

ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ÎLE DE FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS

présentée par

Pierre INIZAN

pour obtenir le grade de
docteur de l'Observatoire de Paris
en Mathématiques

DYNAMIQUE FRACTIONNAIRE POUR LE CHAOS
HAMILTONIEN

Rapporteurs :

Rudolf HILFER (ICP - Université de Stuttgart)
Delfim TORRES (Université d'Aveiro)

Thèse soutenue le 18 novembre 2010
devant la commission composée de

Jacky CRESSON (Université de Pau) Directeur de thèse
François DUBOIS (CNAM, Paris) Examineur
Rudolf HILFER (ICP - Université de Stuttgart) Rapporteur
Xavier LEONCINI (CPT, Marseille) Examineur
Denis MATIGNON (ISAE - DMIA, Toulouse) Examineur
Philippe ROBUTEL (IMCCE, Paris) Examineur
Alain VIENNE (IMCCE - Université de Lille) Président du jury

Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Jacky Cresson, pour la confiance qu'il m'a témoignée durant ces trois années en m'encourageant à développer mes idées personnelles, ainsi que pour son optimisme constant qui a bien souvent éclairé nos rencontres.

J'adresse toute ma gratitude aux rapporteurs de cette thèse, Rudolf Hilfer et Delfim Torres, pour avoir accepté d'explorer les recoins de ce travail. Je remercie chaleureusement Alain Vienne pour m'avoir convié aux lectures de l'Observatoire de Lille et pour avoir accepté d'être le président de mon jury. Je remercie également François Dubois, Xavier Leoncini, Denis Matignon et Philippe Robutel de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Je tiens ensuite à remercier tous les membres de l'IMCCE pour m'avoir permis de réaliser cette thèse dans un environnement agréable, du point de vue matériel et surtout humain. Plus précisément, mes remerciements vont à William Thuillot qui m'a accueilli dans ce laboratoire ainsi qu'à Jean-Eudes Arlot qui a accepté de m'intégrer dans l'équipe GAP, malgré l'éloignement de mon sujet avec les thématiques de ce groupe. Mes pensées vont aussi aux "jeunes" de l'IMCCE avec qui j'ai partagé une bonne humeur quotidienne : Laurène, Lucie, Alrick, David, Josselin, Julien et Yohann. Je remercie enfin mes autres collègues de l'équipe GAP pour leur gentillesse et les bons moments passés dans la salle café.

Je remercie tout particulièrement Jérôme Perez pour m'avoir fasciné avec le principe de moindre action et pour m'avoir guidé dans la construction de mon parcours académique. Merci aussi à Ana Gómez pour m'avoir suivi pendant ces quatre années à l'Observatoire de Paris.

J'adresse un grand merci à mes parents pour m'avoir soutenu pendant toutes ces années d'étude, jusque dans la relecture de ces pages. Je remercie enfin et surtout Marie, qui m'a apporté l'énergie quotidienne pour mener à bien cette thèse.

Résumé

De nombreuses caractéristiques des systèmes hamiltoniens chaotiques, notamment mises en évidence à l'aide de simulations numériques, restent à l'heure actuelle encore mal comprises. Parmi les différentes pistes de recherches, Zaslavsky propose une analyse de ces systèmes à l'aide de dérivées fractionnaires. Même si son travail n'est pas complètement formalisé, ses résultats semblent prometteurs.

Le calcul fractionnaire, utilisé par ailleurs dans de nombreux domaines, permet de généraliser les équations différentielles afin de prendre en compte certains phénomènes complexes. Dans le cas des systèmes lagrangiens et hamiltoniens, le plongement fractionnaire, développé par Cresson, fournit une procédure basée sur le principe de moindre action pour construire des équations fractionnaires de la dynamique.

L'objectif principal de cette thèse est d'utiliser ce formalisme afin de consolider le travail de Zaslavsky. Après avoir présenté quelques éléments sur le calcul fractionnaire, nous enrichissons le plongement fractionnaire en le conciliant avec le principe de causalité et en le rendant dimensionnellement homogène. Ce cadre formel ainsi fixé, nous tentons ensuite de comprendre comment peut émerger une dynamique fractionnaire dans les systèmes hamiltoniens chaotiques, à travers deux pistes respectivement basées sur les travaux de Stanislavsky et Hilfer. Si la première se heurte à deux difficultés, la seconde se concrétise en un modèle simple de dynamique, où une dérivée fractionnaire apparaît lorsqu'est prise en compte l'analyse de Zaslavsky. Enfin, en marge de l'étude de ces systèmes, nous montrons que la formulation causale du plongement fractionnaire permet de doter certaines équations dissipatives classiques de structures lagrangiennes fractionnaires, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles modélisations numériques.

Mots-clés : Calcul fractionnaire, systèmes lagrangiens et hamiltoniens, principe de moindre action, systèmes chaotiques, homogénéité dimensionnelle, équations aux dérivées partielles.

Fractional Dynamics for Hamiltonian Chaos

Abstract

Many properties of chaotic Hamiltonian systems have been exhibited by numerical simulations but still remain not properly understood. Among various directions of research, Zaslavsky carries on an analysis which involves fractional derivatives. Even if his work is not fully formalized, his results seem promising.

Fractional calculus, also used in several other fields, generalizes differential equations in order to take into account some complex phenomena. Concerning Lagrangian and Hamiltonian systems, the fractional embedding developed by Cresson provides a procedure based on the least action principle to build fractional dynamical equations.

The main goal of this thesis consists in using this formalism to consolidate Zaslavsky's work. After a presentation of the fractional calculus adapted to our work, we enhance the fractional embedding by reconciling it with the causality principle and by making it dimensionally homogeneous. Once this formal framework is established we try to understand how a fractional dynamics can emerge in chaotic Hamiltonian systems, through two tracks respectively based on Stanislavsky's and Hilfer's works. The first one faces two difficulties, but the second leads to a simple dynamical model, where a fractional derivative appears when Zaslavsky's analysis is taken into account. We finally leave chaotic systems to show that thanks to the causal formulation of the fractional embedding, some classical dissipative equations reveal fractional Lagrangian structures, which could be of numerical interest.

Keywords : Fractional calculus, Lagrangian and Hamiltonian systems, least action principle, chaotic systems, dimensional homogeneity, partial differential equations.

Table des matières

Introduction	1
I Éléments de calcul fractionnaire	7
1 Présentation du calcul fractionnaire	9
1.1 Deux exemples introductifs	10
1.1.1 Problème du tautochrone généralisé	10
1.1.2 Flux de chaleur à la surface d'un conducteur thermique	12
1.2 Bref panorama du calcul fractionnaire	14
1.2.1 Aperçu historique	14
1.2.2 Quelques champs de recherches actuelles	18
2 Définitions et propriétés des opérateurs fractionnaires	23
2.1 Intégrales fractionnaires	24
2.1.1 Intégrale de Riemann-Liouville	24
2.1.2 Autres définitions	29
2.2 Dérivées fractionnaires	31
2.2.1 Dérivées de Riemann-Liouville, Liouville et Caputo	31
2.2.2 Dérivée de Marchaud	34
2.2.3 Dérivée de Grünwald-Letnikov	36
2.3 Propriétés des opérateurs fractionnaires	37
2.3.1 Compositions entre opérateurs	37
2.3.2 Formules d'intégration par parties	41
2.3.3 Transformations intégrales	42
II Plongements fractionnaires des systèmes lagrangiens	47
3 Systèmes lagrangiens et hamiltoniens	49
3.1 À propos du principe de moindre action	49
3.2 Systèmes lagrangiens	52
3.2.1 Calcul des variations	53
3.2.2 Équation d'Euler-Lagrange	53
3.3 Systèmes hamiltoniens	56
3.3.1 Définition et premières propriétés	56
3.3.2 Lien avec les systèmes lagrangiens	57

4	Plongement fractionnaire initial	61
4.1	Définition du plongement fractionnaire	63
4.1.1	Opérateurs différentiels	63
4.1.2	Équations différentielles	65
4.2	Systèmes lagrangiens	65
4.2.1	Plongement de l'équation d'Euler-Lagrange	65
4.2.2	Plongement du Lagrangien	66
4.3	Systèmes hamiltoniens	68
4.3.1	Plongement des équations canoniques	68
4.3.2	Plongements à partir du Lagrangien	69
5	Respect des principes physiques	71
5.1	Causalité et irréversibilité	71
5.1.1	Restriction des variations?	72
5.1.2	Une approche formelle de l'irréversibilité	73
5.1.3	Définition du plongement fractionnaire asymétrique	74
5.1.4	Application aux systèmes lagrangiens et hamiltoniens	77
5.1.5	Généralisation	84
5.2	Homogénéité dimensionnelle	85
5.2.1	Constante de temps extrinsèque	85
5.2.2	Plongements fractionnaires homogènes	87
5.2.3	Exemple de l'oscillateur harmonique	92
III	Modèles fractionnaires pour les systèmes hamiltoniens chaotiques	97
6	Description de systèmes hamiltoniens chaotiques	99
6.1	Outils pour la dynamique hamiltonienne	100
6.2	Quelques aspects du chaos hamiltonien	105
6.2.1	Diversité dans le chaos	105
6.2.2	Pièges fractals	109
6.3	Description probabiliste	111
6.3.1	Diffusion anormale	112
6.3.2	Équations fractionnaires	112
6.3.3	Lien avec les pièges fractals	114
7	Dynamique hamiltonienne fractionnaire avec temps interne aléatoire	115
7.1	Formalisme de Stanislavsky	115
7.1.1	Temps interne aléatoire	115
7.1.2	Système hamiltonien fractionnaire	117
7.2	Compatibilité avec le plongement fractionnaire?	119
7.2.1	Homogénéisation temporelle	119
7.2.2	Transition problématique des solutions	120
7.2.3	Complémentarité structurelle	122
7.3	Lien avec les systèmes chaotiques?	123
8	Pièges fractals et dynamique fractionnaire	127
8.1	Dynamique fractionnaire selon Hilfer	127
8.1.1	Dynamique de sous-systèmes	127
8.1.2	Renormalisations et générateur infinitésimal	129

8.2	Modèle simple	130
8.2.1	Hypothèses sur la dynamique restreinte	131
8.2.2	Cas $\mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t\mathbb{Z}$	133
8.2.3	Cas $\mathcal{T}(\Delta t) = q\Delta t\mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$	137
8.2.4	Cas général	139
8.2.5	Générateur infinitésimal?	139
8.3	Application au chaos hamiltonien	140
8.3.1	Prise en compte des pièges fractals	140
8.3.2	Passage au continu	142
8.3.3	Discussion sur l'exposant fractionnaire	148

IV Structures lagrangiennes d'équations dissipatives et intégrateurs associés 151

9 Structures lagrangiennes d'équations dissipatives 153

9.1	Friction linéaire	154
9.1.1	Plongement fractionnaire de Lagrangiens étendus	154
9.1.2	Structure lagrangienne de l'équation de friction linéaire	157
9.2	Diffusion	159
9.2.1	Lagrangiens pour les champs	160
9.2.2	Structure lagrangienne de l'équation de diffusion	161
9.3	Convection-diffusion	162
9.3.1	Dérivées fractionnaires en espace	162
9.3.2	Structure lagrangienne de l'équation de convection-diffusion	166

10 Schémas numériques pour les systèmes lagrangiens fractionnaires 169

10.1	Définition de la discrétisation	169
10.2	Propriétés des dérivées discrètes	171
10.3	Discrétisation des systèmes lagrangiens naturels fractionnaires	173
10.3.1	Discrétisation directe	173
10.3.2	Principe de moindre action discret	174

Conclusion et perspectives 179

Bibliographie 181

Introduction

Le but de ce travail est de construire un cube. Pas n'importe quel cube bien sûr, celui de la figure 1. Tâche délicate, que nous ne parviendrons pas à accomplir complètement.

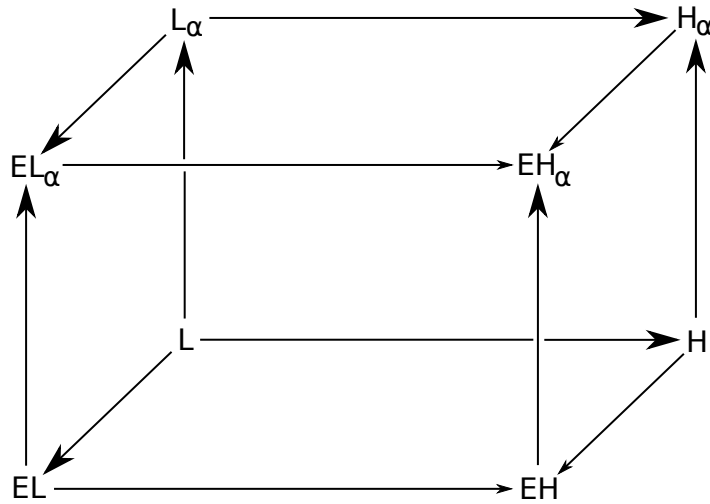


FIG. 1 – Objectif de cette thèse.

Les arêtes du cube qui constituent son ossature sont, dans la perfection de leurs formes, de nature mathématique. Pour les construire nous nous appuyerons sur le plongement fractionnaire. Le contenu du cube, quant à lui, est de nature physique ; il lui donne sa profondeur et le rattache au réel. Nous le remplissons avec des systèmes chaotiques et quelques équations dissipatives. Soyons plus précis : ces pages se veulent un travail mathématique pour la physique. Ce *pour* est exactement celui du titre de cette thèse : nous allons nous pencher de manière théorique sur la notion de dynamique fractionnaire, avec pour objectif de modéliser certains comportements du chaos hamiltonien. Ce dernier ne sera donc pas étudié en détail dans ce travail mais constituera la trame de fond principale. Avouons-le de suite ; certains de nos résultats ne brilleront certes pas par leur beauté, entachés qu'ils seront par une multitude d'indices et d'exposants. Qu'on se persuade pourtant que, malgré leur aspect parfois abscons, ils sont guidés par une volonté constante d'ancrage dans le réel.

Le décor étant maintenant planté, clarifions notre propos en explicitant quelque peu les termes et notations qui viennent d'apparaître. C'est en mécanique céleste que la théorie du *chaos* trouve son origine à la fin du XIX^e siècle, avec les travaux de Poincaré sur l'étude de la convergence de séries en astronomie. En prouvant en 1890 que le système de trois corps en interactions gravitationnelles n'est

pas intégrable, il montre la nécessité d'une nouvelle analyse des équations différentielles et en pose les premières bases. Il s'appuie notamment sur le formalisme *hamiltonien* développé par Hamilton à partir de 1827. Ce cadre mathématique permet à partir d'une unique fonction caractéristique H appelée Hamiltonien de déterminer les équations EH régissant l'évolution temporelle des trajectoires du système, autrement dit sa *dynamique*. Notons que ce formalisme est toujours celui utilisé à l'heure actuelle en mécanique céleste. Les résultats de Poincaré permettront aux mathématiciens Kolmogorov, Arnold et Moser d'énoncer entre 1954 et 1967 un théorème fondamental pour l'étude des systèmes dynamiques, le théorème KAM. Celui-ci stipule que dans un système faiblement chaotique, il reste possible de trouver un grand nombre de conditions initiales conduisant à des mouvements réguliers. Difficilement applicable en pratique, ce résultat est complété par le théorème de Nekhoroshev en 1977, qui montre que si un système commence à évoluer de manière presque régulière, alors il restera presque régulier pendant longtemps¹. Les années 1970 voient aussi se développer l'informatique qui permet de visualiser directement certains phénomènes de ces systèmes complexes. Les systèmes chaotiques (pas forcément dans le cadre hamiltonien) deviennent alors un sujet d'étude privilégié dans de nombreux domaines de la physique. Dans le domaine de la mécanique céleste, Laskar [Las89] montre en 1989 à l'aide d'intégrations numériques que le mouvement des planètes du système solaire est chaotique. Par ailleurs, certains satellites naturels de Saturne exhibent des comportements chaotiques comme par exemple la rotation d'Hypérion ou encore l'interaction entre Prométhée et Pandore. Jupiter n'est pas en reste et possède elle aussi plusieurs satellites irréguliers. En astrophysique, on peut citer en particulier les pulsations irrégulières de certaines étoiles et des phénomènes de turbulence. Bref, le chaos peut apparaître dans de nombreux systèmes d'astronomie et d'astrophysique. Pour un aperçu de l'immense richesse de la théorie du chaos, autant du point de vue mathématique que des applications, on pourra consulter le livre [DDCC92].

À l'heure actuelle, de nombreux comportements sont encore mal formalisés et un travail considérable reste à fournir avant d'espérer obtenir une connaissance précise et globale de ces systèmes. L'outil numérique s'avère très pratique pour l'étude du chaos et, même s'il ne peut établir de résultats rigoureux, il donne des pistes pour y parvenir. Le travail de Zaslavsky se place dans cette optique. Dans son livre *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics* [Zas05], il étudie à l'aide de simulations certaines propriétés de systèmes chaotiques, en particulier des phénomènes de diffusion anormale. Il cherche en parallèle à formaliser ces résultats, ce qui le conduit à utiliser des dérivées *fractionnaires* dans certaines équations caractéristiques. L'introduction de ces opérateurs n'est toutefois pas pleinement justifiée et les équations les faisant apparaître ne sont pas à véritablement parler de nature dynamique (mais plutôt cinétique). Il n'en reste pas moins que leur efficacité semble prometteuse.

À travers les pages qui vont suivre, on va chercher des fondements mathématiques à ces nouvelles équations afin d'apporter de nouvelles briques à la description du chaos dans les systèmes hamiltoniens.

Remarque 0.1. *Le titre de cette thèse est bien sûr inspiré du livre de Zaslavsky, mais diffère dans l'ordre des deux noms et la liaison qui les unit. Le sujet principal de [Zas05] est le chaos hamiltonien, le fractionnaire apparaissant ensuite pour décrire correctement certains comportements. Comme on l'a dit, notre travail est quant à lui centré sur l'aspect fractionnaire avec pour objectif final les systèmes décrits par Zaslavsky.*

Une dérivée fractionnaire est, comme son nom ne l'indique pas, une généralisation de la dérivée usuelle à un ordre réel positif quelconque (et pas seulement rationnel). Comme on le verra par la suite, il existe plusieurs manières de définir cet objet ; lorsque la définition ne sera pas spécifiée, on notera de manière générique d^α/dt^α une dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$. Par opposition, la dénomination "classique" concernera dans ce travail les objets mathématiques (dérivées, équations, etc) ne dépendant que de dérivées d'ordres entiers. Le calcul fractionnaire, qui n'entretient a priori

¹Résumer ces théorèmes en deux phrases est bien sûr réducteur ! Signalons simplement que tous les termes employés possèdent des définitions mathématiques précises.

aucun rapport privilégié avec les systèmes chaotiques, a connu un fort développement depuis les années 1970 dans de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique. Dans la majorité des cas (notamment dans [Zas05]), la démarche suivie consiste à partir d'un formalisme classique puis à remplacer les dérivées par leurs généralisations fractionnaires. La question est alors de savoir comment effectuer cette substitution afin d'obtenir un objet qui ait un sens. Dans [Cre07], Cresson se penche sur cette question en introduisant ce qu'il appelle un "plongement fractionnaire". Il cherche un principe fondamental sur lequel s'appuyer afin de construire des équations fractionnaires et le trouve avec le principe de moindre action. Celui-ci est effectivement à l'origine de la majorité des équations de la dynamique en physique et postule l'existence d'une fonction, le Lagrangien L qui, lorsqu'on la minimise globalement fournit les équations de la dynamique du système, appelées dans ce cas équations d'Euler-Lagrange et notées ici EL . Cette démarche conserve un sens dans le cadre fractionnaire et permet de définir un nouveau Lagrangien L_α et une nouvelle équation associée EL_α (certains détours seront toutefois nécessaires, c'est pourquoi les objets que nous obtiendrons seront notés d'une manière légèrement différente). Le lien avec notre problématique réside dans le fait que les systèmes hamiltoniens peuvent être vus comme reformulations de systèmes lagrangiens². Il est alors possible d'obtenir des systèmes hamiltoniens fractionnaires, que l'on pourrait intuitivement caractériser par H_α et EH_α . Même si les faits seront plus compliqués, l'idée est là. Voilà maintenant les sommets de notre cube explicités.

La question qui peut alors se poser, et qui a en tout cas constitué le point de départ de notre travail, est la suivante : comment utiliser le plongement pour justifier l'introduction du fractionnaire dans le travail de Zaslavsky ?

Avant de tenter d'y répondre nous devons d'abord nous familiariser avec le calcul fractionnaire. C'est là l'objet de la partie I. Le chapitre 1, très général, présente un aperçu historique ainsi qu'un bref panorama des applications de ce formalisme. Le chapitre 2 entre ensuite dans les détails en donnant les définitions et propriétés des opérateurs fractionnaires utiles à notre étude, notamment pour définir les objets du cube indexés par α . Précisons que dans ce travail presque tous les opérateurs fractionnaires concernent la variable temporelle. Cette présentation effectuée, il est ensuite temps d'entrer dans le cœur de notre sujet avec les deux parties suivantes.

La partie II est dédiée au plongement fractionnaire. Nous commençons par une rapide et classique présentation des systèmes lagrangiens et hamiltoniens au chapitre 3, ce qui permet d'assurer un socle solide à notre cube. L'accent est mis sur le principe de moindre action, principe fondamental de la physique et moteur du plongement fractionnaire. Ce dernier est résumé au chapitre 4. Tel quel, il n'est toutefois pas pleinement adapté aux systèmes physiques, puisqu'il ne respecte pas certains principes physiques fondamentaux. Nous tâchons au chapitre 5 de remédier à ces problèmes, en rendant le plongement dimensionnellement homogène et compatible avec le principe de causalité. Ce formalisme est alors à même de constituer un toit solide pour notre cube.

Reste ensuite à construire les piliers, autrement dit à comprendre comment peut s'effectuer la transition "dynamique classique \rightarrow dynamique fractionnaire". C'est là où le lien avec la physique s'intensifie ; la partie III cherche à définir ce passage dans le cas des systèmes hamiltoniens chaotiques. Pour ce faire, nous résumons tout d'abord dans le chapitre 6 certains aspects du travail de Zaslavsky sur ces systèmes, avec notamment l'introduction de "pièges fractals". Nous tentons ensuite au chapitre 7 de conjuguer quelques-unes de ces propriétés avec le "temps interne" de Stanislavsky [Sta06] afin de les faire entrer dans le cube. Résultat mitigé, qui nous conduit à considérer une autre piste au chapitre 8, basée quant à elle sur les travaux de Hilfer [Hil95a, Hil95b]. Ceux-ci ancrent de manière théorique mais profonde la dynamique fractionnaire dans la physique. En cherchant à préciser cet enracinement pour les systèmes chaotiques, nous dégageons un modèle "simple" de dynamique qui,

²Dans cette optique, l'obtention de EH nécessite H mais aussi EL , d'où les flèches plus petites dans la figure 1.

lorsqu'on l'agrément de pièges dynamiques, nous donne une dérivée fractionnaire bien précise. Cette tentative certes plus aboutie s'éloigne cependant du plongement fractionnaire et par conséquent de notre cube. Les flèches verticales de celui-ci restent ainsi en pointillés et cantonnent le haut du cube à la sphère abstraite.

Nous nuancions toutefois ce propos dans la partie IV où nous ôtons nos lunettes "chaotiques" pour une paire "analyse numérique d'équations au dérivées partielles". Avec ce nouveau point de vue un côté du cube semble se fortifier, grâce à quelques équations classiques dissipatives qui révèlent au chapitre 9 des formulations lagrangiennes exclusivement fractionnaires. De telles structures pourraient alors permettre une meilleure modélisation numérique de ces équations. Le chapitre 10 constitue un premier pas dans cette direction.

Le déroulement de cette étude peut en fait être synthétisé au sein de notre cube comme illustré par la figure 2.

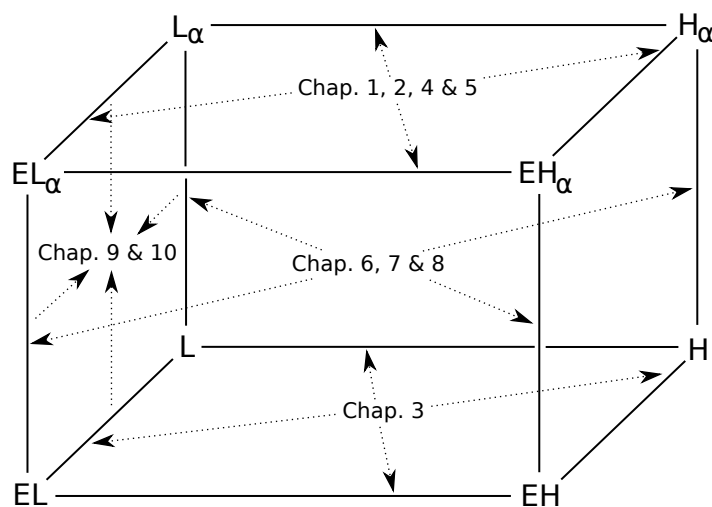


FIG. 2 – Plan de cette thèse.

Finissons par deux remarques générales. Cette thèse étant à la frontière de domaines très divers (calcul fractionnaire, mécanique analytique, systèmes chaotiques, équations aux dérivées partielles), il nous a semblé nécessaire de vulgariser plusieurs passages et d'utiliser des exemples élémentaires, afin que les principaux enjeux de ce travail soient aisément accessibles. Par ailleurs, très peu de passages du présent document sont directement traduits de nos articles et le contenu de ceux-ci est disséminé à travers les chapitres ; plusieurs thématiques intervenant dans notre travail, il nous a semblé important de nous attarder sur chaque composante, exercice impossible dans un article. Précisons enfin que cette thèse est plus riche que l'union de nos présentes publications, certains points ayant été creusés, modifiés voire améliorés lors de la rédaction de ces pages.

Première partie

Éléments de calcul fractionnaire

Chapitre 1

Présentation du calcul fractionnaire

L'objet principal de cette thèse ne porte pas sur le calcul fractionnaire lui-même, celui-ci a plutôt été un outil (un des deux principaux avec le principe de moindre action) dont nous nous sommes servi. Toutefois, la relative complexité de ce formalisme doublée d'un rayonnement relativement faible dans la communauté scientifique nous conduit à consacrer la première partie de cette thèse à une présentation succincte des opérateurs fractionnaires. Le chapitre 1 reste assez général, en commençant par deux exemples simples, puis en proposant quelques repères historiques et domaines d'applications. Dans le chapitre 2, plus technique, plusieurs définitions d'opérateurs fractionnaires sont données, ainsi que quelques propriétés mathématiques.

Le premier ouvrage de référence sur le calcul fractionnaire est celui de Oldham et Spanier [OS74], comprenant des aspects mathématiques ainsi que des applications. Mentionnons aussi le livre de Miller et Ross [MR93], qui est quant à lui plus orienté sur les équations différentielles fractionnaires. Concernant l'aspect strictement mathématique, l'imposante monographie de Samko, Kilbas et Marichev [SKM93] reste la référence incontournable, où la majorité des opérateurs fractionnaires sont étudiés de manière rigoureuse, notamment en ce qui concerne les classes de fonctions. Notons enfin des chapitres d'ouvrages présentant des introductions au calcul fractionnaire très accessibles [Hil08, GM97, Mat02].

De manière simple, le calcul fractionnaire désigne l'ensemble des opérateurs qui généralisent les notions de primitives et de dérivées à tout ordre réel (et même complexe). Par exemple, entre les dérivées premières et secondes d'une fonction, nous pourrions trouver la dérivée d'ordre 1.47 et même celle d'ordre $\pi/2$! La dénomination "fractionnaire" est donc en fait mal choisie, il faudrait la remplacer par "d'ordre quelconque". La raison est historique : une fois soulevée l'idée de généraliser l'ordre de dérivation, le premier pas naturel a été de s'intéresser aux nombres "juste au-dessus" des entiers, c'est-à-dire aux nombres rationnels, appelés aussi fractionnaires. Par la suite, il s'est avéré que cette généralisation était en fait valable jusqu'aux nombres complexes, mais le mot "fractionnaire" est resté.

Comme le remarquent Gorenflo et Mainardi dans [GM97], le calcul fractionnaire est un sujet à la fois ancien et nouveau. Ancien, car l'idée de généraliser l'ordre de dérivation remonte à Leibniz à la fin du XVII^e siècle, et a depuis constamment intéressé de nombreux mathématiciens. Nouveau aussi, car à partir des années 1970, d'autres domaines que les mathématiques ont commencé à s'y intéresser. À partir de ce moment, les intégrales et dérivées fractionnaires n'ont cessé de trouver de nouvelles applications. Nous donnons dans ce chapitre un aperçu de ces deux aspects du calcul fractionnaire, mais nous avons auparavant choisi de présenter deux problèmes qui, dans leurs résolutions, font apparaître de manière naturelle des opérateurs fractionnaires. Précisons que l'objectif de ces exemples n'est pas d'établir un lien avec la notion de dérivée généralisée (il n'apparaîtra qu'ensuite), mais plutôt de fournir une première familiarisation avec la forme de ces opérateurs.

1.1 Deux exemples introductifs

1.1.1 Problème du tautochrone généralisé

Abel, en résolvant ce problème en 1823 dans [Abe23], fournit la première application historique du calcul fractionnaire (d'après [OS74]). Nous résumons ici ses travaux. Par souci de simplicité, les calculs seront menés "à la physicienne" (comme cela est fait dans [Abe23]) et les fonctions seront supposées suffisamment régulières pour que tous les calculs soient licites.

Hypothèses : On considère une particule de masse m uniquement soumise au champ de pesanteur g supposé uniforme, qui se meut sans frottement sur une courbe \mathcal{C} . Notons $s(y)$ son abscisse curviligne paramétrée en fonction de l'altitude. La particule part du point $A(x_0, y_0)$ et arrive en $O(0, 0)$. Un schéma est donné en figure 1.1. À x_0 fixé, on note $T(y_0)$ le temps que va mettre la particule à arriver en O . Le cas où T est indépendant de y_0 est appelé problème du tautochrone : il s'agit de trouver la courbe telle que le temps que met la particule à arriver en bas soit indépendant de son point de départ. Le problème généralisé correspond au cas où l'on se donne une fonction temps $T(y_0)$ qui dépend de l'altitude.

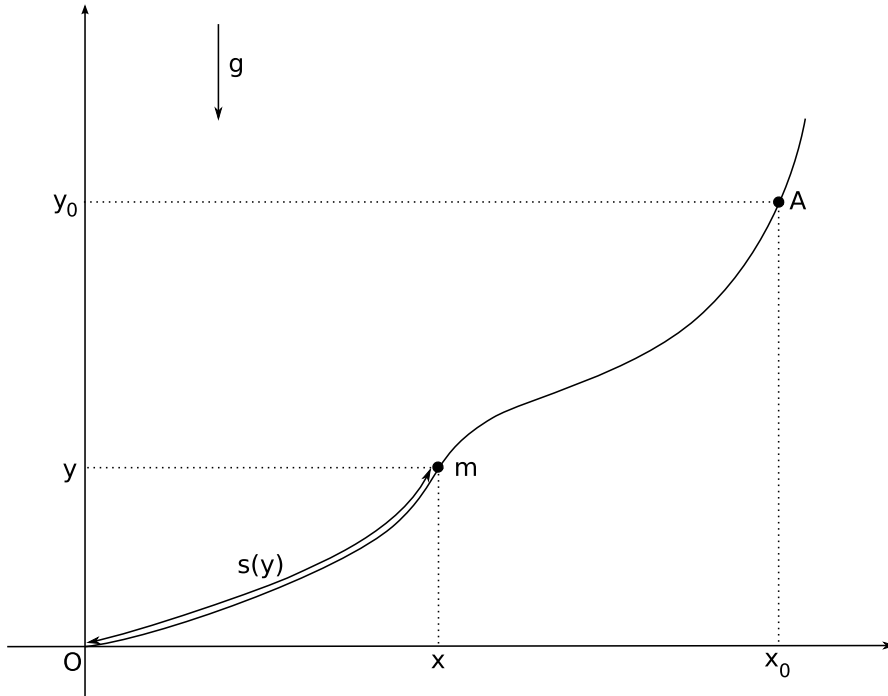


FIG. 1.1 – Problème du tautochrone.

Questions : Exprimer T en fonction de s , puis s en fonction de T .

Résolution : Tout d'abord, la particule restant sur la courbe, sa vitesse est simplement ds/dt . Notons que celle-ci est comptée négativement. Par conservation de l'énergie, la variation d'énergie cinétique est égale à la variation d'énergie potentielle :

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = m g (y_0 - y).$$

Par conséquent,

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y_0 - y)},$$

puis

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} ds = -\frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{ds}{dy} dy.$$

Ainsi, le temps de chute $T(y_0)$ est donné par

$$T(y_0) = \int_{y_0}^0 dt = -\int_{y_0}^0 \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \frac{ds}{dy} dy.$$

Nous retiendrons ce résultat à la première question sous la forme suivante :

$$\boxed{T(y_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-1/2} s'(y) dy.}$$

Ça y est, la première dérivée fractionnaire de cette thèse vient d'apparaître ! Comme nous le verrons par la suite, à un facteur multiplicatif près, $T(y_0)$ est la "dérivée d'ordre $1/2$ " (plus précisément, celle de Caputo) de s .

L'apport d'Abel commence véritablement à la seconde question. Non seulement il y répond, mais il s'attaque en fait à un problème plus général, en considérant la relation

$$T(y_0) = \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\alpha} s'(y) dy, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Le temps T est cette fois proportionnel à la dérivée (de Caputo) d'ordre α de la fonction s .

Afin d'exprimer s en fonction de T , Abel décompose s en série entière. Toutefois, nous optons ici pour un calcul plus simple et direct, en anticipant le résultat.

Évaluons la quantité $\int_0^z (z - x)^{\alpha-1} T(x) dx$ en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_0^z (z - x)^{\alpha-1} T(x) dx &= \int_0^z \int_0^x (z - x)^{\alpha-1} (x - y)^{-\alpha} s'(y) dy dx, \\ &= \int_0^z \left(\int_y^z (z - x)^{\alpha-1} (x - y)^{-\alpha} dx \right) s'(y) dy. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Avec le changement de variables $u = \frac{x - y}{z - y}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_y^z (z - x)^{\alpha-1} (x - y)^{-\alpha} dx &= \int_0^1 u^{\alpha-1} u^{-\alpha} du, \\ &= \beta(\alpha, 1 - \alpha), \end{aligned}$$

où β est la fonction Beta d'Euler, reliée à la fonction Gamma d'Euler Γ (voir la section 2.1.1) par

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}.$$

Par conséquent, $\beta(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ (voir (2.8)).

La relation (1.1) devient donc

$$\begin{aligned} \int_0^z (z - x)^{\alpha-1} T(x) dx &= \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \int_0^z s'(y) dy, \\ &= \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} s(z), \quad \text{car } s(0) = 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$s(y_0) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{\alpha-1} T(y) dy,$$

ce qui répond au problème. Par analogie avec la dénomination précédente, on aurait tout naturellement envie de dire que s est proportionnel à “l’intégrale d’ordre α ” de T (ou plutôt à une primitive d’ordre α de T). C’est effectivement la définition qui sera utilisée par la suite.

Mentionnons enfin que ce problème trouve une application dans la conception d’une ouverture dans un barrage [Bre22] ; on cherche dans ce cas à déterminer la forme de celle-ci afin d’obtenir le débit désiré pour chaque hauteur d’eau dans le barrage.

1.1.2 Flux de chaleur à la surface d’un conducteur thermique

Cet exemple plus concret a été traité par Oldham et Spanier en 1970 dans [OS70] et d’après l’historique de Ross reproduit dans [OS74], il semble être à l’origine de l’extension du calcul fractionnaire hors du champ des mathématiques.

En 1970, Oldham et Spanier montrent dans [OS70] que lors d’un phénomène de diffusion, le flux de diffusion est proportionnel à la dérivée d’ordre $1/2$ du paramètre physique (température, concentration d’espèces chimiques, potentiel électrique, etc). Comme on va le voir, ce résultat revêt tout son intérêt lorsqu’on ne dispose d’informations que sur le bord du domaine considéré. Nous reprenons ici l’exemple traité dans [OS74, p.203]. Notons qu’un autre exemple du même type est exposé dans [DGP10]. Là encore, par souci de simplicité, nous ne nous intéresserons pas à la régularité des fonctions rencontrées. Nous supposerons simplement qu’elles sont assez régulières pour que tous les calculs soient valides.

Hypothèses : On considère un conducteur thermique, de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ et de chaleur spécifique massique c . On souhaite connaître le flux de chaleur à sa surface. Si le matériau est assez épais on peut le modéliser par le demi-plan $x \geq 0$, la surface étudiée étant alors en $x = 0$ (voir figure 1.2). Notons $\phi(t)$ le flux de chaleur à la surface et $T(x, t)$ la différence entre la température extérieure et celle dans le conducteur (on suppose que la diffusion n’a lieu que dans la direction x). Pour $t < 0$, le système est à l’équilibre, donc $T(x, t) = 0$. Pour $t > 0$, la température extérieure varie. Son influence est toutefois négligeable si l’on s’éloigne assez de la surface : $\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = 0$.

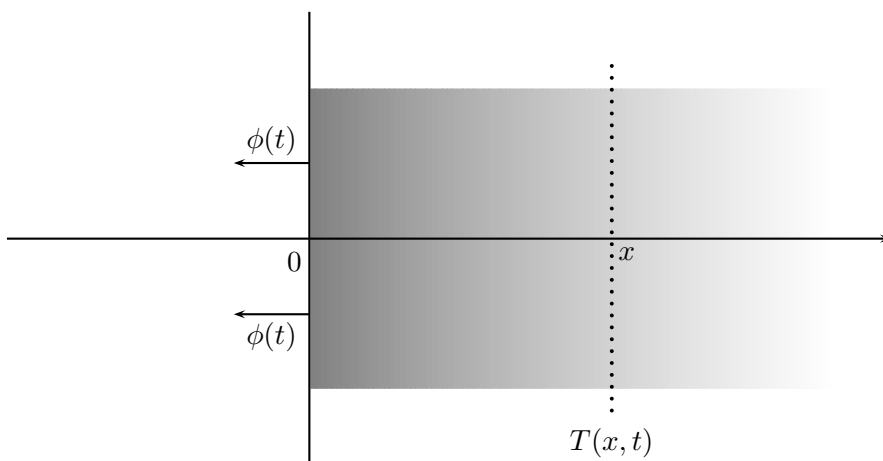


FIG. 1.2 – Diffusion et flux de chaleur.

D’après la première loi de Fick,

$$\phi(t) = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} T(0, t). \quad (1.2)$$

Pour déterminer le flux il faudrait donc connaître $T(x, t)$ sur une fine couche $0 \leq x < \varepsilon$. Comme il semble impossible de mesurer directement ces températures (il faudrait pouvoir entrer dans le conducteur), on est obligé de résoudre entièrement l'équation caractéristique du système, ce qui peut s'avérer délicat.

Questions : À partir des seules températures mesurables $T(0, t)$, peut-on exprimer le flux de chaleur $\phi(t)$?

Résolution : La réponse est positive et va faire apparaître une dérivée fractionnaire d'ordre $1/2$. D'après la seconde loi de Fick, la température $T(x, t)$ vérifie l'équation de la chaleur suivante :

$$\forall t \geq 0, \forall x \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t). \quad (1.3)$$

Remarque 1.1. L'équation (1.3) est aussi appelée équation de diffusion. Nous en verrons des généralisations fractionnaires par la suite.

Rappelons les conditions supplémentaires imposées par le problème :

$$\forall x \geq 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad (1.4)$$

$$\forall t \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = 0. \quad (1.5)$$

La transformée de Laplace d'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, que l'on notera $\mathcal{L}[f]$, est définie par

$$\forall s > 0, \quad \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Prenons la transformée de Laplace de (1.3) selon la variable temporelle. Pour le membre de gauche, la prise en compte de (1.4) conduit au résultat classique suivant :

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] (x, s) = s \mathcal{L}[T](x, s).$$

Le membre de droite vérifie quant à lui

$$\mathcal{L} \left[\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] (x, s) = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \mathcal{L}[T]}{\partial x^2} (x, s).$$

On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre en x ,

$$\frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \mathcal{L}[T]}{\partial x^2} (x, s) - s \mathcal{L}[T](x, s) = 0,$$

de solution générale

$$\mathcal{L}[T](x, s) = A(s) \exp \left(\sqrt{\frac{\rho c s}{\lambda}} x \right) + B(s) \exp \left(-\sqrt{\frac{\rho c s}{\lambda}} x \right).$$

La condition (1.5) impose $A(s) = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}[T](x, s) &= -\sqrt{\frac{\rho c s}{\lambda}} B(s) \exp \left(-\sqrt{\frac{\rho c s}{\lambda}} x \right), \\ &= -\sqrt{\frac{\rho c}{\lambda}} \sqrt{s} \mathcal{L}[T](x, s), \\ &= -\sqrt{\frac{\rho c}{\lambda}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right) \cdot (s \mathcal{L}[T](x, s)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

La transformée de Laplace de $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}}$ (où Γ est la fonction Gamma d'Euler) vérifie

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}} \right] (s) = \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

L'équation (1.6) devient ainsi

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] (x, s) = -\sqrt{\frac{\rho c}{\lambda}} \cdot \mathcal{L} \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}} \right] (s) \cdot \mathcal{L} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] (x, s).$$

La transformée de Laplace est injective et le produit dans le domaine de Laplace devient un produit de convolution $*$ dans le domaine temporel. Cela nous permet d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) &= -\sqrt{\frac{\rho c}{\lambda}} \left(\frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{t}} \right) * \left(\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) \right), \\ &= -\sqrt{\frac{\rho c}{\lambda}} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \frac{\partial T}{\partial t}(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (1.2),

$$\boxed{\phi(t) = \sqrt{\lambda \rho c} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \frac{\partial T}{\partial t}(0, \tau) d\tau,} \quad (1.7)$$

ce qui répond à la question initiale : $\phi(t)$ ne dépend que des valeurs de $T(0, t)$ et peut donc être évalué expérimentalement. Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, $\phi(t)$ est en fait proportionnel à la dérivée (de Caputo) d'ordre $1/2$ de $T(0, t)$; nous venons de rencontrer pour la deuxième fois une dérivée fractionnaire.

Bien entendu, ces illustrations n'expliquent pas pourquoi les opérateurs rencontrés sont qualifiés de "fractionnaires". En fait, comme nous le verrons au chapitre 2, ce sont exactement ces expressions que nous retrouverons lorsque nous chercherons à généraliser les primitives et dérivées à n'importe quel ordre réel. La nature très différente de ces deux exemples semble suggérer un vaste champ d'applications pour le formalisme fractionnaire. Nous allons maintenant voir que c'est effectivement le cas, mais que l'élaboration de ces outils a été le fruit d'un long cheminement mathématique.

1.2 Bref panorama du calcul fractionnaire

Notre but dans cette partie n'est pas de dresser un état de l'art complet sur le calcul fractionnaire, et ce pour deux raisons :

- Les domaines de recherches sont actuellement si variés qu'il semble difficile d'avoir un aperçu complet, même si plusieurs ouvrages tels que [Hil00a, SATM07] offrent une vision très large sur ce domaine.
- Des historiques très détaillés sont donnés dans les ouvrages de références tels que [OS74, SKM93].

Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcul fractionnaire, jusqu'à son essor dans le développement d'applications dans les années 1970. Ces avancées ultérieures sont ensuite regroupées par thématique.

1.2.1 Aperçu historique

Nous nous appuyons sur les ouvrages [OS74, MR93, SKM93, Hil08] pour couvrir la période de 1695 à 1974.

1695

L'origine du calcul fractionnaire semble remonter à Leibniz. Dans une lettre au Marquis de L'Hospital, il propose de généraliser sa formule pour la dérivée n -ième d'un produit de deux fonctions à $n > 0$ et introduit la notation $d^{1/2}h$. Il écrit notamment que " $d^{1/2}x = x\sqrt{dx : x}$ ". Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées "d'ordres généraux".

1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Dans son article [Eul38] où il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β , avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant : pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord :

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance $m > 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.8)$$

Le terme de droite de (1.8) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m+1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle $\beta > 0$:

$$\boxed{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.} \quad (1.9)$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

1822

Mentionnons ensuite le travail de Fourier qui, grâce à sa célèbre transformée, obtient une autre définition de la dérivée d'ordre réel. En composant la transformée de Fourier (réelle) d'une fonction f avec sa transformée inverse, Fourier retrouve l'identité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos(p(x-\alpha)) d\alpha dp. \quad (1.10)$$

Il remarque ensuite que la dérivée n -ième ($n \in \mathbb{N}$) du terme en cos peut s'écrire comme

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(p(x-\alpha)) = p^n \cos \left[p(x-\alpha) + \frac{n\pi}{2} \right].$$

Le membre de droite garde un sens si on remplace n par $u > 0$, ce qui permet de définir la dérivée d'ordre u de $\cos(p(x-\alpha))$. En utilisant cette définition dans (1.10), Fourier obtient ainsi la dérivée d'ordre $u > 0$ de f :

$$\boxed{\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) p^u \cos \left[p(x-\alpha) + \frac{u\pi}{2} \right] d\alpha dp.}$$

1823

Abel utilise le calcul fractionnaire pour résoudre le problème du tautochrone généralisé, présenté en section 1.1.1.

1832-37

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semble l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax} \quad (1.11)$$

pour $n \in \mathbb{N}$, il propose de l'étendre pour $\alpha > 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax} . Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x} \quad (1.12)$$

admet une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\boxed{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}.}$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.12), Liouville remarque que

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, \quad x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du.$$

À l'aide de (1.11), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-xu} du,$$

soit

$$\boxed{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}.} \quad (1.13)$$

Même si (1.9) et (1.13) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique. Par exemple, pour $\alpha = 1/2$,

- avec la définition d'Euler, $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$,
- alors qu'avec celle de Liouville, $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = 0$.

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires, introduites au chapitre 2. On peut vérifier que la définition d'Euler correspond à la dérivée de Riemann-Liouville et celle de Liouville à sa propre version moderne. Par exemple, pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \right)_{Euler} x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy, \\ \left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \right)_{Liouville} x^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy. \end{aligned}$$

Comme il est signalé dans [Hil08] ces définitions diffèrent en fait par les bornes inférieures de leurs intégrales.

Remarque 1.2. L'expression $\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$ est définie ici comme

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{d}{dx} \int_s^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy.$$

1847

À partir d'une généralisation de la formule de Taylor, Riemann propose une définition d'intégrale fractionnaire :

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy + \psi(x),$$

où $\psi(x)$ est une "fonction complémentaire" qui le gênera en fait dans ses travaux ultérieurs. Elle sera finalement abandonnée pour donner la définition moderne de l'intégrale fractionnaire.

1867-68

Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie (opposée à infinitésimale) entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h .

1869

L'expression définitive de ce qui est maintenant appelé intégrale fractionnaire de Riemann apparaît pour la première fois dans le travail de Sonin. Pour une fonction complexe, en dérivant n fois la formule de Cauchy ($n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)^{n+1}} dz.$$

Sonin, en choisissant un chemin approprié d'intégration, généralise cette formule à $n < 0$. Il obtient finalement une définition de l'intégrale d'ordre $\alpha > 0$, que l'on notera par la suite ${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$:

$${}_a\mathcal{I}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

1892

Heaviside fournit cette année-là la première application concrète du calcul fractionnaire (le tautochrone d'Abel relevant davantage du cas d'école) pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle rencontrée plus haut :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t). \quad (1.14)$$

La démarche d'Heaviside est loin d'être rigoureuse (elle ne sera justifiée qu'en 1919), mais fournit toutefois la bonne solution. En posant $p = \partial/\partial t$ et en considérant d'abord cette quantité comme constante, il trouve que

$$T(x, t) = T_0 \exp(-axp^{1/2}).$$

Il suppose ensuite que $p^{1/2}T_0 = T_0/\sqrt{\pi t}...$ ce qui correspond en fait à la dérivée d'ordre 1/2 de T_0 ! En développant la solution en série entière, il obtient finalement la solution exacte de (1.14).

