300:301, 1979.
- [Sch80] F. Schmeidler. Die Geschichte der Fundamentalkataloge. *Mitteil. Astron. Gesellschaft*, 48:11, 1980.
- [Sei92] P. Kenneth Seidelmann. *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac*. University Science Books, 1992.
- [Shc65] B.M. Shchigolev. *Mathematical Analysis of Observations*. Iliffe Books, 1965.
- [SL82] S. Söderhjelm and L. Lindgren. Inertial frame determination using minor planets. A simulation of Hipparcos-observations. *A&A*, 110:156, 1982.
- [Sof89] M.H. Soffel. *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*. Springer Verlag, 1989.

- [Sta81] E.M. Standish Jr. Two differing definitions of the dynamical equinox and the mean obliquity. *A&A*, 101:L17, 1981.
- [Sta82] E.M. Standish Jr. Orientation of the JPL Ephemerides DE 200/LE 200 to the Dynamical Equinox of J2000. *A&A*, 114:297, 1982.
- [Sta90] E.M. Standish Jr. The observational basis for JPL's DE 200, the planetary ephemerides of the astronomical almanac. *A&A*, 233:252, 1990.
- [Ted90] E.F. Tedesco. *in: Asteroids II*. Univ. Arizona Press, 1990. p. 1090.
- [Tra85] Transactions of the IAU. Reidel XIXB, 1985.
- [Way66] P. Wayman. Determination of the inertial frame of reference. *Quart.J.RAS*, 7:138, 1966.
- [WC66] E.W. Woolard and G.M. Clemence. *Spherical Astronomy*. Academic Press, 1966.
- [Wil90] J.G. Williams. *in: Asteroids II*. Univ. Arizona Press, 1990. p. 1034.
- [Woe43] A.J.J. Van Woerkom. *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 9:427, 1943.
- [WS89] J.G. Williams and E.M. Standish. *in: Reference Frames in Astronomy and Geophysics*. J. Kovalevsky, I.I. Mueller and B. Kolaczek eds., 1989. Kluwer Academic Publishers.
- [Yas66] Y. Yasuda. Minor planets in meridian astronomy. *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18:297, 1966.



## Annexe A

# Matrices de corrélation

Nous donnons ici les matrices de corrélation des corrections sur les conditions initiales des petites planètes, ainsi que les matrices de corrélation des paramètres globaux pour les différentes solutions envisagées.

### A.1 Astéroïdes

Pour les 48 astéroïdes de la mission, on donne dans l'ordre :

- le numéro de la petite planète, le nombre d'observations, le facteur de conditionnement de la matrice aux équations de conditions normalisées ;
- les valeurs singulières de cette matrice ;
- la matrice de corrélation du vecteur  $d\mathbf{q}_i = (dl_o, dp, dq, dr, de, da/a)$ . Seule la partie triangulaire inférieure est reproduite.









## A.2 Paramètres globaux

Matrice de corrélation des paramètres globaux (14 inconnues); les corrections sur les conditions initiales de l'orbite terrestre sont données, entre autres, par les variables  $dl_o + dr$  et  $e dr$ .

$dl_o + dr$	$dp$	$dq$	$e dr$	$de$	$da/a$	$W_{o,x}$	$W_{o,y}$	$W_{o,z}$	$W_{1,x}$	$W_{1,y}$	$W_{1,z}$	a	b
1.000													
0.145	1.000												
-0.017	0.063	1.000											
1.000	0.144	-0.013	1.000										
-0.042	0.046	0.004	-0.043	1.000									
0.059	-0.155	-0.066	0.055	0.129	1.000								
0.145	1.000	0.063	0.144	0.046	-0.155	1.000							
-0.017	0.064	1.000	-0.013	0.004	-0.066	0.063	1.000						
1.000	0.145	-0.017	1.000	-0.042	0.059	0.145	-0.017	1.000					
-0.061	0.195	0.004	-0.060	-0.087	-0.234	0.195	0.004	-0.060	1.000				
0.038	0.093	0.202	0.041	-0.039	-0.151	0.093	0.202	0.038	-0.009	1.000			
-0.059	0.188	0.146	-0.059	-0.140	-0.678	0.188	0.146	-0.059	0.401	0.321	1.000		
-0.019	0.014	-0.022	-0.018	0.035	0.033	0.014	-0.022	-0.019	-0.057	-0.059	-0.084	1.000	
0.055	-0.011	-0.003	0.054	-0.015	-0.009	-0.011	-0.003	0.055	0.007	0.048	0.005	-0.989	1.000