1917

Weyl définit une intégrale fractionnaire adaptée aux fonction périodiques.

1927

Marchaud introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire,

$$\mathbf{D}_+^\alpha f(x) = c \int_0^\infty \frac{\Delta_t^l f(x)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

où $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$ avec $l > \alpha$ et c est une constante de renormalisation. L'opérateur Δ_t^l est une différence finie d'ordre l (par exemple, $(\Delta_t^1 f)(x) = f(x) - f(x-t)$). L'avantage d'une telle définition par rapport aux autres est qu'elle est moins restrictive quant à la régularité de f .

1928

Hardy et Littlewood étudient comment agit l'intégrale fractionnaire ${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$ sur certaines classes de fonctions. En particulier, leur théorème majeur stipule que pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < 1/\alpha$, ${}_a\mathcal{I}_x^\alpha$ est un opérateur borné de L^p dans L^q , où $1/q = 1/p - \alpha$.

1937

Riesz cherche à donner un sens à l'intégrale fractionnaire pour des fonctions à plusieurs variables. Il donne la définition suivante :

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\|x - y\|^{n-\alpha}} dy.$$

Cet opérateur vérifie notamment $\mathcal{I}^\alpha \circ \mathcal{I}^\beta = \mathcal{I}^{\alpha+\beta}$ et $\Delta \mathcal{I}^{\alpha+2} = -\mathcal{I}^\alpha$, où Δ est l'opérateur Laplacien.

1970

Dans [OS70] Oldham et Spanier traitent le problème présenté en section 1.1.2.

1974

Cette année-là se tient à l'Université de New Haven (Connecticut) la première conférence sur le calcul fractionnaire, organisée par Ross. À partir de cette période, le calcul fractionnaire et ses applications vont se trouver au cœur de nombreuses recherches dont nous allons maintenant présenter quelques aspects.

1.2.2 Quelques champs de recherches actuelles

Nous n'offrons ici qu'un rapide survol des quelques domaines d'applications que nous avons pu rencontrer. Les trois derniers sont en rapport direct avec cette thèse. Mentionnons les ouvrages [Hil00a, SATM07] qui regroupent diverses applications du calcul fractionnaire. On peut noter que pour la majeure partie des domaines présentés ci-dessous, les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire.

Modélisation de la diffusion anormale

Dans la majorité des systèmes où se produisent des phénomènes de diffusion (par exemple une goutte d'encre dans un verre), les particules suivent un mouvement brownien et le front de diffusion, plus précisément la variance $\langle x^2(t) \rangle$ (la taille du nuage d'encre), croît linéairement avec le temps :

$$\langle x^2 \rangle(t) \sim ct. \quad (1.15)$$

Ce comportement peut être décrit à l'aide de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (1.16)$$

où $P(x, t)$ est la probabilité de trouver la particule en x à l'instant t .

Toutefois, dans certains systèmes complexes, la loi (1.15) n'est plus vérifiée et est remplacée par

$$\boxed{\langle x^2 \rangle(t) \sim c_\alpha t^\alpha, \quad \alpha > 0.} \quad (1.17)$$

Le mouvement des particules n'est plus brownien mais peut être décrit par un nouveau processus stochastique, appelé Continuous Time Random Walks (CTRW), introduit par Montroll et Weiss [MW65].

Plusieurs généralisations de (1.16) sont alors possibles ; elles consistent pour la plupart à remplacer les dérivées ordinaires par des dérivées fractionnaires en temps et/ou en espace.

Wyss, dans [Wys86], est le premier à étudier une équation de diffusion fractionnaire en temps, du type

$$\boxed{\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} P(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad 0 < \alpha < 1.} \quad (1.18)$$

Metzler et Klafter proposent dans [MK00] une revue complète sur la diffusion anormale, basée sur les CTRW et les équations de diffusion fractionnaires. Parmi les nombreuses références citées, mentionnons [HA95] et [Com96] où le lien entre CTRW et équation de diffusion fractionnaire en temps est discuté. Dans [GR92] la diffusion anormale dans un milieu fractal est considérée.

Les phénomènes de diffusion anormales apparaissant dans des systèmes très divers, le calcul fractionnaire trouve naturellement sa place dans plusieurs domaines, comme par exemple les milieux poreux [LN04, ZNC10, GVH06] ou encore les systèmes chaotiques. Nous consacrons ci-dessous un paragraphe à ces derniers car ils ont constitué la principale motivation de cette thèse.

Mécanique des milieux continus

La déformation des milieux continus (solides ou liquides) est souvent décrite à l'aide de deux tenseurs, celui des déformations noté ε_{ij} et celui des contraintes σ_{ij} . Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc, ...), présentent un comportement intermédiaire entre caractères visqueux et élastiques, qualifié de viscoélastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs :

$$\sigma_{ij}(t) = E\varepsilon_{ij}(t) + \eta \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon_{ij}(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Cette loi est justifiée par Bagley et Torvik dans [BT83, BT86] (pour $\alpha = 1/2$). Dans [Pfi04], l'introduction de dérivée fractionnaire dans le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres, enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroît comme $t^{-(1+\alpha)}$, elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α . Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la viscoélasticité via la dérivation fractionnaire est donnée dans [DGP10].

Électrochimie

Dans [OS70] Oldham et Spanier s'intéressent à la diffusion (classique) d'espèces électrochimiques entre deux électrodes. Afin de connaître la concentration à l'extrémité de l'une d'entre elles, ils proposent de remplacer la loi de Fick par une expression similaire à (1.7). Ce problème est effectivement analogue à celui présenté en section 1.1.2.

Biophysique

D'après [GN95], la dynamique de protéines peut être gouvernée par de nombreuses échelles de temps, ce qui ralentit les processus de relaxation. Cette lente décroissance est alors prise en compte par une dérivée fractionnaire en temps.

Acoustique

Pour certains instruments de musique à vent les pertes visco-thermiques peuvent être modélisées efficacement à l'aide de dérivées fractionnaire temporelles [HM06].

Physique statistique

En thermodynamique, l'introduction de nouvelles transitions de phases dans [Hil93] s'appuie sur la dérivation fractionnaire.

Dans [VDBFL10], les interactions à longues portées présentes dans certains systèmes de particules sont prises en compte, à la limite continue, par une dérivée fractionnaire en espace.

Traitement d'images

Comme pour toute application du traitement du signal, le filtrage et le débruitage d'images utilisent largement le produit de convolution. Parmi les filtrages utilisés, la gaussienne tient un rôle important. Or il se trouve que la solution d'une équation de diffusion du type (1.16) est un produit de convolution entre la solution à $t = 0$ et une gaussienne. Filtrer une image par une gaussienne revient donc à résoudre une équation de diffusion. L'amélioration de filtres peut ainsi se traduire par la résolution de nouvelles équations aux dérivées partielles, notamment des équations de diffusion fractionnaires. Dans ce cadre, l'équation fractionnaire en temps (1.18) a d'abord été étudiée dans [CF03]. De nouvelles équations ont depuis lors été proposées, par exemple dans [Gui09] où la dérivée fractionnaire est cette fois en espace.

Contrôle

Le comportement d'un système en fonction de paramètres de contrôle conduit à étudier des fonctions de transferts associées. L'optimisation de celles-ci suivant certains critères, tels que la stabilité ou la robustesse, permet de contrôler et modéliser au mieux le système. À l'aide du calcul fractionnaire il devient possible de considérer de nouvelles fonctions de transferts, plus précisément des fonctions rationnelles à coefficients réels. Plusieurs recherches visent à généraliser les critères classiques à ces nouveaux systèmes, notamment pour la stabilité [Mat96]. Dans ce domaine, les intérêts du calcul fractionnaire peuvent être de réduire la complexité et d'accroître la robustesse de certains modèles.

Le groupe CRONE, fondé par Oustaloup dans les années 70, applique ces méthodes à de nombreux systèmes industriels : spectroscope, suspensions de voitures [OMN96], robot-cueilleur, charrue électrohydraulique, batteries pour voitures [SCL⁺10], etc.

Analyse numérique

L'utilisation concrète d'équations différentielles fractionnaires nécessite de les implémenter numériquement et donc de discrétiser les opérateurs fractionnaires. La définition de Grünwald-Letnikov fournit directement une approximation, mais d'autres méthodes plus efficaces ont depuis été proposées. Le premier à s'y intéresser d'un point de vue théorique est Lubich qui, dans [Lub86], utilise la structure convolutive de l'intégrale fractionnaire pour la discrétiser. Des algorithmes ont ensuite été proposés, notamment dans [GDMD06].

Systèmes hamiltoniens chaotiques

De nombreux systèmes chaotiques présentent des phénomènes de diffusions anormales du type (1.17). Zaslavsky a étudié en détail ces systèmes et a contribué à l'élaboration d'équations de diffusions fractionnaires afin de modéliser ces phénomènes [Zas94b, Zas94a, SZ97, ZEN97]. Il montre que les ordres de dérivations fractionnaires sont reliés aux structures fractales qui apparaissent dans l'espace des phases des systèmes. Un article de revue conséquent [Zas02] puis un livre [Zas05] regroupent ces travaux.

Systèmes lagrangiens et hamiltoniens fractionnaires

Dans [Rie96], Riewe soulève le problème suivant : les outils mathématiques de mécanique classique et particulièrement le principe de moindre action, ne sont vraiment adaptés que pour des systèmes conservatifs, alors qu'aucun système réel ne l'est vraiment. Il est par exemple impossible de prendre en compte la friction linéaire dans un système lagrangien. Riewe propose alors d'intégrer le calcul fractionnaire dans le principe de moindre action afin de modéliser les systèmes dissipatifs. Comme application, il fournit un Lagrangien fractionnaire susceptible de fournir un terme de friction – susceptible seulement, car son raisonnement sur ce point est discutable (nous y reviendrons au chapitre 5).

Ce point de vue a été conforté avec le développement d'équations différentielles fractionnaires et plusieurs auteurs s'intéressent à présent au principe de moindre action fractionnaire sous diverses déclinaisons : lagrangienne [Agr02] (y compris pour les champs [BM05]), hamiltonienne [BA06], avec prise en compte d'un temps intrinsèque [ENT07, MBR07], ainsi qu'avec diverses définitions de dérivées fractionnaires. La notion de loi de conservation a aussi été étudiée dans ce cadre [FT07, FT08]. Dans [Cre07], Cresson s'intéresse à la transition *classique* \rightarrow *fractionnaire* dans les systèmes lagrangiens et hamiltoniens. Deux choix sont possibles : effectuer la transition directement sur l'équation classique, ou bien sur le Lagrangien lui-même pour ensuite obtenir une équation fractionnaire. Leur différence est discutée et permet à Cresson de proposer des structures lagrangiennes pour certaines équations n'en possédant pas a priori, telles que l'équation de diffusion (fractionnaire ou classique), l'équation des ondes fractionnaire ou encore l'équation de Stokes incompressible (classique) [Cre09].

Dynamique fractionnaire

Stanislavsky et Hilfer se sont aussi intéressés à cette transition *classique* \rightarrow *fractionnaire*, mais dans un cadre plus général. La problématique pourrait être formulée ainsi : comment, dans un système dynamique classique (régi par la dérivée usuelle d/dt), la dérivée fractionnaire peut-elle apparaître ? La réponse que Stanislavsky apporte réside dans la structure du temps : si dans un système classique la variable temporelle se comporte de manière stochastique (à cause d'interactions avec l'extérieur par exemple), alors la dérivée usuelle peut prendre la forme d'une dérivée fractionnaire [Sta04]. Il applique ensuite ce formalisme aux systèmes hamiltoniens dans [Sta06] pour obtenir une forme de système hamiltonien fractionnaire différente de celle étudiée par les auteurs du paragraphe précédent.

Hilfer, quant à lui, réinterprète la dérivée classique comme l'évolution infinitésimale d'un système. Si l'on regarde le système sous un autre angle (après moyennisation et changement d'échelle temporelle), cette évolution peut prendre la forme d'une dérivée fractionnaire [Hil95a, Hil95b, Hil00b]. Dans [Hil03], il va même plus loin : à partir de considérations générales sur la structure du temps, il montre que l'évolution la plus générale d'un système s'effectue via une dérivée fractionnaire, la dérivée classique ne devenant alors qu'un cas particulier.

Notons enfin que les travaux les plus récents de Zaslavsky ont aussi porté sur la dynamique fractionnaire, avec l'étude – en collaboration avec Stanislavsky – d'un attracteur chaotique pour l'oscillateur fractionnaire [ZSE06], la construction de solutions pour ce type de systèmes [TZ06] et l'obtention de systèmes dynamiques fractionnaires discrets [TZ08].

Chapitre 2

Définitions et propriétés des opérateurs fractionnaires

Maintenant que nous disposons d'un aperçu général sur le calcul fractionnaire, nous allons entrer dans les détails. Là encore, ce chapitre est loin d'être exhaustif ; son but est plutôt d'introduire les outils et résultats utilisés pendant notre travail de recherche. Nous commençons par donner les définitions d'intégrales fractionnaires les plus courantes ainsi que des résultats concernant leurs actions sur certaines classes de fonctions. Nous procédons ensuite de même pour les dérivées fractionnaires et observons enfin que – seulement – certaines propriétés des dérivées classiques peuvent être généralisées au cas fractionnaire. Parmi les résultats énoncés, certains, fondamentaux, sont présentés même s'ils ne seront pas utilisés par la suite. Au contraire, d'autres, évidents mais utiles pour la suite, sont démontrés car nous n'avons pu les trouver dans la littérature.

La majorité de ce chapitre est tirée de [SKM93] auquel nous renvoyons pour une analyse approfondie du sujet.

Commençons par préciser plusieurs ensembles fonctionnels. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$. Sauf mention du contraire, l'ensemble d'arrivée des fonctions est \mathbb{R}^N .

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $C^p([a, b])$ l'ensemble des fonctions de classe C^p sur $[a, b]$, $AC([a, b])$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ et $AC^{p+1}([a, b])$ l'ensemble des fonctions f de classe C^p telles que $f^{(p)} \in AC([a, b])$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On introduit les ensembles suivants :

$$C_+^0([a, b]) = \{f \in C^0([a, b]) \mid f(a) = 0\},$$

$$C_-^0([a, b]) = \{f \in C^0([a, b]) \mid f(b) = 0\},$$

$$C_+^m([a, b]) = \left\{f \in C^m([a, b]) \mid \forall 0 \leq k \leq m-1, f^{(k)}(a) = 0\right\},$$

$$C_-^m([a, b]) = \left\{f \in C^m([a, b]) \mid \forall 0 \leq k \leq m-1, f^{(k)}(b) = 0\right\}.$$

On note aussi $C_0^m([a, b]) = C_+^m([a, b]) \cap C_-^m([a, b])$.

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ est λ -höldérienne si

$$\exists c > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq c|x - y|^\lambda.$$

On remarque que seul le cas $0 < \lambda \leq 1$ est pertinent, car si $\lambda > 1$, f est une fonction constante. Si $\lambda = 1$, on dit que f est lipschitzienne. Pour $0 < \lambda \leq 1$, on note $H^\lambda([a, b])$ l'ensemble des fonctions λ -höldériennes. Comme dans [SKM93, p.2], on pose $H^0([a, b]) = C^0([a, b])$.

Si $\lambda > 1$, on pose $\lambda = m + \sigma$, avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 < \sigma \leq 1$. On note dans ce cas $H^\lambda([a, b])$ l'ensemble des fonctions f de classe C^m telles que $f^{(m)} \in H^\sigma([a, b])$.

Soit I un intervalle (éventuellement non borné) de \mathbb{R} et soit $q \in [1, +\infty[$. On note $L^q(I)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur I au sens de Lebesgue telles que $\int_I \|f(t)\|^q dt < \infty$ et $L^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions bornées sur I . On note enfin $L^q_{loc}(I)$ l'ensemble des fonctions f telles que pour tout compact $K \subset I$, $f \in L^q(K)$.

2.1 Intégrales fractionnaires

Comme dans la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de Riemann-Liouville. D'autres versions seront ensuite abordées rapidement, car elles n'apparaîtront plus ensuite. Enfin, nous verrons que les définitions que nous aurons données possèdent des versions symétriques, "à droite". Celles-ci sont rarement utilisées car anti-causales (elles dépendent du futur des fonctions), mais apparaissent inévitablement dans les systèmes lagrangiens fractionnaires, comme nous le verrons dans la seconde partie.

2.1.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Fonctions définies sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Commençons par noter ${}_a\mathcal{I}_t^1$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

L'itération de ${}_a\mathcal{I}_t^1$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{I}_t^1 \circ {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) &= \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du = \int_a^t \left(\int_\tau^t du \right) f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $({}_a\mathcal{I}_t^1)^n$ la n -ième itération de ${}_a\mathcal{I}_t^1$, une récurrence directe montre que

$$({}_a\mathcal{I}_t^1)^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Si on note $g = ({}_a\mathcal{I}_t^1)^n f$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad g^{(k)}(a) = 0, \quad g^{(n)} = f. \quad (2.3)$$

La formule (2.2) est donc exactement la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à g à l'ordre $n-1$. L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante.

Définition 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note ${}_a\mathcal{I}_t^n f$, est définie par

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{I}_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

La dénomination “gauche” provient du fait que l’intégrale est évaluée à partir des valeurs à gauche ($\tau < t$) de f .

Nous voyons alors qu’il est possible d’étendre directement (2.4) à $n > 0$, et ce grâce à la fonction Gamma d’Euler que nous avons déjà rencontrée au chapitre 1. Celle-ci, notée Γ , est définie par

$$\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (2.5)$$

Rappelons quelques-unes de ses propriétés qui nous seront utiles :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi}, \\ \forall \alpha > 0, \Gamma(\alpha + 1) &= \alpha \Gamma(\alpha), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n + 1) = n!, \quad (2.7)$$

$$\forall 0 < \alpha < 1, \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (2.8)$$

Grâce à (2.6), il est possible d’étendre le domaine de définition de Γ à $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$: pour $-1 < \beta < 0$, on pose $\Gamma(\beta) = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\beta}$, puis on utilise cette relation pour étendre Γ à tous les réels négatifs qui ne sont pas entiers relatifs.

Remarque 2.1. *L’expression (2.5) est en fait valable pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\alpha) > 0$, où $\Re(\alpha)$ désigne la partie réelle de α . Avec l’extension précédente, il est alors possible de définir $\Gamma(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $-\Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$.*

C’est la propriété (2.7) qui permet de généraliser la définition 2.1 de la manière suivante.

Définition 2.2. *L’intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d’ordre $\alpha > 0$ est définie par*

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Il convient maintenant de déterminer pour quelles classes de fonctions cette définition a un sens et plus précisément quelles sont les images de ces ensembles par cet opérateur. Le théorème suivant y répond de manière synthétique.

Théorème 2.1. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\alpha > 0$ et $(p, q) \in [1, +\infty]^2$. L’intégrale fractionnaire ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha$ vérifie les propriétés suivantes :*

	f	${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$	conditions
1.	$L^p([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < \frac{1}{\alpha}, \quad 1 \leq q \leq \frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L^1([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq q < \frac{1}{1-\alpha}$
3.	$L^{1/\alpha}([a, b])$	$L^q([a, b])$	$0 < \alpha < 1, \quad q \geq 1$
4.	$L^p([a, b])$	$H^{\alpha-1/p}([a, b])$	$p > \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}^*$
5.	$L^\infty([a, b])$	$H^\alpha([a, b])$	
6.	$L^p([a, b])$	$L^p([a, b])$	$p \geq 1$
7.	$C^0([a, b])$	$C_+^0([a, b])$	
8.	$AC([a, b])$	$AC([a, b])$	

Le tableau suivant se lit ainsi : la première colonne désigne la classe de f , la seconde celle de ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$ et la troisième précise les conditions sous lesquelles le résultat est valide.

Démonstration. Tous les résultats sont tirés de [SKM93].

1. C'est une partie du théorème de Hardy-Littlewood, repris dans [SKM93, p.66]. Cet important énoncé affirme en fait que ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha$ est un opérateur borné de $L^p([a, b])$ dans $L^q([a, b])$, avec $q = \frac{p}{1 - \alpha p}$. Comme $L_{p_2}([a, b]) \subset L_{p_1}([a, b])$ si $1 \leq p_1 < p_2$, on en déduit directement que le résultat est vrai pour $1 \leq q \leq \frac{p}{1 - \alpha p}$.
2. Voir note 3.3 de [SKM93, p.91].
3. Ce résultat n'apparaissant qu'en filigrane dans [SKM93], nous le montrons ici. D'après l'inégalité de Minkowsky généralisée,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \left\{ \int_a^b \| {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f(t) \|^q dt \right\}^{1/q} &= \left\{ \int_a^b \left\| \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\|^q dt \right\}^{1/q}, \\ &\leq \int_a^b \left\{ \int_\tau^b \left\| (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) \right\|^q dt \right\}^{1/q} d\tau, \\ &\leq \int_a^b \|f(\tau)\| \left(\int_\tau^b (t - \tau)^{(\alpha-1)q} dt \right)^{1/q} d\tau, \\ &\leq \frac{1}{(\alpha - 1)q + 1} \int_a^b \|f(\tau)\| (b - \tau)^{(\alpha-1)q+1} d\tau, \\ &< \infty. \end{aligned}$$

4. C'est le théorème 3.6 de [SKM93, p.67].
5. Voir [SKM93, p.56].
6. C'est une partie du théorème 2.6 de [SKM93, p.48].
7. C'est le théorème 3.1 de [SKM93, p.53], avec $\lambda = 0$.
8. C'est le lemme 2.1 de [SKM93, p.32].

□

Concernant le point 4, remarquons que

$$\forall \mu \geq 0, \forall q \geq 1, \quad H^\mu([a, b]) \subset C^0([a, b]) \subset L^q([a, b]),$$

et ajoutons que si $\alpha - 1/p \in \mathbb{N}$ (avec $p > 1/\alpha$), on peut montrer [SKM93, p.67] que

$${}_a\mathcal{I}_t^\alpha (L^p([a, b])) \subset C^0([a, b]).$$

On peut ainsi résumer une partie des résultats précédents sous la forme suivante :

<ul style="list-style-type: none"> - Si $\alpha p \geq 1$, ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha (L^p([a, b])) \subset L^q([a, b])$, avec $1 \leq q$, - Si $\alpha p < 1$, ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha (L^p([a, b])) \subset L^q([a, b])$, avec $\begin{cases} 1 \leq q \leq \frac{p}{1 - \alpha p} & \text{si } p > 1, \\ 1 \leq q < \frac{1}{1 - \alpha} & \text{si } p = 1. \end{cases}$
--

Nous signalons enfin le lemme suivant, qui sera généralisé en section 2.3.

Lemme 2.1. *Soit $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in C_+^p([a, b])$, alors*

$$\frac{d^p}{dt^p} \circ {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f = {}_a\mathcal{I}_t^\alpha \circ \frac{d^p}{dt^p} f.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur p . Pour $p = 1$ et $f \in C_+^1([a, b])$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f'(\tau) d\tau, \\ &= {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f'(t), \end{aligned}$$

puisque $f(a) = 0$.

Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C_+^{p+1}([a, b])$. Puisque $f' \in C_+^p([a, b])$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{d^p}{dt^p} \circ {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f' = {}_a\mathcal{I}_t^\alpha \circ \frac{d^p}{dt^p} f'. \quad (2.9)$$

D'après le cas $p = 1$, ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f' = \frac{d}{dt} \circ {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$. L'équation (2.9) devient ainsi

$$\frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} \circ {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f = {}_a\mathcal{I}_t^\alpha \circ \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} f,$$

ce qui achève la preuve. □

L'intégrale de Riemann-Liouville sur $[a, b]$ est la plus forme la plus répandue dans la littérature. Nous présentons toutefois ses extensions aux intervalles non bornés.

Fonctions définies sur $[a, +\infty[$

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$. La définition 2.2 s'étend naturellement au cas $b = +\infty$; par contre les classes de fonctions seront différentes. Le théorème 2.1 s'étend directement de manière locale. L'extension de $AC([a, b])$ et $H^\lambda([a, b])$ à $[a, +\infty[$ nécessitant des conditions supplémentaires, nous nous limiterons aux résultats suivants.

Lemme 2.2. *Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$, $\alpha > 0$ et $(p, q) \in [1, +\infty[^2$. L'intégrale fractionnaire ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha$ vérifie les propriétés suivantes :*

	f	${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$	conditions
1.	$L_{loc}^p([a, +\infty[)$	$L_{loc}^q([a, +\infty[)$	$0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < \frac{1}{\alpha}, \quad 1 \leq q \leq \frac{p}{1-\alpha p}$
2.	$L_{loc}^{1/\alpha}([a, +\infty[)$	$L_{loc}^q([a, +\infty[)$	$0 < \alpha < 1, \quad q \geq 1$
3.	$L_{loc}^p([a, +\infty[)$	$L_{loc}^p([a, +\infty[)$	$p \geq 1$
4.	$C^0([a, +\infty[)$	$C_+^0([a, +\infty[)$	

Démonstration. Les quatre preuves sont similaires. Par exemple, pour le point 1, soit $f \in L_{loc}^p([a, +\infty[)$. Montrons que ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f \in L_{loc}^q([a, +\infty[)$. Soit K un compact de $[a, +\infty[$. On pose $b = \sup K : K \subset [a, b]$. Comme $f \in L^p([a, b])$, ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f \in L^q([a, b])$ d'après le théorème 2.1. En particulier, ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f \in L^q(K)$. □

Comme nous allons maintenant le voir, un résultat plus fort peut en fait être obtenu, puisque le théorème de Hardy-Littlewood s'étend (avec certaines restrictions) aux fonctions définies sur \mathbb{R} entier. Il sera en particulier valide sur $[a, +\infty[$.

Fonctions définies sur \mathbb{R}

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. La définition 2.2 s'étend directement au cas $] - \infty, b]$ et même à \mathbb{R} entier. Notons alors \mathcal{I}_+^α cet opérateur :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Si $0 < \alpha < 1$, d'après [SKM93, p.94], $\mathcal{I}_+^\alpha f$ est défini presque partout si $f \in L^1(\mathbb{R})$. On dispose de plus du résultat suivant, énoncé dans [SKM93, p.103].

Théorème 2.2 (Hardy-Littlewood). *Soit $\alpha > 0$ et $(p, q) \in [1, +\infty[^2$. On a l'équivalence suivante :*

$$\mathcal{I}_+^\alpha \text{ est un opérateur borné de } L^p(\mathbb{R}) \text{ dans } L^q(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \begin{cases} 0 < \alpha < 1, \\ 1 < p < \frac{1}{\alpha}, \\ q = \frac{p}{1-\alpha p}. \end{cases}$$

Intégrales fractionnaires à droite

Revenons pour l'instant à une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si l'on remonte à la relation de départ (2.1), on peut remarquer que l'intégrale

$${}_b\mathcal{I}_t^1 f(t) = \int_b^t f(\tau) d\tau = - \int_t^b f(\tau) d\tau$$

est aussi une primitive de f , qui cette fois s'annule en b et fait intervenir les valeurs à droite de f . À partir de la relation

$$\int_b^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau = (-1)^n \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau,$$

on pourrait définir de la même manière que précédemment l'intégrale à droite d'ordre n de f par

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_b\mathcal{I}_t^n f(t) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

En notant $h = {}_b\mathcal{I}_t^n f$, h serait cette fois l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad h^{(k)}(b) = 0, \quad h^{(n)} = f. \quad (2.11)$$

Dans la littérature, toutefois, afin de mettre en valeur la différence entre droite et gauche, c'est l'opérateur $-d/dt$ qui est utilisé pour le côté droit, plutôt que d/dt . On définit donc l'intégrale à droite de la manière suivante.

Définition 2.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à droite d'ordre n de f , que l'on note ${}_t\mathcal{I}_b^n f$, est définie par*

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_t\mathcal{I}_b^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Elle vérifie ainsi la relation

$$\left(-\frac{d}{dt}\right)^n {}_t\mathcal{I}_b^n f(t) = f(t).$$

Là encore, l'extension à tout ordre réel positif est immédiat.

Définition 2.4. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par*

$$\forall t \in [a, b], \quad {}_t\mathcal{I}_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

L'extension sur $[a, +\infty[$ et \mathbb{R} est noté \mathcal{I}_-^α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}_-^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Tous les résultats obtenus précédemment sont aussi valables pour ces intégrales à droite.

Comme on l'a vu dans l'historique, d'autres définitions d'intégrales fractionnaires ont été proposées par des mathématiciens depuis le XIX^e siècle. À titre informatif, nous introduisons succinctement celles qui semblent être les plus utilisées après l'intégrale de Riemann-Liouville.

2.1.2 Autres définitions

Intégrale de Weyl

Si les définitions précédentes sont adaptées pour des fonctions quelconques, elles le sont par contre moins pour les fonctions périodiques. Effectivement, si f est périodique, a priori aucune des intégrales de Riemann-Liouville ne le sera, ce que l'on pourrait pourtant souhaiter. Weyl a proposé une définition qui préserve cette propriété. Reprenons son cheminement, exposé dans [SKM93, p.347].

Soit f une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} suffisamment régulière, que l'on décompose en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}, \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Pour des raisons techniques on suppose que $f_0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-ik)^n f_k e^{-ikt},$$

ce qui conduit Weyl à définir l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ par

$$\mathcal{I}_+^{(\alpha)} f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{-\alpha} f_k e^{ikt}. \quad (2.13)$$

Si g est une fonction 2π -périodique, alors le produit de convolution

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(x - t) dt$$

admet la série de Fourier suivante :

$$(f * g)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k e^{-ikt},$$

où les g_k sont les coefficients de Fourier de g . Ainsi, en introduisant la fonction ψ_+^α définie par

$$\psi_+^\alpha(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(ik)^\alpha},$$

on peut réécrire (2.13) sous forme intégrale pour obtenir la définition suivante.

Définition 2.5. Soit f une fonction 2π -périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. L'intégrale fractionnaire de Weyl à gauche d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}_+^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_+^\alpha(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Comme pour l'intégrale de Riemann-Liouville, cette définition admet une approche similaire à droite (associée là aussi à $-d/dt$).

Définition 2.6. Soit f une fonction 2π -périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. L'intégrale fractionnaire de Weyl à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}_-^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_-^\alpha(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

$$\text{avec } \psi_-^\alpha(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{(-ik)^\alpha}.$$

Nous nous contentons ici de mentionner le lemme suivant.

Lemme 2.3. Soit f une fonction 2π -périodique telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Soit $\alpha > 0$ et $p \in [1, +\infty[$.

Les intégrales fractionnaires $\mathcal{I}_\pm^{(\alpha)}$ vérifient les propriétés suivantes :

	f	$\mathcal{I}_\pm^{(\alpha)} f$
1.	$C^0([0, 2\pi])$	$C^0([0, 2\pi])$
2.	$L^p([0, 2\pi])$	$L^p([0, 2\pi])$

Démonstration. Dans [SKM93, p.351], il est montré que

$$|\psi_\pm^\alpha(t)| \leq c|t|^{\alpha-1}. \quad (2.14)$$

Par conséquent, $\psi_\pm^\alpha \in L^1([0, 2\pi])$.

1. Résultat classique de continuité sous l'intégrale.
2. On utilise l'inégalité de Minkowsky généralisée :

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} \left\| \int_0^{2\pi} \psi_\pm^\alpha(\tau) f(t - \tau) d\tau \right\|^p dt \right\}^{1/p} &\leq \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left\| \psi_\pm^\alpha(\tau) f(t - \tau) \right\|^p dt \right\}^{1/p} d\tau, \\ &\leq \int_0^{2\pi} |\psi_\pm^\alpha(\tau)| d\tau \cdot \|f\|_p, \\ &\leq \|\psi_\pm^\alpha\|_1 \cdot \|f\|_p. \end{aligned}$$

□

Intégrale de Riesz

Afin de s'affranchir du choix entre droite et gauche qui apparaît pour les définitions de Riemann-Liouville et de Weyl, Riesz propose une version symétrique d'intégrale fractionnaire [SKM93, p.214].

Définition 2.7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. L'intégrale fractionnaire de Riesz d'ordre $\alpha > 0$ (appelée aussi potentiel de Riesz) est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{I}^\alpha f(t) &= \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} (\mathcal{I}_+^\alpha + \mathcal{I}_-^\alpha) f(t), \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} |t - \tau|^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Un des avantages de cette définition est qu'elle est généralisable aux fonctions de plusieurs variables (voir [SKM93, p.483]). Dans \mathbb{R}^n , si $\alpha > 0$ est tel que $\frac{\alpha-n}{2} \notin \mathbb{N}$, l'intégrale fractionnaire de Riesz d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{I}^\alpha f(t) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \|t - \tau\|^{\alpha-n} f(\tau) d\tau,$$

où $\gamma_n(\alpha)$ est une constante de renormalisation.

Les résultats sur les classes de fonctions sont bien sûr exactement ceux obtenus pour \mathcal{I}_\pm^α .

2.2 Dérivées fractionnaires

Comme pour les intégrales fractionnaires, il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Une manière simple d'en obtenir est de composer les intégrales fractionnaires avec la dérivée classique. On obtient alors les dérivées de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo et Weyl. Nous présentons de plus les dérivées de Marchaud et de Grünwald-Letnikov, qui apparaîtront par la suite.

2.2.1 Dérivées de Riemann-Liouville, Liouville et Caputo

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. On note aussi $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Ainsi, $0 \leq \{\alpha\} < 1$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ {}_a\mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ {}_a\mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$ et si $n = [\alpha] + 1$, on peut poser

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha}. \quad (2.15)$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.8. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

De plus, on a vu qu'à la définition 2.4 d'intégrale à droite était associée $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante.

Définition 2.9. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ {}_t\mathcal{I}_b^{n-\alpha} f(t), \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau-t)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Remarque 2.2. Si l'on avait généralisé l'intégrale ${}_b\mathcal{I}_t^\alpha$ avec (2.10) à laquelle est associée d/dt , on aurait aussi retrouvé la définition 2.9.

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 2.10. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

Définition 2.11. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}_-^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau-t)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (2.16)$$

On retrouve ici les différences historiques de points de vues entre Euler et Liouville.

D'après (2.3) et (2.11), toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_a\mathcal{D}_t^n f = \mathcal{D}_+^n f = \frac{d^n}{dt^n} f, \\ {}_t\mathcal{D}_b^n f = \mathcal{D}_-^n f = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, si l'on se replace sur $[a, b]$, l'interversion des compositions dans le membre de droite de (2.15) semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} \circ \frac{d^n}{dt^n}. \quad (2.17)$$

On notera toutefois que cette définition est moins naturelle que la précédente, puisque $\frac{d}{dt} \circ {}_a\mathcal{I}_t^1 f(t) = f(t)$, alors que ${}_a\mathcal{I}_t^1 \circ \frac{d}{dt} f(t) = f(t) - f(a)$. Ce problème de termes de bords (ici $f(a)$) se retrouve en fait très souvent dans le calcul fractionnaire.

La définition donnée par (2.17) est souvent appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.12. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.13. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha f(t) &= {}_t\mathcal{I}_b^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t), \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classiques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^c_a\mathcal{D}_t^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a), \\ {}^c_t\mathcal{D}_b^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 2.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^c_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t). \end{array} \right.$$

Démonstration. Comme $f^{(n)} \in L^1([a, b])$, d'après [SKM93, p.51], en posant $\beta = n - \alpha$, $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} {}_a\mathcal{I}_t^\beta f^{(n)} = f^{(n)}$ presque partout. Le même raisonnement s'applique pour ${}_t\mathcal{D}_b^\alpha$. \square

Pour les dérivées de Caputo, le théorème 2.1 s'applique directement en appliquant cette fois les conditions à $f^{(n)}$. Donnons par exemple le lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$.*

Si $f \in AC^n([a, b])$, alors ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \in L^q([a, b])$, avec $1 \leq q < \frac{1}{\{\alpha\}}$.

Démonstration. Comme $f \in AC^n([a, b])$, $f^{(n)} \in L^1([a, b])$. D'après le théorème 2.1, ${}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} f \in L^q([a, b])$, avec $1 \leq q < \frac{1}{1-(n-\alpha)}$. \square

Le résultat suivant est exactement le théorème 2.2 de [SKM93, p.39] et donne une condition suffisante d'existence pour les dérivées de Riemann-Liouville et les relie dans le même temps avec les dérivées de Caputo.

Théorème 2.3. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC^n([a, b])$. Alors ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f$ et ${}_t\mathcal{D}_b^\alpha f$ existent presque partout et vérifient :*

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \\ {}_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) &= {}^c_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(b). \end{aligned}$$

Donnons enfin quelques résultats élémentaires qui nous seront utiles pour la suite.

Lemme 2.6. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $p \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $f \in C^n([a, b])$, alors ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \in C_+^0([a, b])$.*
2. *Si $f \in C_+^n([a, b])$, alors ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f = {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha f$. En particulier, ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \in C_+^0([a, b])$.*
3. *Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m - 1 < \alpha \leq m$. Si $f \in C_+^{m+p}([a, b])$, alors ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \in C_+^p([a, b])$.*

Démonstration. 1. Puisque $f^{(n)} \in C^0([a, b])$, ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha f^{(n)} \in C_+^0([a, b])$ d'après le théorème 2.1.

2. On utilise le résultat précédent et le théorème 2.3.

3. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t) - f^{(\alpha)}(a)$ et ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f \in C_+^p([a, b])$. Sinon, soit $1 \leq k \leq p$. Puisque $f^{(m)} \in C_+^k([a, b])$, d'après le lemme 2.1,

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f &= \frac{d^k}{dt^k} {}_a \mathcal{I}_t^{m-\alpha} f^{(m)}, \\ &= {}_a \mathcal{I}_t^{m-\alpha} f^{(m+k)}. \end{aligned}$$

Étant donné que $f^{(m+k)} \in C^0([a, b])$, ${}_a \mathcal{I}_t^{m-\alpha} f^{(m+k)} \in C_+^0([a, b])$ d'après le théorème 2.1. Par conséquent, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f \in C^k([a, b])$ et $\frac{d^k}{dt^k} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(a) = 0$. De plus, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(a) = 0$ d'après le premier point. Finalement, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f \in C_+^p([a, b])$. □

Ces résultats se transposent directement aux dérivées à droite.

Bien que les lemmes 2.1 et 2.6 soient évidents, nous n'en avons pas trouvé mention dans la littérature. Dans [SKM93] les conditions sur les fonctions sont parfois implicites, comme par exemple $f \in {}_a \mathcal{I}_t^\alpha(L^1)$ (autrement dit, il faut trouver $g \in L^1$ tel que $f = {}_a \mathcal{I}_t^\alpha g$) et l'ouvrage n'est pas orienté sur le caractère dérivable des opérateurs. Or ce sont justement ces critères qui nous intéressent ici ; nous allons considérer par la suite des expressions du type

$$\mathcal{A}(L)(x) = \int_a^b L \left(x(t), \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} x(t), \dots, \left(\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \right)^k x(t) \right) dt,$$

où L (le Lagrangien) est une fonction assez régulière (au moins continue), d^α/dt^α est une des dérivées fractionnaires présentée au-dessus et $k \in \mathbb{N}^*$. La question est donc : comment choisir x et d^α/dt^α pour que $\mathcal{A}(L)(x)$ existe ? Bien sûr, la réponse varie en fonction de la forme de L , mais comme nous nous sommes intéressés à la structure générale des systèmes lagrangiens, nous avons gardé L quelconque. La réponse simple que nous avons choisie est d'imposer

$$\left(\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \right)^k x \in C^0([a, b]). \quad (2.19)$$

Les quelques lemmes fournis en section 2.3 nous permettront de trouver des conditions suffisantes pour que (2.19) soit vérifiée. Il va sans dire que pour l'étude de Lagrangiens L particuliers, (2.19) est loin d'être optimale.

Nous ne nous attardons pas sur la dérivée de Liouville, puisqu'il existe en fait une forme moins restrictive, la dérivée de Marchaud.

2.2.2 Dérivée de Marchaud

Nous reprenons ici la présentation de [SKM93, p.109]. Réécrivons tout d'abord la dérivée de Liouville sous la forme

$$\mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^{+\infty} \tau^{n-1-\alpha} f(t-\tau) d\tau.$$

Soit maintenant $0 < \alpha < 1$.

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f'(\tau)| \underset{-\infty}{\sim} |\tau|^{\alpha-1-\varepsilon}$, alors par théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_+^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \tau^{-\alpha} f(t-\tau) d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{-\alpha} f'(t-\tau) d\tau, \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \left[\int_t^{+\infty} u^{-(1+\alpha)} du \right] f'(t-\tau) d\tau, \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{-(1+\alpha)} [f(t) - f(t-\tau)] d\tau.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Cette dernière expression fournit la définition suivante.

Définition 2.14. *Soit $0 < \alpha < 1$. La dérivée fractionnaire de Marchaud à gauche d'ordre α est définie par*

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{D}_+^\alpha f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \tau^{-(1+\alpha)} [f(t) - f(t-\tau)] d\tau.}$$

Notons tout d'abord que si f est assez régulière, alors les deux définitions coïncident. Mais la dérivée de Marchaud existe en fait sous des conditions plus générales. Par exemple, si f est une fonction constante, $\mathbf{D}_+^\alpha f = 0$, alors que $\mathcal{D}_+^\alpha f$ n'est pas définie.

Afin de donner une condition suffisante simple d'existence pour $\mathbf{D}_+^\alpha f$, nous introduisons la notion suivante. Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est localement λ -höldérienne si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \exists c > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq c|x - y|^\lambda.$$

Ainsi, il est clair que si f est bornée et localement λ -höldérienne avec $\lambda > \alpha$, alors $\mathbf{D}_+^\alpha f$ est bien définie. Cette dérivée interviendra au chapitre 8.

Ces résultats restent valables pour la dérivée de Marchaud à droite, définie de la manière suivante.

Définition 2.15. *Soit $0 < \alpha < 1$. La dérivée fractionnaire de Marchaud à droite d'ordre α est définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{D}_-^\alpha f(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \tau^{-(1+\alpha)} [f(t) - f(t+\tau)] d\tau.$$

Pour $\alpha > 1$, on utilise des différences finies d'ordres supérieurs pour approcher les dérivées de f . Par exemple, pour $1 < \alpha < 2$, la dérivée seconde de f vérifie

$$f''(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-\tau) + f(t-2\tau)}{\tau^2}. \tag{2.21}$$

En suivant le même cheminement que dans (2.20), on peut poser, pour $1 < \alpha < 2$,

$$\mathbf{D}_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{+\infty} \tau^{-(1+\alpha)} [f(t) - 2f(t-\tau) + f(t-2\tau)] d\tau.$$

Voir [SKM93, p.116] pour plus de détails.

2.2.3 Dérivée de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base aussi sur l'obtention de dérivées par différences finies. Nous reprenons ici la présentation de [DGP10].

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Pour tout $h > 0$, notons τ_h l'opérateur de translation à gauche :

$$\tau_h f(t) = f(t - h).$$

On a ainsi

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t) - f(t - h)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\text{id} - \tau_h) f(t).$$

En notant $\tau_h^2 = \tau_h \circ \tau_h$, on a : $\tau_h^2 f(t) = f(t - 2h)$.

Concernant la dérivée seconde,

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (\text{id} - \tau_h) \right)^2 f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (\text{id} - 2\tau_h + \tau_h^2) f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)), \end{aligned}$$

et l'on trouve bien (2.21).

Plus généralement, la dérivée n -ième de f est donnée par

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} (\text{id} - \tau_h)^n f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{id}^{n-k} (-\tau_h)^k f(t), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \end{aligned} \tag{2.22}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. Il est possible d'étendre $\binom{n}{k}$ à $k > n$, en posant $\binom{n}{k} = 0$. La formule (2.22) devient alors

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Notons cette fois que $\binom{\alpha}{k} \neq 0$ même si $k > \alpha$.

Définition 2.16. Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{D}_+^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh).$$

En remarquant que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (\text{id} - \tau_{(-h)})f(t) = -f'(t)$, dérivée associée au côté droit, on obtient la dérivée de Grünwald-Letnikov à droite.

Définition 2.17. Soit $\alpha > 0$. La dérivée de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α est définie par

$$\tilde{\mathcal{D}}_-^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t + kh).$$

Dans [SKM93, p.382], il est prouvé que les dérivées de Grünwald-Letnikov et Marchaud coïncident.

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente donc un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire sur \mathbb{R} (de Marchaud, voire de Liouville). Nous y reviendrons au chapitre 10.

Par ailleurs, mentionnons qu'il est aussi possible de définir les dérivées de Weyl comme $\pm \frac{d}{dt} \mathcal{I}_\pm^{(1-\alpha)}$ dans le cas $0 < \alpha < 1$. Les intégrales de Riesz permettent elles aussi de définir les différentielles fractionnaires de Riesz (dans \mathbb{R}^n). Voir [SKM93, p.498] pour plus de détails. Signalons enfin que le calcul fractionnaire s'étend aux distributions. Schwartz lui-même, dans son ouvrage de référence [Sch66], aborde ce point. Voir [SKM93, p.145] et [Hil08] pour une présentation de ce sujet.

2.3 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre redonne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace. Cette dernière propriété est omniprésente dans de nombreux domaines d'applications présentés au chapitre précédent.

2.3.1 Compositions entre opérateurs

Fonctions définies sur $[a, b]$

Nous donnons ici toute une série de résultats sur la composition entre opérateurs fractionnaires. On notera l'importance de l'ordre de composition, du choix de la dérivée et des classes de fonctions. En particulier, la propriété de composition des dérivées usuelles

$$\frac{d^m}{dt^m} \frac{d^n}{dt^n} = \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}$$

ne s'étend au cas fractionnaire que pour des fonctions dont les dérivées successives sont nulles au bord (sauf si $m + n \leq 1$).

Lemme 2.7. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$$\boxed{{}_a\mathcal{I}_t^\alpha \, {}_a\mathcal{I}_t^\beta f = {}_a\mathcal{I}_t^{\alpha+\beta} f.}$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.34]. □

Théorème 2.4. Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha \, {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f = f.$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.45]. □

Lemme 2.8. *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC^n([a, b])$. Alors*

$${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}^c\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}^c\mathcal{D}_t^\alpha f &= {}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} f^{(n)}, \\ &= {}_a\mathcal{I}_t^n f^{(n)}, \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.7 et d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n - 1$. □

Remarquons que des formules pour ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f$ et ${}^c\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f$ existent, mais elles font apparaître des termes de bords plus complexes et les conditions sur f sont plus délicates (voir [SKM93, p.45] pour le premier cas).

Lemme 2.9. *Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$. Alors*

$$\boxed{{}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f = {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\alpha f = f.}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que ${}_a\mathcal{I}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f = f$, l'autre égalité relevant du théorème précédent. D'après le théorème 2.4 de [SKM93, p.45], il suffit de montrer que ${}_a\mathcal{I}_t^{1-\alpha} f \in AC([a, b])$ et ${}_a\mathcal{I}_t^{1-\alpha} f(a) = 0$. Cela est immédiat d'après les points 7 et 8 du théorème 2.1. □

Théorème 2.5. *Soit $0 < \alpha < \beta$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors*

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{I}_t^\beta f = {}_a\mathcal{I}_t^{\beta-\alpha} f.$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.46]. □

Concernant la composition entre dérivées, commençons par remarquer que si $p \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$,

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dt^p} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha &= \frac{d^{p+n}}{dt^{p+n}} {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha}, \\ &= \frac{d^{p+n}}{dt^{p+n}} {}_a\mathcal{I}_t^{(p+n)-(p+\alpha)}, \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^{p+\alpha}. \end{aligned}$$

De même,

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha \frac{d^p}{dt^p} = {}^c\mathcal{D}_t^{\alpha+p}.$$

Dans [SKM93, p.46] on trouve un théorème sur la composition de dérivées qui fait intervenir des conditions implicites sur f . Nous proposons ici un résultat moins général, mais qui fournit une condition suffisante explicite sur f .

Lemme 2.10. *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $m = [\alpha] + 1$, $n = [\beta] + 1$ et $p = [\alpha + \beta] + 1$.*

Si $f \in C_+^p([a, b])$, alors

$$\boxed{{}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\beta f = {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f.}$$

Le résultat reste valable si l'on remplace un nombre quelconque de dérivées de Riemann par des dérivées de Caputo. Par exemple,

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\beta f = {}^c\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f.$$

Démonstration. Tout d'abord, ${}_a\mathcal{D}_t^\beta f = {}_a^c\mathcal{D}_t^\beta f$ d'après le point 2 du lemme 2.6, car $f \in C_+^n([a, b])$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{I}_t^{m-\alpha} {}_a\mathcal{D}_t^\beta f &= {}_a\mathcal{I}_t^{m-\alpha} {}_a\mathcal{I}_t^{n-\beta} f^{(n)}, \\ &= {}_a\mathcal{I}_t^{m+n-(\alpha+\beta)} f^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

d'après le lemme 2.7, utilisé avec $f^{(n)} \in L^1([a, b])$. Comme $f \in C_+^n([a, b])$, d'après le lemme 2.1,

$${}_a\mathcal{I}_t^{m+n-(\alpha+\beta)} f^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} {}_a\mathcal{I}_t^{m+n-(\alpha+\beta)} f. \quad (2.24)$$

Étant donné que $m + n - 2 \leq \alpha + \beta < m + n$, $p = m + n$ ou $p = m + n - 1$. Comme de plus $f \in C_+^p([a, b])$, ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f = {}_a^c\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f$.

– Si $p = m + n$,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f &= \frac{d^p}{dt^p} {}_a\mathcal{I}_t^{p-(\alpha+\beta)} f, \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^n}{dt^n} {}_a\mathcal{I}_t^{m+n-(\alpha+\beta)} f \right), \\ &= \frac{d^m}{dt^m} {}_a\mathcal{I}_t^{m-\alpha} {}_a\mathcal{D}_t^\beta f \quad \text{d'après (2.23) et (2.24),} \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\beta f. \end{aligned}$$

– Si $p = m + n - 1$,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{I}_t^{m-\alpha} {}_a\mathcal{D}_t^\beta f &= \frac{d^n}{dt^n} {}_a\mathcal{I}_t^{p+1-(\alpha+\beta)} f, \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{d}{dt} {}_a\mathcal{I}_t^{p+1-(\alpha+\beta)} f \right), \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} {}_a\mathcal{I}_t^{p-(\alpha+\beta)} f, \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.5. On a donc :

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f &= \frac{d^p}{dt^p} {}_a\mathcal{I}_t^{p-(\alpha+\beta)} f, \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} {}_a\mathcal{I}_t^{p-(\alpha+\beta)} f \right), \\ &= \frac{d^m}{dt^m} {}_a\mathcal{I}_t^{m-\alpha} {}_a\mathcal{D}_t^\beta f, \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\beta f. \end{aligned}$$

Finalemnt, comme $f \in C_+^n([a, b])$, ${}_a\mathcal{D}_t^\beta f \in C_+^m([a, b])$ (d'après les points 2 et 3 du lemme 2.6) et $f \in C_+^p([a, b])$, on peut remplacer respectivement ${}_a\mathcal{D}_t^\beta$, ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ et ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta}$ par ${}_a^c\mathcal{D}_t^\beta$, ${}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha$ et ${}_a^c\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta}$. \square

L'extension suivante nous sera utile par la suite.

Corollaire 2.1. *Soit $0 < \alpha < 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C_+^k([a, b])$. Alors*

$$({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k f = {}_a^c\mathcal{D}_t^{\alpha k} f.$$

Démonstration. On procède par récurrence en utilisant le lemme précédent. \square

Nous aurons enfin besoin d'un résultat plus fin pour $k = 2$, où l'on n'impose plus de conditions initiales nulles.

Lemme 2.11. *Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC^2([a, b])$. Alors :*

- si $0 < \alpha < 1/2$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} f$,
- si $\alpha = 1/2$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^{1/2} {}_a^c \mathcal{D}_t^{1/2} f = f'$,
- si $1/2 < \alpha < 1$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} f(t) + \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a)$.

Démonstration. Comme $f' \in AC([a, b])$, ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f = {}_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha} f' \in AC([a, b])$ et ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(a) = 0$. Par conséquent, d'après le théorème 2.3,

$${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f = {}_a \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f &= \frac{d}{dt} {}_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha} {}_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha} f', \\ &= \frac{d}{dt} {}_a \mathcal{I}_t^{2-2\alpha} f'. \end{aligned}$$

- Si $0 < \alpha < 1/2$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}_a \mathcal{I}_t^{2-2\alpha} f'(t) &= \frac{d}{dt} {}_a \mathcal{I}_t^{1-2\alpha} (f(t) - f(a)) \\ &= {}_a \mathcal{D}_t^{2\alpha} h(t), \end{aligned}$$

où $h(t) = f(t) - f(a)$. Puisque $h \in C_+^1([a, b])$, ${}_a \mathcal{D}_t^{2\alpha} h = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} h$. Finalement, ${}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} h = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} f$, puisque $h' = f'$.

- Si $\alpha = 1/2$, $\frac{d}{dt} {}_a \mathcal{I}_+^{2-2\alpha} f'(t) = \frac{d}{dt} [f(t) - f(a)] = f'(t)$.
- Si $1/2 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}_a \mathcal{I}_+^{2-2\alpha} f'(t) &= {}_a \mathcal{D}_t^{2\alpha-1} f'(t) \\ &= {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha-1} f'(t) + \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a), \end{aligned}$$

d'après le théorème 2.3 appliqué à $f' \in AC([a, b])$. Finalement,

$${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = {}_a^c \mathcal{D}_t^{2\alpha} f(t) + \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a).$$

□

Là encore, tous ces résultats s'étendent directement pour les opérateurs à droite.

Fonctions définies sur \mathbb{R}

Ces dérivées n'étant presque pas intervenues dans notre travail, nous nous contentons ici de reproduire certains résultats tirés de [SKM93].

Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $p \in [1, +\infty[$.

Lemme 2.12. *Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $\alpha + \beta < 1/p$, alors*

$$\mathcal{I}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\beta f = \mathcal{I}_+^{\alpha+\beta} f.$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.96]. □

Lemme 2.13. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors :

- Pour la dérivée de Marchaud, $\mathbf{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha f = f$ si $1 \leq p < 1/\alpha$,
- Pour celle de Liouville, $\mathcal{D}_+^\alpha \mathcal{I}_+^\alpha f = f$ si $p = 1$.

Démonstration. Voir [SKM93, p.110]. □

Là encore, la dérivée de Marchaud s'avère être plus adaptée que celle de Liouville.

2.3.2 Formules d'intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensible aux opérateurs fractionnaires, mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite.

Fonctions définies sur $[a, b]$

Comme dans le paragraphe précédent, l'intégration ne pose pas de problème, c'est la dérivation qui nécessite certaines restrictions. Notons “ \cdot ” le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N .

Lemme 2.14. Soit $\alpha > 0$, $f \in L^p([a, b])$ et $g \in L^q([a, b])$ telles que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \alpha$. Alors

$$\int_a^b f(t) \cdot {}_a\mathcal{I}_t^\alpha g(t) dt = \int_a^b {}_t\mathcal{I}_b^\alpha f(t) \cdot g(t) dt.$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.34]. □

Dans [SKM93, p.46] apparaît une formule analogue pour les dérivées, mais comme elle requiert plusieurs conditions sur f , nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites.

Corollaire 2.2. Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n - 1 < \alpha \leq n$. Soit $f \in AC^n([a, b])$ et $g \in C_0^n([a, b])$. Alors

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cdot {}_a\mathcal{D}_t^\alpha g(t) dt &= \int_a^b {}_t\mathcal{D}_b^\alpha f(t) \cdot g(t) dt, \\ \int_a^b f(t) \cdot {}_t\mathcal{D}_b^\alpha g(t) dt &= \int_a^b {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \cdot g(t) dt. \end{aligned}}$$

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on retrouve la formule d'intégration par parties classique itérée α fois. Sinon, comme $g \in C_0^n([a, b])$, $g^{(n)} \in L^p([a, b])$ avec $p > 1/\alpha$ et ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha g = {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha g$. De plus, $f \in AC^n([a, b])$, donc $f^{(n)} \in L^1([a, b])$ et le lemme 2.14 s'applique :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cdot {}_a\mathcal{D}_t^\alpha g(t) dt &= \int_a^b f(t) \cdot {}_a\mathcal{I}_t^{n-\alpha} g^{(n)}(t) dt, \\ &= \int_a^b {}_t\mathcal{I}_b^{n-\alpha} f(t) \cdot g^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $0 \leq k \leq n - 1$, $g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0$. Ainsi, en itérant n fois la formule d'intégration par parties classique, aucun terme de bords n'apparaît et

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cdot {}_a\mathcal{D}_t^\alpha g(t) dt &= (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dt^n} {}_t\mathcal{I}_b^{n-\alpha} f(t) \cdot g(t) dt, \\ &= \int_a^b {}_t\mathcal{D}_b^{n-\alpha} f(t) \cdot g(t) dt. \end{aligned}$$

On procède de même pour l'autre relation. \square

Remarque 2.3. *L'asymétrie entre f et g est volontaire : par la suite, f sera une trajectoire et g une variation. S'il semble raisonnable d'imposer des conditions nulles aux bords pour la seconde, il ne serait physiquement pas acceptable de le faire pour la première.*

Fonctions définies sur \mathbb{R}

Lemme 2.15. *Soit $\alpha > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ telles que $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \mathcal{I}_+^\alpha g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}_-^\alpha f(t) \cdot g(t) dt.$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.96]. \square

2.3.3 Transformations intégrales

Les propriétés suivantes sont largement utilisées dans la résolution d'équations différentielles fractionnaires, en acoustique, contrôle des systèmes, traitement d'images, etc. En fait, dans ces cas, les opérateurs fractionnaires apparaissent d'abord dans les domaines fréquentiels et ce n'est que dans un deuxième temps qu'ils sont réinterprétés dans le domaine temporel à l'aide des définitions de ce chapitre.

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ces dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega). \quad (2.25)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur \mathbb{R} .

Lemme 2.16. *Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\boxed{\mathcal{F}[\mathcal{I}_\pm^\alpha f](\omega) = (\pm i\omega)^{-\alpha} \mathcal{F}[f](\omega).}$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.138]. \square

Corollaire 2.3. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{D}_\pm^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}_\pm^\alpha f](\omega) = (\pm i\omega)^\alpha \mathcal{F}[f](\omega).$$

Démonstration. D'après le lemme 2.16,

$$\mathcal{F}[\mathcal{I}_\pm^{n-\alpha} f](\omega) = (\pm i\omega)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\omega).$$

Comme pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f = \mathcal{D}_+^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, on peut utiliser (2.25) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{D}_+^\alpha f](\omega) &= (i\omega)^n \mathcal{F}[\mathcal{I}_+^{n-\alpha} f](\omega), \\ &= (i\omega)^\alpha \mathcal{F}[f](\omega). \end{aligned}$$

De même, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{I}_-^{n-\alpha} f = (-1)^k \mathcal{D}_-^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{D}_-^\alpha f](\omega) &= (-1)^n (i\omega)^n \mathcal{F}[\mathcal{I}_-^{n-\alpha} f](\omega), \\ &= (-i\omega)^\alpha \mathcal{F}[f](\omega). \end{aligned}$$

□

Transformée de Laplace

On dit qu'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ est à croissance sous-exponentielle si

$$\exists A > 0, \exists s_0 \in \mathbb{R}, \exists t_0 > 0, \forall t > t_0, \quad |f(t)| \leq A e^{s_0 t}.$$

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ est à croissance sous-exponentielle, rappelons que sa transformée de Laplace est définie par

$$\forall s > s_0, \quad \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$ est à croissance sous-exponentielle, alors

$$\forall s > s_0, \quad \mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.26)$$

L'extension au cas fractionnaire s'effectue cette fois avec les opérateurs fractionnaires à supports minorés par 0.

Lemme 2.17. *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0, \quad \mathcal{L}[_0\mathcal{I}_t^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s).$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.140].

□

Lemme 2.18. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Soit $f \in C^n_+(\mathbb{R}^+)$ à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0, \quad \mathcal{L}[_0\mathcal{D}_t^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s).$$

Démonstration. Voir [SKM93, p.141].

□

On remarque qu'ici f doit avoir des conditions nulles au bord, ce qui peut paraître assez restrictif pour les applications. C'est en fait la dérivée de Caputo qui est la plus adaptée pour la transformée de Laplace.

Lemme 2.19. *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Soit $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$ à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\boxed{\forall s > s_0, \quad \mathcal{L}[_0^c\mathcal{D}_t^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).} \quad (2.27)$$

Démonstration. On applique le lemme 2.17 à $f^{(n)}$, puis on utilise (2.26) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[_0^c\mathcal{D}_t^\alpha f](s) &= \mathcal{L}[_0\mathcal{I}_t^{n-\alpha} f^{(n)}](s), \\ &= s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f^{(n)}](s), \\ &= s^{\alpha-n} \left[s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right], \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \end{aligned}$$

□

Nous venons de voir les principales propriétés des opérateurs fractionnaires. Plusieurs des résultats prouvés ici peuvent être retrouvés dans [CI10]. On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions,

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f \cdot g) \neq \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f) \cdot g + f \cdot \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(g), \quad \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(f \circ g) \neq \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(g) \cdot g'.$$

La dérivée fractionnaire n'est donc pas une dérivation au sens strict du terme (il faudrait qu'elle vérifie la première propriété)! Des formules ont été proposées dans les deux cas, mais leur complexité les rend difficilement utilisables en pratique.

Par ailleurs, face aux différentes définitions d'opérateurs, une question semble inévitable : laquelle choisir ? À l'heure actuelle, aucune ne semble prédominer. Il semblerait que chaque définition présente son avantage et que le choix dépende finalement du système étudié. Gageons que lorsque les connexions de ce formalisme avec des systèmes concrets gagneront en intensité et en précision, un consensus arrivera peut-être à se dégager.

À travers les différentes définitions présentées dans ce chapitre, on peut remarquer que contrairement à la dérivée usuelle, les dérivées fractionnaires ne sont jamais *locales*, c'est-à-dire que pour une fonction f , leurs évaluations en t ne dépendent pas seulement de $f(\tau)$, pour τ au voisinage de t . Les dérivées – ainsi que d'ailleurs les intégrales – à gauche dépendent au contraire de tout le “passé” de la fonction ($f(\tau)$ pour $\tau < t$), alors que leurs contreparties à droite font intervenir le “futur” ($f(\tau)$ pour $\tau > t$). C'est justement grâce à cette propriété de non-localité que des phénomènes à mémoires longues peuvent être modélisés.

D'un point de vue physique, seuls les opérateurs à gauche semblent pertinents. Effectivement, s'il semble naturel que le présent résulte du passé, le fait que le futur détermine le présent relève plutôt de la science-fiction ! En pratique, ce sont effectivement ces opérateurs “passé” qui sont utilisés. Nous verrons toutefois que les opérateurs à droite apparaissent inévitablement dans le principe de moindre action, pourtant à la base de toute la physique fondamentale. La résolution de ce paradoxe a constitué une partie importante de notre recherche et fera l'objet de la section 5.1.

Deuxième partie

Plongements fractionnaires des systèmes
lagrangiens

Chapitre 3

Systemes lagrangiens et hamiltoniens

Avec le calcul fractionnaire, c'est le principe de moindre action qui a constitué l'un des deux principaux outils de notre recherche. Plus précisément, une grande part de celle-ci a consisté à inclure le premier dans le second. Dès sa naissance, ce principe a soulevé des questions qui dépassent le cadre scientifique et qui se manifestent de manière peut-être encore plus frappante avec l'introduction de dérivées fractionnaires. Il nous a donc semblé opportun de commencer par donner un rapide historique et quelques considérations générales sur cet énoncé. Nous présentons ensuite sa formulation mathématique, à travers les systèmes lagrangiens puis les systèmes hamiltoniens.

3.1 À propos du principe de moindre action

Nous nous appuyons ici sur l'ouvrage de Martin-Robine [MR06], notamment pour les citations.

Toutes les théories physiques du XX^e siècle s'appuient sur le principe de moindre action, que Maupertuis énonça ainsi en 1744 :

La Nature agit toujours par les voies les plus simples et les plus courtes.

Cet énoncé universel et déroutant possède une histoire riche en tumultes et questionnements qui, d'après [MR06], semble débiter au I^{er} siècle après J.-C. à Alexandrie avec Héron. Cet ingénieur et mathématicien, en s'intéressant à la réflexion de rayons lumineux sur des miroirs, affirme que ceux-ci "cherchent à se déplacer sur la ligne la plus courte". Pour la première fois apparaît un principe d'économie et de simplicité de la nature. Bien plus tard, en 1638, on trouve chez Galilée la phrase suivante :

Dans cette étude du mouvement naturellement accéléré, nous avons été conduit comme par la main en observant la règle que suit habituellement la nature dans toutes ses autres opérations où elle a coutume d'agir en employant les moyens les plus ordinaires, les plus simples, les plus faciles.

C'est d'abord à travers l'optique géométrique que ce principe d'économie va se développer. Tout comme Galilée, Descartes souhaite rompre avec la vision métaphysique de la science, en cherchant à s'appuyer sur les mathématiques pour déterminer les *causes efficientes* des phénomènes physiques.

Arrêtons-nous un instant sur ce terme. Aristote distinguait quatre sortes de causes : matérielle, formelle, efficiente et finale. Nous nous contentons de donner un exemple illustratif simple, tiré de [MR06] : la chaise. La cause matérielle de celle-ci est le bois dont elle est faite, sa cause formelle est le plan réalisé par le menuisier, sa cause efficiente le travail du menuisier ainsi que l'action de ses outils, et la cause finale est d'être un objet destiné à s'asseoir. Pour le philosophe grec, la *cause finale* est la plus importante ; selon sa conception du monde, tous les corps terrestres, issus du mélange des quatre éléments fondamentaux (terre, eau, air, feu) qui se trouvaient à l'origine dans des sphères séparées, se déplacent *afin* de retrouver leurs sphères originelles.

Descartes publie en 1637 son *Discours de la méthode*, suivi notamment d'un volet intitulé *La Dioptrique*. Dans ce dernier, il détermine les lois de la réflexion et de la réfraction de l'optique géométrique, à partir de raisonnements par analogies. Toutefois, ce mode de pensée ne satisfait pas Fermat qui, à partir de la même année, cherche à déterminer ces deux lois d'une autre manière, en s'appuyant sur le principe que "la nature agit toujours par les voies les plus simples et les plus courtes". Commence alors une virulente controverse entre Descartes puis ses continuateurs, et Fermat, dûe au fait que le principe de ce dernier invoque des causes finales pour le mouvement, desquelles Descartes cherche justement à se détacher. Effectivement ce principe stipule qu'un objet se mouvra de telle manière et non d'une autre *afin* d'"économiser la nature". Tout comme Aristote, Fermat semble donc prêter au mouvement un dessein. En particulier, l'état présent d'un système semble déterminé par son futur ! Cette vision finaliste du monde peut nous sembler à l'heure actuelle bien surprenante. D'ailleurs, la physique moderne suit Descartes et ne retient que les causes efficientes pour décrire les phénomènes physiques. Toutefois, à cette époque, nombreux étaient ceux qui, tel Leibniz vers 1694, voyaient dans les causes finales une justification de la puissance divine :

[...] J'ai coutume de dire qu'il y a, pour parler ainsi, deux règnes dans la nature corporelle même qui se pénètrent sans se confondre et sans s'empêcher : le règne de la puissance [divine], suivant lequel tout peut s'expliquer mécaniquement par les causes efficientes, lorsque nous en pénétrons l'intérieur ; et aussi le règne de la sagesse [divine], suivant lequel tout peut s'expliquer architectoniquement, pour ainsi dire, par les causes finales, lorsque nous en connaissons assez les usages. Et c'est ainsi que l'on peut dire avec Lucrèce, que les animaux voient parce qu'ils ont des yeux : mais aussi que les yeux leur ont été donnés pour voir [...].

Finalelement, fin 1661, Fermat détermine ces deux lois à l'aide de son principe... et retombe à sa grande surprise sur celles de Descartes ! Les critiques ne se font pas attendre, avec notamment une lettre du cartésien Clerselier de 1662 qui vise à démontrer l'absurdité du raisonnement de Fermat sur la réfraction. En voici l'idée, illustrée par la figure 3.1.

Si l'on considère un rayon lumineux se propageant dans l'air (d'indice n_1) selon la ligne droite AB, pourquoi, à la rencontre du verre (d'indice $n_2 > n_1$), changerait-il brusquement de direction pour aller atteindre un point C, tel que la durée totale de son trajet soit la plus courte possible ? De plus, une fois en B, pourquoi choisirait-il le point C plutôt que le point I, alors que les temps de trajets sont identiques ? Il faudrait supposer que le trajet "se souvint qu'il est parti du point A avec ordre d'aller chercher, à la rencontre de cet autre milieu, le chemin qu'il pût parcourir en moins de temps pour de là arriver en C : ce qui, à vrai dire, est imaginaire et nullement fondé en physique".

Remarque 3.1. *Le cercle de la figure, sur lequel se trouvent les points C et I, indique qu'il faut le même temps pour aller de B à C que de B à I.*

Le point de vue de Clerselier, qui semble tout à fait justifié, s'appuie sur une vision locale de la dynamique : le trajet se réalise petit à petit et le point C n'est donc pas fixé. Au contraire, Fermat considère le trajet de manière globale, comme s'il s'était déjà réalisé et suppose fixé le point C. Le mouvement ne peut donc plus être décomposé en chemins plus courts et indépendants. Ces deux visions ne sont donc pas vraiment contradictoires, mais plutôt disjointes. L'approche de Descartes considère le phénomène à l'instant t , *localement* pourrait-on dire, alors que le principe de Fermat, en considérant le problème sur tout l'intervalle d'étude, *globalement*, se positionne a posteriori, comme si l'évolution du système s'était déjà produite. L'aspect finaliste du principe de moindre action réside ainsi dans l'*anticipation* de l'état final pour définir le trajet.

Nous pouvons reformuler les différences de points de vues de la manière suivante. Considérons le trajet d'un rayon lumineux issu de $A(0, y_i)$, sur une longueur x_f . Soit $y(x)$ l'ordonnée du rayon à l'abscisse x ; $y(0) = y_i$. Descartes et Fermat cherchent tous deux à connaître $y(x)$ pour tout $x \in [0, x_f]$. L'approche de Descartes suppose connu θ_1 et cherche à déterminer en particulier l'ordonnée finale

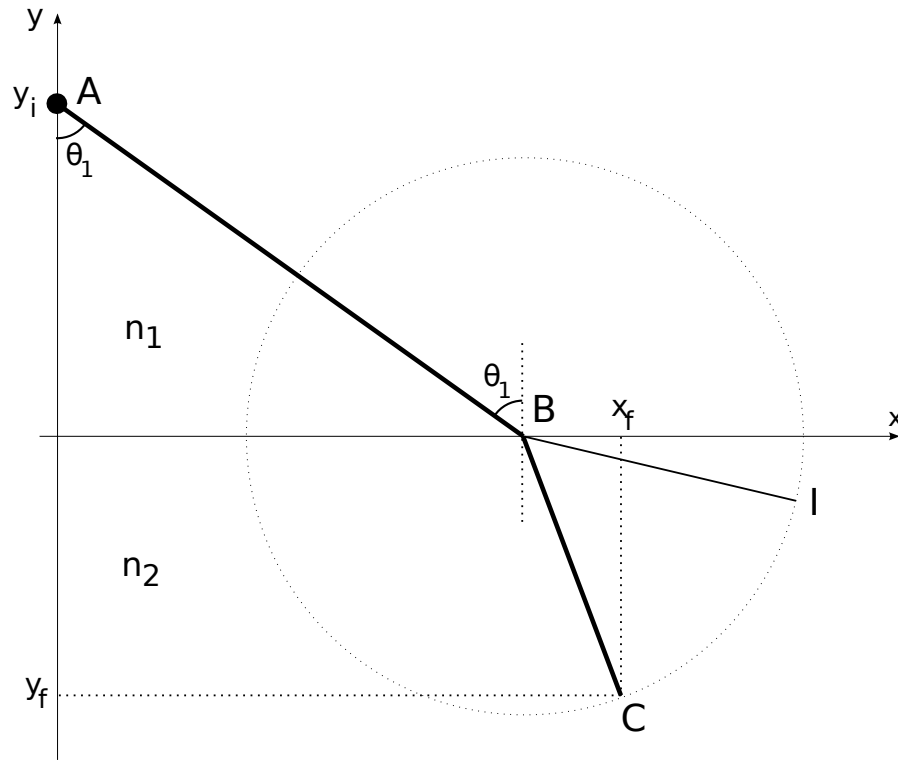


FIG. 3.1 – Réfraction d'un rayon lumineux.

en x_f , $y(x_f) = y_f$, alors que la vision de Fermat suppose connu le point d'arrivée y_f et cherche à déterminer θ_1 . De manière synthétique, on pourrait dire que le premier cherche $y_f(\theta_1)$, alors que le second s'intéresse à $\theta_1(y_f)$.

Remarque 3.2. *L'aspect finaliste du principe de Fermat pourrait être nuancé en conférant à y_f un statut "virtuel"; l'état futur y_f existe certes, mais reste un paramètre libre, indéterminé. Tout se passe comme si le principe de moindre action "testait" tous les futurs possibles y_f , cette variable ne prenant son statut "réel" qu'une fois le mouvement terminé.*

Fermat finira par se retirer de ce débat entamé 25 ans auparavant. C'est ensuite Maupertuis qui reprend et précise les travaux de Fermat en 1744, en affirmant que la lumière ne suit ni le chemin le plus court, ni celui pour lequel le temps est le plus court : "le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre". Si cette quantité reste assez mal déterminée, elle fait de Maupertuis le père du principe de moindre action.

Remarque 3.3. *Même dans les théories modernes, il n'existe pas à notre connaissance de critère systématique permettant de construire l'action. De ce que nous avons pu voir, la méthode consiste souvent à en chercher la forme la plus simple (respectant certains critères d'invariances) permettant de rendre compte des phénomènes observés. L'interprétation physique de l'action ne semble pas non plus aisée, celle-ci n'est en particulier pas égale à l'énergie du système.*

Si pour Maupertuis aussi la recherche de tels principes universels a pour but d'apporter les preuves de l'existence de Dieu, il n'en demeure pas moins que ces énoncés doivent reposer sur des bases mathématiques solides. C'est Euler qui, le premier, va y contribuer. En contact avec Maupertuis, il étend notamment le principe de moindre action dès 1745 à la détermination des trajectoires de corps soumis à des forces centrales.

Lagrange, ensuite, développe le calcul des variations en 1755, en s'appuyant sur les travaux d'Euler. Il fournit ainsi un outil efficace pour résoudre les problèmes de maxima et minima. D'abord fervent partisan du principe de moindre action, il le considère comme la "clé universelle de tous les problèmes". Cependant, en 1762, il propose un autre formalisme pour étudier le mouvement des corps, exempt de toute vision finaliste et défend finalement cette nouvelle méthode, moins dérangerante, pour reléguer le principe de moindre action au statut de corollaire.

Il faut ensuite attendre 1827 pour que le principe de moindre action réapparaisse, lorsque Hamilton souhaite construire une nouvelle formulation synthétique de l'optique. Lui aussi le considère comme une loi physique fondamentale, mais cette fois sans signification théologique. L'astronome développe alors son propre formalisme basé sur celui de Lagrange et, après l'optique, l'étend à la dynamique des systèmes en général.

Le xx^e siècle sera enfin celui du couronnement du principe de moindre action. En 1924, De Broglie pose les fondements de la mécanique ondulatoire (dualité onde/corpuscule) grâce au principe de moindre action. Ensuite, Feynman jette en 1942 les bases de l'électrodynamique quantique en s'appuyant sur une formulation variationnelle de l'électromagnétisme et réinterprète l'action lagrangienne comme associée à une densité de probabilité sur les trajectoires possibles : celle qui sera choisie sera celle possédant l'action minimale. Grâce cette vision probabiliste, le contenu finaliste du principe de moindre action disparaît.

Toutefois, au moins en mécanique macroscopique, cet outil semble rester à l'heure actuelle toujours aussi dérangerant¹. En 1902, Poincaré écrivait :

L'énoncé du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action donnée de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court. Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel ou tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre. Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.

Il nous semble donc tout à fait saisissant que non seulement cet énoncé n'ait pas été remplacé, mais qu'au contraire il se soit imposé comme outil fondamental de la physique moderne (mécanique céleste, relativités restreinte et générale, électrodynamique quantique, chromodynamique quantique, théorie des cordes, etc), elle dont l'objectif est paradoxalement de trouver les causes efficientes des phénomènes qui nous entourent.

Nous reviendrons sur ces questions au chapitre 5, où les dérivées fractionnaires feront explicitement apparaître des problèmes de causalité.

3.2 Systèmes lagrangiens

Par définition, un système lagrangien est un système possédant une *action* dont les minima, d'après le principe de moindre action, déterminent le mouvement. La méthode s'appuie sur le calcul des variations, initié comme on l'a vu par Lagrange, et maintenant tout à fait courant. La présentation que nous donnons ici diffère légèrement dans les notations afin de se prêter au mieux à l'utilisation que nous en ferons ultérieurement. Nous pourrions ensuite déterminer les extrema de l'action, qui fourniront finalement l'équation fondamentale d'Euler-Lagrange.

¹Précisons toutefois que c'est uniquement l'aspect finaliste du principe de moindre action qui est déroutant, et non le fait qu'il émette une hypothèse sur la nature. Toute théorie physique s'appuie en effet sur des postulats, qui restent valides jusqu'à ce qu'une expérience vienne éventuellement les infirmer ; l'hypothèse qu'il n'existe pas de vitesse supérieure à celle de la lumière en est un exemple.

La présentation que nous donnons se base sur [Ave83] et [Cre07]. La différence avec l'approche traditionnelle est que l'accent est mis ici sur l'espace des variations, car celui-ci a joué un rôle important dans notre travail. Nous nous sommes aussi appuyé sur l'ouvrage [Arn89] qui demeure la référence sur la mécanique lagrangienne et hamiltonienne.

3.2.1 Calcul des variations

Soit A un espace vectoriel, B un sous-espace de A et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.1. Soit $x \in A$. La fonction f présente un B -minimum (respectivement un B -maximum) en x si pour tout $h \in B$, $f(x+h) \geq f(x)$ (respectivement $f(x+h) \leq f(x)$).

La fonction f présente un B -extremum en x si elle possède un B -minimum ou un B -maximum en x .

Définition 3.2. Soit $x \in A$. La fonction f est B -différentiable en x s'il existe une fonction linéaire $h \mapsto df(x, h)$ telle que

$$\forall h \in B, \forall \varepsilon > 0, \quad f(x + \varepsilon h) = f(x) + \varepsilon df(x, h) + o(\varepsilon).$$

Définition 3.3. Soit $x \in A$. On suppose que f est B -différentiable en x . Le point x est une B -extrémale de f si pour tout $h \in B$, $df(x, h) = 0$.

Avec ces définitions, la condition nécessaire classique pour un extremum reste valable.

Lemme 3.1. Soit $x \in A$. On suppose que f est B -différentiable en x . Si f présente un B -extremum en $x \in A$, alors x est une B -extrémale de f .

Démonstration. Considérons le cas d'un B -minimum.

Soit $h \in B$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon h \in B$, et $f(x + \varepsilon h) \geq f(x)$. Par conséquent, $df(x, h) \geq 0$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $-\varepsilon h \in B$, donc $f(x + \varepsilon(-h)) = f(x - \varepsilon h) \geq f(x)$. Puis $df(x, -h) \geq 0$. Comme $df(x, -h) = -df(x, h)$, on en conclut que $df(x, h) = 0$. \square

Remarque 3.4. L'hypothèse que B soit un espace vectoriel prend son importance dans ce lemme, afin que $-\varepsilon h \in B$.

Remarque 3.5. La réciproque de ce lemme est fautive. La dénomination "malheureuse" d'extrémale dans la définition 3.3 peut être expliquée par le fait que dans de nombreux problèmes d'optimisation, la condition nécessaire $df(x, h) = 0$ constitue une première étape plus facilement réalisable que la condition suffisante et fournit de manière précise des extrema possibles. De plus, elle s'avère souvent être en pratique une condition suffisante.

3.2.2 Équation d'Euler-Lagrange

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir l'équation qui régit la dynamique des systèmes lagrangiens. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à des systèmes évoluant au cours du temps $t \in [a, b]$ et repérés par des coordonnées $x(t) \in \mathbb{R}^N$.

Pour deux ensembles E et F , on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'espace vectoriel des fonctions $f : E \rightarrow F$. Soit $m_1 \in \mathbb{N}^*$, $m_2 \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^{m_1} . L'espace vectoriel des fonctions $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ de classe C^p est noté $C^p(\mathcal{U})$. On introduit enfin l'espace suivant :

$$C^p(\mathcal{U} \times [a, b]) = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathcal{U} \times [a, b]) \mid \begin{array}{l} \forall t \in [a, b], x \mapsto f(x, t) \in C^p(\mathcal{U}), \\ \forall x \in \mathcal{U}, t \mapsto f(x, t) \in C^p([a, b]) \end{array} \right\}.$$

Définition 3.4. Un Lagrangien L est une fonction

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^{2N} \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v, t) &\longmapsto L(x, v, t) \end{aligned}$$

telle que $L \in C^1(\mathbb{R}^{2N} \times [a, b])$.

À partir de maintenant, on note $\partial_1 L(x, v, t)$ et $\partial_2 L(x, v, t)$ les différentielles de L respectivement par rapport à x et v . En particulier, $\partial_1 L(x, v, t)$ et $\partial_2 L(x, v, t)$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^N . Nous préférons employer cette notation pour éviter par la suite toute confusion entre la dérivation par rapport à x et l'évaluation en un x particulier.

Un Lagrangien induit une fonctionnelle sur $C^1([a, b])$, appelée *action (lagrangienne)* et définie par

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A}(L) : C^1([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) dt. \end{aligned}} \quad (3.1)$$

Le principe de moindre action stipule donc que les fonctions x qui rendent $\mathcal{A}(L)(x)$ minimale seront exactement les trajectoires du système physique caractérisé par son Lagrangien L . En fait, en pratique, le Lagrangien est défini au signe près, c'est-à-dire que L ou $-L$ ont tous les deux la même importance. On est donc conduit à chercher les *extrema* de l'action, en se contentant (voir la remarque 3.5) de la condition nécessaire donnée par le lemme 3.1. Déterminons donc la différentielle de $\mathcal{A}(L)$ qui nous intéresse.

Lemme 3.2. Soit L un Lagrangien et $x \in C^1([a, b])$.

On suppose que $t \mapsto \partial_2 L(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t) \in AC([a, b])$.

Alors $\mathcal{A}(L)$ est $C_0^1([a, b])$ -différentiable en x et pour tout $h \in C_0^1([a, b])$,

$$d\mathcal{A}(L)(x, h) = \int_a^b \left[\partial_1 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) - \frac{d}{dt}\partial_2 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \right] \cdot h(t) dt.$$

Démonstration. Soit $h \in C_0^1([a, b])$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} L\left(x(t) + \varepsilon h(t), \frac{d}{dt}x(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}h(t), t\right) &= L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \\ &\quad + \varepsilon \left[\partial_1 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \cdot h(t) + \partial_2 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \cdot \frac{d}{dt}h(t) \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(L)(x + \varepsilon h) &= \int_a^b L\left(x(t) + \varepsilon h(t), \frac{d}{dt}x(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}h(t), t\right) dt \\ &= \mathcal{A}(L)(x) + \varepsilon \int_a^b \left[\partial_1 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \cdot h(t) + \partial_2 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \cdot \frac{d}{dt}h(t) \right] dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

De plus, puisque $t \mapsto \partial_2 L(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t) \in AC([a, b])$, il est possible d'effectuer une intégration par parties :

$$\int_a^b \partial_2 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \cdot \frac{d}{dt}h(t) dt = - \int_a^b \frac{d}{dt}\partial_2 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t\right) \cdot h(t) dt.$$

Aucun terme de bords n'apparaît car $h \in C_0^1([a, b])$.

Finalement, $h \mapsto \int_a^b \left[\partial_1 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t \right) - \frac{d}{dt} \partial_2 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t \right) \right] \cdot h(t) dt$ est linéaire, ce qui achève la preuve. \square

On obtient alors la caractérisation suivante pour les $C_0^1([a, b])$ -extrémales.

Théorème 3.1. *Soit L un Lagrangien et $x \in C^1([a, b])$.*

On suppose que $t \mapsto \partial_2 L(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t) \in AC([a, b])$. L'équivalence suivante a lieu :

x est une $C_0^1([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L)$ si et seulement si x vérifie l'équation d'Euler-Lagrange définie par

$$(EL) : \quad \forall t \in [a, b], \quad \partial_1 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t \right) - \frac{d}{dt} \partial_2 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t \right) = 0. \quad (3.2)$$

Démonstration. D'après le lemme 3.2, x est une $C_0^1([a, b])$ -extrémale de $\mathcal{A}(L)$ si et seulement si pour tout $h \in C_0^1([a, b])$,

$$\int_a^b \left[\partial_1 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t \right) - \frac{d}{dt} \partial_2 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), t \right) \right] \cdot h(t) dt = 0.$$

On conclut en utilisant le lemme fondamental du calcul des variations [Arn89, p.57]. \square

L'équation d'Euler-Lagrange est ainsi la traduction mathématique du principe de moindre action ; le chemin x le plus "économique" (sous réserve d'unicité) est celui qui vérifie l'équation d'Euler-Lagrange. On peut maintenant donner une définition formelle d'un système lagrangien.

Définition 3.5. *On appelle système lagrangien la donnée d'un Lagrangien L et de l'équation d'Euler-Lagrange (EL) associée.*

En physique, un système lagrangien est un système dont la dynamique (autrement dit, l'évolution temporelle) peut être complètement décrite par une équation d'Euler-Lagrange. En fait, en physique fondamentale, on postule plutôt que *tout* système physique est lagrangien et on cherche un Lagrangien qui permette de décrire convenablement son évolution.

Un système lagrangien peut ainsi être résumé par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{c} L \\ \updownarrow \\ \mathcal{V} \\ \updownarrow \\ (EL), \end{array}$$

où \mathcal{V} est l'espace des variations, ici $C_0^1([a, b])$. La flèche \leftrightarrow identifie l'équivalence du théorème 3.1, entre \mathcal{V} -extrémale et équation d'Euler-Lagrange. Ce schéma sera par la suite progressivement enrichi.

Exemple 3.1. *L'oscillateur harmonique est une illustration simple de système lagrangien ; une particule de masse m est attachée horizontalement à un ressort de raideur k (voir figure 3.2).*

Son Lagrangien est défini par

$$L(x, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - \frac{1}{2}k\|x\|^2. \quad (3.3)$$

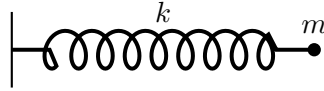


FIG. 3.2 – Oscillateur harmonique.

Dans ce cas, l'équation d'Euler-Lagrange devient :

$$-kx - m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = 0, \quad (3.4)$$

qui est exactement l'équation du principe fondamental de la dynamique associée à l'oscillateur.

Plus généralement, un système d'énergie cinétique $T(v)$, avec $T(v)$ une forme quadratique, et d'énergie potentielle $U(x)$, admet le lagrangien

$$L(x, v) = T(v) - U(x). \quad (3.5)$$

On parle dans ce cas de système lagrangien naturel, car cette forme est très courante en physique. Pour de tels systèmes, l'équation d'Euler-Lagrange correspond au principe fondamental de la dynamique.

3.3 Systèmes hamiltoniens

Le formalisme développé par Hamilton est aussi très utilisé pour décrire la dynamique de systèmes, notamment en mécanique céleste. Il est en particulier mieux adapté pour les systèmes conservatifs (dont l'énergie est conservée au cours du temps). Tout comme les systèmes lagrangiens, la donnée d'une fonction, ici le Hamiltonien, permet de déterminer à elle seule la dynamique du système.

On s'intéresse toujours à des systèmes évoluant sur $[a, b]$ et de coordonnées $x(t) \in \mathbb{R}^N$. Notre présentation s'appuie ici sur [Cre07].

3.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.6. On appelle système hamiltonien la donnée d'une fonction

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, p) &\longmapsto H(x, p) \end{aligned}$$

satisfaisant les équations suivantes :

$$(EH) : \quad \forall t \in [a, b], \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \partial_2 H(x(t), p(t)), \\ \frac{d}{dt} p(t) = -\partial_1 H(x(t), p(t)). \end{cases} \quad (3.6)$$

Les fonctions H et p sont appelées respectivement Hamiltonien du système et moment associé à x . Les équations (3.6) sont dites équations canoniques.

Précisons que comme précédemment, $\partial_1 H$ et $\partial_2 H$ désignent respectivement les différentielles de H par rapport à x et p .

Remarque 3.6. On pourrait aussi définir un Hamiltonien $H(x, p, t)$ qui dépend explicitement du temps, mais ce cas ne sera pas traité ici.

Précisons tout de suite l'aspect particulier du Hamiltonien.

Lemme 3.3. *Soit un système hamiltonien et H le Hamiltonien associé. Alors pour tout $(x(t), p(t))$ vérifiant (3.6),*

$$\frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) = 0.$$

Démonstration. La preuve est immédiate en utilisant (3.6) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), p(t)) &= \partial_1 H(x(t), p(t)) \cdot \frac{d}{dt}x(t) + \partial_2 H(x(t), p(t)) \cdot \frac{d}{dt}p(t), \\ &= \partial_1 H(x(t), p(t)) \cdot \partial_2 H(x(t), p(t)) - \partial_2 H(x(t), p(t)) \cdot \partial_1 H(x(t), p(t)), \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

On dit que H est une intégrale première du mouvement ; pour chaque condition initiale (x_0, p_0) , la valeur de H ne varie pas le long de la trajectoire issue de (x_0, p_0) :

$$\forall t \in [a, b], \quad H(x(t), p(t)) = H(x_0, p_0) = \text{cste.} \quad (3.7)$$

Le moment p remplace donc dans ce formalisme la vitesse v des systèmes lagrangiens. Sans être égaux, ils peuvent toutefois être reliés, puisque nous allons maintenant voir qu'un système hamiltonien peut découler d'un système lagrangien.

3.3.2 Lien avec les systèmes lagrangiens

On se limite ici à un Lagrangien autonome $L(x, v)$ (qui ne dépend pas explicitement du temps t). Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on introduit la fonction g_x définie par

$$\begin{aligned} g_x : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ v &\longmapsto \partial_2 L(x, v) \end{aligned}$$

On dira que L vérifie la propriété de Legendre si L est autonome et g_x est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Lemme 3.4. *Soit L un Lagrangien autonome. Si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $v \rightarrow L(x, v)$ est strictement convexe, alors L vérifie la propriété de Legendre.*

Démonstration. Le fait que $v \rightarrow L(x, v)$ soit strictement convexe implique que g_x est strictement croissante. Comme elle est de plus continue, on en conclut qu'elle est inversible. □

Soit L un Lagrangien qui vérifie la propriété de Legendre. On introduit la transformée de Legendre comme la fonction f_L définie par

$$\begin{aligned} f_L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, p) &\longmapsto g_x^{-1}(p) \end{aligned}$$

Ainsi, si on note $v = g_x^{-1}(p)$, alors $p = \partial_2 L(x, v) = \partial_2 L(x, f(x, p))$.

Définition 3.7. *Soit L un Lagrangien qui vérifie la propriété de Legendre et soit $x \in C^1([a, b])$. Le moment associé à x , noté p , est la fonction définie par*

$$\begin{aligned} p : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto \partial_2 L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Remarquons que la relation (3.8) implique

$$\frac{d}{dt}x(t) = f_L(x(t), p(t)).$$

On peut maintenant construire un système hamiltonien à partir d'un système lagrangien.

Définition 3.8. Soit L un Lagrangien qui vérifie la propriété de Legendre. On appelle Hamiltonien associé à L la fonction notée H et définie par

$$H(x, p) = p \cdot f_L(x, p) - L(x, f_L(x, p)).$$

Cette dénomination est justifiée par le résultat suivant.

Théorème 3.2. Soit un système lagrangien dont le Lagrangien L vérifie la propriété de Legendre et soit H le Hamiltonien associé à L . Soit x une solution de (EL) et p le moment associé à x . Alors (x, p) est solution de (EH) .

Démonstration. D'une part,

$$\partial_1 H(x, p) = \partial_1 f_L(x, p) p - \partial_1 L(x, f_L(x, p)) - \partial_1 f_L(x, p) \partial_2 L(x, f_L(x, p)).$$

Comme $p = \partial_2 L(x, f_L(x, p))$ et $\frac{d}{dt}x(t) = f_L(x(t), p(t))$, on obtient

$$\partial_1 H(x(t), p(t)) = -\partial_1 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right).$$

En utilisant (3.2), on trouve que

$$\partial_1 H(x(t), p(t)) = -\frac{d}{dt}\partial_2 L\left(x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right) = -\frac{d}{dt}p(t).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \partial_2 H(x, p) &= f_L(x, p) + \partial_2 f_L(x, p) p - \partial_2 f_L(x, p) \partial_2 L(x, f_L(x, p)), \\ &= f_L(x, p). \end{aligned}$$

On en déduit finalement que

$$\partial_2 H(x(t), p(t)) = \frac{d}{dt}x(t).$$

□

Le Hamiltonien associé à L constitue donc bien un système Hamiltonien. Ce résultat peut être illustré par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \vdots \\ (EL) & \dashrightarrow & (EH) \end{array} \quad (3.9)$$

L'accent n'est plus mis ici sur l'équivalence entre extrémale et solution de (EL) , mais plutôt sur le lien entre système lagrangien et système hamiltonien associé. Les flèches en pointillés signifient que l'obtention de (EH) nécessite non seulement la donnée de H , mais aussi l'équation (EL) .

Exemple 3.2. Reprenons l'exemple 3.1 et déterminons le Hamiltonien associé à un système lagrangien naturel, de Lagrangien $L(x, v) = T(v) - U(x)$, avec T quadratique. Il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ symétrique et inversible telle que $T(v) = \frac{1}{2} {}^t v M v$. On trouve alors que

$$p = \partial_2 L(x, v) = Mv. \quad (3.10)$$

En allégeant l'écriture ($v = f(x, p)$), le Hamiltonien associé à L vérifie :

$$\begin{aligned} H(x, p) &= pv - L(x, v) = {}^t v M v - \left(\frac{1}{2} {}^t v M v - U(x) \right), \\ &= \frac{1}{2} {}^t v M v + U(x) = T(v) + U(x), \end{aligned} \quad (3.11)$$

ce qui correspond à l'énergie totale du système. D'après le lemme 3.3, cette énergie est donc constante. Cela justifie que le formalisme hamiltonien soit mieux adapté aux systèmes conservatifs.

Plus rigoureusement, H s'écrit, d'après (3.10) et (3.11), sous la forme

$$H(x, p) = \frac{1}{2} {}^t p M^{-1} p + U(x).$$

Les équations canoniques (EH) sont ainsi données par

$$\forall t \in [a, b], \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) &= M^{-1} p(t), \\ \frac{d}{dt} p(t) &= -\nabla U(x(t)), \end{cases}$$

où ∇U est le gradient de U .

Nous en resterons là pour l'instant sur les systèmes hamiltoniens. Nous y reviendrons au chapitre 6 où nous utiliserons quelques propriétés supplémentaires pour décrire certains aspects de systèmes chaotiques, objets centraux dans l'orientation de notre recherche.

Grâce au diagramme (3.9), le socle de notre cube initial (figure 1) est à présent posé. Dans les deux chapitres suivants, nous allons nous atteler à la construction du toit.