Matrice de corrélation des paramètres globaux (10 inconnues): les corrections sur les conditions initiales de l'orbite terrestre  $dl_o + dr$ ,  $dp$ ,  $dq$  et le paramètre  $b$  de la loi de diffusion ne sont pas déterminés.

$e dr$	$de$	$da/a$	$W_{o,x}$	$W_{o,y}$	$W_{o,z}$	$W_{1,x}$	$W_{1,y}$	$W_{1,z}$	a
1.000									
-0.045	1.000								
-0.188	0.143	1.000							
-0.016	-0.158	-0.152	1.000						
-0.135	0.081	0.003	0.084	1.000					
0.058	-0.184	-0.177	0.148	0.076	1.000				
0.025	-0.103	-0.205	0.028	0.160	0.024	1.000			
0.094	-0.042	-0.133	-0.138	-0.144	0.116	-0.025	1.000		
0.004	-0.158	-0.666	0.104	0.028	0.178	0.378	0.295	1.000	
0.160	0.151	0.147	-0.008	-0.144	-0.067	-0.342	-0.058	-0.534	1.000

## Annexe B

# Solution globale avec 45 planètes

En plus des observations relatives à la planète Euterpe, sont écartées les observations des planètes Ceres et Vesta.

Données générales :

$\sigma_o$	: 30.0	estimation $\tilde{\sigma}_o$	: 32.8
nombre d'observations	: 19 164	rms moyen par T4	: 35.2
nombre de planètes	: 45	nombre de $d\mathbf{q}_i$	: 45
conditionnement	: $9.1 \cdot 10^3$	déterminant	: $2.0 \cdot 10^{+29}$

$$\tilde{\sigma}_o = 34.0$$

$d\mathbf{q}_o$ pour la Terre	(mas)
$edr = -10.01$	$\pm 3.32$
$de = 3.59$	3.36
$da/a = 0.52$	0.52

rotation	(mas)
$W_{o,x} = 19.14$	1.25
$W_{o,y} = -9.84$	1.29
$W_{o,z} = -84.26$	2.47

$W_{1,x} = 2.85$	0.84
$W_{1,y} = -5.87$	0.76
$W_{1,z} = 5.64$	3.87

fonction C(i)	
$a = 0.48$	0.05

## Annexe C

# Conditions initiales des astéroïdes

### C.1 Solution de norme minimale

Pour les 47 astéroïdes retenus, on donne dans l'ordre :

- le numéro de la petite planète, le nombre d'observations, le facteur de conditionnement de la matrice aux équations de conditions normalisées ;
- les valeurs singulières de cette matrice, les valeurs retenues et les valeurs annulées pour la solution de norme minimale sur les corrections de conditions initiales des astéroïdes ;
- les composantes des variables principales : matrice  $V$ .











## C.2 Variations des conditions initiales des astéroïdes

Pour les 47 astéroïdes retenus, on donne :

- le numéro de la petite planète, l'estimation du facteur d'écart type, le rang adopté ;
- la solution de norme minimale pour le vecteur  $d\mathbf{q}_i = (dl_o, dp, dq, dr, de, da/a)$  ;
- les précisions formelles de cette solution.





### C.3 Nouveaux éléments osculateurs

Les conditions initiales des éphémérides des petites planètes sont extraites des éphémérides russes pour 1992 (base de données Simbad). Les positions et vitesses à l'instant de référence  $t_o = 1991.496$  sont obtenues par intégration numérique. Nous donnons ici les nouveaux éléments osculateurs à  $t_o$  (excentricité, demi-grand axe, anomalie moyenne, argument du périhélie, du nœud et inclinaison), les corrections sur les conditions initiales étant celles de norme minimale.