Chapitre 4

Plongement fractionnaire initial

Au chapitre 1, nous avons vu que le calcul fractionnaire s'avère être un outil efficace pour de nombreuses applications. Il est toutefois bien souvent considéré comme un outil purement pratique permettant de décrire de manière condensée un système, mais sans autre signification. L'ordre de la dérivation peut alors être vu comme un paramètre libre, que l'on ajuste ensuite aux données. La justification du calcul fractionnaire est dans ce cas entièrement heuristique.

La façon la plus courante de construire une équation fractionnaire peut-être résumée de la manière suivante : partant d'un opérateur différentiel \mathcal{O} qui dépend de la dérivée classique d/dt et de ses itérées, on définit l'équation différentielle $\mathcal{O}(x) = 0$ (les deux procédures sont en pratique simultanées) ; on remplace ensuite la dérivée usuelle par une dérivée fractionnaire d^α/dt^α (très souvent avec $0 < \alpha < 1$), afin d'obtenir un nouvel opérateur, $\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O})$; la nouvelle équation différentielle devient alors $\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O})(x) = 0$. Cette procédure peut être schématisée ainsi :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(x) = 0 & & \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O})(x) = 0 \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 \mathcal{O} & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha} & \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O})
 \end{array} \tag{4.1}$$

L'opération \mathcal{E}_α qui transforme un opérateur (ou une équation) en sa contrepartie fractionnaire est nommée *plongement fractionnaire* dans [Cre07]. Cette procédure de plongement est en fait considérée de manière plus globale par Cresson, puisqu'il l'utilise aussi pour des opérateurs stochastiques avec Darses dans [CD07] et non-différentiables (travaux en cours avec Greff). Dans chacun de ces cas, la dérivée classique est remplacée par un nouveau type de dérivée. Des exemples motivant cette démarche sont présentés dans l'introduction de [Cre07].

Concernant la construction d'équations fractionnaires, on pourrait penser que si le calcul fractionnaire s'adapte aussi bien à certains systèmes, c'est qu'il existe des raisons profondes pour qu'il en soit ainsi. En particulier, l'ordre de dérivation devrait être relié intrinsèquement au système et donc s'exprimer en fonction de coefficients caractéristiques de celui-ci. Nous pensons ici plus particulièrement à l'analyse de Zaslavsky sur les systèmes hamiltoniens chaotiques (classiques). Il propose de modéliser les phénomènes de diffusion anormale induits par ces systèmes à l'aide d'équations fractionnaires. Si l'introduction de dérivées fractionnaires se fait de manière plus ou moins ad hoc, Zaslavsky relie toutefois les ordres de dérivations aux paramètres caractéristiques du système. Cette thématique sera l'objet de la partie III.

Revenons au diagramme général 4.1. Avant même de s'intéresser aux coefficients fractionnaires, il faudrait s'assurer que l'équation fractionnaire $\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O})(x) = 0$ a bien un sens physique. Effectivement, cette construction est tout à fait formelle et rien ne garantit que le contenu physique présent dans l'équation $\mathcal{O}(x) = 0$ se transpose dans $\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O})(x) = 0$. On pourrait objecter que le fait qu'une équation

fractionnaire empirique, par exemple du type

$$c_0 \frac{d^{3.634}}{dt^{3.634}} x(t) + c_1 \frac{d^{2.7}}{dt^{2.7}} x(t) + c_2 \frac{d^{1.21}}{dt^{1.21}} x(t) + c_3 x(t) = 0, \quad (4.2)$$

modélise efficacement le comportement d'un système constitue un argument suffisant pour lui conférer un sens physique, mais même dans ce cas au moins deux questions demeurent. Tout d'abord, pourquoi les exposants fractionnaires valent-ils (3.634, 2.7, 1.21)? D'ailleurs, comment être sûr que ces valeurs sont optimales? Il pourrait exister plusieurs jeux de valeurs qui conviennent tout aussi bien. Deuxième point, la forme même de l'équation est-elle optimale (d'ailleurs, comment définir l'optimalité)? Peut-être qu'un terme supplémentaire $c_4 d^{1.97}/dt^{1.97}$ permettrait un meilleur ajustement, ou peut-être qu'au contraire un modèle avec seulement deux dérivées fractionnaires, mais avec d'autres ordres de dérivations, serait plus économique et tout aussi efficace.

Avec cet exemple simpliste (certains contraintes existent assurément pour réduire les possibilités), on voit qu'il est nécessaire de trouver des critères permettant de déterminer les "bonnes" équations fractionnaires. Influencés que nous sommes à présent par la lecture du chapitre 3, nous songeons naturellement au principe de moindre action comme critère possible; c'est en fait la piste qu'a proposée Cresson dans [Cre07], en s'appuyant notamment sur [Rie96, Agr02]. Puisque la majorité des équations classiques de la dynamique sont issues d'un principe de moindre action, il est naturel d'exiger la même chose pour les équations fractionnaires. Ainsi, si une équation du type (4.2) possède une formulation lagrangienne (fractionnaire), on pourra alors espérer qu'elle soit pertinente physiquement, tout au moins plus qu'une autre ne reposant pas sur une telle structure.

Remarque 4.1. *En fait, comme le propose Riewe [Rie96] et comme nous le verrons au chapitre 9, on peut même aller plus loin et chercher des structures lagrangiennes fractionnaires pour des équations classiques qui n'en admettent pas avec d/dt (par exemple l'équation de friction linéaire).*

Nous allons donc étudier comment se traduit la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$, sur les équations différentielles. Plus précisément, nous résumons le travail de Cresson sur les plongements fractionnaires présenté dans [Cre07], qui a servi de point de départ à notre thèse. Nous commençons par définir cette transition de manière générale, sur les opérateurs différentiels \mathcal{O} et les équations associées $\mathcal{O}(x) = 0$. Elle nous servira ensuite pour étudier les systèmes lagrangiens puis hamiltoniens dans le cadre fractionnaire. Dans ces deux cas, nous verrons qu'il existe deux procédures *non* équivalentes pour définir ces systèmes. La résolution de cette difficulté fera ensuite l'objet de la section 5.1. On pourra noter que cette présentation diffère légèrement de [Cre07], certains points ayant été mis en avant au fil de notre travail, comme en témoigne notamment l'article [CI09] que nous reprenons en partie ici.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, deux remarques s'imposent.

- Le plongement fractionnaire aborde la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$ de manière théorique; il n'a pas pour but de la justifier physiquement mais, à partir d'elle, confère une structure à certaines équations fractionnaires. C'est cette ossature mathématique qui a vocation ici à donner un sens plus profond à d^α/dt^α . L'étude de la transition elle-même se fera dans la partie III.
- L'analyse de Zaslavsky des systèmes chaotiques se base sur deux approches, l'une "dynamique" et l'autre "cinétique". La première se base sur les équations du mouvement, hamiltoniennes, qui déterminent les trajectoires et modèlent l'espace des phases. La seconde se base sur une description probabiliste, qui rend compte des évolutions moyennes de ces systèmes. La seconde s'appuie évidemment sur la première. C'est dans l'approche cinétique que Zaslavsky introduit des dérivées fractionnaires, alors que le plongement fractionnaire présenté ici porte sur la dynamique. Il faut donc supposer que si le fractionnaire émerge dans la description probabiliste, c'est qu'il apparaît déjà au niveau de la dynamique¹. Au cours de notre travail, nous avons cherché

¹Comme on l'a mentionné au chapitre 1, ce point de vue semble avoir été partagé par Zaslavsky qui, dans ses derniers travaux [ZSE06, TZ06, TZ08], s'était intéressé à la dynamique fractionnaire.

à justifier cette hypothèse forte, mais le problème reste toutefois ouvert.

4.1 Définition du plongement fractionnaire

4.1.1 Opérateurs différentiels

Soit $M, N \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{M+1}, \mathbb{R}^N)$ et $y \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^M)$, on note $f(y(\bullet), \bullet)$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(y(\bullet), \bullet) : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto f(y(t), t). \end{aligned}$$

Soit $p, k \in \mathbb{N}$. Si $\mathbf{f} = \{f_i\}_{0 \leq i \leq p}$ et $\mathbf{g} = \{g_j\}_{1 \leq j \leq p}$ sont deux familles de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{N(k+1)+1}, \mathbb{R}^M)$ ($\mathbf{g} = \emptyset$ si $p = 0$), on introduit l'opérateur différentiel $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}$ défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}} : \mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}) \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^M) \\ x &\longmapsto \left[f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \star \frac{d^i}{dt^i} g_i \right] \left(x(\bullet), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(\bullet), \bullet \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

où, pour deux opérateurs $A = (A_1, \dots, A_m)$ et $B = (B_1, \dots, B_m)$, $A \star B$ est défini par

$$(A \star B)(y) = (A_1(y)B_1(y), \dots, A_m(y)B_m(y)).$$

L'ensemble $\mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}})$ est l'ensemble de définition de $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}$. Par exemple, si pour tout $0 \leq i \leq p$, $f_i \in C^0(\mathbb{R}^{N(k+1)+1})$ et si pour tout $1 \leq j \leq p$, $g_j \in C^j(\mathbb{R}^{N(k+1)+1})$, alors $C^{p+k}([a, b]) \subset \mathcal{U}(\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}})$.

Précisons que les dérivées sont aussi présentes à l'extérieur des g_j car, lorsque la dérivée sera généralisée au cas fractionnaire, il n'existera plus de formule pour dériver une fonction composée.

Le plongement fractionnaire de $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}$ est défini en remplaçant d/dt par une dérivée fractionnaire d'ordre α , avec $0 < \alpha < 1$. Cette procédure peut donc être effectuée de plusieurs manières, suivant les types de dérivées choisies. Celle que nous retiendrons est la suivante.

Définition 4.1. Avec les notations précédentes, le plongement fractionnaire de $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}$, noté $\mathcal{E}_{\alpha}(\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}})$, est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha}(\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}) : \mathcal{U}^{\alpha} \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^M) \\ x &\longmapsto \left[f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \star {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} g_i \right] \left(x(\bullet), \dots, ({}_a\mathcal{D}_t^{\alpha})^k x(\bullet), \bullet \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

où \mathcal{U}^{α} est le domaine de définition de $\mathcal{E}_{\alpha}(\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}})$ (sa dépendance avec \mathbf{f} et \mathbf{g} n'apparaît pas explicitement par souci de lisibilité).

Remarque 4.2. Le plongement fractionnaire d'un opérateur différentiel n'est en général pas unique.

Par exemple, $\frac{d}{dt}$ peut être plongé de deux manières.

- Si on considère l'application $\Pi_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^{2N} \mapsto y$, le choix $k = 1, p = 0, \mathbf{f} = \{\Pi_2\}$ et $\mathbf{g} = \emptyset$ conduit au plongement

$$\mathcal{E}_{\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right) = {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}.$$

- En prenant $k = 0, p = 1, \mathbf{f} = \{0, id\}$ et $\mathbf{g} = \{id\}$, le plongement devient

$$\mathcal{E}_{\alpha} \left(\frac{d}{dt} \right) = {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha}.$$

Si cette indétermination peut apparaître comme un défaut indéniable, elle laisse aussi une certaine liberté dans le choix du modèle fractionnaire. Par contre, quel que soit le plongement adopté, un seul exposant fractionnaire intervient, α . Par conséquent seuls les exposants du type $k\alpha$ avec $k \in \mathbb{N}$, pourront apparaître dans les équations fractionnaires issues d'un plongement.

La définition 4.1 diffère de [Cre07] par trois aspects.

– L'opérateur fractionnaire utilisé dans [Cre07] est

$$\mathcal{D}_\mu^{\alpha,\beta} = \frac{1}{2} [{}_a\mathcal{D}_t^\alpha - {}_t\mathcal{D}_b^\beta] + i\mu \frac{1}{2} [{}_a\mathcal{D}_t^\alpha + {}_t\mathcal{D}_b^\beta], \quad (4.5)$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Cet opérateur traite simultanément le passé et le futur, afin de prendre en compte le caractère irréversible de certains systèmes. Dans notre travail, nous avons plutôt privilégié les opérateurs "passé" afin de respecter la *causalité*, c'est-à-dire le fait que l'état d'un système à l'instant t soit entièrement déterminé par ses états antérieurs $\tau < t$. En langage courant, le principe de causalité stipule que seul le passé détermine le présent. Nous verrons toutefois en section 5.1 que nous serons conduit à introduire un opérateur inspiré de (4.5), afin de justement respecter cette causalité dans les systèmes lagrangiens.

Nous avons de plus préféré garder un opérateur réel afin que les notions de minimum et de maximum gardent un sens pour l'action lagrangienne dans le cas fractionnaire (on est obligé sinon de se contenter des points où la différentielle s'annule). On peut ainsi rester dans l'esprit initial du principe de moindre action (minimiser l'action).

– Dans [Cre07], le plongement fractionnaire est défini exclusivement sur les opérateurs ; seule la dérivée extérieure est remplacée par une dérivée fractionnaire. Nous avons ici choisi de plonger aussi l'évaluation en x (les dérivées à l'intérieur des parenthèses) car dans notre travail, ces deux substitutions sont toujours effectuées simultanément ; nous n'avons jamais rencontré d'expression du type ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t) \right)$.

– La dérivée de Caputo à l'intérieur permet de définir correctement l'action, notamment dans le cas des systèmes lagrangiens naturels. Nous avons aussi choisi ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i}$ plutôt que $({}_a\mathcal{D}_t^\alpha)^i$ (option retenue dans [Cre07]) car cela permet d'obtenir des solutions pertinentes (sans conditions initiales nulles) pour les équations étudiées au chapitre 9.

Donnons à présent quelques précisions sur \mathcal{U}^α .

Lemme 4.1. *On suppose que pour tout $0 \leq i \leq p$, $f_i \in C^0(\mathbb{R}^{N(k+1)+1})$ et que pour tout $1 \leq j \leq p$, $g_j \in C^j(\mathbb{R}^{N(k+1)+1})$.*

– Si $\frac{\partial g_i}{\partial t} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$, alors

$$C_+^{p+k}([a, b]) \subset \mathcal{U}^\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(C_+^{p+k}([a, b])) \subset C^0([a, b]).$$

– Si $p = 0$ ($g = \emptyset$) et $k = 1$, alors

$$C^1([a, b]) \subset \mathcal{U}^\alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(C^1([a, b])) \subset C^0([a, b]).$$

Démonstration.

– Soit $x \in C_+^{p+k}([a, b])$. Pour tout $1 \leq j \leq k$, $({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^j x = {}_a^c\mathcal{D}_t^{\alpha j} x$ d'après le corollaire 2.1, et ${}_a^c\mathcal{D}_t^{\alpha j} x \in C_+^p([a, b])$ d'après le point 3 du lemme 2.6.

Soit $1 \leq i \leq p$. Puisque g_i est de classe C^i , $g_i(x) : t \mapsto g_i(x(t), \dots, {}_a^c\mathcal{D}_t^{\alpha k} x(t), t) \in C^i([a, b])$.

De plus,

$$g_i(x)'(a) = \sum_{j=1}^k \partial_j g_i(x)(a) x^{(j)}(a) + \frac{\partial g_i(x)}{\partial t}(a).$$

Comme $\frac{\partial g_i}{\partial t} = 0$ et $x^{(j)}(a) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq k$, on obtient $g_i(x)'(a) = 0$. Par récurrence, $g_i(x)^{(l)}(a) = 0$ pour tout $1 \leq l \leq i$. Ainsi $g_i(x) \in C_+^i([a, b])$ et d'après le point 2 du lemme 2.6, ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha_i} g_i(x) \in C^0([a, b])$.

– Soit $x \in C^1([a, b])$. D'après le point 1 du lemme 2.6,

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^0)(x) = f_0(x(\bullet), {}_a\mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet) \in C^0([a, b]).$$

□

Remarque 4.3. À cause des dérivées de Caputo (voir (2.18)), on n'a pas $\mathcal{E}_1(\mathcal{O}_f^g) \equiv \mathcal{O}_f^g$, sauf si $x \in C_+^p([a, b])$. Par contre, on montre facilement à l'aide du lemme 2.4 et du théorème 2.3 que pour $\beta > 0$, $m = [\beta] + 1$ et $f \in AC^m([a, b])$,

$$\lim_{\beta \rightarrow m^-} {}_a\mathcal{D}_t^\beta f = \frac{d^m}{dt^m} f.$$

Par conséquent, si les fonctions f_i et les g_j sont assez régulières et si $x \in C_+^k([a, b])$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x) = \mathcal{O}_f^g(x).$$

4.1.2 Équations différentielles

Comme cela est fait dans [Cre07], les équations différentielles ordinaires peuvent s'écrire à l'aide d'un opérateur \mathcal{O}_f^g :

$$\mathcal{O}_f^g(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}(\mathcal{O}_f^g). \quad (4.6)$$

Définition 4.2. Avec les notations précédentes, le plongement asymétrique de l'équation différentielle (4.6) est défini par

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}^\alpha. \quad (4.7)$$

À l'aide de ces définitions, nous allons maintenant étudier les systèmes lagrangiens fractionnaires.

4.2 Systèmes lagrangiens

Une première idée pour obtenir un système lagrangien fractionnaire est de plonger directement l'équation d'Euler-Lagrange. Toutefois, dans ce cas, seule l'équation classique est vraiment issue du principe de moindre action. Une autre manière de faire est alors de plonger le Lagrangien, et *ensuite* de lui appliquer le principe de moindre action. Dans ce cas, l'équation fractionnaire repose bien sur ce principe, mais n'est par contre plus causale...

Considérons donc un système lagrangien, de Lagrangien L .

4.2.1 Plongement de l'équation d'Euler-Lagrange

Redonnons l'expression de l'équation d'Euler-Lagrange, notée (EL) :

$$\forall t \in [a, b], \quad \partial_1 L \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t), t \right) - \frac{d}{dt} \partial_2 L \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t), t \right) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme $\mathcal{O}_f^g(x) = 0$, avec $k = 1$, $p = 1$, $\mathbf{f} = \{\partial_1 L, 1\}$ et $\mathbf{g} = \{-\partial_2 L\}$. Dans ce cas, le plongement fractionnaire de (EL) , noté $\mathcal{E}_\alpha(EL)$ vérifie

$$\mathcal{E}_\alpha(EL) : \quad \forall t \in]a, b], \quad \partial_1 L(x(t), {}^c_a \mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) - {}_a \mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x(t), {}^c_a \mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) = 0.$$

Cependant, on peut appliquer à cette équation les remarques faites dans l'introduction de ce chapitre sur les équations fractionnaires; rien ne garantit que $\mathcal{E}_\alpha(EL)$ soit une "bonne" équation, puisqu'elle n'est pas directement issue d'un principe de moindre action.

4.2.2 Plongement du Lagrangien

Plongeons donc plutôt le Lagrangien L , pour lui appliquer ensuite le principe de moindre action. Cette fonction, que l'on notera toujours L , peut en fait être vue comme un opérateur $\mathcal{O}_f^g(x)$, avec $k = 1$, $p = 0$, $\mathbf{f} = \{L\}$ et $\mathbf{g} = \emptyset$:

$$L : \quad \mathcal{U}(L) \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) \\ x \quad \longmapsto \quad L\left(x(\bullet), \frac{d}{dt}x(\bullet), \bullet\right).$$

Le plongement fractionnaire de L , que l'on notera L_α plutôt que $\mathcal{E}_\alpha(L)$ par souci de lisibilité, est alors défini par

$$L_\alpha : \quad \mathcal{U}^\alpha \quad \longrightarrow \quad \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}) \\ x \quad \longmapsto \quad L\left(x(\bullet), {}^c_a \mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet\right).$$

Comme $L \in C^0(\mathbb{R}^{2N} \times [a, b])$, $C^1([a, b]) \subset \mathcal{U}^\alpha$ et $L_\alpha(C^1([a, b])) \subset C^0([a, b])$ d'après le point 2 du lemme 4.1. Dans le chapitre, nous avons défini les systèmes lagrangiens pour des fonctions $x \in C^1([a, b])$. Nous prenons donc à partir de maintenant $\mathcal{U}^\alpha = C^1([a, b])$ comme espace de définition de L_α .

Grâce à ce nouveau Lagrangien, on peut reprendre le cheminement du chapitre 3. L'action associée vérifie :

$$\mathcal{A}(L_\alpha) : \quad C^1([a, b]) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \quad \longmapsto \quad \int_a^b L\left(x(t), {}^c_a \mathcal{D}_t^\alpha x(t), t\right) dt.$$

On voit ici l'importance de choisir la dérivée de Caputo pour la définition. Effectivement, considérons le cas élémentaire d'un système Lagrangien naturel avec $N = 1$:

$$L(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - U(x).$$

Si $x \in C^1([a, b])$ et $x(a) \neq 0$, alors ${}^c_a \mathcal{D}_a^\alpha x(a) = 0$, et d'après le théorème 2.3,

$${}_a \mathcal{D}_t^\alpha x(t) \underset{a}{\sim} \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} x(a). \quad (4.8)$$

Par conséquent,

$$L(x(t), {}_a \mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \underset{a}{\sim} \frac{1}{2}m \left(\frac{x(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^2 (t-a)^{-2\alpha},$$

et n'est pas intégrable en a pour $\alpha \geq 1/2$; l'action n'est dans ce cas pas définie!

Comme dans le cas classique, le principe de moindre action garde un sens; on peut chercher les minima et maxima de $\mathcal{A}(L_\alpha)$ pour déterminer la dynamique, cette fois fractionnaire, du système. Déterminons pour cela l'expression de la différentielle de l'action. La tâche est aisée puisque le calcul des variations reste en lui-même inchangé.

Lemme 4.2. Soit $x \in C^1([a, b])$. On suppose que $\partial_2 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.

Alors $\mathcal{A}(L_\alpha)$ est $C_0^1([a, b])$ -différentiable en x et pour tout $h \in C_0^1([a, b])$,

$$d\mathcal{A}(L_\alpha)(x, h) = \int_a^b \left[\partial_1 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) + {}_b\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \right] \cdot h(t) dt.$$

Démonstration. Soit $h \in C_0^1([a, b])$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} L_\alpha(x + \varepsilon h)(t) &= L(x(t) + \varepsilon h(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t) + \varepsilon {}^c\mathcal{D}_t^\alpha h(t), t), \\ &= L_\alpha(x)(t) + \varepsilon \left[\partial_1 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \cdot h(t) + \partial_2 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \cdot {}^c\mathcal{D}_t^\alpha h(t) \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.9)$$

On intègre cette relation sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(L_\alpha)(x + \varepsilon h) &= \mathcal{A}(L_\alpha)(x) + \varepsilon \int_a^b \partial_1 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \cdot h(t) dt \\ &\quad + \varepsilon \int_a^b \partial_2 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \cdot {}^c\mathcal{D}_t^\alpha h(t) dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Effectivement, $\int_a^b o(\varepsilon) dt = o(\varepsilon)$, c'est en fait pour cette raison que la définition 3.2 utilise les ε et non les fonctions directement ($\int_a^b o(h) dt \neq o(h)$ en général, quelle que soit la norme utilisée).

Comme $\partial_2 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$ et $h \in C_0^1([a, b])$, on peut effectuer l'intégration par parties du corollaire 2.2 (avec ${}^c\mathcal{D}_t^\alpha h = {}_a\mathcal{D}_t^\alpha h$) :

$$\int_a^b \partial_2 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet) \cdot {}^c\mathcal{D}_t^\alpha h(t) dt = \int_a^b {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet) \cdot h(t) dt.$$

Finalement, $h \mapsto \int_a^b \left[\partial_1 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) + {}_b\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \right] \cdot h(t) dt$ est linéaire, ce qui achève la preuve. \square

On obtient alors l'analogie du théorème 3.1 dans le cas fractionnaire.

Théorème 4.1. Soit $x \in C^1([a, b])$. On suppose que $\partial_2 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

x est une $C_0^1([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_\alpha)$ si et seulement si x vérifie l'équation (EL_α) , donnée par

$$(EL)_\alpha : \quad \forall t \in [a, b], \quad \partial_1 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) + {}_b\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) = 0. \quad (4.10)$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 3.1. La seule différence est que $t \mapsto {}_b\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t)$ peut ne pas être continue en b . \square

Pour résumer, la dynamique d'un système lagrangien (fractionnaire), de Lagrangien L_α , devrait donc être déterminée par l'équation $(EL)_\alpha$, via le principe de moindre action. Mais à cause de la présence de la dérivée à droite ${}_b\mathcal{D}_t^\alpha$ dans $(EL)_\alpha$, cette conclusion est problématique pour deux raisons.

La première est que les équations $\mathcal{E}_\alpha(EL)$ et $(EL)_\alpha$ sont différentes ; le plongement fractionnaire et le principe de moindre action ne sont donc pas des procédures commutatives. Quelle équation faut-il alors privilégier ? Avec les considérations du début du chapitre, on serait tenter de choisir $(EL)_\alpha$. Toutefois, et c'est ici la seconde difficulté, la dérivée ${}_b\mathcal{D}_t^\alpha$ dépend du futur du système ; l'équation $(EL)_\alpha$ montre ainsi que l'état à l'instant t est déterminé par l'ensemble de l'histoire du système. L'aspect finaliste du principe de moindre action apparaît donc ici explicitement dans les équations ! Dans le cas classique, cet aspect est occulté car l'équation d'Euler-Lagrange est locale.

Remarque 4.4. *En fait, même dans le cas classique, l'aspect finaliste apparaît en filigrane dans (EL) . Effectivement, notons d_+ et d_- les dérivées usuelles à gauche et à droite :*

$$d_+x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{x(t) - x(t - \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad d_-x(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{x(t + \varepsilon) - x(t)}{\varepsilon}. \quad (4.11)$$

Si x est dérivable en t , $d_+x(t) = d_-x(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. Tout comme les dérivées fractionnaires, d_+ se transforme en d_- en intégrant par parties.

Physiquement, c'est d_+ qui a un sens, puisque la vitesse d'un objet à l'instant est déterminée par le passé du système – elle ne doit pas dépendre de la position future $x(t + \varepsilon)$. Si on considère à présent le Lagrangien $L(x(t), d_+x(t), t)$, l'équation (EL) associée sera alors

$$\partial_1 L(x(t), d_+x(t), t) - d_- \partial_2 L(x(t), d_+x(t), t) = 0.$$

Le futur intervient alors via d_- ! C'est uniquement parce que l'on suppose $x(t)$ assez régulière que cet aspect disparaît.

En cherchant à respecter le principe de moindre action, on en perd alors un autre tout aussi fondamental, celui de causalité. Nous nous retrouvons donc devant un dilemme cornélien, que fort heureusement nous arriverons à dénouer en section 5.1.

Nous pouvons résumer la situation actuelle à l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha} & \mathcal{E}_\alpha(L) \\ C_0^1([a,b]) \updownarrow & & \updownarrow C_0^1([a,b]) \\ (EL) & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha} & \mathcal{E}_\alpha(EL) \neq (EL)_\alpha \end{array} \quad (4.12)$$

Sans pour l'instant chercher à trancher, on dira d'un système lagrangien qu'il est "fractionnaire" s'il est régi par $\mathcal{E}_\alpha(EL)$ ou $(EL)_\alpha$.

4.3 Systèmes hamiltoniens

Comme pour les systèmes lagrangiens, plusieurs plongements existent pour les systèmes hamiltoniens.

4.3.1 Plongement des équations canoniques

Tout d'abord, les équations canoniques (EH) peuvent être plongées directement. Effectivement, si on pose $z = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$, (EH) s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} -\partial_2 H \\ \partial_1 H \end{pmatrix} (z(t)) + \frac{d}{dt} z(t) = 0.$$

Ainsi, en choisissant $k = 0$, $p = 1$, $\mathbf{f} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -\partial_2 H \\ \partial_1 H \end{array} \right), \text{id} \right\}$ et $\mathbf{g} = \{\text{id}\}$, le plongement fractionnaire de (EH) , noté $\mathcal{E}_\alpha(EH)$, vérifie

$$\mathcal{E}_\alpha(EH) : \quad \forall t \in]a, b], \quad \begin{cases} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha x(t) &= \partial_2 H(x(t), p(t)), \\ {}_a\mathcal{D}_t^\alpha p(t) &= -\partial_1 H(x(t), p(t)). \end{cases} \quad (4.13)$$

Comme on va le voir, ce choix est motivé par le fait que l'on peut retrouver $\mathcal{E}_\alpha(EH)$ à partir de $\mathcal{E}_\alpha(EL)$.

4.3.2 Plongements à partir du Lagrangien

On considère ici un système lagrangien dont le lagrangien L vérifie la propriété de Legendre. Afin d'obtenir un système hamiltonien fractionnaire à partir d'un système lagrangien fractionnaire, il faut tout d'abord plonger le lien entre ces deux formalismes, c'est-à-dire le moment p associé à x .

Définition 4.3. Soit $x \in C^1([a, b])$. Le moment fractionnaire associé à x , noté p_α , est la fonction définie par

$$\begin{aligned} p_\alpha : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\longmapsto \partial_2 L(x(t), {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t)). \end{aligned}$$

Autrement dit, $p_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(\partial_2 L)(x)$ (où $\partial_2 L$ est identifié à $\mathcal{O}_{\{\partial_2 L\}}^\emptyset$), soit moralement " $p_\alpha = \mathcal{E}_\alpha(p)$ ". La relation avec la transformée de Legendre est cette fois

$${}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t) = f_L(x(t), p_\alpha(t)). \quad (4.14)$$

Nous obtenons alors un premier lien avec les systèmes lagrangiens fractionnaires.

Lemme 4.3. Soit un système lagrangien dont le Lagrangien L vérifie la propriété de Legendre et soit H le Hamiltonien associé à L . Soit x une solution de $\mathcal{E}_\alpha(EL)$ telle que $x(a) = 0$, et soit p_α le moment associé à x . Alors (x, p_α) est solution de $\mathcal{E}_\alpha(EH)$.

Démonstration. Les relations suivantes ne dépendent pas du choix de la dérivée, donc restent valides ici :

$$\begin{aligned} \partial_1 H(x, p) &= -\partial_1 L(x, f_L(x, p)), \\ \partial_2 H(x, p) &= f_L(x, p). \end{aligned}$$

Comme $x(a) = 0$, ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha x(t) = {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t) = f_L(x(t), p_\alpha(t))$, et la première équation de $\mathcal{E}_\alpha(EH)$ est prouvée. Comme x est solution de $\mathcal{E}_\alpha(EL)$,

$$\begin{aligned} \partial_1 L(x(t), {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t)) &= {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x(t), {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t)), \\ &= {}_a\mathcal{D}_t^\alpha p_\alpha(t), \end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde équation. □

Remarque 4.5. L'hypothèse $x(a) = 0$ semble bien inopportune. Elle est toutefois nécessaire s'il on veut retrouver une dérivée de Riemann-Liouville et non de Caputo. Cette difficulté n'apparaîtrait pas si l'on choisissait ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ à l'intérieur des fonctions. Mais il faudrait dans ce cas être très vigilant quant à l'existence de l'action lagrangienne...

Comme précédemment, il faudrait mieux obtenir les équations canoniques à l'aide d'un principe de moindre action fractionnaire, donc de $(EL)_\alpha$.

Corollaire 4.1. *Soit un système lagrangien dont le Lagrangien L vérifie la propriété de Legendre et soit H le Hamiltonien associé à L . Soit x une solution de $(EL)_\alpha$ telle que $x(a) = 0$, et soit p_α le moment associé à x . Alors (x, p_α) est solution de l'équation $(EH)_\alpha$ définie par*

$$(EH)_\alpha : \quad \forall t \in]a, b[, \quad \begin{cases} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha x(t) & = \partial_2 H(x(t), p_\alpha(t)), \\ -{}_t\mathcal{D}_b^\alpha p_\alpha(t) & = -\partial_1 H(x(t), p_\alpha(t)). \end{cases} \quad (4.15)$$

Démonstration. Similaire à celle du lemme 4.3, en utilisant cette fois $(EL)_\alpha$. \square

On est donc de nouveau confronté au même dilemme $\mathcal{E}_\alpha(EH) \neq (EH)_\alpha$, illustré par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha} & \sim \mathcal{E}_\alpha(H) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (EH) & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha} & \mathcal{E}_\alpha(EH) \neq (EH)_\alpha \end{array}$$

La notation $\sim \mathcal{E}_\alpha(H)$ est due au fait que le plongement fractionnaire ne s'effectue pas directement sur H mais sur le moment p . Les flèches \leftrightarrow indiquent quant à elles la présence d'un principe de moindre action sous-jacent.

Mentionnons pour finir qu'une formulation plus synthétique est exposée dans [CI09]. Plus rigoureuse, elle est aussi plus formelle, c'est pourquoi nous ne l'avons finalement pas suivie ici. Par ailleurs, on peut noter que les travaux portant sur le principe de moindre action fractionnaire, notamment [Agr02, BA06, BM05, ENT07, MBR07, FT07, FT08], font apparaître de même des opérateurs à droite.

Chapitre 5

Respect des principes physiques

Dans le chapitre précédent, nous avons tenté de respecter le principe de moindre action, malheureusement au détriment de celui de causalité. Pourtant, si l'on suppose que les équations fractionnaires ont une réelle signification physique, elles doivent respecter les principes fondamentaux de la physique, au même titre que les équations classiques. En regardant quels autres principes devaient être vérifiés, nous avons remarqué que l'homogénéité dimensionnelle n'était pas respectée dans de nombreuses équations fractionnaires, notamment dans celles issues du plongement fractionnaire. Dans ce chapitre, nous allons nous efforcer de construire un plongement fractionnaire qui respecte les principes de moindre action, de causalité et d'homogénéité dimensionnelle. Nous allons notamment voir qu'en cherchant à réunifier les deux premiers points, nous obtenons en fait une approche formelle de l'irréversibilité.

5.1 Causalité et irréversibilité

Comme on l'a signalé au chapitre 1, Riewe a introduit les systèmes lagrangiens fractionnaires afin de fournir un principe de moindre action pour les systèmes non-conservatifs. Son article [Rie96] débute ainsi :

It is a strange paradox that the most advanced methods of classical mechanics deal only with conservative systems, while almost all classical processes observed in the physical world are nonconservative. Conservative systems are time reversible by definition, while nonconservative systems exhibit the familiar arrow of time due to irreversible dissipative effects such as friction.

En termes imagés, si on filme l'évolution d'un système, un système conservatif sera tel que l'on ne fera pas de différence entre la vidéo passée à l'endroit et celle passée à l'envers. Par exemple, en première approximation, le balancier d'une pendule, une balle de billard, un palet de hockey sur la glace sont des systèmes réversibles. Dans le cas contraire, on parle de système irréversible ; un verre qui se brise, une balle en mousse qui rebondit de moins en moins haut en sont quelques exemples. La flèche du temps indique le sens de lecture de la vidéo (et n'a donc de sens que pour les systèmes irréversibles). Elle nous est familière puisque c'est elle qui différencie le passé du futur ; nous l'observons tous dans le vieillissement de l'être humain, phénomène là-aussi irréversible !

Remarque 5.1. *Nous avons précisé que les systèmes conservatifs que nous avons cité ne l'étaient qu'en première approximation puisque comme le signale Riewe, les systèmes réels présentent tous des phénomènes de dissipation : une pendule doit être remontée, il est impossible de faire dix bandes au billard et un palet de hockey ne traversera jamais l'arctique d'un seul coup de crosse ! Partant de ce constat, Hilfer propose dans [Hil03] d'inverser la vision classique de la physique (qui considère majoritairement des systèmes conservatifs), en supposant que les systèmes sont dans le cas général non*

conservatifs, le cas conservatif devenant un cas dégénéré. Cela se traduit au niveau des dérivées par le fait que les plus générales sont les dérivées fractionnaires, d/dt devenant lui aussi un cas particulier.

Dans [Rie96] Riewe cherche une structure lagrangienne pour l'équation de friction linéaire suivante :

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) - \nabla U(x(t)) = 0, \quad (5.1)$$

et trouve un Lagrangien permettant d'obtenir l'équation suivante :

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma {}_t\mathcal{D}_b^{1/2} {}_a\mathcal{D}_t^{1/2} x(t) - \nabla U(x(t)) = 0.$$

Le problème est que ${}_t\mathcal{D}_b^{1/2} {}_a\mathcal{D}_t^{1/2} \neq d/dt$ (même lorsque $a \rightarrow b$, comme le propose Riewe). À cause une nouvelle fois de la présence de la dérivée à droite ${}_t\mathcal{D}_b^{1/2}$ et donc du non-respect de la causalité, il est impossible de retrouver (5.1). En généralisant le plongement asymétrique présenté ici, nous résoudrons ce problème au chapitre 9. Le travail de Riewe relie ainsi moindre action, irréversibilité et implicitement causalité. Il va en être de même dans cette partie.

Notre première priorité étant de réconcilier moindre action et causalité dans les systèmes lagrangiens fractionnaires, nous nous sommes d'abord inspiré de [Cre07] en restreignant les variations, mais finalement sans succès. Nous avons ensuite proposé de dédoubler la dynamique, ce qui a conduit à une approche formelle de l'irréversibilité. Nous avons ensuite défini un plongement *asymétrique* que nous présentons ici dans le cas fractionnaire et qui permet de respecter la causalité dans les systèmes lagrangiens et hamiltoniens. Ce formalisme n'est en fait pas tributaire du cas fractionnaire et peut être appliqué à d'autres types de dérivées.

5.1.1 Restriction des variations ?

Afin d'éliminer ${}_t\mathcal{D}_b^\alpha$ dans $(EL)_\alpha$, on peut tenter de restreindre l'espace des variations \mathcal{V} , en espérant ainsi ne garder que les fonctions tests pertinentes. C'est ce qui est proposé dans [Cre07], avec un choix du type

$$\mathcal{V} = \{h \in C_0^1([a, b]) \mid {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha h = -{}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha h\}. \quad (5.2)$$

Dans ce cas, si x est une solution de $\mathcal{E}_\alpha(EL)$, alors x est une \mathcal{V} -extrémale de $\mathcal{A}(L_\alpha)$.

Afin d'établir une équivalence comme dans le cas classique, nous avons alors tenté de trouver une réciproque à ce résultat, d'abord dans [Ini07] puis dans [CI09]. Pourtant, des interrogations quant à la taille de \mathcal{V} nous ont conduit à proposer en parallèle une alternative, le plongement asymétrique, que nous exposons ensuite. Cette seconde piste semble finalement plus fructueuse que la première, au vu du lemme suivant que nous avons trouvé sur le tard.

Lemme 5.1. *Soit $h \in C_0^1([a, b])$. Si ${}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha h = -{}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha h$, alors $h = 0$.*

Démonstration. On commence par prolonger h sur \mathbb{R} en posant $h(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Ainsi prolongée, $h' \in L^1(\mathbb{R})$ et vérifie

$$\mathcal{I}_+^\alpha h' = \mathcal{I}_-^\alpha h'.$$

D'après le lemme 2.16, la transformée de Fourier de cette équation vérifie

$$\begin{aligned} (i\omega)^{\alpha-1} \mathcal{F}[h'](\omega) &= (-i\omega)^{\alpha-1} \mathcal{F}[h'](\omega), \\ &= e^{i\pi(\alpha-1)} (i\omega)^{\alpha-1} \mathcal{F}[h'](\omega). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}[h'](\omega) = 0$, puis, par continuité de $\mathcal{F}[h']$, $\mathcal{F}[h'] = 0$. En prenant la transformée de Fourier inverse, on trouve que $h' = 0$. Ainsi h est une fonction constante. Comme $h(a) = 0$, on en conclut que $h = 0$. \square

5.1.2 Une approche formelle de l'irréversibilité

Gardons toutefois de la démarche précédente l'idée que dans le calcul des variations de l'action, il faut faire apparaître le terme $-\mathop{c}\mathcal{D}_b^\alpha h$ plutôt que $\mathop{c}\mathcal{D}_t^\alpha h$. Il faut donc que h ait un "statut dynamique" différent de x ; les trajectoires doivent évoluer selon $\mathop{c}\mathcal{D}_t^\alpha$, alors que les variations devraient être régies par $-\mathop{c}\mathcal{D}_b^\alpha$. Cela pourrait alors signifier que la flèche du temps est inversée pour les variations.

Ce dédoublement de la dynamique permet alors de prendre en compte simultanément les deux sens de lecture de la vidéo : passé \rightarrow futur et futur \rightarrow passé. La différence entre ces deux dynamiques donnera alors une caractérisation de l'irréversibilité. Précisons ici qu'au départ nous ne voyions dans ce découplage qu'un moyen efficace mais formel d'obtenir des équations causales. C'est Cresson qui non seulement nous a soutenu dans cette démarche, mais qui y a ajouté du contenu en voyant l'occasion de prendre en compte l'irréversibilité. Nous l'en remercions ici.

Ce point de vue montre que c'est plutôt le caractère gauche/droite des dérivées fractionnaires qui importe ici, plutôt que leurs définitions mêmes. Comme nous l'avons noté dans la remarque 4.4, même dans le cas classique, c'est en fait la dérivée à gauche d_+ , définie par (4.11), qui régit l'évolution des trajectoires $x(t)$ d'un système. Nous nous extrayons donc temporairement du formalisme fractionnaire pour considérer des opérateurs généraux \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- .

Commençons par formaliser ce découplage avec les définitions suivantes.

Définition 5.1. *L'évolution d'un système est dite causale dans le sens passé \rightarrow futur si elle peut s'écrire sous la forme*

$$f_+(x(t), \mathcal{D}^+x(t), \dots, (\mathcal{D}^+)^k x(t), t) = 0. \quad (5.3)$$

Définition 5.2. *L'évolution d'un système est dite causale dans le sens futur \rightarrow passé si elle peut s'écrire sous la forme*

$$f_-(x(t), \mathcal{D}^-x(t), \dots, (\mathcal{D}^-)^l x(t), t) = 0. \quad (5.4)$$

Définition 5.3. *Un système sera dit réversible si (5.3) et (5.4) possèdent les mêmes solutions. Sinon, il sera qualifié d'irréversible.*

Remarque 5.2. *Précisons que nous ne cherchons pas à comprendre ici l'origine physique de l'irréversibilité. Ce problème, qui remonte aux travaux de Boltzmann dans les années 1870 autour de la notion d'entropie, reste encore d'actualité dans la communauté des physiciens. Mentionnons simplement que de nouvelles réponses ont récemment été apportées à travers les systèmes chaotiques [Pri99, Zas99]. L'approche envisagée ici est formelle, mais va permettre de mieux comprendre le principe de moindre action, plus précisément la relation qu'il entretient avec la causalité.*

La dynamique d'un système est dans cette section considérée dans le sens suivant.

Définition 5.4. *La représentation asymétrique de la dynamique d'un système dans \mathbb{R}^N est la donnée de $(x_+, x_-) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et de leurs évolutions temporelles respectives, régies par les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{aligned} f_+(x_+(t), \mathcal{D}^+x_+(t), \dots, (\mathcal{D}^+)^k x_+(t), t) &= 0, \\ f_-(x_-(t), \mathcal{D}^-x_-(t), \dots, (\mathcal{D}^-)^l x_-(t), t) &= 0, \end{aligned}$$

où x_+ représente l'évolution dans le sens passé \rightarrow futur et x_- l'évolution dans le sens futur \rightarrow passé.

Deux choses caractérisent ainsi la flèche du temps : la structure globale de l'équation différentielle, via f_\pm , et l'opérateur d'évolution temporelle, c'est-à-dire la dérivée \mathcal{D}^\pm . Si le sens d'évolution apparaît explicitement dans ce dernier, il n'en va pas de même pour la première. Par souci de simplicité, nous

supposons donc que $f_+ = f_- = f$. Le sens de la flèche du temps devient ainsi exclusivement déterminé par le choix de la dérivée. Les équations de la dynamique sont alors

$$f\left(x_+(t), \mathcal{D}^+ x_+(t), \dots, (\mathcal{D}^+)^k x_+(t), t\right) = 0, \quad (5.5)$$

$$f\left(x_-(t), \mathcal{D}^- x_-(t), \dots, (\mathcal{D}^-)^k x_-(t), t\right) = 0. \quad (5.6)$$

Remarque 5.3. Lorsque $\mathcal{D}^\pm = d_\pm$, on suppose souvent que la trajectoire est dérivable, c'est-à-dire que $d_+x(t) = d_-x(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. On perd alors toute trace de la flèche du temps.

Par souci de clarté, nous allons maintenant nous restreindre au cas fractionnaire et étendre le plongement fractionnaire défini précédemment afin d'obtenir des équations du type (5.5) et (5.6). Nous verrons toutefois dans la partie 5.1.5 que ce formalisme n'est pas tributaire du calcul fractionnaire et peut être considéré pour des dérivées générales \mathcal{D}^\pm . L'article [CI08] adopte ce point de vue.

5.1.3 Définition du plongement fractionnaire asymétrique

Nous reprenons ici la présentation faite dans [CI10]. Considérons un système \mathcal{S} , évoluant dans \mathbb{R}^N pendant un intervalle de temps $[a, b]$. Soit $0 < \alpha < 1$. Pour $X = (x_+, x_-) \in C^1([a, b])^2$ (en fait $AC([a, b])^2$ serait suffisant), nous définissons l'opérateur différentiel ${}^c\mathcal{D}^\alpha$ par

$$\boxed{{}^c\mathcal{D}^\alpha X = ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+, -{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-)}$$

afin de traiter simultanément les deux sens d'évolution.

Par conséquent, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et X une fonction "assez régulière",

$$({}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X = (({}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+, (-{}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-).$$

D'après le corollaire 2.1, $({}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X$ est bien défini pour $X \in C_+^k([a, b]) \times C_-^k([a, b])$ et vérifie dans ce cas

$$({}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X = ({}^c\mathcal{D}_t^{\alpha k} x_+, (-1)^k {}^c\mathcal{D}_b^{\alpha k} x_-).$$

On a alors $({}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X \in C_+^0([a, b]) \times C_-^0([a, b])$.

À l'aide de cet opérateur, nous allons définir un nouveau type de plongement, inspiré du plongement fractionnaire; nous plongeons d'abord les opérateurs $\mathcal{O}_f^{\mathfrak{g}}$ puis les équations différentielles associées. La définition suivante constitue le socle du dédoublement dynamique que nous allons ensuite effectuer.

Définition 5.5. Soit $k \in \mathbb{N}$, $M, N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N(k+1)+1}, \mathbb{R}^M)$. La représentation asymétrique de f , notée \tilde{f} , est définie par

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad \mathbb{R}^{2N(k+1)+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^M \\ (x_0, y_0, \dots, x_k, y_k, t) &\longmapsto f(x_0 + y_0, \dots, x_k + y_k, t). \end{aligned}$$

Précisons de suite que les fonctions pertinentes seront dans $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) \times \{0\}$ ou $\{0\} \times \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N)$. C'est pourquoi nous introduisons la matrice de "sélection" suivante.

Notons $\mathcal{M}_{M, 2M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à M lignes et $2M$ colonnes et I_M la matrice identité de taille M . On définit l'opérateur σ par

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N)^2 &\longrightarrow \mathcal{M}_{M, 2M}(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto \begin{pmatrix} I_M & 0 \\ 0 & I_M \end{pmatrix} \text{ si } X \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) \times \{0\} \text{ et } X \neq 0, \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & I_M \end{pmatrix} \text{ si } X \in \{0\} \times \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) \text{ et } X \neq 0, \\ &\quad \begin{pmatrix} I_M & I_M \end{pmatrix} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent définir le plongement asymétrique d'un opérateur $\mathcal{O}_f^{\mathfrak{g}}$ défini par (4.3).

Définition 5.6. Le plongement fractionnaire asymétrique de l'opérateur \mathcal{O}_f^g , noté $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)$, est défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g) : \tilde{\mathcal{U}}^\alpha &\longrightarrow \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^M) \\ X &\longmapsto \left[\tilde{f}_0 + \sigma(X) \sum_{i=1}^p \left(\tilde{f}_i \star {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} \circ \tilde{g}_i \right) \right] (X(\bullet), \dots, ({}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(\bullet), \bullet), \end{aligned} \quad (5.7)$$

où $\tilde{\mathcal{U}}^\alpha \subset \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N)^2$ est l'ensemble de définition de $\tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_f^g)$.

On introduit aussi les espaces suivants :

$$\tilde{\mathcal{U}}_+^\alpha = \tilde{\mathcal{U}}^\alpha \cap (\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) \times \{0\}), \quad \tilde{\mathcal{U}}_-^\alpha = \tilde{\mathcal{U}}^\alpha \cap (\{0\} \times \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N)).$$

En particulier, pour $(x_+, 0) \in \tilde{\mathcal{U}}_+^\alpha$, (5.7) redonne le plongement fractionnaire du chapitre 4 :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x_+, 0)(t) &= \left[f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \star {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} \circ g_i \right] (x_+(t), \dots, ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+(t), t), \\ &= \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x_+)(t). \end{aligned}$$

Pour $(0, x_-) \in \tilde{\mathcal{U}}_-^\alpha$, on a

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(0, x_-)(t) = \left[f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \star (-1)^i {}_t\mathcal{D}_b^{\alpha i} \circ f_i \right] (x_-(t), \dots, (-{}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-(t), t).$$

Des précisions sur $\tilde{\mathcal{U}}^\alpha$ analogues au lemme 4.1 peuvent être données.

Lemme 5.2. On suppose que pour tout $0 \leq i \leq p$, $f_i \in C^0(\mathbb{R}^{N(k+1)+1})$ et que pour tout $1 \leq j \leq p$, $g_j \in C^j(\mathbb{R}^{N(k+1)+1})$.

- Si $\frac{\partial g_i}{\partial t} = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$, alors

$$C_+^{p+k}([a, b]) \times C_-^{p+k}([a, b]) \subset \tilde{\mathcal{U}}^\alpha,$$

et de plus,

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(C_+^{p+k}([a, b]) \times C_-^{p+k}([a, b])) \subset C^0([a, b]).$$

- Si $p = 0$ ($g = \emptyset$) et $k = 1$, alors

$$C^1([a, b])^2 \subset \tilde{\mathcal{U}}^\alpha,$$

et de plus,

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(C^1([a, b])^2) \subset C^0([a, b]).$$

Démonstration. Analogue à celle du lemme 4.1. □

Afin de clarifier les notations, nous donnons ici un exemple simple.

Exemple 5.1. On prend $N = M = p = 1$, $k = 2$ et on suppose que $0 < \alpha < 1/2$. Soit $f_0, f_1, g_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$\begin{aligned} f_0(a, b, c, t) &= c + e^{-t} \cos b, \\ f_1(a, b, c, t) &= 1, \\ g_1(a, b, c, t) &= \cos a. \end{aligned}$$

L'opérateur \mathcal{O}_f^g associé vérifie, pour tout $x \in C^2([a, b])$ et $t \in [a, b]$,

$$\mathcal{O}_f^g(x)(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + e^{-t} \cos\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + \frac{d}{dt} \cos(x(t)).$$

D'après le lemme 2.11, si $(x_+, x_-) \in AC^2([a, b])^2$, alors

$$({}^c\mathcal{D}^\alpha)^2(x_+, x_-) = ({}^c\mathcal{D}_t^{2\alpha} x_+, {}^c\mathcal{D}_b^{2\alpha} x_-).$$

Le plongement asymétrique $\tilde{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_f^g)$ est donc défini sur $AC^2([a, b])^2$, et pour tout $(x_+, x_-) \in AC^2([a, b])^2$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x_+, x_-)(t) &= {}^c\mathcal{D}_t^{2\alpha} x_+(t) + {}^c\mathcal{D}_b^{2\alpha} x_-(t) + e^{-t} \cos({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t)) \\ &\quad + \sigma(x_+, x_-) \begin{pmatrix} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \cos(x_+(t) + x_-(t)) \\ -{}_t\mathcal{D}_b^\alpha \cos(x_+(t) + x_-(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $(x_+, 0) \in AC^2([a, b]) \times \{0\}$, le plongement asymétrique devient

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x_+, 0)(t) = {}^c\mathcal{D}_t^{2\alpha} x_+(t) + e^{-t} \cos({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t)) + {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \cos(x_+(t)),$$

et pour $(0, x_-) \in \{0\} \times AC^2([a, b])$,

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(0, x_-)(t) = {}^c\mathcal{D}_b^{2\alpha} x_-(t) + e^{-t} \cos(-{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t)) - {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \cos(x_-(t)).$$

On étend de même que précédemment les équations différentielles écrites sous la forme

$$\mathcal{O}_f^g(x) = 0. \tag{5.8}$$

Définition 5.7. Avec les notations précédentes, le plongement asymétrique de l'équation différentielle (5.8) est défini par

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(X) = 0, \quad X \in \tilde{\mathcal{U}}. \tag{5.9}$$

Ainsi, si $(x_+, 0) \in \tilde{\mathcal{U}}_+^\alpha$, (5.9) devient

$$\left[f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \star {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha_i} \circ g_i \right] \left(x_+(t), \dots, ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+(t), t \right) = 0,$$

et joue le rôle de (5.5).

De même, pour $(0, x_-) \in \tilde{\mathcal{U}}_-^\alpha$, on obtient l'équation

$$\left[f_0 + \sum_{i=1}^p f_i \star (-1)^i {}_t\mathcal{D}_b^{\alpha_i} \circ g_i \right] \left(x_-(t), \dots, (-{}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-(t), t \right) = 0,$$

qui s'apparente à (5.6).

Remarquons que ces deux équations respectent bien la causalité. Le plongement asymétrique permet donc de dédoubler la dynamique d'un système et de traiter les deux composantes de manière unifiée. C'est en fait ce dernier aspect qui importera pour les systèmes lagrangiens, et donc pour les systèmes hamiltoniens.

5.1.4 Application aux systèmes lagrangiens et hamiltoniens

Systèmes lagrangiens

Considérons à présent le même système \mathcal{S} que précédemment, mais supposons de plus qu'il soit lagrangien, de Lagrangien L . La représentation asymétrique L , notée \tilde{L} , vérifie pour tout $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2N}$, $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{2N}$ et $t \in [a, b]$,

$$\tilde{L}(X, Y, t) = L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t).$$

Étant donné que

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_1}(X, Y, t) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_2}(X, Y, t) = \partial_1 L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t),$$

on note $\partial_1 \tilde{L}(X, Y, t) = \widetilde{\partial_1 L}(X, Y, t) = \partial_1 L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t)$. De même, on note $\partial_2 \tilde{L}(X, Y, t) = \partial_2 L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t)$.

Commençons par plonger (EL) . Avec le même choix pour \mathbf{f} et \mathbf{g} que dans le chapitre précédent, le plongement fractionnaire asymétrique de (EL) , noté $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(EL)$, vérifie

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(EL) : \quad \partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) - \sigma(X) \begin{pmatrix} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) \\ - {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.10)$$

En particulier, pour $X = (x_+, 0)$, (5.10) devient

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EL) : \quad \partial_1 L(x_+(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) - {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x_+(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) = 0, \quad (5.11)$$

et pour $X = (0, x_-)$, on a :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EL) : \quad \partial_1 L(x_-(t), -{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t) + {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L(x_-(t), -{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t) = 0. \quad (5.12)$$

Ces deux équations peuvent jouer le rôle de (5.5) et (5.6) pour le système \mathcal{S} et fournissent ainsi une possible représentation asymétrique de sa dynamique.

Plongeons à présent le Lagrangien L , pour ensuite lui appliquer le principe de moindre action. On notera encore L l'opérateur $\mathcal{O}_{\{L\}}^\theta$.

Le plongement fractionnaire asymétrique de L , noté \tilde{L}_α , vérifie

$$\tilde{L}_\alpha(X)(t) = L(x_+(t) + x_-(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t),$$

pour tout $(x_+, x_-) \in C^1([a, b])^2$ et $t \in [a, b]$.

L'action associée devient à présent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha) : C^1([a, b])^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \int_a^b \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) dt. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)(x_+, x_-) = \int_a^b L(x_+(t) + x_-(t), {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t) dt. \quad (5.13)$$

La détermination de la différentielle de $\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)$ ne pose pas problème.

Lemme 5.3. Soit $X \in C^1([a, b])^2$. On suppose que $\partial_2 \tilde{L}(X(\bullet), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.

Alors $\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)$ est $C_0^1([a, b])^2$ -différentiable en X et pour tout $H = (h_+, h_-) \in C_0^1([a, b])^2$,

$$d\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)(X, H) = \int_a^b \left[\partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) + {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) \right] \cdot h_+(t) dt \quad (5.14)$$

$$+ \int_a^b \left[\partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) - {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) \right] \cdot h_-(t) dt. \quad (5.15)$$

Démonstration. Analogue à celle du lemme 4.2, en traitant cette fois h_+ et h_- . \square

On obtient ainsi une première généralisation de $(EL)_\alpha$.

Lemme 5.4. Soit $X \in C^1([a, b])^2$. On suppose que $\partial_2 \tilde{L}(X(\bullet), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

X est une $C_0^1([a, b])^2$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)$ si et seulement si X vérifie l'équation $(\widetilde{EL})_\alpha$, donnée par

$$(\widetilde{EL})_\alpha : \quad \forall t \in]a, b[, \quad \begin{cases} \partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) + {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) = 0, \\ \partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) - {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Démonstration. Similaire à celle du théorème 3.1. \square

En fait cette équation est complètement dégénérée. Elle implique que

$$({}_t\mathcal{D}_b^\alpha + {}_a\mathcal{D}_t^\alpha) \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) = 0.$$

En s'inspirant du lemme 5.1, on peut montrer que dans ce cas $\partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) = 0$, et donc $\partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), t) = 0$. C'est en fait en restreignant les variations (mais autrement que dans le paragraphe 5.1.1) que nous allons obtenir des équations intéressantes.

Causalité et cohérence

Comme on l'a déjà noté, seuls $(x_+, 0)$ et $(0, x_-)$ sont réellement pertinents. Effectivement, additionner ces deux quantités dans les représentations asymétriques mélangerait dans ce cas les deux dynamiques. En ne considérant que la dynamique *passé* \rightarrow *futur* en x_+ , il semble légitime de restreindre de même les variations. La première idée consiste à regarder les variations $(h_+, 0)$.

Lemme 5.5. Soit $x_+ \in C^1([a, b])$. On suppose que $\partial_2 L(x_+(\bullet), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

$(x_+, 0)$ est une $C_0^1([a, b]) \times \{0\}$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)$ si et seulement si x_+ vérifie l'équation

$$\forall t \in [a, b], \quad \partial_1 L(x_+(t), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) + {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L(x_+(t), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) = 0. \quad (5.17)$$

Démonstration. On prend $h_- = 0$ dans (5.14). \square

On retrouve exactement l'équation $(EL)_\alpha$ problématique. Par contre, si l'on considère des variations $(0, h_-)$, le problème est résolu, et c'est là tout l'intérêt du plongement asymétrique.

Théorème 5.1. Soit $x_+ \in C^1([a, b])$. On suppose que $\partial_2 L(x_+(\bullet), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

$(x_+, 0)$ est une $\{0\} \times C_0^1([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)$ si et seulement si x_+ vérifie l'équation $(EL)_\alpha^+$, donnée par

$$(EL)_\alpha^+ : \quad \forall t \in]a, b[, \quad \partial_1 L(x_+(t), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) - {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x_+(t), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) = 0. \quad (5.18)$$

Un résultat similaire existe pour x_- .

Corollaire 5.1. *Soit $x_- \in C^1([a, b])$. On suppose que $\partial_2 L(x_-(\bullet), -{}_t^c \mathcal{D}_b^\alpha x_-(\bullet), \bullet) \in AC([a, b])$.*

L'équivalence suivante a lieu :

$(0, x_-)$ est une $C_0^1([a, b]) \times \{0\}$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)$ si et seulement si x_- vérifie l'équation $(EL)_\alpha^-$, donnée par

$$(EL)_\alpha^- : \quad \forall t \in [a, b], \quad \partial_1 L(x_-(t), -{}_t^c \mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t) + {}_t \mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L(x_-(t), -{}_t^c \mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t) = 0.$$

(5.19)

Les équations (5.18) et (5.19), toutes deux issues d'un principe de moindre action, respectent enfin la causalité (au sens des définitions 5.1 et 5.2). De plus, aucune restriction majeure n'est faite sur les composantes non nulles des variations. Nous obtenons ainsi un principe de moindre action analogue à la formulation classique, si ce n'est que les trajectoires et les variations ne sont pas soumises à la même dynamique. Ce résultat peut sembler surprenant : il montre que pour obtenir des équations causales de la dynamique dans un sens donné, il faut faire intervenir des variations évoluant dans l'autre direction temporelle, comme le résume le tableau 5.1.

traj. \ var.	$(h_+, 0)$	$(0, h_-)$
$(x_+, 0)$	non causal	causal <i>passé</i> \rightarrow <i>futur</i>
$(0, x_-)$	causal <i>futur</i> \rightarrow <i>passé</i>	non causal

FIG. 5.1 – Critères de causalité.

Tentons de mieux comprendre ce paradoxe. Comme on l'a vu au chapitre 3, le principe de moindre action est une vision globale de la dynamique au niveau temporel : la trajectoire est déterminée sur l'ensemble de son parcours (c'est-à-dire sur l'intervalle $[a, b]$). L'équation $(EL)_\alpha$, en faisant intervenir passé et futur, est en fait en accord avec ce point de vue global. Pourtant, ce principe a pour but de décrire des systèmes causaux. Le théorème 5.1 (et son corollaire 5.1) montre que c'est grâce aux *variations* que cette apparente incompatibilité peut être levée. En obéissant à la dynamique en sens inverse, ces dernières "captent" la partie non causale (et donc finaliste) du principe de moindre action ; les équations de la dynamique peuvent alors respecter la causalité. Dans l'addition $x_+ + \varepsilon h_-$, on ajoute bien deux fonctions comparables, mais leurs natures dynamiques et physiques sont différentes. La trajectoire x_+ peut être qualifiée de *réelle* alors que les variations h_- sont *virtuelles*. Ce point de vue est illustré avec la figure 5.2. Pour résumer, le caractère finaliste du principe de moindre action semble résider dans les variations ; celles-ci n'ayant pas de réalisation concrète, cet aspect semble devenir moins "choquant".

Par ailleurs,

$$(EL)_\alpha^+ \equiv \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EL) \quad \text{et} \quad (EL)_\alpha^- \equiv \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EL).$$

Si on note $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+$ et $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-$ les plongements fractionnaires asymétriques évalués respectivement sur les trajectoires $(x_+, 0)$ et $(0, x_-)$, les schémas suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(L) \\
 \uparrow C_0^1([a, b]) & & \uparrow \{0\} \times C_0^1([a, b]) \\
 (EL) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EL)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(L) \\
 \uparrow C_0^1([a, b]) & & \uparrow C_0^1([a, b]) \times \{0\} \\
 (EL) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EL)
 \end{array}
 \tag{5.20}$$

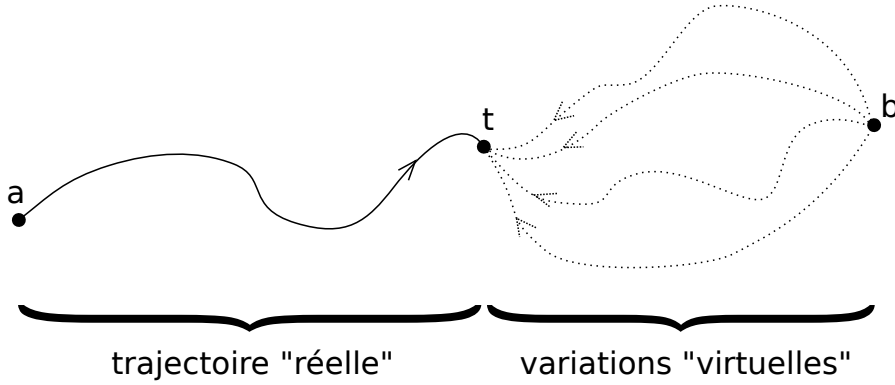


FIG. 5.2 – Trajectoire et variations.

Autrement dit, principe de moindre action et plongement fractionnaire asymétrique sont deux procédures qui peuvent être commutatives. En suivant [Cre07], le plongement asymétrique peut donc être qualifié de *cohérent*. Cela confère un poids supplémentaire à $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}^{+}(EL)$ et $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}^{-}(EL)$, qui semblent ainsi être de bonnes candidates pour une représentation asymétrique de la dynamique du système \mathcal{S} .

Avec les diagrammes (5.20), voici la partie gauche du toit de notre cube achevée.

Systèmes hamiltoniens

On suppose maintenant que le système \mathcal{S} est hamiltonien, de Hamiltonien H . La variable x est remplacée cette fois par $z = (x, p)$, et son dédoublement, noté Z , vérifie $Z = (z_+, z_-) = ((x_+, p_+), (x_-, p_-))$. En particulier, la représentation asymétrique de H est définie par

$$\tilde{H}(Z) = H(x_+ + x_-, p_+ + p_-).$$

Comme pour le Lagrangien, on peut poser $\partial_i \tilde{H}(Z) = \widetilde{\partial_i H}(Z) = \partial_i H(x_+ + x_-, p_+ + p_-)$ pour $1 \leq i \leq 2$.

Avec le choix précédemment fait pour écrire (EH) sous la forme (5.8), le plongement asymétrique de (EH) , noté $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}(EH)$, est ainsi défini par

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}(EH) : \quad \begin{pmatrix} -\partial_2 \tilde{H} \\ \partial_1 \tilde{H} \end{pmatrix} (Z(t)) + \sigma(Z) \begin{pmatrix} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} \\ -{}_t\mathcal{D}_b^{\alpha} \end{pmatrix} Z(t) = 0.$$

Pour $Z = (z_+, 0)$, ce plongement devient

$$\begin{pmatrix} -\partial_2 H \\ \partial_1 H \end{pmatrix} (z_+(t)) + {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} z_+(t) = 0,$$

équation que l'on notera $\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}^{+}(EH)$:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha}^{+}(EH) : \quad \forall t \in]a, b], \quad \begin{cases} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} x_+(t) = \partial_2 H(x_+(t), p_+(t)), \\ {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha} p_+(t) = -\partial_1 H(x_+(t), p_+(t)). \end{cases}}$$

On retrouve là encore le plongement $\mathcal{E}_{\alpha}(EH)$ du chapitre 4.

De même, pour $(0, z_-)$, on note $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EH)$ le plongement asymétrique de (EH) :

$$\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EH) : \quad \forall t \in [a, b], \quad \begin{cases} -{}_t\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t) = \partial_2 H(x_-(t), p_-(t)), \\ -{}_t\mathcal{D}_b^\alpha p_-(t) = -\partial_1 H(x_-(t), p_-(t)). \end{cases}$$

Supposons maintenant que H soit associé à un Lagrangien L . Le lien avec les plongements fractionnaires asymétriques des systèmes lagrangiens se fait à travers le moment. Rappelons que le moment $p(t)$ associé à $x(t)$ vérifie

$$\forall t \in [a, b], \quad p(t) = \partial_2 L \left(x(t), \frac{d}{dt} x(t) \right).$$

En identifiant p à $\mathcal{O}_{\{p\}}^\theta$, le plongement fractionnaire asymétrique de p , noté \tilde{p}_α , vérifie

$$\forall t \in [a, b], \quad \tilde{p}_\alpha(t) = \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t)).$$

Nous avons omis la dépendance en X par souci de cohérence avec les notations précédentes sur le moment. Le lien avec la transformée de Legendre est maintenant

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t) = f_L(x_+(t) + x_-(t), \tilde{p}_\alpha(t)). \quad (5.21)$$

On remarque que contrairement à la variable X , le moment n'est pas dédoublé pour le plongement asymétrique. En fait, le sens d'évolution de \tilde{p}_α est implicitement déterminé par celui de X .

Le lien avec les équations d'Euler Lagrange fractionnaires causales est donné par le résultat suivant.

Théorème 5.2. *Soit un système lagrangien dont le Lagrangien L vérifie la propriété de Legendre et soit H le Hamiltonien associé à L .*

- Si $(x_+, 0)$ est solution de $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EL)$ avec $x_+(a) = 0$ et si \tilde{p}_α est le moment associé à $(x_+, 0)$, alors (x_+, \tilde{p}_α) est solution de $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EH)$.
- Si $(0, x_-)$ est solution de $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EL)$ avec $x_-(b) = 0$ et si \tilde{p}_α est le moment associé à $(0, x_-)$, alors (x_-, \tilde{p}_α) est solution de $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EH)$.

Démonstration. Les deux cas sont similaires. Traitons par exemple le second. On a toujours

$$\begin{aligned} \partial_1 H(x, p) &= -\partial_1 L(x, f_L(x, p)), \\ \partial_2 H(x, p) &= f_L(x, p). \end{aligned}$$

De plus, comme $x_-(b) = 0$, (5.21) devient

$$-{}_t\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t) = -{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t) = f_L(x_-(t), \tilde{p}_\alpha(t)),$$

ce qui montre que

$$-{}_t\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t) = \partial_2 H(x_-(t), \tilde{p}_\alpha(t)).$$

Par ailleurs, comme $(0, x_-)$ est solution de $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EL)$,

$$\begin{aligned} \partial_1 L(x_-(t), -{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t) &= -{}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L(x_-(t), -{}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t), \\ &= -{}_t\mathcal{D}_b^\alpha \tilde{p}_\alpha(t). \end{aligned}$$

Par conséquent $\partial_1 H(x_-(t), \tilde{p}_\alpha(t)) = {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \tilde{p}_\alpha(t)$. □

D'après la cohérence des équations d'Euler-Lagrange fractionnaires obtenues dans ce chapitre, on voit ainsi que pour les systèmes hamiltoniens fractionnaires, causalité et moindre action peuvent aussi être conciliées. Les schémas suivants sont donc commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_\alpha^+} & \sim \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(H) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (EH) & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_\alpha^+} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EH) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_\alpha^-} & \sim \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(H) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (EH) & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_\alpha^-} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EH) \end{array}$$

Ils permettent de construire le côté droit de notre toit.

Pour la dynamique dans le sens *passé* \rightarrow *futur* (il en serait de même pour le sens *futur* \rightarrow *passé*), on obtient ainsi le diagramme général suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(L) & \xrightarrow{\quad} & \sim \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(H) \\ & \swarrow & & \swarrow \text{dotted} \\ \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EL) & \text{---} & \tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EH) & \uparrow \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ (EL) & \xrightarrow{\quad} & L & \xrightarrow{\quad} & H \\ \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \\ (EL) & \text{---} & (EH) & \swarrow \text{dotted} & \end{array} \quad (5.22)$$

Ce diagramme et son homologue dans le sens opposé constituent exactement le cube de la figure 1, les différences de notations témoignant du chemin que nous avons du parcourir depuis le chapitre 4.

Les flèches symbolisent les procédures suivantes :

- *gauche* \rightarrow *droite* : transformée de Legendre,
- *arrière* \rightarrow *avant* : principe de moindre action,
- *bas* \rightarrow *haut* : transition classique \rightarrow fractionnaire.

C'est cette dernière qui reste maintenant à explorer ; nous nous y attellerons dans la partie suivante.

Nous présentons maintenant un exemple simple qui illustre le plongement asymétrique et son lien possible avec l'irréversibilité.

Exemple 5.2. Cette illustration n'est autre que l'oscillateur harmonique, que nous avons déjà rencontré au chapitre précédent. Son lagrangien peut s'exprimer sous la forme

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \|x\|^2. \quad (5.23)$$

En prenant $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on retrouve - à une constante multiplicative près qui n'importe pas dans le principe de moindre action - le Lagrangien (3.3). La constante ω est homogène à l'inverse d'un temps, ce que l'on note $[\omega] = 1/T$. Nous y reviendrons. Pour $X = (x_+, x_-) \in C^1([a, b])^2$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_1 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t)) &= -\frac{1}{2} \omega^2 (x_+(t) + x_-(t)), \\ \partial_2 \tilde{L}(X(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t)) &= \frac{1}{2} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - {}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t)). \end{aligned}$$

Les équations (5.18) et (5.19) deviennent alors

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) + \omega^2 x_+(t) &= 0, \\ {}_t\mathcal{D}_b^\alpha {}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t) + \omega^2 x_-(t) &= 0. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^1 {}_a^c\mathcal{D}_t^1 x_+(t) &= \frac{d}{dt}(x'_+(t) - x'_+(a)) = \frac{d^2}{dt^2}x_+(t), \\ {}_t\mathcal{D}_b^1 {}_t^c\mathcal{D}_b^1 x_-(t) &= -\frac{d}{dt}(x'_-(b) - x'_-(t)) = \frac{d^2}{dt^2}x_-(t). \end{aligned}$$

On retrouve bien des équations identiques au cas classique (3.4) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x_+(t) + \omega^2 x_+(t) &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}x_-(t) + \omega^2 x_-(t) &= 0. \end{aligned}$$

La dynamique est réversible au sens de la définition 5.3, ce qui s'accorde avec la notion habituelle de réversibilité (invariance sous la transformation $t \mapsto -t$).

Si maintenant $\alpha = 1/2$,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^{1/2} {}_a^c\mathcal{D}_t^{1/2} x_+(t) &= \left(\frac{d}{dt} {}_a\mathcal{I}_t^{1/2} \right) \left({}_a\mathcal{I}_t^{1/2} x'_+(t) \right), \\ &= \frac{d}{dt} {}_a\mathcal{I}_t^1 x'_+(t), \\ &= \frac{d}{dt}(x_+(t) - x_+(a)), \\ &= x'_+(t). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} {}_t\mathcal{D}_b^{1/2} {}_t^c\mathcal{D}_b^{1/2} x_-(t) &= \left(-\frac{d}{dt} {}_t\mathcal{I}_b^{1/2} \right) \left(-{}_t\mathcal{I}_b^{1/2} x'_-(t) \right), \\ &= \frac{d}{dt} {}_t\mathcal{I}_b^1 x'_-(t), \\ &= \frac{d}{dt}(x_-(b) - x_-(t)), \\ &= -x'_-(t). \end{aligned}$$

Les équations deviennent donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_+(t) + \omega^2 x_+(t) &= 0, \\ -\frac{d}{dt}x_-(t) + \omega^2 x_-(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux équations sont différentes : la dynamique est cette fois irréversible, au sens de la définition 5.3. Là encore, ce résultat s'accorde avec la définition usuelle.

Pour finir, nous allons voir que tout comme notre approche formelle de l'irréversibilité, la structure du plongement asymétrique peut en fait être étendue à d'autres types de dérivées.

5.1.5 Généralisation

Reprenons dans ce paragraphe les opérateurs généraux \mathcal{D}^\pm introduits pour l'approche formelle de l'irréversibilité. On pourrait en fait reprendre tout le cheminement précédent avec \mathcal{D}^\pm pour peu que ces dérivées vérifient quelques propriétés. C'est ce qui a été fait dans [CI08] afin de mettre en valeur les notions d'irréversibilité et de causalité, hors du cadre fractionnaire.

Pour les systèmes lagrangiens il faut faire les trois hypothèses suivantes.

– L'ensemble

$$\mathcal{U} = \left\{ x \in C^0([a, b]) \mid \mathcal{D}^\pm x \in C^0([a, b]) \right\}$$

est non vide. Il remplace $C^1([a, b])$ pour l'espace des trajectoires.

– Il existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{U}$ et $g \in \mathcal{U}_0$,

$$\int_a^b f(t) \cdot \mathcal{D}^\pm g(t) dt = - \int_a^b \mathcal{D}^\mp f(t) \cdot g(t) dt.$$

– L'inclusion

$$C_0^\infty([a, b]) \subset \mathcal{U}_0$$

est vérifiée afin que le lemme fondamental du calcul des variations reste valable (voir par exemple [Hör83, théorème 1.2.4]).

On peut dans ce cas définir le plongement asymétrique pour des trajectoires dédoublées $X = (x_+, x_-)$ régies par la dérivée

$$\mathcal{D}X = (\mathcal{D}^+ x_+, \mathcal{D}^- x_-).$$

Il est encore possible d'obtenir des équations d'Euler-Lagrange causales. Celles-ci sont données par

$$\begin{aligned} \partial_1 L(x_+(t), \mathcal{D}^+ x_+(t), t) - \mathcal{D}^+ \partial_2 L(x_+(t), \mathcal{D}^+ x_+(t), t) &= 0, \\ \partial_1 L(x_-(t), \mathcal{D}^- x_-(t), t) - \mathcal{D}^- \partial_2 L(x_-(t), \mathcal{D}^- x_-(t), t) &= 0. \end{aligned}$$

On peut par exemple considérer comme dérivées \mathcal{D}^\pm les différences finies données, pour $\varepsilon > 0$, par

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^+ f(t) &= \frac{f(t) - f(t - \varepsilon)}{\varepsilon}, \\ d_\varepsilon^- f(t) &= \frac{f(t + \varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

On vérifie que d_ε^+ prend en compte le passé de f et d_ε^- le futur.

On prend $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 = C^0([a, b])$, en posant de plus $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a - \varepsilon, a[\cup]b, b + \varepsilon]$, afin que d_ε^\pm soit bien défini sur $[a, b]$. On a bien $C_0^\infty([a, b]) \subset \mathcal{U}_0$. Dans ce cas, pour tout $f, g \in C^0([a, b])$,

$$\int_a^b f(t) \cdot d_\varepsilon^\pm g(t) dt = - \int_a^b d_\varepsilon^\mp f(t) \cdot g(t) dt.$$

Les équations d'Euler-Lagrange vérifient ainsi

$$\begin{aligned} \partial_1 L(x_+(t), d_\varepsilon^+ x_+(t), t) - d_\varepsilon^+ \partial_2 L(x_+(t), d_\varepsilon^+ x_+(t), t) &= 0, \\ \partial_1 L(x_-(t), d_\varepsilon^- x_-(t), t) - d_\varepsilon^- \partial_2 L(x_-(t), d_\varepsilon^- x_-(t), t) &= 0. \end{aligned}$$

Lorsque l'on observe (ou simule) l'évolution d'un système lagrangien classique (régé par l'opérateur d/dt), on ne mesure son état qu'à certains instants. Les observations restent toujours ponctuelles, jamais continues. La vitesse est calculée à partir de ces points mesurés par une formule du type (5.24). Expérimentalement, on ne peut faire $\varepsilon \rightarrow 0$ pour tenter de retrouver d/dt . D'ailleurs, quand

bien même on supposerait le pas de temps très petit, on s’approcherait de d_+ défini par (4.11) et non de d/dt . La dynamique que l’on observe concrètement n’est donc pas vraiment celle en d/dt (théorique), mais plutôt celle en d_ε^+ . Ce changement de point de vue sur le système illustre bien la notion de plongement.

Maintenant que nous avons réuni l’action et la causalité, il faut encore peaufiner le plongement fractionnaire asymétrique en rendant ses équations dimensionnellement homogènes.

5.2 Homogénéité dimensionnelle

Nous reprenons ici l’article [Ini08]. Commençons d’abord par préciser ce que nous entendons par homogénéité dimensionnelle. En physique, chaque objet (coefficient, variable, dérivée, etc) possède une “unité” U , exprimable en fonction d’unités fondamentales telles que la longueur, notée génériquement L , la masse M ou encore le temps T ; on dit que cette entité est *homogène* à U , ou bien encore que sa *dimension* est égale à U . Par exemple, une vitesse v est homogène à une longueur divisée par un temps : $[v] = LT^{-1}$. La dimension d’une force F est $[F] = ML^2T^{-2}$, la constante ω intervenant dans l’oscillateur harmonique (5.23) est homogène à T^{-1} et la dérivée classique a pour dimension T^{-1} . Nous avons précisé que l’homogénéité était dimensionnelle afin d’éviter toute confusion avec les fonctions homogènes des mathématiques (même si les deux notions ne sont pas sans rapport) ; nous regardons ici des équations *physiques*.

Dans de telles équations, les termes comparés (additionnés) doivent avoir la même dimension. Additionner un mètre et un kilogramme n’aurait en effet aucun sens ! Respecter l’homogénéité dimensionnelle, c’est donc simplement s’assurer que l’on manipule des objets physiques commensurables. On peut y voir un autre principe fondamental de la physique.

Si l’on suppose toujours que les équations fractionnaires ont une réelle signification physique, alors elles doivent elles aussi respecter ce principe. Or il se trouve que ce n’est souvent pas le cas dans la littérature. Pire encore, les équations fractionnaires que nous avons obtenues jusqu’ici à l’aide des plongements fractionnaires ne sont pas non plus homogènes. Notons toutefois que ce problème ne se pose pas toujours ainsi concrètement, puisque lors de modélisations à l’aide de modèles fractionnaires, les constantes peuvent apparaître comme des paramètres à ajuster. Précisons aussi que du point de vue mathématique, ce souci d’homogénéité n’a absolument pas lieu d’être ; c’est uniquement lorsque l’on veut donner un sens physique aux équations que le problème se pose.

Comme on l’a déjà mentionné, une démarche courante pour obtenir des équations fractionnaires consiste à remplacer dans une équation classique la dérivée d/dt , homogène à T^{-1} par une dérivée fractionnaire d^α/dt^α , homogène à $T^{-\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$ (transition $\mathcal{O}_f^g(x) = 0 \rightarrow \mathcal{E}_\alpha(\mathcal{O}_f^g)(x) = 0$). Comme on le voit, cette transformation ne conserve pas l’homogénéité temporelle de l’objet. Cette remarque s’appliquerait bien entendu à l’aspect fractionnaire en espace (voir le chapitre 9), mais nous nous limitons ici à la composante temporelle.

Afin de résoudre ce problème, nous montrons d’abord la nécessité d’introduire une constante de temps supplémentaire. Celle-ci nous permet ensuite de proposer deux méthodes équivalentes qui permettent au plongement fractionnaire de conserver l’homogénéité des équations. Après avoir abordé une troisième option, nous illustrons enfin ces procédures avec l’exemple de l’oscillateur harmonique.

5.2.1 Constante de temps extrinsèque

Comme on l’a vu, le caractère fractionnaire intervient via les opérateurs de dérivation qui sont généralisés aux ordres non-entiers. Si l’on effectue cette substitution dans un des termes d’une équation, il faut que les autres termes soient aussi modifiés pour conserver l’homogénéité. Considérons par

exemple l'équation de l'oscillateur amorti :

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \lambda \frac{d}{dt}x(t) + \omega^2 x(t) = 0. \quad (5.25)$$

Les constantes λ et ω ont pour dimension l'inverse d'un temps : $[\lambda] = [\omega] = T^{-1}$. En remplaçant d/dt par une dérivée fractionnaire d^α/dt^α (sans se préoccuper ici des règles de composition), on obtient une équation du type

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x(t) + \lambda \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

équation manifestement inhomogène : les trois termes ont tous des dimensions temporelles différentes (respectivement $T^{-2\alpha}$, $T^{-1-\alpha}$ et T^{-2} si x n'a pas de dimension temporelle).

Une équation fractionnaire conservant naturellement l'homogénéité serait par exemple :

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x(t) + \lambda^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x(t) + \omega^{2\alpha} x(t) = 0.$$

Les choses se compliquent pour l'équation de diffusion 1.16 :

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) - K \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, t) = 0, \text{ avec } [K] = \frac{L^2}{T}. \quad (5.26)$$

Si l'on remplace directement le terme $\frac{\partial}{\partial t}P(x, t)$ par $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}P(x, t)$, la seule manière de conserver l'homogénéité temporelle est de transformer K en K^α . On obtient alors l'équation

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}P(x, t) - K^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, t) = 0.$$

Cependant, cette équation devient inhomogène en espace : si la dimension spatiale de $P(x, t)$ est L^{n_p} , la dimension spatiale du terme de gauche est L^{n_p} alors qu'à droite elle vaut $L^{n_p+2\alpha-2}$. Pour changer aussi la dimension spatiale, il faut alors remplacer $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ par $\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}$. La seule équation de diffusion fractionnaire homogène possible serait alors :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}P(x, t) - K^\alpha \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}}P(x, t) = 0$$

Au vu des nombreux articles utilisant une équation de diffusion fractionnaire (par exemple [MS04, Zas05]), l'une des plus utilisées dans le calcul fractionnaire, ce cas semble trop restrictif. Qui plus est, d'après [Zas05], cette équation ne permet pas de traiter les phénomènes de transports anormaux dans les systèmes chaotiques (car le coefficient de transport reste classique).

Considérons enfin l'équation de chute libre :

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + g = 0. \quad (5.27)$$

La dimension de l'accélération du champ de pesanteur terrestre g est $[g] = \frac{L}{T^2}$. Si l'on transforme directement $\frac{d^2}{dt^2}$ en $\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}$, il est impossible d'obtenir une équation fractionnaire homogène.

Une première conclusion consisterait à interpréter cette possibilité d'obtenir une équation fractionnaire comme un principe garde-fou ; une équation fractionnaire ne pourrait avoir de sens physique que s'il était possible de la rendre homogène, via des transformations sur les coefficients et/ou sur les opérateurs. Toutefois, il se peut très bien que les constantes apparaissant dans les équations soient construites elles-mêmes à partir d'autres constantes. Par exemple, l'accélération du champ de pesanteur terrestre est en fait définie par $g = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2}$, où \mathcal{G} est la constante universelle de gravitation, M_T

et R_T la masse et le rayon de la Terre. L'équation (5.27) peut alors être transformée en une équation fractionnaire homogène :

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x(t) + g^\alpha R_T^{1-\alpha} = 0.$$

L'équation initiale à elle seule ne permet donc pas de savoir s'il est possible ou non de la transformer en une équation fractionnaire homogène. Cette transformation est par ailleurs équivoque. Par exemple, l'équation (5.25) peut aussi se transformer de manière homogène en :

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x(t) + \lambda^\alpha \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}x(t) + \omega^2 \lambda^{2\alpha-2}x(t) = 0,$$

voire en :

$$\frac{d^{2\alpha}}{dt^{2\alpha}}x(t) + \lambda^{2\alpha-\beta} \frac{d^\beta}{dt^\beta}x(t) + \omega^{2\alpha}x(t) = 0, \quad 0 < \beta < 1. \quad (5.28)$$

Face à ce problème de sous-détermination, il convient de contraindre les équations afin d'obtenir une équation fractionnaire unique. Comme nous l'avons déjà dit, dans le cas des systèmes lagrangiens, le plongement fractionnaire joue ce rôle. Il implique notamment que $\beta \in \alpha\mathbb{N}$ dans l'équation (5.28). Mais le plus important est qu'il ne modifie pas les constantes apparaissant dans les équations ; une fois le lagrangien fixé, la structure est complètement déterminée et seul l'opérateur d/dt est modifié en un opérateur fractionnaire d^α/dt^α . Cette transition ne doit donc pas modifier l'homogénéité de l'équation initiale.

Deux méthodes sont envisageables. La première consiste à adimensionner le système. Les dérivées classiques et fractionnaires deviennent toutes deux sans dimension et l'homogénéité des équations est alors préservée. La seconde consiste à choisir un opérateur fractionnaire dont la dimension est identique à la dérivée classique, autrement dit T^{-1} . Toutes deux requièrent l'introduction d'une constante de temps τ . Les exemples ci-dessus montrent que celle-ci n'est pas forcément déterminée par l'équation ; elle peut être masquée comme dans l'équation (5.27), ou plusieurs choix peuvent être possibles comme dans l'équation (5.25). Nous sommes donc conduits à postuler l'existence d'une constante de temps, que l'on notera τ , définie *a priori*, c'est-à-dire indépendamment de l'équation classique. Autrement dit, τ est une *constante de temps extrinsèque* à l'équation initiale. L'introduction d'une telle constante va nous permettre de résoudre ce problème d'homogénéité dimensionnelle tout en restant dans le cadre du plongement fractionnaire.

5.2.2 Plongements fractionnaires homogènes

Après avoir présenté ces deux méthodes d'homogénéisation, nous montrons qu'elles sont en fait équivalentes. Nous mentionnons ensuite une troisième voie, moins pertinente à notre sens, qui reprend la notion de "constante fractionnaire" parfois trouvée dans la littérature.

On considère un système lagrangien, de Lagrangien $L(x, v, t)$ et évoluant dans \mathbb{R}^N pendant l'intervalle temporel $[a, b]$. Soit τ la constante de temps introduite précédemment. Les dimensions temporelles des variables x , v et t sont respectivement T^0 , T^{-1} et T .

Afin de préciser la dimension de la dérivée utilisée pour le plongement fractionnaire asymétrique, on le note dans cette partie $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\cdot, d^\alpha/dt^\alpha)$ à la place de $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\cdot)$.

Par exemple, le plongement fractionnaire asymétrique du Lagrangien L vérifie

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha(X)(t) &= \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(L, d^\alpha/dt^\alpha)(X)(t), \\ &= L(x_+(t) + x_-(t), {}^c_a\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - {}^c_t\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t). \end{aligned}$$

Adimensionnement temporel

L'adimensionnement est une méthode très utilisée en physique, notamment en mécanique des fluides, où elle permet de simplifier les équations et d'exhiber les paramètres pertinents. La constante de temps τ va nous permettre de supprimer la dimension temporelle, seule à être problématique.

On note $\bar{a} = a/\tau$ et $\bar{b} = b/\tau$. Afin d'adimensionner temporellement les variables, on doit considérer un nouveau lagrangien.

Définition 5.8. *Le Lagrangien adimensionné temporellement, noté L^0 , est défini par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall v \in \mathbb{R}^N, \forall u \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad L^0(x, y, u) = L\left(x, \frac{y}{\tau}, \tau u\right).$$

Par construction de L , la dimension temporelle de y/τ est T^{-1} , donc celle de y est T^0 . De même, u est sans dimension. Ainsi, aucune des variables de L^0 ne possède de dimension temporelle, ce qui justifie la dénomination de ce Lagrangien.

Comme la variable d'évolution temporelle u est adimensionnée, la dérivation par rapport à ce nouveau temps est donc aussi sans dimension. Par conséquent, le passage de d/du à d^α/du^α ne pose plus de problème d'homogénéité ; ces deux opérateurs sont sans dimension.

Le plongement fractionnaire asymétrique de L^0 , noté \tilde{L}_α^0 vérifie ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha^0(X)(u) &= \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(L^0, d^\alpha/du^\alpha)(X)(u), \\ &= L^0(x_+(u) + x_-(u), {}^c_a\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u) - {}^c_u\mathcal{D}_b^\alpha x_-(u), u). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\tilde{L}_\alpha^0(X)(u) = L\left(x_+(u) + x_-(u), \tau^{-1} {}^c_a\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u) - \tau^{-1} {}^c_u\mathcal{D}_b^\alpha x_-(u), \tau u\right).$$

L'action associée est alors définie sur $[\bar{a}, \bar{b}]$:

$$\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha^0)(X) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} L^0\left(x_+(u) + x_-(u), {}^c_a\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u) - {}^c_u\mathcal{D}_b^\alpha x_-(u), u\right) du.$$

Les équations d'Euler-Lagrange causales ($\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^+(EL)$ et $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha^-(EL)$) sont alors données par

$$\partial_1 L^0\left(x_+(u), {}^c_a\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u), u\right) - {}_a\mathcal{D}_u^\alpha \partial_2 L^0\left(x_+(u), {}^c_a\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u), u\right) = 0, \quad (5.29)$$

$$\partial_1 L^0\left(x_-(u), -{}^c_u\mathcal{D}_b^\alpha x_-(u), u\right) + {}_u\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L^0\left(x_-(u), -{}^c_u\mathcal{D}_b^\alpha x_-(u), u\right) = 0, \quad (5.30)$$

pour tout $u \in]\bar{a}, \bar{b}[$.

Les solutions x_+ et x_- de ces équations dépendent de la variable adimensionnée u . Comme ${}_a\mathcal{D}_u^\alpha$ et ${}_u\mathcal{D}_b^\alpha$ sont sans dimension, les équations (5.29) et (5.30) sont clairement homogènes.

Cette méthode peut être résumée par la transformation suivante :

$$F_1 : \begin{cases} t & \longrightarrow u = \frac{t}{\tau}, \\ \frac{d}{du} & \longrightarrow \frac{d^\alpha}{du^\alpha}. \end{cases}$$

Une telle procédure permet de ne pas se soucier du caractère fractionnaire de l'opérateur de dérivation. Elle masque cependant la dynamique réelle, basée sur un temps réel, dimensionné. Pour retrouver celle-ci, nous allons redimensionner les équations (5.29) et (5.30).

Dérivation fractionnaire homogène

La constante de temps τ peut aussi être utilisée pour construire un opérateur dont la dimension temporelle reste T^{-1} :

$$\boxed{\tau^{\alpha-1} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}}. \quad (5.31)$$

Celui-ci va donc préserver l'homogénéité du plongement. Contrairement au cas précédent, nous n'avons pas besoin de définir un nouveau Lagrangien et la dérivée $\tau^{\alpha-1} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ agit sur des fonctions dépendant du temps réel t .

Le plongement fractionnaire asymétrique de L , noté \tilde{L}_α^τ , devient maintenant

$$\tilde{L}_\alpha^\tau(X)(t) = \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(L, \tau^{\alpha-1} d^\alpha/dt^\alpha)(X)(t),$$

soit

$$\boxed{\tilde{L}_\alpha^\tau(X)(t) = L\left(x_+(t) + x_-(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t\right)}.$$

L'action vérifie

$$\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha^\tau)(X) = \int_a^b L\left(x_+(t) + x_-(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) - \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t\right) dt,$$

et les équations d'Euler-Lagrange causales s'écrivent de la manière suivante :

$$\partial_1 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right) - \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right) = 0, \quad (5.32)$$

$$\partial_1 L\left(x_-(t), -\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t\right) + \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L\left(x_-(t), -\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t\right) = 0, \quad (5.33)$$

pour tout $t \in]a, b[$.

On vérifie bien que ces équations sont homogènes. Qui plus est, elles dépendent du vrai temps t tout comme leurs solutions x_\pm , et tous les objets fractionnaires (variables, dérivées, plongement du Lagrangien, équations) conservent les mêmes dimensions que dans le cas classique. De ce point de vue cette seconde méthode semble plus proche de la physique que la première.

La méthode exposée ici peut être cette fois résumée à l'aide de la transformation suivante :

$$F_2 : \frac{d}{dt} \longrightarrow \tau^{\alpha-1} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}.$$

Équivalence entre les deux méthodes

Fort heureusement, nous n'aurons pas réellement à choisir entre ces deux approches puisque l'on va voir qu'elles sont en fait équivalentes. Cela est dû au fait que les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo vérifient la propriété suivante.

Lemme 5.6. Soit $f \in C^1([a, b])$. On note $\bar{f} : u \in [\bar{a}, \bar{b}] \mapsto f(\tau u)$. Alors

$$\tau^\alpha \frac{d^\alpha}{dv^\alpha} f(v)|_{v=t} = \frac{d^\alpha}{du^\alpha} \bar{f}(u)|_{u=t/\tau},$$

où d^α/dt^α désigne ${}^c\mathcal{D}_t^\alpha$, ${}^c\mathcal{D}_b^\alpha$, ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ ou ${}_t\mathcal{D}_b^\alpha$.

Démonstration. Montrons-le par exemple pour ${}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha$, les autres cas étant semblables.

$$\begin{aligned}
{}_a^c\mathcal{D}_u^\alpha \bar{f}(u) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\bar{a}}^u (u-v)^{-\alpha} \bar{f}'(v) dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\bar{a}\tau}^{u\tau} \left(u - \frac{s}{\tau}\right)^{-\alpha} \bar{f}'\left(\frac{s}{\tau}\right) \frac{ds}{\tau}, \quad s = v\tau \\
&= \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{u\tau} (u\tau - s)^{-\alpha} (\tau f'(s)) ds \\
&= \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t = u\tau \\
&= \tau^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t).
\end{aligned}$$

□

On obtient alors le lien suivant.

Théorème 5.3. *Les deux méthodes sont équivalentes :*

La fonction $(x_+, x_-) : t \in [a, b] \mapsto (x_+(t), x_-(t))$ est solution de (5.32)-(5.33) si et seulement si $(\bar{x}_+, \bar{x}_-) : u \in [\bar{a}, \bar{b}] \mapsto (x_+(\tau u), x_-(\tau u))$ est solution de (5.29)-(5.30).

Démonstration. On traite le cas x_+ , celui pour x_- étant identique. Les dérivées partielles de L et L^0 vérifient

$$\begin{aligned}
\partial_1 L^0(x, y, u) &= \partial_1 L\left(x, \frac{y}{\tau}, u\tau\right), \\
\partial_2 L^0(x, y, u) &= \frac{1}{\tau} \partial_2 L\left(x, \frac{y}{\tau}, u\tau\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme 5.6, si $t = \tau u$,

$$\begin{aligned}
\partial_1 L^0\left(\bar{x}_+(u), {}_a^c\mathcal{D}_u^\alpha \bar{x}_+(u), u\right) &= \partial_1 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right), \\
\partial_2 L^0\left(\bar{x}_+(u), {}_a^c\mathcal{D}_u^\alpha \bar{x}_+(u), u\right) &= \frac{1}{\tau} \partial_2 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right).
\end{aligned} \tag{5.34}$$

On déduit de (5.34) que

$${}_a^c\mathcal{D}_u^\alpha \partial_2 L^0\left(\bar{x}_+(u), {}_a^c\mathcal{D}_u^\alpha \bar{x}_+(u), u\right) = \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right),$$

ce qui permet d'achever la preuve. □

Par conséquent, une solution $u \in [\bar{a}, \bar{b}] \mapsto (\bar{x}_+(u), \bar{x}_-(u))$ de (5.29)-(5.30) peut être redimensionnée en $t \in [a, b] \mapsto (\bar{x}_+(t/\tau), \bar{x}_-(t/\tau))$, qui sera solution de (5.32)-(5.33).

Constantes fractionnaires

Parmi les travaux sur le calcul fractionnaire que nous avons pu consultés, certains proposent de conserver l'homogénéité des équations fractionnaires en introduisant des constantes fractionnaires (voir par exemple [MK00]). Nous allons maintenant voir qu'il est possible de définir un plongement fractionnaire homogène à l'aide d'un opérateur homogène à $T^{-\alpha}$, à condition de modifier le Lagrangien initial.

Afin d'exhiber les constantes intervenant dans les équations, nous introduisons une hypothèse supplémentaire ; on suppose que le lagrangien L initial s'écrit sous la forme

$$L(x, v, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j f_j(x, t) v^j \tag{5.35}$$

avec a_j temporellement homogène à T^{j+n_L} , où n_L est la dimension temporelle de L (on a souvent $n_L = -2$). Les fonctions f_j n'ont donc pas de dimension temporelle.

Le plongement fractionnaire asymétrique $\tilde{\mathcal{E}}_\alpha(\cdot, \tau^{\alpha-1} d^\alpha/dt^\alpha)$ de L , appliqué en $(x_+, 0)$ pour simplifier, conduit à la relation

$$\begin{aligned} L(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j f_j(x_+(t), t) (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t))^j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j f_j(x_+(t), t) \tau^{j(\alpha-1)} ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t))^j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{a}_j f_j(x_+(t), t) ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t))^j, \quad \text{avec } \hat{a}_j = a_j \tau^{j(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

La dimension de \hat{a}_j est $[\hat{a}_j] = T^{j\alpha+n_L}$. Du fait de ces dimensions non entières, ces coefficients peuvent être considérés comme *constantes fractionnaires*. On peut ainsi former un nouveau Lagrangien.

Définition 5.9. *Le Lagrangien fractionnaire, noté L^f , est défini par*

$$L^f(x, v, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{a}_j f_j(x, t) v^j, \quad \text{avec } \hat{a}_j = a_j \tau^{j(\alpha-1)}.$$

Le plongement fractionnaire asymétrique de L^f , noté \tilde{L}_α^f vérifie ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha^f(X)(t) &= \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(L^f, d^\alpha/dt^\alpha)(X)(t), \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_\alpha(L, \tau^{\alpha-1} d^\alpha/dt^\alpha)(X)(t). \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\tilde{L}_\alpha^f \equiv \tilde{L}_\alpha^\tau.} \quad (5.36)$$

Les équations d'Euler-Lagrange causales sont dans ce cas

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{a}_j \partial_1 f_j(x_+(t), t) ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t))^j - j \hat{a}_j {}^c\mathcal{D}_t^\alpha \left[f_j(x_+(t), t) ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t))^{j-1} \right] = 0, \quad (5.37)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{a}_j \partial_1 f_j(x_-(t), t) ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_-(t))^j + j \hat{a}_j {}^c\mathcal{D}_t^\alpha \left[f_j(x_-(t), t) ({}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_-(t))^{j-1} \right] = 0, \quad (5.38)$$

pour tout $t \in]a, b[$.

On vérifie que ces équations sont homogènes ; l'inhomogénéité de d^α/dt^α est contrebalancée par les constantes fractionnaires \hat{a}_j . D'après (5.36), les équations (5.37)-(5.38) sont équivalentes à (5.32)-(5.33). On en conclut que ces trois méthodes sont équivalentes.

Cette troisième méthode peut être résumée à l'aide de la transformation suivante :

$$F_3 : \begin{cases} a_j & \longrightarrow \hat{a}_j = a_j \tau^{j(\alpha-1)}, \\ \frac{d}{dt} & \longrightarrow \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}. \end{cases}$$

Avec cette procédure, on retrouve notamment la constante K_α utilisée dans [MK00]. Toutefois, le problème d'homogénéité est en fait ici seulement déplacé : ce sont maintenant L^f et l'équation (EL) classique associée qui deviennent inhomogènes. De plus, la pertinence physique de L^f semble discutable et ce Lagrangien peut apparaître comme une construction ad hoc pour obtenir des équations fractionnaires homogènes. Cette dernière méthode ne s'accorde donc pas avec l'idée de plongement ; celle-ci suppose que le Lagrangien soit indépendant de la dynamique et que seul le choix de l'opérateur d'évolution temporelle (c'est-à-dire la dérivée temporelle) conditionne la dynamique.

Illustrons pour finir ces trois procédures avec un exemple simple.

5.2.3 Exemple de l'oscillateur harmonique

Nous avons déjà rencontré à plusieurs reprises ce système. C'est un cas particulier de système lagrangien naturel (de Lagrangien donné par (3.5)). Nous choisissons ici de partir de la forme (3.3) :

$$L(x, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - \frac{1}{2}k\|x\|^2, \quad (5.39)$$

où m est la masse du système, k la constante de raideur, $\frac{1}{2}m\|v\|^2$ est l'énergie cinétique et $\frac{1}{2}k\|x\|^2$ l'énergie potentielle. Les dimensions temporelles de x , v , m et k sont respectivement T^0 , T^{-1} , T^0 et T^{-2} . On se place sur l'intervalle temporel $[a, b]$. On introduit aussi la constante de temps extrinsèque τ , qui n'est *a priori* pas égale à la période de l'oscillateur $\omega^{-1} = \sqrt{m/k}$. Par souci de clarté on se limite à la dynamique dans le sens *passé* \rightarrow *futur*.

Adimensionnement temporel

Le nouveau Lagrangien L^0 s'écrit

$$L^0(x, y) = L\left(x, \frac{y}{\tau}\right) = \frac{1}{2\tau^2}my^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

et son plongement, appliqué en $x_+ \in C^2([\bar{a}, \bar{b}])$, vérifie

$$\forall u \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad \tilde{L}_\alpha^0(x_+, 0)(u) = \frac{1}{2\tau^2}m\|{}^c\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u)\|^2 - \frac{1}{2}k\|x_+(u)\|^2.$$

L'action est dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha^0)(x_+, 0) &= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} L^0(x_+(u), {}^c\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u)) du \\ &= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \left(\frac{1}{2\tau^2}m\|{}^c\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u)\|^2 - \frac{1}{2}k\|x_+(u)\|^2 \right) du, \end{aligned}$$

et l'équation d'Euler-Lagrange causale est donnée par

$$\forall u \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad \frac{m}{\tau^2} {}^a\mathcal{D}_u^\alpha {}^c\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u) + kx_+(u) = 0,$$

soit

$$\forall u \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad {}^a\mathcal{D}_u^\alpha {}^c\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u) + (\omega\tau)^2 x_+(u) = 0. \quad (5.40)$$

Aucun terme ne possède de dimension temporelle.

Par exemple, si $0 < \alpha \leq 1/2$, ${}^a\mathcal{D}_u^\alpha {}^c\mathcal{D}_u^\alpha x_+(u) = {}^c\mathcal{D}_u^{2\alpha} x_+(u)$, et la solution de (5.40), notée x^0 , est donnée par

$$\forall u \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad x^0(u) = x^0(\bar{a})E_{2\alpha}(-(\omega\tau)^2(u - \bar{a})^{2\alpha}),$$

où, pour $\lambda > 0$, E_λ est la fonction de Mittag-Leffler définie sur \mathbb{C} par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad E_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\lambda k + 1)}. \quad (5.41)$$

Voir par exemple [GM97] pour plus de détails.

La solution redimensionnée, notée x^d , est par conséquent

$$\forall t \in [a, b], \quad x^d(t) = x^0\left(\frac{t}{\tau}\right) = x^d(a)E_{2\alpha}\left(-\omega^2\tau^{2(1-\alpha)}(t - a)^{2\alpha}\right).$$

On vérifie que l'argument de la fonction de Mittag-Leffler est sans dimension.

Dérivation fractionnaire homogène

Le plongement \tilde{L}_α^τ de L , donné par

$$\tilde{L}_\alpha^\tau(x_+, 0)(t) = \frac{1}{2}m\tau^{2(\alpha-1)}\|{}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t)\|^2 - k\|x(t)\|^2,$$

fournit l'équation causale

$$\forall t \in]a, b], \quad m\tau^{2(\alpha-1)} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) + kx_+(t) = 0, \quad (5.42)$$

soit, si $0 < \alpha \leq 1/2$,

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^c\mathcal{D}_t^{2\alpha} x_+(t) + \omega^2\tau^{2(1-\alpha)} x_+(t) = 0.$$

La dimension temporelle de chacun des membres de l'addition est $T^{-2\alpha}$.

La solution de cette équation, notée x^τ , est

$$x^\tau(t) = x^\tau(a)E_{2\alpha}\left(-\omega^2\tau^{2(1-\alpha)}(t-a)^{2\alpha}\right).$$

On vérifie que $x^\tau \equiv x^0$.

Constantes fractionnaires

Le Lagrangien (5.39) peut être écrit comme (5.35), avec

- $a_0 = k$, $f_0(x, t) = \frac{1}{2}x^2$,
- $a_1 = 0$,
- $a_2 = m$, $f_2(x, t) = \frac{1}{2}$,
- $a_i = 0$ pour $i \geq 3$.

Les constantes fractionnaires vérifient

- $\hat{a}_0 = k$,
- $\hat{a}_2 = a_2\tau^{2(\alpha-1)} = m\tau^{2(\alpha-1)}$.

Le Lagrangien associé L^f est

$$L^f(x, v) = \frac{1}{2}m\tau^{2(\alpha-1)}\|v\|^2 - \frac{1}{2}k\|x\|^2,$$

et n'est pas homogène.

On obtient enfin l'équation d'Euler-Lagrange causale

$$\forall t \in [a, b], \quad m\tau^{2(\alpha-1)} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) + kx_+(t) = 0,$$

qui est similaire à (5.42).

Afin d'homogénéiser les équations fractionnaires, nous venons de voir qu'il fallait introduire une nouvelle constante de temps, définie hors de l'équation classique (tout comme d'ailleurs le paramètre α). Contrairement à l'adimensionnement des équations classiques, la solution de l'équation dépend de cette constante (voir l'exemple de l'oscillateur harmonique). Elle ne constitue donc pas un simple intermédiaire de calcul mais conditionne la dynamique. Sa signification physique est aussi importante que les constantes intervenant dans l'équation. Une équation fractionnaire sera donc caractérisée par deux paramètres : α et τ .

Pour comprendre la signification de ce temps caractéristique τ , peut-être faut-il regarder dans quel cadre sont utilisées les dérivées fractionnaires. Dans [Hil95a] et [Zas05] l'aspect fractionnaire de la dynamique apparaît sur les temps longs. Au niveau microscopique, la dynamique est classique et évolue selon un temps microscopique. Mais lorsque l'on passe au niveau macroscopique, régi par un nouveau temps, macroscopique, l'aspect fractionnaire intervient (induisant notamment des dissipations). Dans

[Sta06] aussi, le caractère fractionnaire repose sur la transition entre deux variables temporelles distinctes. C'est peut-être dans la relation entre ces deux échelles de temps que la constante de temps τ pourrait intervenir. Dans la partie suivante nous allons nous intéresser à la transition *classique* \rightarrow *fractionnaire*, à travers deux approches différentes. Pour chacune d'elle, cette constante de temps apparaîtra (sans toutefois pouvoir être déterminée explicitement).

Finalement, il semble que le plongement fractionnaire asymétrique effectué avec des dérivées homogènes soit la procédure optimale pour obtenir des équations fractionnaires. Les équations d'Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \partial_1 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right) - \tau^{\alpha-1} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L\left(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), t\right) &= 0, \\ \partial_1 L\left(x_-(t), -\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t\right) + \tau^{\alpha-1} {}_t\mathcal{D}_b^\alpha \partial_2 L\left(x_-(t), -\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha x_-(t), t\right) &= 0, \end{aligned}$$

constituent ainsi non seulement une représentation asymétrique des systèmes lagrangiens fractionnaires, mais elles respectent de plus les principes de moindre action, de causalité et d'homogénéité dimensionnelle.

Troisième partie

Modèles fractionnaires pour les systèmes hamiltoniens chaotiques

Chapitre 6

Description de systèmes hamiltoniens chaotiques

L'idée directrice de la partie II peut être résumée ainsi : en supposant que la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$ se produise dans un système lagrangien ou hamiltonien, comment les équations se transforment-elles ? Dans cette troisième partie, on va au contraire tenter de voir comment cette transition peut s'effectuer. Plus précisément, la motivation initiale de cette thèse était d'étudier ce passage dans les systèmes hamiltoniens chaotiques, en se basant sur les travaux de Zaslavsky. Comme on l'a déjà mentionné, celui-ci propose dans son livre *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics* [Zas05] de modéliser les phénomènes de transport anormal dans de tels systèmes à l'aide d'équations fractionnaires. Dans ce chapitre, nous allons donc présenter certains résultats de [Zas05] qui nous ont guidé pour notre recherche. Effectivement, ils nous serviront ensuite pour explorer deux pistes possibles pour la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$, mais plus proches de la dynamique que Zaslavsky. Chacune d'elle fera l'objet d'un chapitre (chapitres 7 et 8). Précisons toutefois que dans les deux cas, nous n'avons pu relier directement ces modèles au cadre fixé par le plongement fractionnaire asymétrique. Si les parties II et III poursuivent un objectif commun – proposer une nouvelle modélisation de systèmes hamiltoniens chaotiques – elles restent ainsi à l'heure actuelle encore déconnectées.

Ce chapitre n'est pas une présentation générale des systèmes hamiltoniens chaotiques, il a juste pour but d'introduire quelques outils et résultats. Ces derniers étant souvent semi-empiriques, nous les voyons plutôt comme des pistes de recherche. Pour une analyse détaillée de ces systèmes, on pourra consulter les ouvrages généraux [Arn89] et [Wig03], ainsi que [Mor02], orienté quant à lui vers la mécanique céleste.

La physique des systèmes chaotiques, dite aussi physique non-linéaire, s'est développée à partir des années 1970, grâce notamment à l'informatique. Effectivement, les simulations numériques ont permis de découvrir certaines propriétés de ces systèmes très complexes. Les systèmes chaotiques sont en fait très présents en physique, par exemple dans la turbulence hydrodynamique, la cinétique chimique, l'étude de circuits électriques ainsi que le mouvement des astres. C'est d'ailleurs avec la mécanique céleste que la théorie du chaos trouve son origine, plus précisément avec le "problème des trois corps", qui consiste à étudier le mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. Ce problème conduit Henri Poincaré, à la fin du XIX^e siècle, à concevoir une approche plus globale des systèmes dynamiques ; le but n'est plus de trouver des solutions exactes, mais d'étudier leur stabilité. La question sous-jacente est alors de savoir si le système solaire est "stable" sur le long terme. En 1989, Jacques Laskar [Las89], à l'aide de simulations numériques, montre que le système solaire est en fait chaotique.

Les systèmes chaotiques se caractérisent par leur *sensibilité aux conditions initiales* ; au contraire des systèmes "réguliers", un changement infime dans les conditions initiales peut changer complètement le comportement du système, qui plus est à une vitesse exponentielle. Une illustration de ce

comportement est donnée en figure 6.1 ; si on note $d(\tau) = \|z_2(\tau) - z_1(\tau)\|$, on aura $d(0) \sim d(t)$ pour un système régulier, alors que pour un système chaotique, la relation sera plutôt

$$d(t) \sim d(0)e^{\lambda t}, \quad \text{avec } \lambda > 0. \quad (6.1)$$

L'exposant λ , appelé exposant de Lyapunov, caractérise (localement) cette sensibilité et constitue un outil numérique pour détecter le chaos lors de simulations (voir par exemple [Mor02, chap. 5] pour plus de détails).

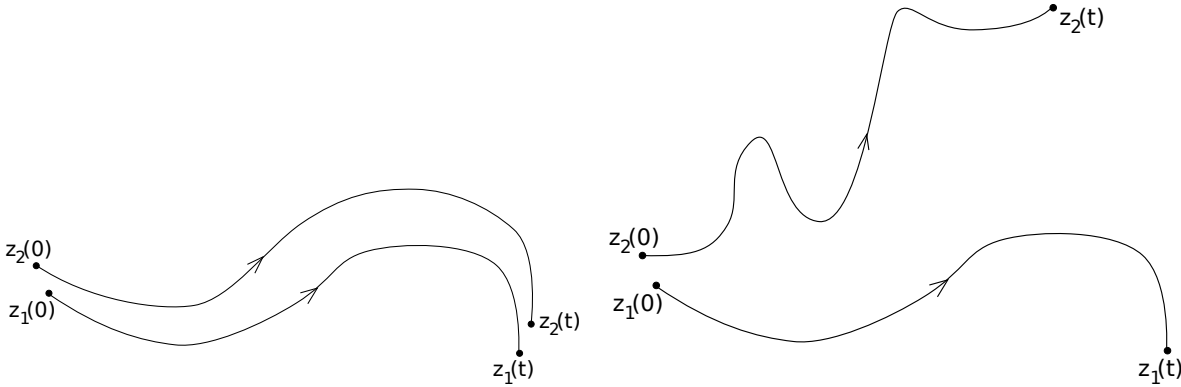


FIG. 6.1 – Sensibilité aux conditions initiales : système “régulier” (g.) et système “chaotique” (d.).

Il n'existe toutefois pas de définition rigoureuse du chaos. En mathématiques plusieurs définitions non équivalentes coexistent, alors qu'en physique un système sera souvent qualifié de chaotique à partir de critères essentiellement graphiques issus de simulations. Il existe en fait un véritable fossé entre les mathématiques et la physique dans ce domaine. Comme on l'a dit, les systèmes chaotiques sont très étudiés en physique et les “expériences numériques” jouent un rôle majeur dans l'analyse de ces systèmes. Si de nombreuses caractéristiques sont ainsi exhibées, très peu sont encore comprises du point de vue mathématique. La théorie ergodique fournit des résultats très puissants sur les systèmes “complètement” chaotiques, mais de tels systèmes ne se rencontrent malheureusement pas en physique. Effectivement, les systèmes concrets sont souvent “partiellement” chaotiques, avec des zones stables et d'autres complètement instables. Dans certains cas, la théorie KAM peut fournir des résultats très puissants. Elle ne donne toutefois des informations que sur une partie de la dynamique. Aucun résultat rigoureux n'existe quant au comportement global de ces systèmes et de nombreuses questions restent ouvertes à l'heure actuelle.

Zaslavsky cherche justement à comprendre cette dynamique globale, en s'appuyant lui aussi sur des expériences numériques. Il montre que certaines zones, qu'il appelle *pièges dynamiques*, ont une influence globale sur la dynamique et sont responsables de phénomènes de diffusion anormale. Ceux-ci, décrits de manière probabiliste, peuvent faire intervenir des dérivées fractionnaires dont les exposants sont reliés à la structure de ces pièges.

Après avoir donné quelques outils généraux du formalisme hamiltonien, nous présenterons quelques caractéristiques des systèmes chaotiques, dont les pièges dynamiques et finirons avec la description probabiliste de Zaslavsky. N'ayant pas réalisé de simulations pendant notre travail (à part la figure 6.7), nous nous contenterons ici de donner quelques schémas simples inspirés des figures de [Zas05].

6.1 Outils pour la dynamique hamiltonienne

Soit I un intervalle de $\bar{\mathbb{R}}$ (si I est un intervalle non borné, les résultats du chapitre 3 s'étendent sans problème). On considère un système hamiltonien de Hamiltonien H et repéré par ses coordonnées

$(x(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$, avec $t \in I$. Celles-ci sont régies par les équations (EH) que nous redonnons ici :

$$(EH) : \quad \forall t \in I, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= \partial_2 H(x(t), p(t)), \\ \frac{d}{dt}p(t) &= -\partial_1 H(x(t), p(t)). \end{cases}$$

Définition 6.1. *L'espace des phases, noté Γ , est l'ensemble des valeurs prises par toutes les solutions $(x(t), p(t))$ de (EH) . En particulier $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2N}$.*

On suppose dorénavant que Γ est mesurable. Les équations (EH) forment un système d'équations différentielles ordinaires, les théorèmes classiques de type Cauchy-Lipschitz sur l'existence et l'unicité des solutions s'appliquent donc. En particulier, à t_0 fixé, il passe au plus une trajectoire en $(x_0, p_0) \in \Gamma$. La définition suivante a donc un sens.

Définition 6.2. *Soit $t \in I$. Le flot de H à l'instant t , noté ϕ^t , est défini par*

$$\begin{aligned} \phi^t : \quad \Gamma &\longrightarrow \Gamma \\ (x_0, p_0) &\longmapsto (x(t), p(t)), \end{aligned}$$

où $(x(t), p(t))$ est la solution de (EH) issue de (x_0, p_0) en $t = 0$.

En particulier, $t \mapsto \phi^t(x_0, p_0)$ est la solution de (EH) ayant pour condition initiale (x_0, p_0) . Notons que c'est une application continue. Comme on va le voir, le flot permet de décrire le comportement global d'un système hamiltonien, en considérant l'ensemble des trajectoires et non plus une seule.

Notons μ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{2N} . Intuitivement, si A est un ensemble (mesurable) de \mathbb{R}^{2N} , $\mu(A)$ représente le volume de A .

Théorème 6.1 (Liouville). *Le flot d'un système hamiltonien préserve le volume : pour tout ensemble $A \subset \Gamma$ mesurable,*

$$\boxed{\mu(\phi^t(A)) = \mu(A).}$$

Démonstration. Voir par exemple [Arn89, p.69]. □

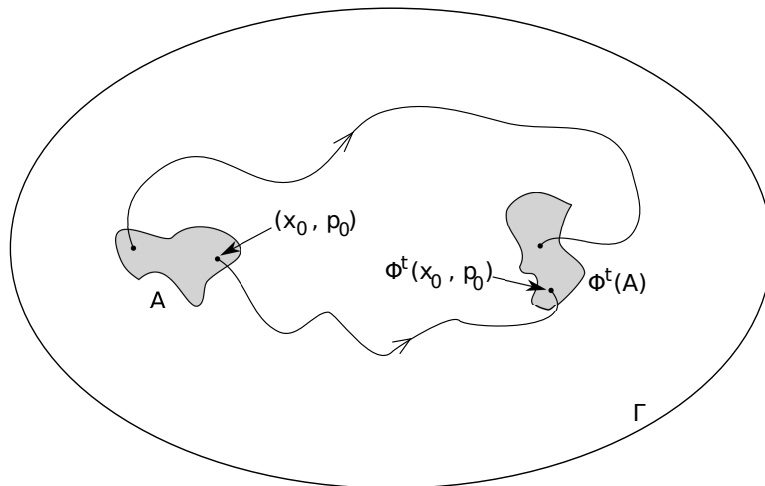


FIG. 6.2 – Conservation du flot.

La figure 6.2 illustre ce résultat important. Cette propriété permet d'introduire le temps de premier retour de Poincaré, outil central de cette partie III.

Théorème 6.2 (Poincaré). *On suppose que Γ est compact. Soit $A \subset \Gamma$ tel que $\mu(A) > 0$. Alors pour presque tout $z \in A$, il existe $k(z) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\phi^{k(z)}z \in A$.*

Démonstration. Voir [Arn89, p.71]. □

Autrement dit, pour presque tout point z_0 d'une trajectoire, on peut trouver un point z_1 de la même trajectoire aussi près que l'on veut de z_0 .

Zaslavsky utilise une version continue de ce théorème sans entrer dans les détails. Comme nous aurons besoin d'un résultat analogue au chapitre 8, nous tentons de préciser ici sa démarche. Les définitions suivantes sont tirées de [Ini10]. Considérons un ensemble mesurable $G \subset \Gamma$ compact tel que $\mu(G) > 0$. Notons G_{int} l'ensemble des trajectoires qui restent dans G à partir d'un certain temps :

$$G_{int} = \{z \in G \mid \exists t_0 > 0, \forall t > t_0, \phi^t z \in G\}.$$

L'ensemble G_{int} contient essentiellement les trajectoires périodiques et les points fixes.

Notons $G_0 = G \setminus G_{int}$; c'est plutôt cet ensemble qui nous intéressera par la suite (il semble raisonnable de penser que si G devient assez petit, G_{int} deviendra négligeable). Introduisons ensuite le temps caractéristique suivant.

Définition 6.3. *Soit $z \in G_0$. Le temps de premier retour (ou temps de récurrence) de z , noté $\tau_{rec}(z; G)$, est défini par*

$$\tau_{rec}(z; G) = \inf \{t > 0 \mid \phi^t z \in G, \exists t_0 \in]0, t[, \phi^{t_0} z \notin G\}.$$

A priori, $\tau_{rec}(z; G) \in]0, +\infty]$. Notons G_{ext} l'ensemble des points tels que $\tau_{rec}(z; G) = +\infty$. Autrement dit,

$$G_{ext} = \{z \in G \mid \exists t_0 > 0, \forall t > t_0, \phi^t z \notin G\}.$$

On peut alors définir l'ensemble G_{rec} des conditions initiales des trajectoires qui quittent G pour ensuite y revenir (temporairement). Il vérifie :

$$G_{rec} = G_0 \setminus G_{ext}.$$

Les ensembles G_{rec} , G_{ext} et G_{int} forment ainsi une partition de G . Le théorème 6.2 se traduit ici de la manière suivante.

Corollaire 6.1. *Si Γ est compact, alors G_{ext} est négligeable : $\mu(G_{ext}) = 0$.*

Ainsi, presque toutes les trajectoires qui quittent G y repasse au bout d'un certain temps. Faisons la remarque suivante.

Lemme 6.1. *Si G est fermé et si $z \in G_{rec}$, alors $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \in \partial G_0 \cap G_{rec}$, où ∂G_0 est la frontière de G_0 .*

Démonstration. Comme G est fermé, $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \in G$. De plus, $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \in G_0$ car sinon, $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \in G_{int}$, ce qui impliquerait $z \in G_{int}$. Le fait que $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \in \partial G_0$ est une conséquence de la continuité du flot ϕ^t . Enfin, si $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \notin G_{rec}$, alors $\phi^{\tau_{rec}(z; G)}z \in G_{ext}$ et dans ce cas, $z \in G_{ext}$. □

Introduisons aussi les temps caractéristiques suivants, utilisés par Zaslavsky [Zas05, p.182] :

$$\forall z \in G_{rec}, \quad \tau_{int}(z; G) = \inf \{t > 0 \mid \phi^t z \notin G\}, \quad \tau_{ext}(z; G) = \inf \{t > 0 \mid \phi^{\tau_{int}(z; G)+t} z \in G\}.$$

Le temps $\tau_{int}(z; G)$ est le temps que la trajectoire issue de z passe dans G avant de repartir, alors que $\tau_{ext}(z; G)$ est le temps que la trajectoire passe hors de G (voir 6.3). Ces temps vérifient

$$\tau_{rec}(z; G) = \tau_{int}(z; G) + \tau_{ext}(z; G).$$

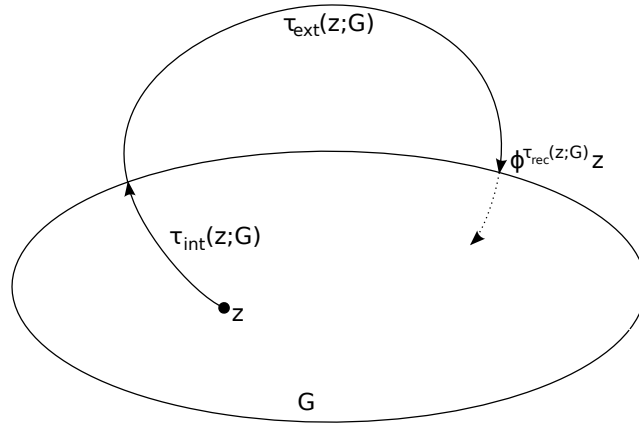


FIG. 6.3 – Temps caractéristiques.

Comme $\phi^{\tau_{rec}(z;G)}z \in G_{rec}$, il est possible de considérer le temps de premier retour de $\phi^{\tau_{rec}(z;G)}z$. En itérant cette procédure, on obtient alors une suite de temps caractéristiques de la trajectoire issue de z .

Par ailleurs, le temps de premier retour $\tau_{rec}(z;G)$ permet de simplifier l'étude de la dynamique en construisant des sections de Poincaré. Celles-ci sont intuitivement définies de la manière suivante. On considère un hyperplan \mathcal{P} de \mathbb{R}^{2N} partiellement transverse au flot : on suppose qu'il existe $\Sigma \subset \mathcal{P}$ tel qu'en tout point $z_0 = (x_0, p_0)$ de Σ , la trajectoire passant par z_0 coupe Σ . D'après le théorème de récurrence de Poincaré, cette trajectoire repassera près de z_0 ; si elle ne bifurque pas brutalement, elle pourra alors recouper Σ en un point z_1 , au bout d'un temps proche de $\tau_{rec}(z;G)$, noté T_1 : $z_1 = \phi^{T_1}(z_0)$. En répétant cette procédure, on obtient alors une suite de points $z_i \in \Sigma$ et de temps T_i caractéristiques de la trajectoire issue de z_0 (voir figure 6.4). L'ensemble Σ est appelé *section de Poincaré*.

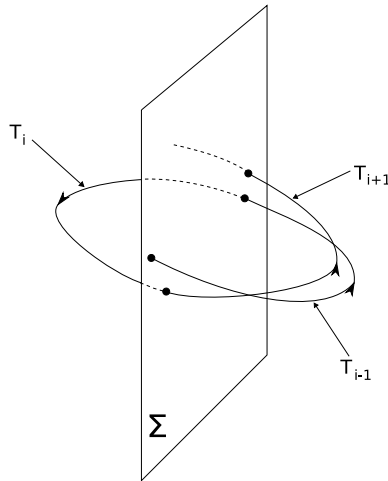


FIG. 6.4 – Section de Poincaré.

L'intérêt d'une telle procédure est que l'étude de la dynamique restreinte à Σ permet en fait de comprendre la dynamique globale dans Γ . On réduit donc le problème d'une dimension puisque la dimension de Σ est $2N - 1$. De plus, la dynamique initialement continue devient discrète ce qui simplifie aussi le problème. Enfin, l'étude de sections de Poincaré permet de visualiser facilement de

nombreux concepts dynamiques qui autrement resteraient difficiles à percevoir.

D'après [Wig03, p.122], tout n'est en fait pas si simple et la construction de sections de Poincaré est souvent délicate. Il n'existe pas de méthode générale pour les obtenir, sauf pour quelques systèmes particuliers. Le cas $N = 2$ est un ; détaillons-le en nous basant sur [Wig03, p.144].

On sait d'après le lemme 3.3 que H reste constant lors du mouvement. Autrement dit, une trajectoire issue de $z_0 = (x_0, p_0)$ évoluera sur la variété $h(x_0, p_0) = \{(x, p) \in \Gamma \mid H(x, p) = H(x_0, p_0)\}$, ici de dimension 3. Si on suppose que

$$\frac{\partial}{\partial p^2} H(x^1, x^2, p^1, p^2) \neq 0,$$

alors l'hyperplan $x^2 = \text{cste}$ est transverse à $h(x_0, p_0)$. L'intersection de ces deux variétés constitue donc une variété V de dimension 2. Soit Σ l'ensemble des points de V qui reviennent en V ; Σ constitue alors une section de Poincaré. C'est aussi une variété de dimension 2 et les points de Σ peuvent par exemple être repérés par (x^1, p^1) . La dynamique peut ainsi être étudiée dans un plan et devient aisément visualisable.

Exemple 6.1. *Illustrons le cas $N = 2$ à l'aide du billard de Sinai, étudié notamment dans [Zas05, p.143]. L'allure de ce système est donnée en figure 6.5 à gauche ; on considère une particule placée dans une cavité carrée, possédant au centre un cercle. Cette particule évolue en ligne droite jusqu'à rencontrer un bord. À ce moment, elle rebondit de manière élastique : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion (i_0 sur la figure pour le premier rebond). Elle repart ensuite en ligne droite jusqu'à rencontrer un nouveau bord et ainsi de suite.*

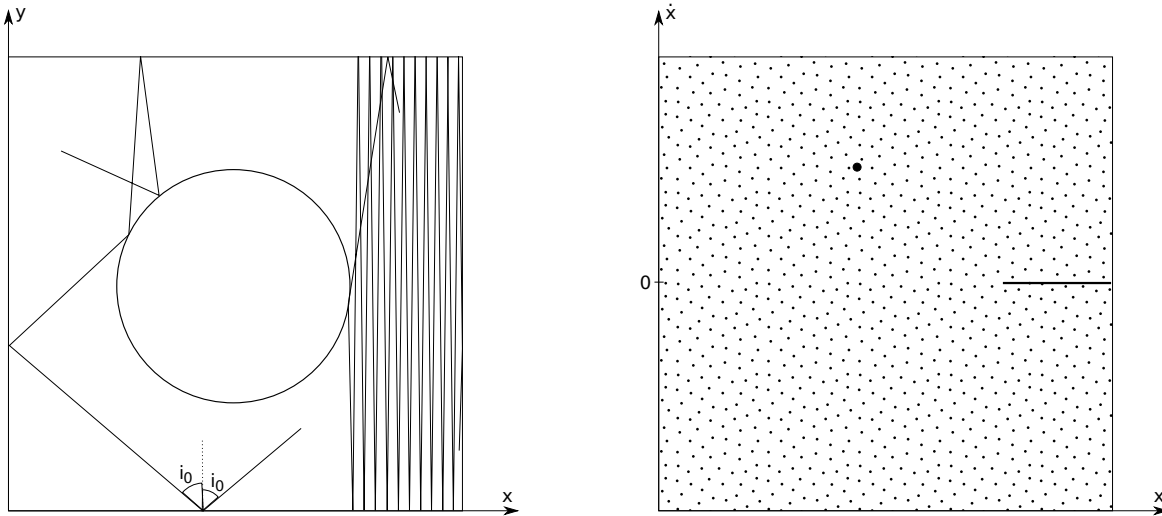


FIG. 6.5 – Billard de Sinai ; représentation spatiale du billard à gauche, section de Poincaré à droite.

On peut montrer qu'un tel système est hamiltonien. La particule peut être repérée par ses coordonnées $(x(t), y(t))$ et son moment $p(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, où $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$. Le plan $\sigma : y = 0$ constitue une section de Poincaré pour ce système et peut être repéré par les coordonnées (x, \dot{x}) . Autrement dit, on place un point dans Σ à chaque fois que la particule rebondit contre la bande inférieure du billard. Les coordonnées du point sont l'abscisse et la vitesse horizontale de la particule lors de ce rebond.

La figure 6.5 à droite donne une allure partielle de cette section. La trajectoire de gauche commence par rebondir avec un angle i_0 ; ce rebond est signalé par le gros point dans le haut de la figure de droite. Ensuite, si l'on attend assez longtemps, on peut s'attendre à ce que la particule rebondisse presque

partout dans le billard, ce qui se traduit par la multitude des points dans la figure de droite ; elle “semble” ainsi avoir un comportement aléatoire. Intuitivement, on sent bien ici la notion de sensibilité aux conditions initiales ; si on change i_0 en $i_0 + \varepsilon$, cette différence va perdurer par la suite et à un moment, la nouvelle trajectoire peut par exemple ne pas rebondir sur le cercle, changeant dans ce cas complètement la suite du mouvement.

La trajectoire de droite, quant à elle, reste “bloquée” (pendant un temps long voire infini) à droite du cercle. Du fait de l’angle d’incidence très faible, \dot{x} est presque nul à chaque rebond. Ce mouvement se traduit dans la section par le segment horizontal à droite de la figure.

Nous reviendrons bientôt sur ces deux comportements complètement différents.

Dans [Zas05, p.174], l’ensemble des temps de premiers retours dans G induit une densité de probabilité $P_{rec}(\cdot; G)$: pour tout $t > 0$, $P_{rec}(t; G)$ est la probabilité que le temps de premier retour soit égal à t .

On suppose que $\lim_{\mu(G) \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(G)} P_{rec}(t; G)$ a un sens et existe (cela implique notamment que cette “limite” soit indépendante de l’ensemble G). On la note $P_{rec}(t)$. Cette quantité définit une densité de probabilité associée à la dynamique globale, en caractérisant l’ensemble des temps de premiers retours dans Γ . Le lemme de Kac permet alors de définir un temps moyen de premier retour.

Théorème 6.3 (Lemme de Kac). *Si Γ est compact, alors $P_{rec}(t)$ admet un moment (fini) d’ordre 1.*

Démonstration. Une preuve simplifiée est donnée dans [Mei97]. □

La définition suivante a donc un sens.

Définition 6.4. *On appelle temps moyen de premier retour la quantité notée $\langle \tau_{rec} \rangle$ et définie par*

$$\langle \tau_{rec} \rangle = \int_0^\infty t P_{rec}(t) dt.$$

Dans la suite, on verra que $P_{rec}(t)$ peut suivre une loi polynomiale. Le théorème 6.3 se traduit alors de la façon suivante.

Corollaire 6.2. *On suppose que Γ est compact. S’il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\kappa > 0$ tels que $P_{rec}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\kappa}{t^\gamma}$, alors $\gamma > 2$.*

Nous allons maintenant voir que cette densité de probabilité joue un rôle important dans la caractérisation des dynamiques chaotiques.

6.2 Quelques aspects du chaos hamiltonien

Nous présentons d’abord les différents degrés de chaoticité dans les systèmes hamiltoniens. Nous verrons ensuite que dans de nombreux cas il existe des zones singulières qui “piègent” les trajectoires pendant des temps longs. Même si ces ensembles restent très localisés, ils ont néanmoins une influence déterminante sur la dynamique globale du système.

Précisons ici que nous nous intéressons dans cette section à la dynamique du système, c’est-à-dire au comportement (déterministe) des trajectoires. Nous verrons ensuite une approche probabiliste, complémentaire à la première.

6.2.1 Diversité dans le chaos

Comme on l’a dit, il n’existe pas de définition précise du chaos car cette notion regroupe en fait des comportements différents, encore mal compris pour la plupart. Mentionnons [Pes07] pour un survol de ces différents systèmes d’un point de vue mathématique.

Systèmes intégrables

À une extrémité des systèmes chaotiques se trouvent les systèmes... non chaotiques. Leur comportement est régulier et il est possible de déterminer explicitement leurs solutions ; on dit dans ce cas que ces systèmes sont “intégrables”. Dans la figure 6.1, ils se trouvent à gauche. Par exemple, si le Hamiltonien H ne dépend que de p , les équations (EH) deviennent

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= \nabla H(p(t)), \\ \frac{d}{dt}p(t) &= 0. \end{cases}$$

Ainsi, p reste constant au cours du mouvement ; il en va donc de même pour $\nabla H(p(t))$. En notant alors $\omega(p_0) = \nabla H(p_0)$ (indépendant de t), on trouve que

$$x(t) = x(0) + \omega(p_0)t, \quad p(t) = p_0.$$

Ce système est donc intégrable.

Plus généralement, la connaissance d'intégrales premières (on a vu avec (3.7) que H en était une) fournit le théorème fondamental de Liouville. On dira que deux fonctions $f_1(x, p)$ et $f_2(x, p)$ sont en involution si

$$\partial_1 f_1 \cdot \partial_2 f_2 - \partial_1 f_2 \cdot \partial_2 f_1 = 0.$$

On notera aussi \mathbb{T}^N le tore de dimension N . Par exemple, un tore de dimension 1 peut être assimilé à un cercle et un tore de dimension 2 à une chambre à air. Nous nous contentons ici de donner l'idée générale de ce théorème ; on pourra consulter [Arn89, p.272] pour un énoncé précis.

Théorème 6.4 (Liouville). *Soit un système hamiltonien de Hamiltonien $H(x, p)$, avec $(x, p) \in \mathbb{R}^{2N}$. S'il existe N intégrales premières de H indépendantes et en involution, alors il existe un changement de variable $(x, p) \mapsto (I, \theta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N$ tel que dans les nouvelles variables, la dynamique du système est donnée par*

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\theta(t) &= \omega(I), \\ \frac{d}{dt}I(t) &= 0. \end{cases}$$

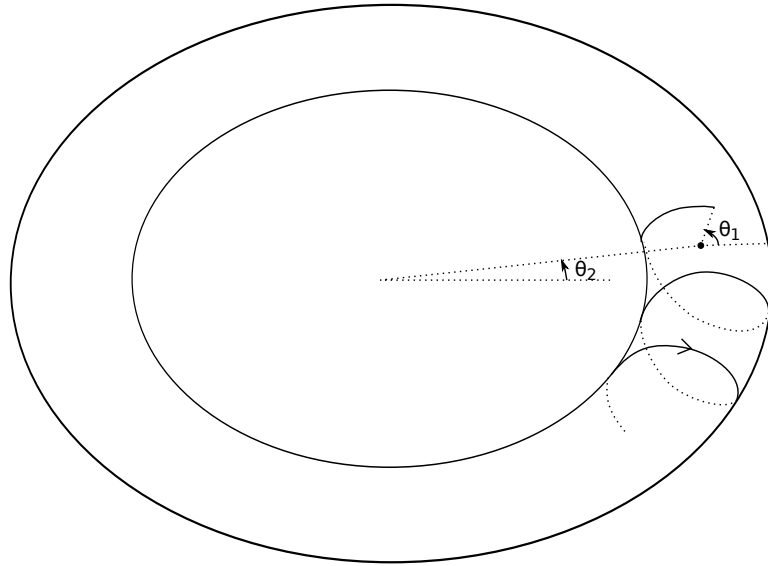
En particulier, le système est intégrable.

Remarque 6.1. *Comme H est une intégrale première, tous les systèmes hamiltoniens avec $N = 1$ sont intégrables.*

Le vecteur $\omega(I)$ contient les *fréquences* du système : les *actions* I_j restent constantes alors que les *angles* θ_j évoluent à vitesses constantes $\omega(I)_j$. Les trajectoires évoluent donc sur des tores dont les dimensions sont fixées par les actions I_j . La figure 6.6 illustre cette dynamique pour $N = 2$.

Toujours dans le cas $N = 2$, la section de Poincaré d'une telle dynamique fait alors apparaître des cercles. Si l'on revient aux variables (x, p) , ces cercles deviennent déformés (à cause du changement de variable) mais la structure reste globalement identique.

Nous retiendrons qu'à un mouvement intégrable (donc régulier) est associé un tore. Si $N = 2$, celui-ci est représenté dans une section de Poincaré par une courbe fermée (un cercle déformé). Ce résumé n'est pas tout à fait exact (il faudrait prendre en compte les résonances) mais nous suffira pas la suite. L'ouvrage [Mor02] fournit une présentation très accessible de ces systèmes.

FIG. 6.6 – Dynamique d’un système intégrable pour $N = 2$.

Systèmes uniformément hyperboliques

À l’autre extrémité des systèmes chaotiques se trouvent les systèmes uniformément hyperboliques pour lesquels, en tout point de Γ , les trajectoires divergent exponentiellement (figure 6.1 à droite). Les trajectoires de ces systèmes semblent complètement aléatoires. Précisons toutefois qu’elles restent régies par (EH) et sont donc en réalité déterministes. La trajectoire de droite du billard de Sinai semblerait en être un exemple. Si $N = 2$, les systèmes hyperboliques forment dans les sections de Poincaré une “mer chaotique”, caractérisée par un ensemble homogène de points qui occupent tout le domaine. Aucune autre structure n’apparaît dans ces sections. Le billard de Sinai n’est donc finalement pas un système uniformément hyperbolique, à cause du segment qui apparaît dans la figure 6.5 à droite.

Des résultats globaux existent aussi pour les systèmes uniformément hyperboliques, fournis notamment par la théorie ergodique. En particulier, la distribution des temps de premiers retours P_{rec} suit approximativement une loi exponentielle :

$$\boxed{P_{rec}(t) \approx h e^{-ht}.} \quad (6.2)$$

Voir [Zas05, p.181] ainsi que [HSV99] pour plus de détails.

Systèmes intermédiaires

L’immense majorité des systèmes chaotiques physiques ne rentrent en fait dans aucune des deux catégories exposées ci-dessus. La majorité d’entre eux présente des comportements intermédiaires, où zones singulières et mer chaotique se côtoient. C’est le cas notamment du billard de Sinai. D’après les simulations numériques de [Zas05, p.189], la distribution de ses temps de récurrences vérifie (à des constantes multiplicatives près)

$$P_{rec}(t) \approx \begin{cases} e^{-ht}, & t < t^*, \\ \frac{1}{t^3}, & t > t^*. \end{cases}$$

Cette différence de comportement peut s’interpréter ainsi : à part les zones singulières (notamment le segment de droite), la dynamique est “globalement” hyperbolique : en première approximation,

chaque trajectoire remplit de manière dense l'espace des phases, créant une mer chaotique. Par conséquent, $P_{rec}(t)$ devrait suivre la loi (6.2). Les zones singulières correspondent aux trajectoires qui restent "bloquées" longtemps, comme la trajectoire de droite. Ainsi, une trajectoire issue d'un point loin de telles zones singulières et bloquée par la suite mettra beaucoup de temps avant de revenir proche de sa condition initiale. Autrement dit, si on regarde l'ensemble de tous les temps de premiers retours, les plus longs (de valeurs $t > t^*$) sont dûs à un blocage dans une zone singulière. Celles-ci provoquent une "surabondance" de temps de récurrences longs par rapport au cas hyperbolique. Ceci est en accord avec la loi polynomiale, qui décroît beaucoup moins vite que la loi exponentielle.

Remarque 6.2. *À cause de la conservation du flot hamiltonien, les trajectoires ne peuvent être bloquées éternellement; il n'existe pas d'attracteur dans les systèmes hamiltoniens.*

Un autre type de système intermédiaire est celui des systèmes hamiltoniens quasi-intégrables, dits aussi perturbés, pour lesquels le Hamiltonien H peut s'écrire sous la forme

$$H(x, p) = H_0(p) + \varepsilon H_1(x, p),$$

où ε est un "petit" paramètre. Comme on l'a vu, H_0 est intégrable et conduit à une dynamique sur des tores. Le terme $\varepsilon H_1(x, p)$ va venir perturber ces tores, créant alors une dynamique complexe.

Là encore, des résultats rigoureux existent, mais décrivent des aspects locaux de la dynamique. Le plus important est le théorème KAM qui stipule intuitivement que certains tores de H_0 résisteront à la perturbation $\varepsilon H_1(x, p)$, moyennant une petite déformation. Ces tores sont alors appelés "tores de KAM". Plus ε augmente, plus leur nombre diminue. Lorsqu'un tore disparaît à cause de la perturbation, il "explose" et donne naissance à un réseau de petites îles entourées de structures complexes. Au fur et à mesure que ε augmente, des zones de mer chaotique apparaissent, d'abord de manière confinée, puis se regroupent pour former des zones de chaos "généralisé".

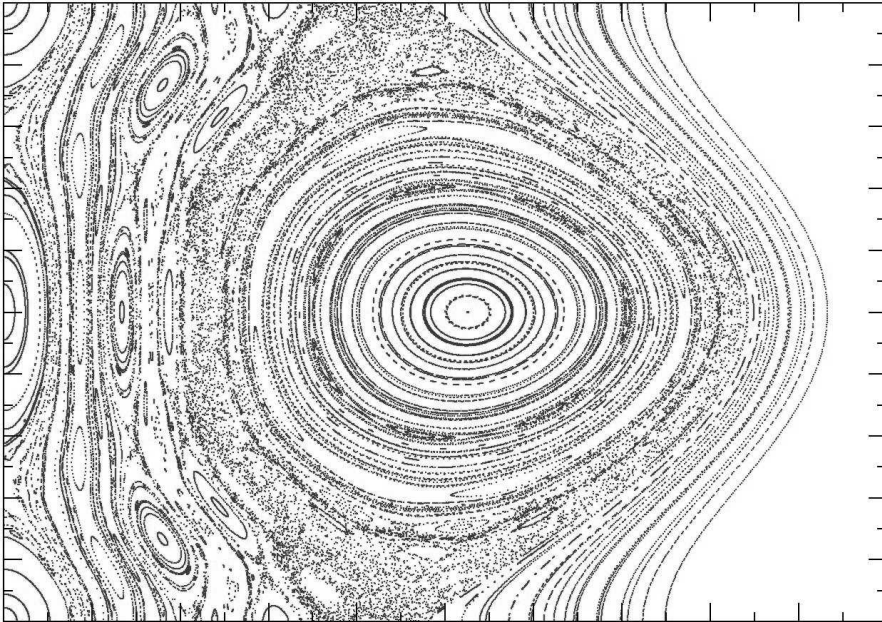


FIG. 6.7 – Section de Poincaré d'un système quasi-intégrable pour $N = 2$.

La figure 6.7 illustre ce phénomène; elle représente une section de Poincaré d'un pendule simple perturbé. On peut trouver au centre des tores de KAM. Lorsque l'on s'en éloigne, des zones fortement chaotiques apparaissent avec leurs bandes remplies uniformément de points. On trouve enfin à la

périphérie (tout à gauche) des réseaux de cercles déformés (les îles), issus de l’explosion de tores. Les zones qui entourent ces îles sont très complexes et possèdent en particulier des caractères auto-similaires. Nous allons y revenir dans le paragraphe suivant.

En ce qui concerne les temps de récurrences de ces systèmes intermédiaires, leur densité de probabilité P_{rec} suit asymptotiquement une loi polynomiale (comme pour le billard de Sinai) :

$$\boxed{\exists \kappa > 0, \exists \gamma_{rec} > 0, \quad P_{rec}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\kappa}{t^{\gamma_{rec}}}.} \quad (6.3)$$

Cette propriété est essentiellement issue de simulations numériques. Il ne semble pas exister de justifications mathématiques à l’heure actuelle. En particulier, γ_{rec} est déterminé expérimentalement. Chirikov et Shepelyansky [CS84] semblent être les premiers à mettre en évidence la loi (6.3). Le système étudié dans [CS84] suit la loi (6.3) avec $\gamma_{rec} \approx 2.5$. Plus tard, les mêmes auteurs recensent dans [CS99] plusieurs études qui situent globalement γ_{rec} entre 2 et 4. Mentionnons aussi [MO85] où un modèle global exploitant la structure auto-similaire des îles conduit à $\gamma_{rec} \approx 2.96$. Un raffinement [CK08] conduit à $\gamma_{rec} \approx 2.57$ ¹. Remarquons que dans ces articles, c’est plutôt $\int_t^\infty P_{rec}(\tau) d\tau$ qui est étudiée.

6.2.2 Pièges fractals

Ce sont les zones qui entourent les îles qui sont responsables du “piégeage” (partiel) des trajectoires. Elles possèdent une structure auto-similaire (fractale) approchée : lorsque l’on zoome sur une partie d’une telle zone, on retrouve un réseau d’îles dont les bords sont eux-mêmes formés de réseaux d’îles, et ainsi de suite. La figure 6.8, reprenant l’idée de la figure 12.4 de [Zas05, p.191], illustre cette structure. La figure de droite est l’agrandissement du carré situé dans la figure de gauche. La similarité entre les deux schémas caractérise l’aspect fractal de ces zones.

Notons A_1 l’ensemble des îles de première génération (les grandes ellipses sur la figure 6.8 à gauche), A_2 l’ensemble des îles de seconde génération (les grandes ellipses sur la figure 6.8 à droite ainsi que toutes leurs copies autour des autres îles de première génération), puis A_i l’ensemble des îles de i -ème génération. Si la structure est strictement fractale, il existe $0 < \lambda_\Gamma < 1$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mu(A_{k+1}) = \lambda_\Gamma \mu(A_k). \quad (6.4)$$

Dans [Zas05, chap.12], Zaslavsky montre, toujours à partir de simulations, que les trajectoires sont piégées d’autant plus longtemps qu’elles pénètrent profondément dans cette structure. Plus précisément, si on note T_i le temps moyen qu’une trajectoire va passer autour d’une île de i -ème génération, il existe $\lambda_T > 1$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1} = \lambda_T T_k. \quad (6.5)$$

Ces temps de piégeages ont donc eux aussi une structure fractale. Zaslavsky [Zas05, p.190] introduit alors ce qu’il appelle “a *hierarchical islands trap*”, que nous avons traduit par piège fractal. Nous formalisons cette notion avec la définition qui va suivre. Nous devons auparavant introduire, pour tout $B \in \Gamma$ mesurable, le temps moyen de piégeage dans B , noté $\langle \tau_{int}(B) \rangle$ et défini par

$$\langle \tau_{int}(B) \rangle = \frac{1}{\mu(B)} \int_{z \in B} \tau_{int}(z; B) dz.$$

¹Toutes ces valeurs concernent des systèmes avec $N = 2$.

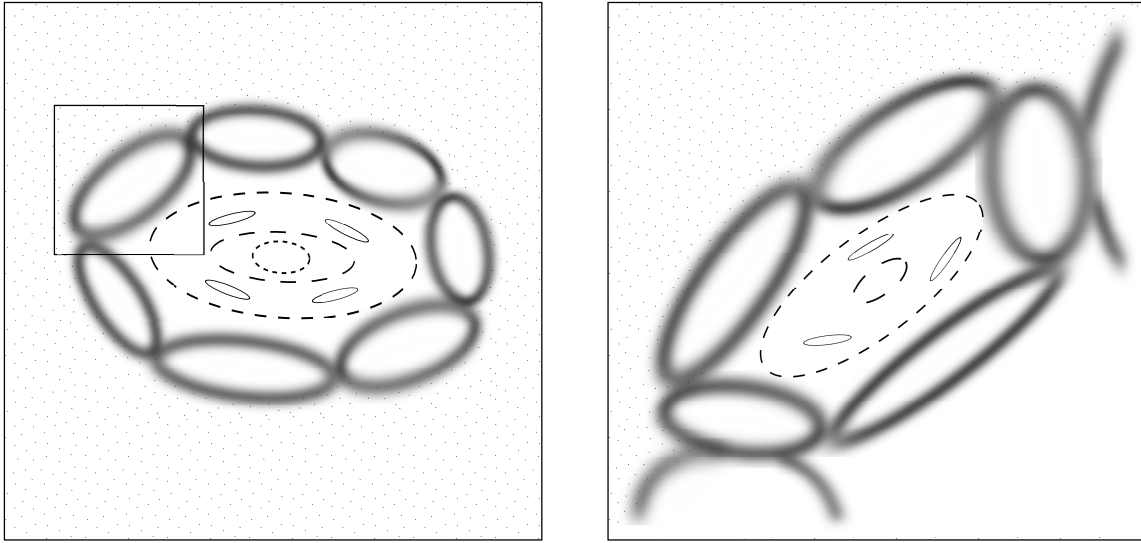


FIG. 6.8 – Structure des pièges fractals.

Définition 6.5. Soit $Z \subset \Gamma$. On dit que Z est un piège fractal s'il existe une partition $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ de Z et deux réels $\lambda_T > 1$ et $0 < \lambda_\Gamma < 1$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \mu(A_{k+1}) = \lambda_\Gamma \mu(A_k), \\ \langle \tau_{int}(A_{k+1}) \rangle = \lambda_T \langle \tau_{int}(A_k) \rangle. \end{cases}$$

Les réels λ_Γ et $\lambda_T > 1$ sont appelés paramètres du piège.

Cette définition est compatible avec la définition de Zaslavsky [Zas05, p.190] utilisant des ensembles emboîtés si l'on considère les ensembles $\tilde{A}_k = \bigcup_{j \geq k} A_j$.

La figure 6.9 donne un schéma plus précis (mais moins réaliste) de ce que nous entendons par piège fractal. Les deux premières générations A_1 et A_2 sont représentées.

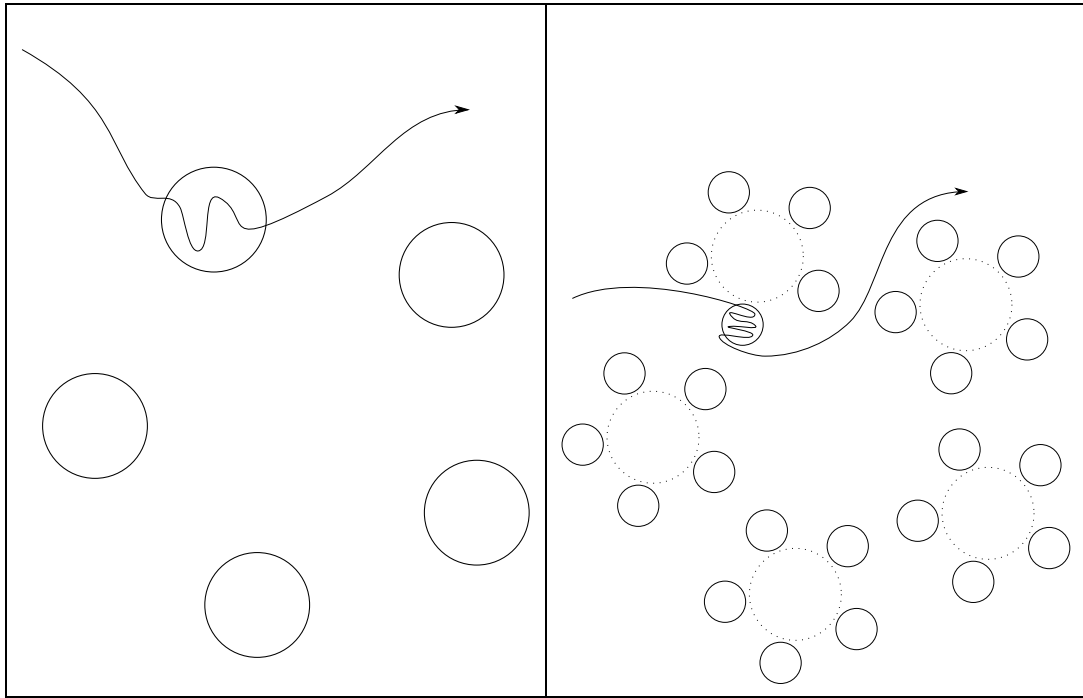
De manière imagée, un piège fractal peut être vu comme un labyrinthe dont la complexité augmente progressivement ; on met de plus en plus de temps à avancer au fur et à mesure que l'on s'avance à l'intérieur.

Bien entendu, les zones singulières qui apparaissent dans les sections de systèmes réels ne sont pas exactement des pièges fractals ; les relations (6.4) et (6.5) peuvent n'être vérifiées qu'approximativement. En particulier les coefficients λ_T et λ_Γ peuvent légèrement différer d'une génération à l'autre. Plusieurs raffinements sont discutés dans [Zas05]. Nous nous contenterons toutefois de ce premier modèle par la suite.

Comme on l'a dit, ce sont ces pièges fractals qui sont responsables de l'abondance des temps longs de premiers retours et donc de la loi asymptotique polynomiale (6.3) de P_{rec} . Plus précisément, Zaslavsky [Zas05, p.196] montre que

$$\gamma_{rec} = 2 + \frac{|\ln \lambda_\Gamma|}{\ln \lambda_T}.$$

Cette relation précise donc le lien entre dynamique globale et piège fractal. Elle montre de plus que la dynamique globale à long terme est en fait déterminée par ces pièges, même si ceux-ci peuvent

FIG. 6.9 – Schéma d'un piège fractal : A_1 à gauche, A_2 à droite.

avoir un volume très réduit ! Notons que pour le billard de Sinai, les zones singulières (qui ne sont pas des pièges fractals) sont même de mesure nulle [Zas05, p.188] mais jouent un rôle prépondérant pour $t > t^*$.

L'analyse que l'on vient de mener s'applique à des trajectoires individuelles ; on pourrait parler de description "microscopique". Si maintenant on s'intéresse à l'évolution d'un ensemble de trajectoires, on passe au niveau "macroscopique" ; les équations (EH) doivent alors être remplacées par une équation moyenne, basée comme on va le voir sur une approche probabiliste.

6.3 Description probabiliste

Comme on l'a dit, lorsque la dynamique est hyperbolique (totalement, voire même partiellement), les trajectoires semblent suivre des mouvements complètement aléatoires. De plus, cette sensibilité aux conditions initiales empêche rapidement toute prédiction physique sur une trajectoire particulière (les mesures effectuées ayant toujours une précision finie). Ces deux points conduisent à adopter une description probabiliste, afin de comprendre certains phénomènes globaux de ces systèmes. Précisons toutefois que ce nouveau point de vue ne signifie pas que la dynamique du système devient aléatoire. Le chaos que nous étudions est *déterministe*. La relation entre les deux approches soulève des questions intéressantes, en lien notamment avec la notion d'entropie [Zas99]. L'ouvrage [Pri94], qui offre une présentation vulgarisée des systèmes chaotiques, étudie aussi cette relation particulière entre déterminisme et aléatoire.

L'approche probabiliste consiste toujours à considérer l'évolution d'une particule dans un système, mais plutôt que de s'appuyer sur les équations de la dynamique, on introduit une densité de probabilité $P(x, t)$ qui représente la probabilité qu'à la particule d'être en $x \in \mathbb{R}^N$ à l'instant $t \in I$. À l'aide de lois de conservations, on construit ensuite une équation aux dérivées partielles, appelée équation "cinétique" dans [Zas05], qui détermine la forme de $P(x, t)$.

Une méthode similaire est notamment utilisée en physique statistique, qui décrit les systèmes

possédant de très nombreuses particules (par exemple un gaz composé de molécules); l'approche déterministe consisterait à résoudre les équations de la dynamique de *toutes* les particules (qui interagissent entre elles), ce qui serait en pratique impossible. Au lieu de cela, on introduit une fonction, dite d'"état" (comme $P(x, t)$). La détermination d'une équation régissant cette fonction permettra alors de décrire *globalement* le système. Pour un gaz, on ne cherche alors plus à déterminer la position et la vitesse de toutes les molécules au temps t , mais à la place on s'intéresse à la température, la pression ou l'entropie.

6.3.1 Diffusion anormale

À partir de cette densité $P(x, t)$, on peut construire les moments d'ordres $m > 0$, notés $\langle x^m \rangle(t)$ et définis par

$$\langle x^m \rangle(t) = \int_{\mathbb{R}^N} x^m P(x, t) dx.$$

Deux cas sont particulièrement significatifs : $\langle x \rangle(t)$ qui représente la position moyenne de la particule au temps t , et $\langle x^2 \rangle(t)$ qui permet de préciser l'étalement autour de cette position moyenne. Pour reprendre l'exemple du chapitre 1, si on lâche une goutte d'encre dans un ruisseau (en théorie seulement!), elle sera globalement emportée par le courant (sa position moyenne sera repérée par $\langle x \rangle(t)$) mais dans le même temps elle se dispersera; la taille de la tache sera de l'ordre de $\langle x^2 \rangle(t)$ (plus précisément $\langle x^2 \rangle(t) - \langle x \rangle(t)^2$). Bien souvent, cet étalement croît linéairement dans le temps :

$$\langle x^2 \rangle(t) \sim ct. \quad (6.6)$$

Si $P(x, t)$ vérifie l'équation de diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t),$$

alors (6.6) est vérifiée. On parle ainsi de phénomène de diffusion, ou encore de transport. La goutte suivra cette loi si le ruisseau coule tranquillement. Si maintenant des tourbillons apparaissent ou si des cascades ponctuent le lit du cours d'eau, ce ne sera plus le cas. Plus généralement, dans de nombreux systèmes physiques complexes apparaissent des phénomènes de transport anormal où la loi (6.6) est remplacée par

$$\langle x^2 \rangle(t) \sim c_\mu t^\mu, \quad (6.7)$$

avec $\mu > 0$. On parle de *subdiffusion* si $\mu < 1$ et de *superdiffusion* si $\mu > 1$. Le coefficient μ est appelé *coefficient de transport* (et n'a rien à voir avec la mesure de Lebesgue).

De tels phénomènes se produisent en particulier dans les systèmes chaotiques (voir par exemple [ASZ91], [Zas94a] ou encore [Zas05, chap.16-18]) à cause des pièges fractals.

6.3.2 Équations fractionnaires

La question est maintenant de savoir quelle équation doit vérifier $P(x, t)$ afin de prendre en compte (6.7); elle doit en particulier dépendre de la structure des pièges fractals. Zaslavsky [Zas05, p.246] propose alors de revenir sur la définition de $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\Delta}_t P(x, t) - P(x, t)}{\Delta t}, \quad (6.8)$$

où $\hat{\Delta}_t$ est qualifié de "generalized shift of $P(x, t)$ along t by Δt " qui, dans le cas classique, vérifie

$$\hat{\Delta}_t P(x, t) = P(x, t + \Delta t).$$

Si maintenant la structure du temps devient plus complexe (Zaslavsky la qualifie de temps fractal, à cause de la relation (6.5)) et paramétrée par un paramètre $0 < \beta < 1$ (sans plus de précision), cet opérateur $\hat{\Delta}_t$ peut devenir plus compliqué et conduire à une relation du type

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} P(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\Delta}_t^\beta P(x, t) - P(x, t)}{\Delta t}.$$

Ce passage au fractionnaire reste très vague ; c'est d'ailleurs ce qui nous a incité à chercher une justification plus précise de cette transition. Une piste sera présentée au chapitre 8.

En utilisant une dérivée fractionnaire en temps, on obtient une première équation du type

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} P(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (6.9)$$

qui conduit directement à

$$\langle x^2 \rangle(t) \sim c_\beta t^\beta.$$

L'équation (6.9) permet donc de prendre en compte uniquement la subdiffusion ; le coefficient de transport est alors exactement l'ordre de la dérivée fractionnaire temporelle. Quant à β , on s'attend à ce qu'il dépende de λ_T voire de λ_Γ . Zaslavsky propose en fait une équation plus générale que (6.9) où la dérivée spatiale devient aussi fractionnaire (de type Riesz) :

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} P(x, t) = K \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} P(x, t), \quad (6.10)$$

avec $0 < \beta < 1$ et $1 < \alpha < 2$.

Elle conduit cette fois à

$$\langle x^\alpha \rangle(t) \sim c_{\alpha, \beta} t^\beta.$$

Afin de déterminer $\langle x^2 \rangle(t)$, Zaslavsky utilise des groupes de renormalisation et suggère la relation suivante :

$$\langle x^2 \rangle(t) \sim c_{\alpha, \beta} t^{2\beta/\alpha}.$$

Cette équation généralise la précédente et conduit à prendre $2\beta/\alpha$ comme exposant de transport :

$$\boxed{\mu = \frac{2\beta}{\alpha}}. \quad (6.11)$$

Notons que l'on retrouve un résultat similaire dans [MK00, p.29]. Ce coefficient (6.11) peut maintenant prendre toutes les valeurs dans \mathbb{R}_*^+ . Les deux dérivées peuvent être fractionnaires aussi bien pour la subdiffusion que pour la superdiffusion.

Remarque 6.3. Dans [Zas05, chap.16], l'équation (6.10) n'est en fait qu'un cas particulier d'équations plus générales, dites de Fokker-Planck. La construction de celles-ci est délicate, mentionnons simplement qu'elles peuvent s'obtenir à l'aide de marches aléatoires (Continuous Time Random Walks) [MS04, MK00].

Pour résumer, Zaslavsky propose de modéliser le transport anormal (6.7) à l'aide d'une équation fractionnaire en temps et en espace (6.10), dont les ordres de dérivations vérifient la relation (6.11). Il reste maintenant à relier ces coefficients à la structure des pièges fractals.

6.3.3 Lien avec les pièges fractals

Tout comme les tourbillons du ruisseau, les pièges fractals sont responsables du transport anormal dans les systèmes chaotiques². Afin de relier ces zones à (6.10), Zaslavsky utilise la structure autosimilaire des pièges ; puisque l'espace des phases reste presque inchangé lorsque l'on change d'échelle, il devrait en être de même pour (6.10). Le changement d'échelle s'effectue ainsi [Zas05, p.262] :

$$x \rightarrow \lambda_l x, \quad t \rightarrow \lambda_T t,$$

où $\lambda_l = \lambda_\Gamma^{-1/2}$ afin de conserver le flot [Zas05, p.256].

Si on pose $\tilde{P}(x, t) = P(\lambda_l x, \lambda_T t)$, alors \tilde{P} vérifie (d'après (5.6)) :

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \tilde{P}(x, t) = K \left(\frac{\lambda_T^\beta}{\lambda_l^\alpha} \right) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \tilde{P}(x, t).$$

Si on réitère cette renormalisation, on obtient alors un terme $(\lambda_T^\beta / \lambda_l^\alpha)^2$. Comme l'équation doit garder la même allure pour un nombre quelconque d'itérations, la limite de $(\lambda_T^\beta / \lambda_l^\alpha)^n$ pour $n \rightarrow +\infty$ doit avoir un sens ; la seule possibilité est donc

$$\frac{\lambda_T^\beta}{\lambda_l^\alpha} = 1.$$

En utilisant l'égalité $\lambda_l = \lambda_\Gamma^{-1/2}$, on trouve finalement que

$$\boxed{\frac{2\beta}{\alpha} = \frac{|\ln \lambda_\Gamma|}{\ln \lambda_T}}. \quad (6.12)$$

Cette relation fait donc le lien entre diffusion anormale et piège fractal. Elle jette de plus un pont entre dynamique chaotique et calcul fractionnaire. Notons toutefois qu'ici le fractionnaire n'apparaît pas véritablement dans la dynamique (contrairement aux chapitres 4 et 5), puisque (6.10) est une équation macroscopique. Notons de plus que les exposants fractionnaires restent sous-déterminés : dans (6.11) et (6.12), seul leur rapport est significatif. Nous évoquerons ce point au chapitre 8.

Finalement, le but de ce chapitre était de présenter la triple égalité

$$\boxed{\gamma_{rec} - 2 = \mu = \frac{|\ln \lambda_\Gamma|}{\ln \lambda_T} = \frac{2\beta}{\alpha}}, \quad (6.13)$$

qui relie temps de récurrences, transport anormal, pièges fractals et modélisation fractionnaire.

Comme on l'avait annoncé, les résultats présentés dans ce chapitre sont loin d'être rigoureux ; basés en partie sur des simulations numériques et sur des approximations, ils peuvent de plus légèrement différer entre différents articles. Il reste assurément encore beaucoup de chemin à faire pour clarifier ces points mais ce qui importe ici, ce sont les idées générales, qui elles semblent solides. Comme on va le voir dans les deux chapitres suivants, elles nous ont guidé dans notre tentative d'établir un lien plus solide entre dynamique fractionnaire et systèmes hamiltoniens chaotiques.

²On pourrait s'attendre à ce qu'ils induisent uniquement de la subdiffusion (puisqu'ils retardent les trajectoires). Ce n'est toutefois pas le cas car en plus de ces piègeages, des sauts longs – dits de Lévy – peuvent apparaître (voir [SZK93]), autorisant la superdiffusion.

Chapitre 7

Dynamique hamiltonienne fractionnaire avec temps interne aléatoire

Reformulons l'objectif de ce travail : nous souhaitons trouver une origine dynamique à l'émergence de dérivées fractionnaires dans les systèmes hamiltoniens chaotiques, en nous appuyant d'un côté sur le plongement fractionnaire et de l'autre sur l'analyse de Zaslavsky¹. Il s'agit autrement dit de tenter de relier ces deux approches. Deux éléments dynamiques essentiels ressortent du chapitre précédent : la distribution polynomiale des temps de récurrences et la structure doublement fractale des pièges dynamiques. Ce chapitre est en lien avec le premier et le chapitre suivant privilégiera le second. Précisons tout de suite qu'aucune de ces deux pistes n'a complètement répondu à notre objectif initial. Comme on va le voir, toutes deux présentent de plus des zones encore problématiques pour le moment.

Ce chapitre s'appuie sur l'article de Stanislavsky [Sta06] qui, avec [Zas05] et [Cre07], a constitué le point de départ de notre thèse. Son contenu semblait répondre parfaitement à notre objectif. Dans [Sta06], Stanislavsky considère effectivement un temps constitué d'une succession d'intervalles aléatoires particuliers (ce qui peut faire penser aux temps de premiers retours) et construit alors une nouvelle variable d'évolution temporelle, appelée *temps interne*. Il s'intéresse ensuite à un système hamiltonien général et montre que s'il obéit à ce nouveau temps, les équations qui le régissent deviennent fractionnaires et s'apparentent de plus à $(EH)_\alpha$. Après avoir présenté cette approche, nous verrons que ce temps interne ne satisfait que partiellement la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$ de notre cube, puis que le lien avec les temps de récurrence des systèmes chaotiques reste à clarifier. Cette présentation reprend en partie [CI09] et [Ini07].

7.1 Formalisme de Stanislavsky

7.1.1 Temps interne aléatoire

Stanislavsky [Sta06] émet l'hypothèse que la variable d'évolution temporelle t d'un système puisse être constituée d'une somme d'intervalles aléatoires $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ indépendants et identiquement distribués selon une densité de probabilité ρ . On pose $T(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T(n) = \sum_{i=1}^n T_i.$$

¹Comme on l'a noté, cela suppose de croire que les dérivées fractionnaires apparaissant dans la description probabiliste se retrouvent quelque part dans la dynamique.

La quantité $T(n)$ représente donc une discrétisation de t suivant ces variables aléatoires. On introduit ensuite le processus de comptage associé

$$\{N_t\}_{t \geq 0} = \max\{n \geq 0 \mid T(n) \leq t\}.$$

Il semble naturel d'exiger que la succession de deux intervalles temporels soit encore un intervalle temporel. Cela se traduit de la manière suivante.

Définition 7.1. *Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes indentiquement distribuées suivant une densité de probabilité P . Soit $c_1, c_2 > 0$ et X_3 la variable aléatoire définie par $X_3 = c_1X_1 + c_2X_2$.*

On dit que la loi P est stable si X_3 est distribuée suivant cette loi.

Les lois stables sont en fait caractérisées par un exposant $0 < \alpha \leq 2$; on parle alors de loi α -stable. La loi gaussienne correspond à $\alpha = 2$ et celle de Cauchy à $\alpha = 1$. On pourra consulter l'ouvrage de référence [Fel71] pour plus de précisions sur les probabilités.

Stanislavsky suppose plus généralement que les $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartiennent au domaine d'attraction d'une loi stable : il existe $0 < \alpha \leq 2$ tel que $n^{-1/\alpha}T(n)$ converge en loi vers une loi α -stable. Le fait que les intervalles T_i ne puissent être négatifs impose $0 < \alpha \leq 1$.

Le passage à la limite continue de $T(n)$ se fait à travers le théorème 3.2 de [MS04].

Théorème 7.1. *Il existe un processus $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et une fonction b à variations régulières d'index α tels que*

$$\{b(c)^{-1}N_{ct}\}_{t \geq 0} \xrightarrow{FD} \{S(t)\}_{t \geq 0}, \quad c \rightarrow \infty, \quad (7.1)$$

où \xrightarrow{FD} désigne la convergence en loi pour toutes les distributions marginales de dimensions finies.

Le processus $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un temps de premier passage (voir [MS04]). D'après [Bin71], la densité de probabilité de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, notée p_t , vérifie

$$\boxed{\mathcal{L}_{(\tau)}[p_t(\tau)](s) = E_\alpha(-st^\alpha)}, \quad (7.2)$$

où $\mathcal{L}_{(\tau)}$ est la transformée de Laplace suivant la variable τ et E_α est la fonction de Mittag-Leffler définie par (5.41).

On peut en déduire la transformée de Laplace $\mathcal{L}_{(t)}$ de $p_t(\tau)$ suivant la variable t . Notons effectivement $g(w, \tau) = \mathcal{L}_{(t)}[p_t(\tau)](w)$; sa transformée de Laplace suivant τ vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\tau)}[g(w, \tau)](s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} \left(\int_0^\infty e^{-w\tau} p_t(\tau) dt \right) d\tau, \\ &= \int_0^\infty e^{-w\tau} \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} p_t(\tau) d\tau \right) dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-w\tau} E_\alpha(-s\tau^\alpha) dt, \\ &= \frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha + s}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

On pourra consulter [GM97] pour plus de précisions sur les propriétés de la fonction de Mittag-Leffler. Par ailleurs,

$$\mathcal{L}_{(\tau)} [w^{\alpha-1} e^{-\tau w^\alpha}] (s) = \frac{w^{\alpha-1}}{w^\alpha + s},$$

donc en prenant la transformée de Laplace inverse de (7.3) suivant s , il vient :

$$\boxed{\mathcal{L}_{(t)}[p_t(\tau)](w) = w^{\alpha-1} e^{-\tau w^\alpha}}. \quad (7.4)$$

Le processus $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est strictement croissant suivant t ; il peut alors jouer le rôle d'un nouveau temps, stochastique, appelé *temps interne*. Sa loi $p_t(\tau)$ représente la probabilité d'être au temps interne τ lorsque le temps réel vaut t .

Notons que l'introduction d'une nouvelle variable temporelle (pas forcément aléatoire) apparaît dans plusieurs travaux liés au calcul fractionnaire, notamment en viscoélasticité [LK04] et dans les systèmes lagrangiens fractionnaires [ENT07, MBR07]. Par ailleurs, dans [Hil95b, Hil95a, Hil00b], la dynamique fractionnaire émerge via une renormalisation temporelle. Dans tous les cas, il semble que les comportements fractionnaires (en temps) soient liés à un changement d'échelle temporelle. La constante de temps extrinsèque τ introduite au chapitre 5 pourrait ainsi être déterminée par cette transition.

7.1.2 Système hamiltonien fractionnaire

Stanislavsky étudie ensuite comment se traduit dynamiquement ce changement de temps au niveau de la dynamique. Plus précisément, il considère un système hamiltonien évoluant selon le temps usuel $t \in \mathbb{R}^+$ et de Hamiltonien H régi par les équations (EH) :

$$(EH) : \quad \forall t \geq 0, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= \partial_2 H(x(t), p(t)), \\ \frac{d}{dt}p(t) &= -\partial_1 H(x(t), p(t)). \end{cases} \quad (7.5)$$

Si maintenant t est remplacé par $S(t)$, comment la dynamique est-elle modifiée? Une réponse naturelle consiste à transformer certaines fonctions pertinentes $f(t)$ en $f(S(t))$. Afin de conserver une fonction déterministe, Stanislavsky prend l'espérance mathématique \mathbb{E} de $f(S(t))$.

Définition 7.2. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, on note f_α la fonction définie par

$$\forall t > 0, \quad f_\alpha(t) = \mathbb{E}[f(S(t))] = \int_0^\infty p_t(\tau) f(\tau) d\tau. \quad (7.6)$$

Précisons que dans ce chapitre, la régularité des fonctions n'est pas le point important. Nous supposons donc les fonctions assez régulières pour que tous les calculs soient valides.

La particularité du nouveau temps $S(t)$ est de transformer la dérivée classique en une dérivée fractionnaire (de Caputo).

Lemme 7.1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction assez régulière. Alors

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{dt} f \right) (S(t)) \right] = {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha f_\alpha(t), \quad (7.7)$$

où f_α est définie par (7.6).

Démonstration. Tout d'abord, comme $E_\alpha(0) = 1$, on tire de (7.2) que

$$\int_0^\infty e^{-s\tau} p_0(\tau) d\tau = 1.$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de cette relation, il apparaît que p_0 est la distribution de Dirac δ .

Par conséquent,

$$f_\alpha(0) = \langle \delta, f \rangle = f(0). \quad (7.8)$$

Évaluons à présent la transformée de Laplace de f_α :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_\alpha](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty p_t(\tau) f(\tau) d\tau \right) dt, \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} p_t(\tau) dt \right) f(\tau) d\tau, \\
&= \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-\tau s^\alpha} f(\tau) d\tau, \\
&= s^{\alpha-1} \mathcal{L}[f](s^\alpha).
\end{aligned} \tag{7.9}$$

D'après (2.27),

$$\mathcal{L}[_0^c \mathcal{D}_t^\alpha f_\alpha](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f_\alpha](s) - s^{\alpha-1} f_\alpha(0).$$

On utilise alors (7.8) et (7.9) :

$$\mathcal{L}[_0^c \mathcal{D}_t^\alpha f_\alpha](s) = s^{2\alpha-1} \mathcal{L}[f](s^\alpha) - s^{\alpha-1} f(0). \tag{7.10}$$

Déterminons par ailleurs la transformée de Laplace de $\mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{dt} f \right) (S(t)) \right]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{dt} f \right) (S(t)) \right] \right] (s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty p_t(\tau) \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau \right) dt, \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} p_t(\tau) dt \right) \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau, \\
&= \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-\tau s^\alpha} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau, \\
&= \int_0^\infty s^{2\alpha-1} e^{-\tau s^\alpha} f(\tau) d\tau + [s^{\alpha-1} e^{-\tau s^\alpha} f(\tau)]_0^\infty, \\
&= s^{2\alpha-1} \mathcal{L}[f](s^\alpha) - s^{\alpha-1} f(0),
\end{aligned}$$

qui est exactement (7.10). On conclut en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace. \square

En ce qui concerne les systèmes hamiltoniens, Stanislavsky propose de transformer les variables (x, p) en (x_α, p_α) , définies par (7.6). Il émet de plus l'hypothèse suivante, que l'on notera (C) :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} \partial_1 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)) = \int_0^\infty p_t(\tau) \partial_1 H(x(\tau), p(\tau)) d\tau, \\ \partial_2 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)) = \int_0^\infty p_t(\tau) \partial_2 H(x(\tau), p(\tau)) d\tau. \end{cases} \tag{7.11}$$

La dynamique du système devient dans ce cas fractionnaire.

Théorème 7.2. *Soit (x, p) une solution de (7.5).*

La condition (C) est vérifiée si et seulement si (x_α, p_α) , défini par (7.6), vérifie les équations $(EH)_\alpha^S$, définies par

$$(EH)_\alpha^S : \quad \forall t \geq 0, \quad \begin{cases} {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t) = \partial_2 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)), \\ {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha p_\alpha(t) = -\partial_1 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)). \end{cases} \tag{7.12}$$

Démonstration. D'après (7.5) et (7.7),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_t(\tau) \partial_2 H(x(\tau), p(\tau)) d\tau &= \int_0^\infty p_t(\tau) \frac{d}{d\tau} x(\tau) d\tau, \\ &= {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t). \end{aligned}$$

De même,

$${}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha p_\alpha(t) = - \int_0^\infty p_t(\tau) \partial_1 H(x(\tau), p(\tau)) d\tau.$$

□

Nous dirons donc qu'un système fractionnaire de la forme

$$\begin{cases} {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha x(t) &= f_1(x(t), p(t)), \\ {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha p(t) &= f_2(x(t), p(t)), \end{cases}$$

est hamiltonien au sens de Stanislavsky s'il existe une fonction $H(x, p)$ telle que

$$\begin{cases} f_1(x, p) &= \partial_2 H(x, p), \\ f_2(x, p) &= -\partial_1 H(x, p). \end{cases}$$

Un système hamiltonien fractionnaire au sens de Stanislavsky peut ainsi être vu comme une réalisation du plongement fractionnaire direct de (EH) (en remplaçant ${}_0 \mathcal{D}_t^\alpha$ par ${}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha$ dans la définition 4.1); la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$ de notre cube semble pouvoir s'effectuer via $t \rightarrow S(t)$. Qui plus est, si la loi ρ pouvait être assimilée à P_{rec} dans le cas de systèmes chaotiques, cela fournirait un premier lien entre plongements fractionnaires et chaos hamiltonien. Il semble toutefois que ces attentes soient difficilement réalisables.

7.2 Compatibilité avec le plongement fractionnaire ?

Nous allons voir ici que le temps interne semble n'apporter qu'une réponse partielle à la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$ qui nous intéresse dans cette partie. Mais on peut remarquer auparavant que les expressions de la section précédente doivent être homogénéisées temporellement.

7.2.1 Homogénéisation temporelle

D'après notre étude du chapitre 5, on constate tout de suite que les équations $(EH)_\alpha^S$ ne sont pas homogènes. D'ailleurs les relations caractérisant le temps interne ne le sont pas non plus. Les variables t et τ étant des temps, elles sont homogènes à T . Les variables s et w doivent alors être homogènes à T^{-1} afin que les produits du type st soit sans dimension dans les exponentielles des transformées de Laplace. Dans (7.2), on constate donc que l'argument de E_α a pour dimension $T^{\alpha-1}$ alors qu'il devrait être sans dimension.

Introduisons donc la constante de temps extrinsèque du chapitre 5, que nous noterons ici τ_0 . On peut alors montrer que l'homogénéisation du formalisme de Stanislavsky conduit à remplacer (7.2) et (7.4) par

$$\boxed{\mathcal{L}_{(\tau)}[p_t(\tau)](s) = E_\alpha(-st^\alpha \tau_0^{1-\alpha}), \quad \mathcal{L}_{(t)}[p_t(\tau)](w) = (w\tau_0)^{\alpha-1} e^{-\tau w^\alpha \tau_0^{\alpha-1}}.} \quad (7.13)$$

L'équation (7.6) reste inchangée, mais (7.7) devient quant à elle

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{dt} f \right) (S(t)) \right] = \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha f_\alpha(t).} \quad (7.14)$$

On retrouve ici la dérivée fractionnaires homogène du paragraphe 5.2.2. Les fonctions x_α et p_α restent donc identiques, mais les équations $(EH)_\alpha^S$ sont remplacées par leurs analogues homogènes :

$$(EH)_\alpha^S : \quad \forall t \geq 0, \quad \begin{cases} \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t) = \partial_2 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)), \\ \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c \mathcal{D}_t^\alpha p_\alpha(t) = -\partial_1 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)). \end{cases} \quad (7.15)$$

7.2.2 Transition problématique des solutions

Revenons sur l'hypothèse (C) et considérons quelques systèmes élémentaires avec $N = 1$. Afin de rester proche du formalisme initial, nous ne nous préoccupons pas dans ce paragraphe de questions d'homogénéité.

Exemple 7.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le Hamiltonien

$$H(x, p) = \frac{1}{n+1} p^{n+1} + \sin x.$$

Il vérifie

$$\begin{cases} \partial_1 H(x, p) = \cos x, \\ \partial_2 H(x, p) = p^n. \end{cases}$$

L'hypothèse (C) prend donc la forme suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} \cos \left(\int_0^\infty p_t(\tau) x(\tau) d\tau \right) = \int_0^\infty p_t(\tau) \cos(x(\tau)) d\tau, \\ \left(\int_0^\infty p_t(\tau) x(\tau) d\tau \right)^n = \int_0^\infty p_t(\tau) p(\tau)^n d\tau. \end{cases}$$

On sent bien que ces relations ont peu de chances d'être vérifiées, et encore moins pour tout $t \geq 0$.

Pour s'en assurer, prenons un exemple encore plus simple, où l'on peut montrer que (C) n'est pas vérifiée. Donnons auparavant un résultat élémentaire.

Lemme 7.2. Soit $\beta > 0$. Alors

$$\int_0^\infty p_t(\tau) \tau^\beta d\tau = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha\beta)} t^{\alpha\beta}.$$

Démonstration. Prenons la transformée de Laplace du membre de gauche :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty p_t(\tau) \tau^\beta d\tau \right) dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} p_t(\tau) dt \right) \tau^\beta d\tau, \\ &= s^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\tau s^\alpha} \tau^\beta d\tau, \\ &= s^{\alpha-1} \frac{\Gamma(1+\beta)}{(s^\alpha)^{1+\beta}}, \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{s^{1+\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{s^{1+\alpha\beta}} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{t^{\alpha\beta}}{\Gamma(1+\alpha\beta)} dt.$$

On conclut en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace. \square

Exemple 7.2. On considère le Hamiltonien

$$H(x, p) = \frac{1}{3}p^3 - x.$$

Les équations (EH) associées sont ici

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= \partial_2 H(x(t), p(t)) = p(t)^2, \\ \frac{d}{dt}p(t) &= -\partial_1 H(x(t), p(t)) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, la trajectoire issue de $(0, 0)$ est donnée par

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} x(t) &= \frac{t^3}{3}, \\ p(t) &= t. \end{cases}$$

D'après le lemme 7.2,

$$\begin{aligned} \partial_2 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)) &= p_\alpha(t)^2 = \left(\int_0^\infty p_t(\tau) \tau \, d\tau \right)^2, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)^2} t^{2\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_t(\tau) \partial_2 H(x(\tau), p(\tau)) \, d\tau &= \int_0^\infty p_t(\tau) \tau^2 \, d\tau, \\ &= \frac{2}{\Gamma(1 + 2\alpha)} t^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Toutefois, $\Gamma(1 + \alpha)^2 \neq \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2}$. Par exemple si $\alpha = 1/2$, $\Gamma(3/2)^2 = \pi/4$, alors que $\frac{\Gamma(2)}{2} = 1/2$. L'hypothèse (C) est donc fautive dans cet exemple.

Ce problème est en fait occulté dans [Sta06] par la notation utilisée. Par exemple $\partial_1 H(x_\alpha(t), p_\alpha(t))$ est noté $\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^\alpha}$. On a alors l'impression que l'on forme un nouvel hamiltonien que l'on dérive par rapport à de nouvelles variables (c'est ce que pense faire Stanislavsky), alors que le Hamiltonien est le même et que la dérivée partielle concerne toujours la première composante ; c'est seulement l'évaluation qui diffère. Ainsi, le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique "généralisé" $H_\alpha = \frac{1}{2}p_\alpha^2 + \frac{\omega^2}{2}x_\alpha^2$ considéré dans [Sta06] est en fait le Hamiltonien classique mais évalué en (x_α, p_α) . Au cours de conférences ou de lectures, nous avons rencontré cette confusion à plusieurs reprises et c'est pourquoi nous avons préféré ici ôter tout doute en notant ∂_i les dérivées partielles.

Précisons tout de même qu'il existe au moins un cas (élémentaire) où (C) est vraie.

Lemme 7.3. Si $H(x, p)$ est un polynôme en x et p de degré inférieur ou égal à 2, alors (C) est vérifiée.

Démonstration. D'après l'hypothèse sur H , pour $1 \leq i \leq 2$, il existe $A_i, B_i \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $C_i \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\partial_i H(x, p) = A_i x + B_i p + C_i.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \partial_i H(x_\alpha(t), p_\alpha(t)) &= A_i x_\alpha(t) + B_i p_\alpha(t) + C_i, \\ &= \int_0^\infty p_t(\tau) [A_i x(\tau) + B_i p(\tau) + C_i] \, d\tau, \\ &= \int_0^\infty p_t(\tau) \partial_i H(x(\tau), p(\tau)) \, d\tau. \end{aligned}$$

□

Toutefois, de tels systèmes (parmi lesquels on retrouve notamment l'oscillateur harmonique) sont évidemment intégrables et ne présentent donc pas de comportements chaotiques. Ils ne nous intéressent donc pas dans ce chapitre.

Ainsi, comme (\mathcal{C}) n'est pas vérifiée dans le cas général, le fait que (x, p) soit une solution de (EH) n'implique pas que (x_α, p_α) soit une solution de $(EH)_\alpha^S$. Même si l'on revient au formalisme lagrangien et que l'on effectue la transition $x(t) \rightarrow x_\alpha(t)$ comme nous allons le faire au paragraphe suivant, le fait que x soit solution de (EL) n'implique pas non plus que x_α soit solution de $(EL)_\alpha^+$. Le formalisme de Stanislvsky ne permet donc pas dans le cas général d'effectuer la transition $d/dt \rightarrow d^\alpha/dt^\alpha$ de notre cube sur les solutions de (EL) et (EH) .

Dans le cadre qui nous intéresse ici, nous allons maintenant voir qu'une transition plus faible peut être envisagée.

7.2.3 Complémentarité structurelle

Bien que les solutions ne se transportent pas lors du passage $t \rightarrow S(t)$, tentons d'exploiter la relation (7.7). Considérons un système lagrangien autonome \mathcal{S} de Lagrangien $L(x, v)$, évoluant sur $[0, b]$. Sa position au cours du temps est repérée par $x(t)$ et sa vitesse est définie par $v(t)$. Dans le cas classique, la dynamique du système est déterminée par la relation

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t). \quad (7.16)$$

Si maintenant la variable temporelle devient $S(t)$, il semble naturel de décrire \mathcal{S} à l'aide de $x_\alpha(t)$ et $v_\alpha(t)$, définies par (7.6). Dans ce cas, d'après (7.14), la relation (7.16) devient

$$\boxed{v_\alpha(t) = \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t)}. \quad (7.17)$$

L'utilisation du plongement fractionnaire asymétrique nécessite la dérivée ${}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha$, qui n'apparaît pas dans le formalisme de Stanislvsky. Toutefois, nous nous intéressons ici uniquement à la direction *passé* \rightarrow *futur*; par conséquent cette dérivée à droite ne porte que sur les variations. Celles-ci gardant un statut virtuel et ${}_t^c\mathcal{D}_b^\alpha$ n'étant finalement pas présente dans $(EL)_\alpha^+$, cela ne semble pas problématique.

D'après (7.17) on peut définir l'action lagrangienne à partir de (5.13) :

$$\mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha)(x_\alpha, 0) = \int_0^b L(x_\alpha(t), \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t)) dt.$$

La dynamique causale de \mathcal{S} est alors fixée par $(EL)_\alpha^+$, qui s'écrit ici

$$\forall t \in]0, b], \quad \partial_1 L(x_\alpha(t), \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t)) - \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha \partial_2 L(x_\alpha(t), \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t)) = 0.$$

La transition $t \rightarrow S(t)$ permet de passer de (7.16) à (7.17) et donc, au niveau des équations de la dynamique, de (EL) à $(EL)_\alpha^+$ (mais pas d'une solution de (EL) à une solution de $(EL)_\alpha^+$).

Passons au formalisme hamiltonien. On suppose que L vérifie la propriété de Legendre. Notons ici \tilde{p}_α le moment associé à x_α :

$$\boxed{\tilde{p}_\alpha(t) = \partial_2 L(x_\alpha(t), \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t))}.$$

On peut alors adapter le théorème 5.2 pour obtenir des équations proches de $(EH)_\alpha^S$.

Lemme 7.4. *Si x_α est solution de $(EL)_\alpha^+$ et si $\tilde{p}_\alpha(0) = 0$, alors $(x_\alpha, \tilde{p}_\alpha)$ est solution de $(EH)_\alpha^S$:*

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t) &= \partial_2 H(x_\alpha(t), \tilde{p}_\alpha(t)), \\ \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha \tilde{p}_\alpha(t) &= -\partial_1 H(x_\alpha(t), \tilde{p}_\alpha(t)). \end{cases} \quad (7.18)$$

Démonstration. La condition $\tilde{p}_\alpha(0) = 0$ est uniquement là pour que ${}_0\mathcal{D}_t^\alpha \tilde{p} = {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha \tilde{p}$. \square

Ces équations diffèrent de (7.12) par le moment utilisé. Comme pour l'hypothèse (C), \tilde{p}_α diffère de p_α dans le cas général. Le moment \tilde{p}_α peut toutefois sembler plus proche de la dynamique, puisqu'il est relié au formalisme lagrangien (et donc à un principe de moindre action) et ne fait pas intervenir (C) pour obtenir (7.18). Heureusement \tilde{p}_α et p_α coïncident pour un grand nombre de systèmes physiques.

Lemme 7.5. *Si \mathcal{S} est un système lagrangien naturel, alors $\tilde{p}_\alpha = p_\alpha$. Par conséquent, si x_α est solution de $(EL)_\alpha^+$ et si $p_\alpha(0) = 0$, alors (x_α, p_α) est solution de $(EH)_\alpha^S$.*

Démonstration. D'après l'exemple 3.2, il existe $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que

$$L(x, v) = \frac{1}{2} {}^t v M v - U(x).$$

Le moment p associé à x vérifie

$$p(t) = M \frac{d}{dt} x(t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} p_\alpha(t) &= \int_0^\infty p_t(\tau) M \frac{d}{d\tau} x(\tau) d\tau, \\ &= M \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t), \\ &= \partial_2 L(x_\alpha(t), \tau_0^{\alpha-1} {}_0^c\mathcal{D}_t^\alpha x_\alpha(t)), \end{aligned}$$

qui est exactement la définition de \tilde{p}_α . \square

On vient donc de voir que les équations fractionnaires $(EH)_\alpha^S$ de Stanislavsky pouvaient être obtenues à partir d'un principe de moindre action dans le cas des systèmes lagrangiens naturels, et ce sans passer par la condition (C). Celle-ci est remplacée par l'hypothèse que x_α soit solution de $(EL)_\alpha^+$.

Regardons maintenant dans quelle mesure cette dynamique avec temps interne peut être utilisée pour modéliser les systèmes chaotiques.

7.3 Lien avec les systèmes chaotiques ?

Le temps interne pourrait être relié au chaos hamiltonien par la décroissance polynomiale (6.3) des temps de récurrence par l'intermédiaire du théorème suivant.

Théorème 7.3. *Soit ρ une densité de probabilité définie sur \mathbb{R}^+ et telle que*

$$\exists \alpha > 0, \exists \kappa > 0, \quad \rho(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\kappa}{t^{1+\alpha}}. \quad (7.19)$$

- Si $\alpha \geq 2$, alors ρ appartient au domaine d'attraction de la loi gaussienne.
- Si $0 < \alpha < 2$, alors ρ appartient au domaine d'attraction d'une loi α -stable.

Démonstration. Voir [Fel71, p.577]. \square

L'équation (7.19) nous invite à revenir un instant sur l'homogénéité temporelle. Comme ρ doit être homogène à T^{-1} (d'après la condition de normalisation $\int_0^\infty \rho(t) dt = 1$), la constante κ doit être homogène à T^α ; il doit donc exister une constante de temps τ_0 telle que $\kappa = \tau_0^\alpha$. Notre constante de temps extrinsèque du chapitre 5 pourrait donc être déterminée par la relation asymptotique suivante :

$$\tau_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1+1/\alpha} P_{rec}(t)^{1/\alpha}.$$

Si on prend pour ρ la distribution des temps de récurrences P_{rec} et si $1 < \gamma_{rec} < 2$, alors P_{rec} appartient au domaine d'attraction d'une loi α -stable, avec $\alpha = \gamma_{rec} - 1 \in]0, 1[$. On peut dans ce cas appliquer le formalisme de Stanislavsky pour obtenir un temps interne $S(t)$. Une telle démarche consiste ainsi à ne considérer que les points d'une trajectoire lors des premiers retours. En première approximation cela revient donc à construire une nouvelle dynamique, discrète, à partir des points successifs apparaissant dans une section de Poincaré. Puisque cette dernière donne une description satisfaisante de la dynamique globale, une telle discrétisation semble pertinente. On construit alors une dynamique continue associée en passant à la limite (7.1); le temps devient alors $S(t)$. Ce passage à la limite implique de considérer un grand nombre de temps de premiers retours; la nouvelle dynamique prend donc son sens sur des temps longs. Même si cette approche devrait être définie de manière plus rigoureuse, elle semblerait prometteuse.

Le problème est qu'il est impossible d'avoir $1 < \gamma_{rec} < 2$ à cause du lemme de Kac! Son corollaire 6.2 stipule en effet que $\gamma_{rec} > 2$. Il semble donc qu'il y ait incompatibilité stricte entre l'analyse des systèmes chaotiques de Zaslavsky et le formalisme de Stanislavsky. Par ailleurs, nous devons ici admettre que n'étant pas familier des lois stables, nous n'avons pas réussi à déterminer ce qu'il adviendrait du formalisme de Stanislavsky pour $2 < \gamma_{rec} < 3$ (c'est-à-dire $1 < \alpha < 2$ dans (7.19)). Toutefois même si ce point technique était éclairci, il ne modifierait pas cette incompatibilité. Mentionnons deux pistes qui pourraient être envisagées afin de contourner cet obstacle.

La première consisterait à étudier la dynamique initiale (en t), restreinte à un domaine G de mesure nulle ($\mu(G) = 0$), par exemple une variété de dimension $d \leq 2N - 1$, telle que presque tous les points de G admettent des temps de premiers retours. Dans ce cas, le théorème 6.3 ne s'applique plus et il serait (théoriquement) possible d'avoir

$$P_{rec}(t; G) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\kappa}{t^{1+\alpha}},$$

avec $0 < \alpha < 1$.

La seconde voie consisterait à donner une autre signification aux T_i , telle que leur loi ne soit plus $P_{rec}(t)$, mais $\int_t^\infty P_{rec}(\tau) d\tau$. Dans ce cas, on obtiendrait la relation $\alpha = \gamma_{rec} - 2$ qui reconcilierait exactement les deux approches. Reste à trouver cette signification...

Remarque 7.1. *Il se pourrait que le temps interne soit plus adapté à la description probabiliste de la section 6.3. Partons d'un système initial régi par le temps t . Choisissons de le décrire de manière probabiliste à l'aide de $P(x, t)$ et supposons que l'équation caractéristique soit*

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (7.20)$$

Supposons maintenant qu'en prenant en compte d'autres effets, on obtienne un nouveau système évoluant cette fois selon $S(t)$. Il devient alors décrit par $P_\alpha(x, t)$, défini par

$$P_\alpha(x, t) = \int_0^\infty p_t(\tau) P(x, \tau) d\tau.$$

Notons ${}^c_0\mathcal{D}_t^\alpha P_\alpha(x, t) = {}^c_0\mathcal{D}_t^\alpha P_\alpha^x(t)$ où $P_\alpha^x : t \mapsto P_\alpha(x, t)$. Comme précédemment, $P_\alpha(x, t)$ vérifie

$$\tau^{\alpha-1} {}^c_0\mathcal{D}_t^\alpha P_\alpha(x, t) = \int_0^\infty p_t(\tau) \frac{\partial}{\partial t} P(x, \tau) d\tau.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_\alpha(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty p_t(\tau) P(x, \tau) d\tau, \\ &= \int_0^\infty p_t(\tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $P(x, t)$ est solution de (7.20), alors $P_\alpha(x, t)$ est solution de

$$\tau^{\alpha-1} {}_0^c D_t^\alpha P_\alpha(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_\alpha(x, t).$$

Cette équation ne nécessite pas d'hypothèse du type (C) et permettrait de décrire des phénomènes de subdiffusion dans le nouveau système.

On obtient ici la transition que l'on aurait souhaité pour les trajectoires. Toutefois, pour que cette transition soit pertinente, il faudrait non seulement donner un sens aux T_i permettant d'obtenir $S(t)$, mais il faudrait déjà en donner un au système initial. Intuitivement, on aurait envie de considérer initialement un système hyperbolique avec sa mer chaotique (décrit par (7.20)), puis de lui ajouter des pièges fractals pour obtenir le système qui nous intéresse. Ce point de vue ne s'appuyant sur aucune base rigoureuse, cette piste reste donc très hypothétique. De plus, même si cette transition était justifiée, elle ne s'inscrirait pas dans notre cube puisque la description avec $P(x, t)$ ne constitue pas une dynamique lagrangienne ni hamiltonienne².

Notons toutefois que cette transition est valide pour toute équation aux dérivées partielles du type

$$\sum_{0 \leq j, k \leq m} c_{jk} \frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial t^k} [a_{jk}(x) u(x, t)] = 0.$$

Il serait donc possible que le temps interne permette de mieux comprendre la transition vers le fractionnaire dans d'autres domaines que le chaos hamiltonien.

Nous venons de voir que malgré une problématique prometteuse, le formalisme de Stanislavsky semble mal adapté pour relier plongement fractionnaire et chaos hamiltonien, à cause de l'hypothèse (C) et du lemme de Kac. Nous avons alors cherché d'autres pistes. L'une d'elle a partiellement abouti ; nous la présentons au chapitre suivant.

²Même si nous trouverons une formulation variationnelle de (7.20) au chapitre 9, cela ne conférera pas de statut dynamique à $P(x, t)$.

Chapitre 8

Pièges fractals et dynamique fractionnaire

Face aux difficultés présentées au chapitre précédent, nous avons cherché d'autres voies pour tenter de donner un sens à la dynamique fractionnaire dans les systèmes hamiltoniens chaotiques. Nous avons alors découvert le travail de Hilfer, justement sur la dynamique fractionnaire dans des systèmes dynamiques généraux. Le fait que ce formalisme s'appuie sur les temps de récurrences nous a motivé pour déterminer dans quelle mesure il pourrait s'accorder avec l'analyse de Zaslavsky. Cette étude nous a conduit à proposer un modèle simple de dynamique inspiré par les travaux de ces deux chercheurs, et pour lequel une dérivée fractionnaire apparaît naturellement lorsque l'on introduit un piège fractal. Ce chapitre joue le rôle d'une version plus aboutie de [Ini10].

8.1 Dynamique fractionnaire selon Hilfer

Dans [Hil95a, Hil95b, Hil00b, Hil03], Hilfer s'attache à trouver des causes profondes à la dynamique fractionnaire. Dans [Hil00b] et [Hil03], il s'intéresse à l'opérateur d'évolution temporelle et montre, à partir de considérations très générales sur la structure du temps, que la dérivée associée à cet opérateur (après éventuellement une renormalisation temporelle) est une dérivée fractionnaire. La dérivée classique n'est alors qu'une dérivée fractionnaire d'ordre 1. Cette dynamique fractionnaire est de plus intimement liée à la notion d'irréversibilité. Dans [Hil95a] et [Hil95b], ce formalisme est appliqué à des systèmes dynamiques généraux. Résumons dans cette section les idées principales de ces deux articles.

8.1.1 Dynamique de sous-systèmes

Précisons tout d'abord que contrairement à notre étude, Hilfer s'intéresse plutôt aux systèmes de physique statistique, possédant de nombreux degrés de libertés. Plus précisément, il cherche à comprendre la dynamique de sous-systèmes avec un nombre restreint de degrés de libertés et donc de mesure nulle.

On considère un système dynamique défini dans un espace des phases Γ compact, de flot ϕ^t et de mesure μ . Soit G un sous-ensemble de Γ . Supposons que l'on n'ait accès qu'à G ; comment faire pour comprendre la dynamique restreinte à G ?

Une trajectoire typique issue de $z \in G$ quittera G au bout d'un certain temps; on perdra alors sa trace. Heureusement, si $\mu(G) > 0$, le théorème de récurrence de Poincaré assure qu'elle reviendra presque sûrement dans G .

Hilfer utilise une version discrète du temps de premier retour, plus courante que la définition 6.3; pour $\Delta t > 0$, le temps de premier retour discret (appartenant à $\Delta t \mathbb{Z}$) d'un point $z \in G$, noté $\tau_G(z)$, est défini par

$$\tau_G(z) = \Delta t \cdot \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid \phi^{k\Delta t} z \in G\}.$$

Si $\mu(G) > 0$, d'après le lemme de Kac, le temps moyen de premier retour $\langle \tau \rangle$ défini ici par

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\mu(G)} \int_{z \in G} \tau_G(z) d\mu,$$

est fini.

Hilfer propose alors de suivre les trajectoires à l'aide de l'application suivante :

$$\begin{aligned} S : G &\longrightarrow G \\ z &\longmapsto \phi^{\tau_G(x)} z. \end{aligned} \tag{8.1}$$

À défaut d'avoir une description continue de la dynamique, les itérations de S permettent de suivre par intermittence les trajectoire issues de G . Afin d'avoir une vision globale de la dynamique restreinte à G (c'est-à-dire en regardant des ensembles de trajectoires), Hilfer suggère d'utiliser une application du type $\phi^{(\tau)}$ pour étendre S . Il faudrait alors préciser les objets sur lesquels elle agit. Mais dans tous les cas, cette application risque de ne pas être involutive et ne pourra donc plus être itérée. De plus, si $\mu(G) = 0$, le lemme de Kac ne s'applique plus et une telle démarche n'est plus possible.

Si $\mu(G) = 0$, Hilfer suppose qu'il existe une nouvelle mesure μ' , telle que $0 < \mu'(G) < \infty$ et suppose que pour presque tout $z \in G$, $\tau_G(z) < \infty$. Pour regrouper les deux cas de figures, on note dans tous les cas μ' la mesure, et si $\mu(G) > 0$, on prend alors $\mu' = \mu$. On note aussi $\mathcal{T}'(G)$ la tribu associée à (G, μ') . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Hilfer introduit ensuite les ensembles

$$\bar{G}_k(\Delta t) = \{z \in G \mid \tau_G(z) = k\Delta t\},$$

ainsi que les réels

$$p_k(\Delta t) = \frac{\mu'(\bar{G}_k(\Delta t))}{\mu'(G)}.$$

Comme tous les éléments de G admettent des temps de premiers retours, les $\bar{G}_k(\Delta t)$ forment une partition de G et

$$\sum_{k \geq 1} p_k(\Delta t) = 1.$$

L'évolution de mesures permet de donner une description de la dynamique globale. Si ρ est une mesure définie sur G , on pose

$$\forall B \in \mathcal{T}'(G), \forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho(B, t) = \rho(\phi^{-t}B).$$

Hilfer étend S à ces mesures en posant

$$\forall B \in \mathcal{T}'(G), \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad S(\Delta t)\rho(B, t_0) = \sum_{k \geq 1} p_k(\Delta t) \phi^{k\Delta t} \rho(B, t_0),$$

soit

$$\boxed{S(\Delta t)\rho(B, t_0) = \sum_{k \geq 1} p_k(\Delta t) \rho(B, t_0 - k\Delta t).} \tag{8.2}$$

L'équation (8.2) est en fait un produit de convolution discret entre $k \mapsto \rho(B, t_0 - k\Delta t)$ et

$$p_{\Delta t} : k \mapsto p_k(\Delta t).$$

On note ainsi

$$S(\Delta t)\rho(B, t_0) = [p_{\Delta t} \star \rho(B, \cdot)](t_0).$$

L'opérateur $S(\Delta t)$ représente l'"évolution infinitésimale" d'ordre Δt d'un ensemble de trajectoires (celles issues de B) suivant le flot ϕ^t .

Les itérations de $S(\Delta t)$ permettent à présent de comprendre la dynamique "globale" (dite aussi moyenne) restreinte à G et de résolution Δt :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad S^N(\Delta t)\rho(B, t_0) = [p_{\Delta t}^N \star \rho(B, \cdot)](t_0),$$

où $p_{\Delta t}^N$ est défini par

$$p_{\Delta t}^N = \underbrace{p_{\Delta t} \star \dots \star p_{\Delta t}}_{N \text{ fois}}.$$

8.1.2 Renormalisations et générateur infinitésimal

Hilfer souhaite ensuite passer à la limite continue, en faisant notamment tendre N vers $+\infty$. Dans [Hil95b] la "limite continue" est considérée : Δt est relié à N et vérifie $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Delta t = 0$. Au contraire, dans [Hil95a], $\lim_{N \rightarrow +\infty} \Delta t = +\infty$ et cette limite est appelée "ultra-long time limit". Ces deux limites constituent des renormalisations temporelles (comme pour le temps interne de Stanislavsky) ; à partir d'une dynamique classique dépendant de t , elles induisent de nouvelles dynamiques, dépendant d'un nouveau temps \tilde{t} . Ces deux cas s'appuient sur les mêmes idées et conduisent à des résultats similaires.

Pour que chaque limite ait un sens, il faut que celle de $p_{\Delta t}^N$ existe et soit encore une densité de probabilité. Autrement dit, il faut que $p_{\Delta t}$ appartienne au domaine d'attraction d'une loi α -stable, avec $0 < \alpha \leq 2$.

Plusieurs variables et paramètres entrent alors en jeu pour définir la loi limite (en plus de α) et la nouvelle dynamique, mais nous n'avons pas réussi à tous les appréhender correctement. Nous nous contentons donc ici de donner une interprétation personnelle (non rigoureuse).

La loi limite α -stable dépend a priori de plusieurs paramètres (voir [Fel71, p.569]), dont un paramètre $\tilde{\Delta t}$ caractérisant la largeur de la distribution. De même que pour le temps interne de Stanislavsky, le fait que les temps de récurrences soient positifs implique $0 < \alpha \leq 1$ et fixe aussi les paramètres restant de cette loi. On peut donc noter $p_{\tilde{\Delta t}}^\alpha$ cette loi limite. Elle peut en fait s'écrire sous la forme

$$p_{\tilde{\Delta t}}^\alpha(t) = \frac{\tau^{1/\alpha-1}}{\tilde{\Delta t}^{1/\alpha}} h_\alpha \left(\frac{t \tau^{1/\alpha-1}}{\tilde{\Delta t}^{1/\alpha}} \right),$$

où τ est une constante de temps positive et h_α une fonction spéciale (H-fonction) dont la transformée de Laplace vérifie

$$\mathcal{L}[h_\alpha](s) = e^{-s^\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}[p_{\tilde{\Delta t}}^\alpha](s) = e^{-\tilde{\Delta t} s^\alpha}. \quad (8.3)$$

Le nouvel opérateur d'évolution infinitésimale, noté \tilde{S} , vérifie ainsi

$$\tilde{S}(\tilde{\Delta t})\rho(B, \tilde{t}_0) = [p_{\tilde{\Delta t}}^\alpha \star \rho(B, \cdot)](\tilde{t}_0).$$

L'ensemble $\{\tilde{S}(\tilde{\Delta t})\}_{\tilde{\Delta t} \geq 0}$ forme un semi-groupe à un paramètre :

- $\tilde{S}(0) = \text{id}$,
- $\forall \tilde{\Delta t}_1, \tilde{\Delta t}_2 \in \mathbb{R}^+, \quad \tilde{S}(\tilde{\Delta t}_1) \circ \tilde{S}(\tilde{\Delta t}_2) = \tilde{S}(\tilde{\Delta t}_1 + \tilde{\Delta t}_2)$.

La seconde relation peut être vérifiée grâce à (8.3). Effectivement,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[p_{\tilde{\Delta t}_1}^\alpha \star p_{\tilde{\Delta t}_2}^\alpha](s) &= \mathcal{L}[p_{\tilde{\Delta t}_1}^\alpha](s) \mathcal{L}[p_{\tilde{\Delta t}_2}^\alpha](s), \\ &= e^{-\tilde{\Delta t}_1 s^\alpha} e^{-\tilde{\Delta t}_2 s^\alpha} = e^{-(\tilde{\Delta t}_1 + \tilde{\Delta t}_2) s^\alpha}, \\ &= \mathcal{L}[p_{\tilde{\Delta t}_1 + \tilde{\Delta t}_2}^\alpha](s). \end{aligned}$$

Les paramètres $\widetilde{\Delta t}$ et τ n'apparaissent pas sous cette forme dans [Hil95a] ; $\widetilde{\Delta t}$ est noté D , \widetilde{S} dépend de $D^{1/\alpha}$ et τ n'est pas présent. Comme on vient toutefois de le voir, le paramètre de semi-groupe est bien $\widetilde{\Delta t}$. Cette remarque implique l'introduction de τ afin de respecter l'homogénéité dimensionnelle.

Si ce groupe possède des propriétés de continuité suffisantes, il est alors possible de lui associer un générateur infinitésimal A ([Fel71, p.294, p.356]). Cet outil est utilisé pour l'étude d'équations aux dérivées partielles et est défini par

$$A\rho(B, \tilde{t}_0) = \lim_{\widetilde{\Delta t} \rightarrow 0^+} \frac{\widetilde{S}(\widetilde{\Delta t}) - \widetilde{S}(0)}{\widetilde{\Delta t}} \rho(B, \tilde{t}_0).$$

Hilfer montre alors qu'il est égal (au signe près) à la dérivée fractionnaire de Marchaud à gauche d'ordre α . Avec la constante τ , cette relation prend la forme suivante :

$$\boxed{A\rho(B, \tilde{t}_0) = -\tau^{\alpha-1} \mathbf{D}_+^\alpha \rho(B, \tilde{t}_0).} \quad (8.4)$$

Notons que l'on retrouve une dérivée fractionnaire homogène du type (5.31).

Pour résumer, Hilfer montre que la dynamique de sous-systèmes peut devenir, sur des temps longs, de nature fractionnaire. Contrairement à Zaslavsky, l'introduction de la dérivée fractionnaire est ici pleinement justifiée ; le lien entre dynamiques classique et fractionnaire apparaît clairement. Par contre, si la définition de cette dérivée est bien spécifiée (dérivée de Marchaud), l'ordre de dérivation α reste indéterminé ; contrairement à l'analyse de Zaslavsky, il n'est pas relié à la dynamique initiale.

Nous avons alors tenté d'inclure l'analyse de Zaslavsky sur les pièges fractals dans ce formalisme pour préciser cet exposant. Tout en restant dans une démarche proche de celle d'Hilfer, nous proposons ici un modèle simplifié de dynamique qui vise à relier ces deux approches.

8.2 Modèle simple

On considère un système hamiltonien de Hamiltonien H , de flot ϕ^t avec $t \in \mathbb{R}$ et évoluant dans un espace des phases Γ compact. Soit μ la mesure de Lebesgue définie sur Γ . Soit $G \subset \Gamma$ et soit μ' une mesure telle que $0 < \mu'(G) < \infty$ (si $\mu(G) > 0$, on prend $\mu' = \mu$) et invariante par le flot :

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{T}'(G), \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu'(\phi^t B) = \mu'(B).}$$

Soit $\mathcal{T}'(G)$ la tribu associée à (G, μ') . Là aussi, on souhaite comprendre la dynamique restreinte à G , pour des ensembles de trajectoires. Autrement dit, on s'intéresse à l'évolution de sous-ensembles de G . Introduisons donc l'application N définie par

$$\begin{aligned} N : \mathcal{T}'(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ B &\longmapsto N_B, \end{aligned}$$

où N_B est une fonction réelle définie par

$$\begin{aligned} N_B : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, \mu'(G)] \\ t &\longmapsto \mu'((\phi^t B) \cap G). \end{aligned}$$

Soit $B \in \mathcal{T}'(G)$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. On cherche à connaître l'évolution infinitésimale de $N_B(t_0)$. Pour simplifier le problème, on discrétise la dynamique et on introduit une "résolution" caractéristique $\Delta t > 0$, que l'on finira par faire tendre vers 0 pour obtenir des informations sur la dynamique continue.

8.2.1 Hypothèses sur la dynamique restreinte

À l'aide des outils présentés au chapitre 6, distinguons la dynamique dans G de celle hors de G .

Définition 8.1. *On dit que la dynamique dans G est de résolution Δt si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $\forall z \in G_{rec}, \exists k \in \mathbb{N}^*, \tau_{int}(\phi^{\tau_{rec}(z;G)}z; G) = k\Delta t,$
2. $\forall z \in G, \phi^{\tau_{int}(z;G)}z \in G,$
3. $\forall z \in G_{rec}, \phi^{\tau_{rec}(z;G)}z \notin G.$

La première condition implique que toute trajectoire arrivant dans G y reste au moins pendant un temps Δt . Les deux suivantes précisent simplement où se situent les trajectoires lorsqu'elles atteignent le bord de G , à partir respectivement de l'intérieur et de l'extérieur de G .

Comme nous nous restreignons à la dynamique dans G , tentons d'obtenir indirectement des informations sur l'extérieur. Soit $K \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$ une famille de réels positifs.

Définition 8.2. *On dit que $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$ est une famille complète de temps extérieurs pour G si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $0 < T_1(\Delta t) < T_2(\Delta t) < \dots < T_K(\Delta t),$
2. $\forall z \in G, \exists 1 \leq k \leq K, \tau_{ext}(z; G) = T_k(\Delta t).$

En particulier, l'existence d'une telle famille implique que $G_{ext} = \emptyset$. Cette définition conditionne l'évolution de la dynamique vers le futur. Nous devons supposer qu'elle est aussi valable vers le passé.

Définition 8.3. *On dit que la dynamique dans G est cyclique si*

$$\forall z \in G, \forall t > 0, \exists t_1 > t, \phi^{-t_1}z \in G.$$

En suivant l'approche de Hilfer, décomposons G à l'aide de temps caractéristiques. Pour tout $B \subset \Gamma$ tel que $0 < \mu'(B \cap G) < \infty$, on pose

$$B_0(\Delta t) = \{z \in B \cap G \mid \tau_{int}(z; G) \geq \Delta t\},$$

et pour tout $k \geq 1$,

$$B_k(\Delta t) = \{z \in B \cap G \mid \tau_{int}(z; G) < \Delta t, \tau_{ext}(z; G) = T_k(\Delta t)\}.$$

Par conséquent, si $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$ est une famille complète de temps extérieurs, alors $(B_k(\Delta t))_{k \geq 0}$ forme une partition de $B \cap G$. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(B \cap G)_k(\Delta t) = B_k(\Delta t)$.

On pose ensuite, pour tout $0 \leq k \leq K$,

$$p_k(B, \Delta t) = \frac{\mu'(B_k(\Delta t))}{\mu'(B \cap G)}.$$

Intuitivement, ces réels forment une densité de probabilité associée aux temps extérieurs. Si $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$ est une famille complète de temps extérieurs, alors

$$\sum_{k=0}^K p_k(B, \Delta t) = 1.$$

De même que pour la limite P_{rec} au chapitre 6, on va supposer que cette densité est indépendante de l'ensemble B considéré.

Définition 8.4. On dit que G est uniformément mélangé par $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$ si $(T_k(\Delta t))_{1 \leq k \leq K}$ est une famille complète de temps extérieurs telle que pour tout $B \subset \Gamma$ vérifiant $0 < \mu'(B \cap G) < \infty$,

$$p_k(B, \Delta t) = p_k(G, \Delta t).$$

On pose dans ce cas $p_k(\Delta t) = p_k(G, \Delta t)$.

Autrement dit, cela revient à supposer que les $T_k(\Delta t)$ ont une influence uniforme dans G .

Avec ces différents temps caractéristiques, la variable temporelle t prend ses valeurs dans l'ensemble

$$\mathcal{T}(\Delta t) = \left\{ \sum_{k \in I} T_k(\Delta t) x_k \mid I \subset \{0, \dots, K\}, \text{Card}(I) < \infty, \forall k \in I, x_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

où l'on a posé $T_0(\Delta t) = \Delta t$.

Lemme 8.1. L'ensemble $\mathcal{T}(\Delta t)$ est dénombrable.

Démonstration. Notons $\mathcal{P}_f(K)$ l'ensemble des parties finies de $\{0, \dots, K\}$. Comme c'est un ensemble dénombrable, il existe une application $J : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_f(K)$ bijective. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{T}_j(\Delta t) = \left\{ \sum_{k \in J(j)} T_k(\Delta t) x_k \mid \forall k \in J(j), x_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On a ainsi $\mathcal{T}(\Delta t) = \bigcup_{j \geq 0} \mathcal{T}_j(\Delta t)$.

Notons $C(j)$ le cardinal de $J(j)$ et $\{n_{j,1}, \dots, n_{j,C(j)}\}$ les éléments de $J(j)$. L'application

$$\begin{aligned} f_j : \quad \mathbb{Z}^j &\longrightarrow \mathcal{T}_j(\Delta t) \\ (x_1, \dots, x_j) &\longmapsto \sum_{k=1}^{C(j)} T_{n_{j,k}}(\Delta t) x_k \end{aligned}$$

est surjective, donc $\mathcal{T}_j(\Delta t)$ est dénombrable. Finalement, $\mathcal{T}(\Delta t)$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. \square

Illustrons cet ensemble avec quelques exemples simples.

Exemple 8.1.

- $K = 1, T_1(\Delta) = 2\Delta t : \mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t \mathbb{Z}$.
- $K = 1, T_1(\Delta) = \Delta t/2 : \mathcal{T}(\Delta t) = (\Delta t/2) \mathbb{Z}$.
- $K = 1, T_1(\Delta) = \sqrt{2}\Delta t : \mathcal{T}(\Delta t)$ est dense dans \mathbb{R} .
- $K = +\infty, \forall k \geq 1, \exists n_k \in \mathbb{N}^*, T_k(\Delta t) = n_k \Delta t : \mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t \mathbb{Z}$.

La fonction N_B change donc uniquement de valeur aux temps de $\mathcal{T}(\Delta t)$. L'objectif est ainsi de déterminer $N_B(t)$ pour tout $t \in \mathcal{T}(\Delta t)$. Comme $\mathcal{T}(\Delta t)$ est dénombrable, on peut déterminer ces valeurs de proche en proche. Nous allons ainsi tenter de donner une relation de récurrence permettant de déterminer les états successifs de la dynamique restreinte à G . Plus précisément, nous allons obtenir une formule proche de (8.2) lorsque $\mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t \mathbb{Z}$ et voir dans quelle mesure elle peut être généralisée.

Précisons toutefois que les distances entre deux instants successifs (les "crans") ne sont pas forcément de la même taille. Il peut même n'exister aucun plus petit cran tel que tous les autres soient des multiples. La variable temporelle peut donc ne pas s'écouler de manière linéaire ; on retrouve ici une partie de l'approche de Stanislavsky sur le temps (même si dans notre cas le temps reste déterministe).

8.2.2 Cas $\mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t\mathbb{Z}$

Supposons que pour tout $k \geq 1$, il existe $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k(\Delta t) = n_k \Delta t$. Dans ce cas, $\mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t\mathbb{Z}$. Remarquons que la réciproque est aussi vraie, puisque $T_k(\Delta t) \in \mathcal{T}(\Delta t)$ par définition. La relation de récurrence est alors donnée par le résultat suivant.

Théorème 8.1. *On suppose que la dynamique dans G est de résolution Δt et cyclique, et que G est uniformément mélangé par $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$. Si $\mathcal{T}(\Delta t) = \Delta t\mathbb{Z}$, alors*

$$\boxed{\forall t_0 \in \mathcal{T}(\Delta t), \quad N_B(t_0 + \Delta t) = p_0(\Delta t)N_B(t_0) + \sum_{k=1}^K p_k(\Delta t)N_B(t_0 - T_k(\Delta t)).} \quad (8.5)$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas $K = 1$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_1(\Delta t) = n_1 \Delta t$. Soit $t_0 \in \mathcal{T}(\Delta t)$. Rappelons d'abord que

$$N_B(t_0 + \Delta t) = \mu'(\phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G).$$

Montrons que

$$\phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G = \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) \cup \phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t)),$$

et que la réunion est disjointe.

Soit $z \in \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t))$. Il existe $y \in [\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)$ tel que $z = \phi^{\Delta t}y$. Par définition de $[\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)$, $y \in \phi^{t_0}B$ et $\tau_{int}(y; G) \geq \Delta t$. Comme la dynamique dans G est de résolution Δt , $\phi^{\Delta t}y \in G$ et donc $z \in G$. Comme $y \in \phi^{t_0}B$, $z \in \phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B)$. Par conséquent,

$$\phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) \subset \phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G.$$

Soit $z \in \phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t))$. Il existe $y \in [\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t)$ tel que $z = \phi^{(n_1+1)\Delta t}y$. Ainsi, $y \in \phi^{t_0-n_1\Delta t}B$, et donc $z \in \phi^{(n_1+1)\Delta t}(\phi^{t_0-n_1\Delta t}B) = \phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B)$. Par ailleurs, $\tau_{int}(y; G) < \Delta t$ et $\tau_{ext}(y; G) = n_1\Delta t$. Comme la dynamique dans G est de résolution Δt , $\phi^{n_1\Delta t}y \notin G$, mais $\phi^{(n_1+1)\Delta t}y \in G$. Ainsi $z \in G$. On a donc

$$\phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t)) \subset \phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G.$$

Supposons maintenant qu'il existe $z \in (\phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G)$ tel que $z \notin \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t))$ et $z \notin \phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t))$. Comme $z \in \phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B)$, $\phi^{-\Delta t}z \in \phi^{t_0}B$ (car $\phi^{\Delta t}$ est bijective, de réciproque $\phi^{-\Delta t}$). Si $\phi^{-\Delta t}z \in G$, alors $\phi^{-\Delta t}z \in \phi^{t_0}B \cap G$. Comme $\phi^{\Delta t}(\phi^{-\Delta t}z) = z \in G$, on en déduit que $\phi^{-\Delta t}z \in [\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)$. Ainsi $z \in \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t))$, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, $\phi^{-\Delta t}z \notin G$. Comme la dynamique dans G est cyclique et de résolution Δt , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{-(n+1)\Delta t}z \in G$. Dans ce cas, n_1 est tel que

$$\phi^{-(n_1+1)\Delta t}z \in G \quad \text{et} \quad \phi^{-n_1\Delta t}z \notin G.$$

Posons $x = \phi^{-(n_1+1)\Delta t}z$. Comme $z \in \phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B)$, $x \in \phi^{t_0-n_1\Delta t}B$. Ainsi, $x \in \phi^{t_0-n_1\Delta t}B \cap G$. Comme $\tau_{int}(x; G) < \Delta t$, $x \in [\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t)$. Par conséquent, $z \in \phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t))$, ce qui est contradictoire.

On a donc

$$\phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G = \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) \cup \phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t)).$$

Supposons maintenant qu'il existe $z \in \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) \cap \phi^{(n_1+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t))$. Comme $z \in \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t))$, il existe $y_0 \in G$ tel que $z = \phi^{\Delta t}y_0$. Ainsi, $\phi^{-\Delta t}z \in G$.

Par ailleurs, il existe $y_1 \in [\phi^{t_0-n_1\Delta t}B]_1(\Delta t)$ tel que $z = \phi^{(n_1+1)\Delta t}y_1$. Comme la dynamique dans G est de résolution Δt , $\phi^{n_1\Delta t}y_1 \notin G$. Par conséquent, $\phi^{-\Delta t}z \notin G$, ce qui est contradictoire. La réunion est donc disjointe.

Si maintenant K est quelconque, pour tout $1 \leq k \leq K$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $T_k(\Delta t) = n_k\Delta t$. On montrerait de même que

$$\phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G = \phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) \bigcup_{k=1}^K \phi^{(n_k+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_k\Delta t}B]_k(\Delta t)), \quad (8.6)$$

et que tous les ensembles du membre de droite sont disjoints.

En passant aux mesures dans l'équation (8.6), on obtient alors

$$\mu'(\phi^{\Delta t}(\phi^{t_0}B) \cap G) = \mu'(\phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t))) + \sum_{k=1}^K \mu'(\phi^{(n_k+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_k\Delta t}B]_k(\Delta t))). \quad (8.7)$$

Comme on a supposé que μ' était invariante par le flot,

$$\mu'(\phi^{\Delta t}([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t))) = \mu'([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)),$$

et pour tout $1 \leq k \leq K$,

$$\mu'(\phi^{(n_k+1)\Delta t}([\phi^{t_0-n_k\Delta t}B]_k(\Delta t))) = \mu'([\phi^{t_0-n_k\Delta t}B]_k(\Delta t)).$$

L'équation (8.7) devient ainsi

$$N_B(t_0 + \Delta t) = \mu'([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) + \sum_{k=1}^K \mu'([\phi^{t_0-n_k\Delta t}B]_k(\Delta t)). \quad (8.8)$$

Comme G est uniformément mélangé par $\{T_k(\Delta t)\}_{1 \leq k \leq K}$,

$$\begin{aligned} \mu'([\phi^{t_0}B]_0(\Delta t)) &= p_0(\Delta t)\mu'(\phi^{t_0}B \cap G), \\ &= p_0(\Delta t)N_B(t_0), \end{aligned}$$

et pour tout $1 \leq k \leq K$,

$$\begin{aligned} \mu'([\phi^{t_0-n_k\Delta t}B]_k(\Delta t)) &= p_k(\Delta t)\mu'(\phi^{t_0-n_k\Delta t}B \cap G), \\ &= p_k(\Delta t)N_B(t_0 - n_k\Delta t). \end{aligned}$$

Finalement, (8.8) devient

$$N_B(t_0 + \Delta t) = p_0(\Delta t)N_B(t_0) + \sum_{k=1}^K p_k(\Delta t)N_B(t_0 - T_k(\Delta t)),$$

ce qui achève la preuve. □

On retrouve ainsi une relation proche de (8.2). Donnons une illustration simple de cette dynamique.

Exemple 8.2. Prenons $K = 1$ et $T_1(\Delta t) = 2\Delta t$. Soit $B \in \mathcal{T}'(G)$ et $t_0 \in \Delta t\mathbb{Z} : N_B(t_0) = \mu'(B)$. Par souci de clarté, on suppose ici que pour tout $t < t_0$, $\phi^t B \subset G$. Déterminons quelques états suivants.

1. En t_0^+ , les trajectoires issues de B se scindent : les unes restent dans G et les autres quittent G pendant $2\Delta t$. Appelons B_0 l'ensemble des conditions initiales des premières et B_1 celui des secondes. Les proportions respectives sont p_0 et p_1 (par souci de lisibilité, on omet ici la dépendance en Δt). Ainsi, $\mu'(B_0) = p_0\mu'(B)$ et $\mu'(B_1) = p_1\mu'(B)$. Un schéma de la dynamique est donné en figure 8.1. Le rectangle supérieur symbolise l'extérieur de G .
2. En $t_0 + \Delta t$, seul B_0 reste présent dans G :

$$N_B(t_0 + \Delta t) = \mu'(B_0) = p_0 N_B(t_0).$$

Hors de G , B_1 évolue en B_{11} .

En $t_0^+ + \Delta t$, c'est maintenant B_0 qui se scinde de la même manière que B , pour former B_{00} et B_{01} : $\mu'(B_{00}) = p_0\mu'(B_0)$ et $\mu'(B_{01}) = p_1\mu'(B_0)$.

3. Les trajectoires qui ont quitté G en t_0^+ ne reviennent qu'en $t_0^+ + 2\Delta t$. Par conséquent, en $t_0 + 2\Delta t$, seul B_{00} est présent dans G :

$$N_B(t_0 + 2\Delta t) = \mu'(B_{00}) = p_0 N_B(t_0 + \Delta t).$$

En $t_0^+ + 2\Delta t$, B_{00} se scinde en B_{000} et B_{001} , B_{11} revient (en B_{110}) et B_{01} reste hors de G en devenant B_{011} .

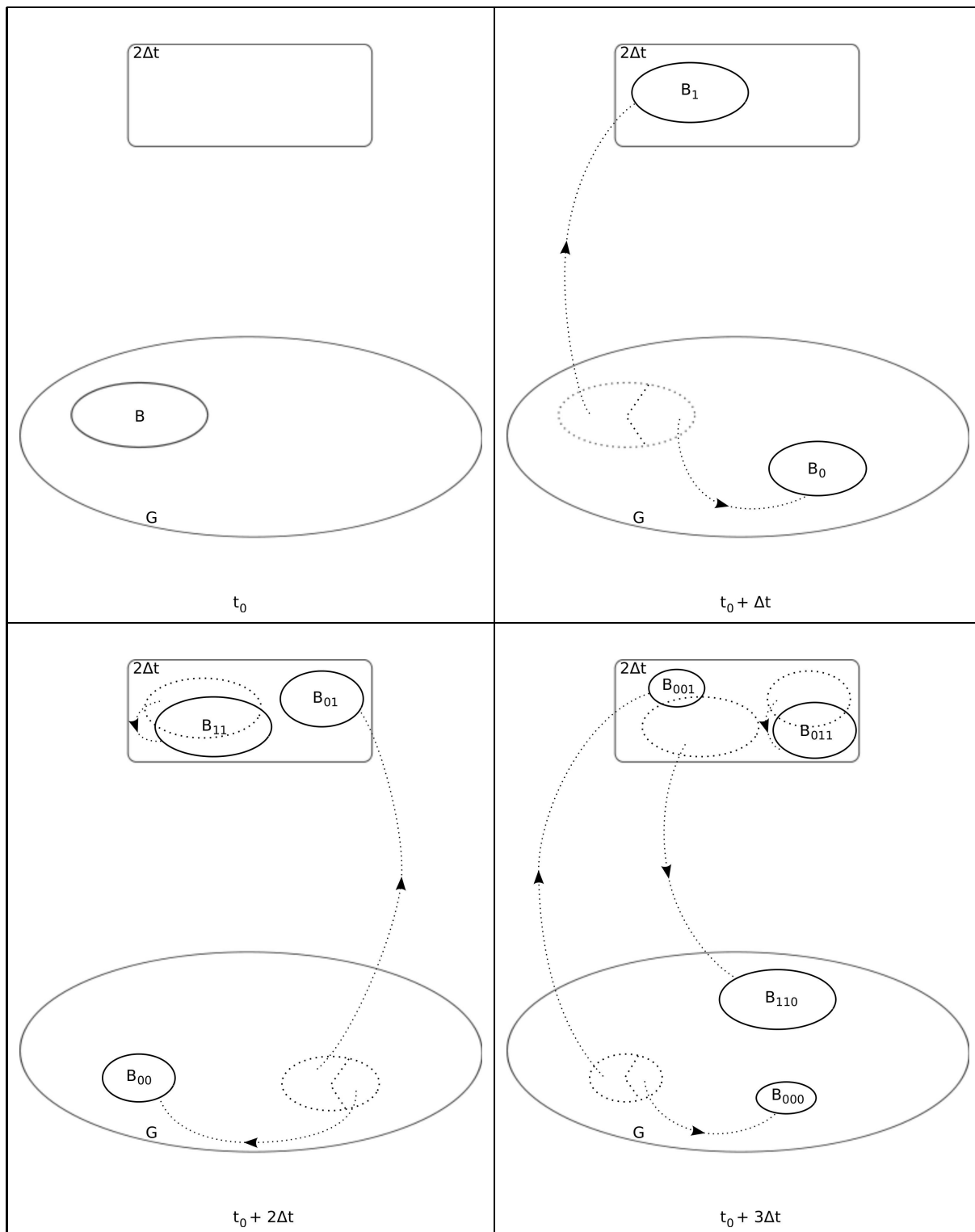
4. En $t_0 + 3\Delta t$ sont présents B_{000} et B_{110} . Par conséquent,

$$\begin{aligned} N_B(t_0 + 3\Delta t) &= \mu'(B_{000}) + \mu'(B_{110}), \\ &= p_0\mu'(B_{00}) + \mu'(B_{11}), \\ &= p_0 N_B(t_0 + 2\Delta t) + p_1 N_B(t_0). \end{aligned}$$

En $t_0^+ + 3\Delta t$, B_{000} se scinde en B_{0000} et B_{0001} , B_{110} en B_{1100} et B_{1101} , B_{011} revient en devenant B_{0110} et B_{001} reste hors de G (et se modifie en B_{0011}).

5. En $t_0 + 4\Delta t$, on trouve dans G les ensembles B_{0000} , B_{1100} et B_{0110} :

$$\begin{aligned} N_B(t_0 + 4\Delta t) &= \mu'(B_{0000}) + \mu'(B_{1100}) + \mu'(B_{0110}), \\ &= p_0 (\mu'(B_{000}) + \mu'(B_{110})) + \mu'(B_{011}), \\ &= p_0 N_B(t_0 + 3\Delta t) + p_1 N_B(t_0 + \Delta t). \end{aligned}$$

FIG. 8.1 – Dynamique avec $T_1(\Delta t) = 2\Delta t$.

Donnons un autre exemple permettant de comprendre les rôles indépendants que jouent les différents temps extérieurs.

Exemple 8.3. On prend $K = 2$, avec $T_1(\Delta t) = 2\Delta t$ et $T_2(\Delta t) = 3\Delta t$. La figure 8.2 illustre les premières itérations de cette dynamique. La différence avec l'exemple précédent est que les ensembles de G se séparent cette fois en trois et que $\Gamma \setminus G$ est cette fois coupée en deux parties, matérialisées par les deux rectangles.

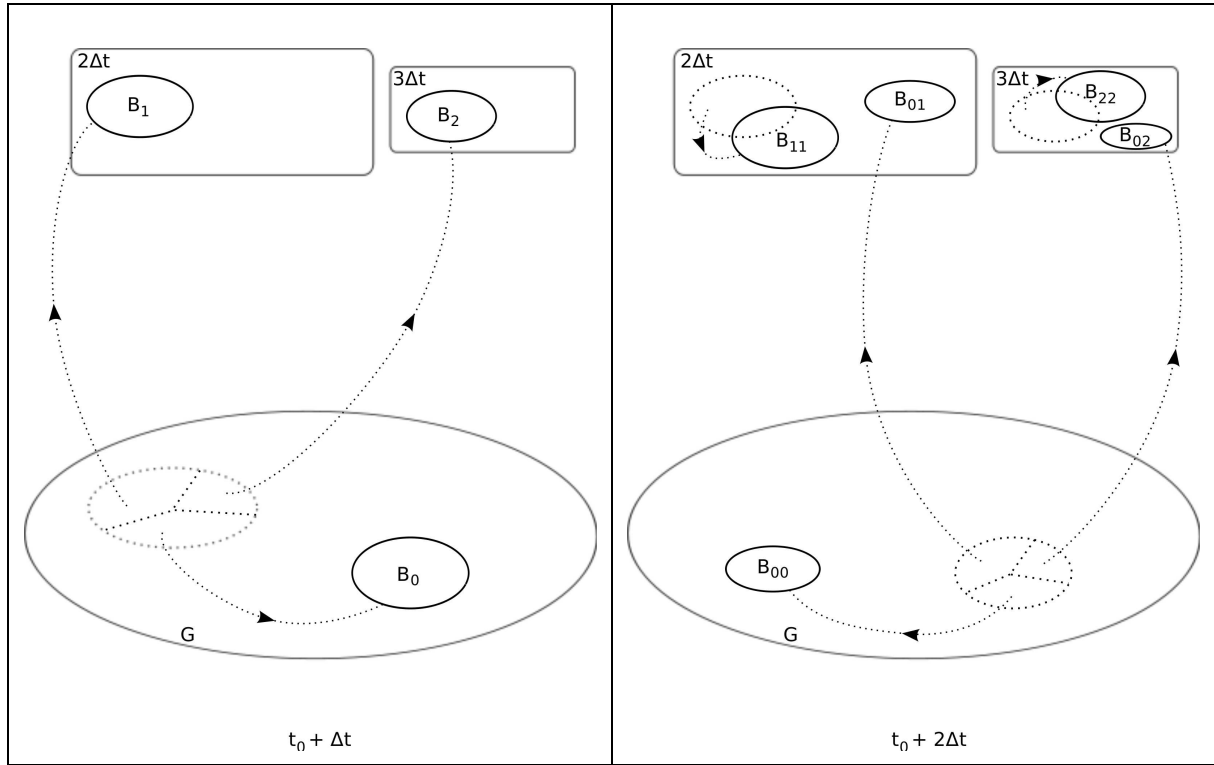


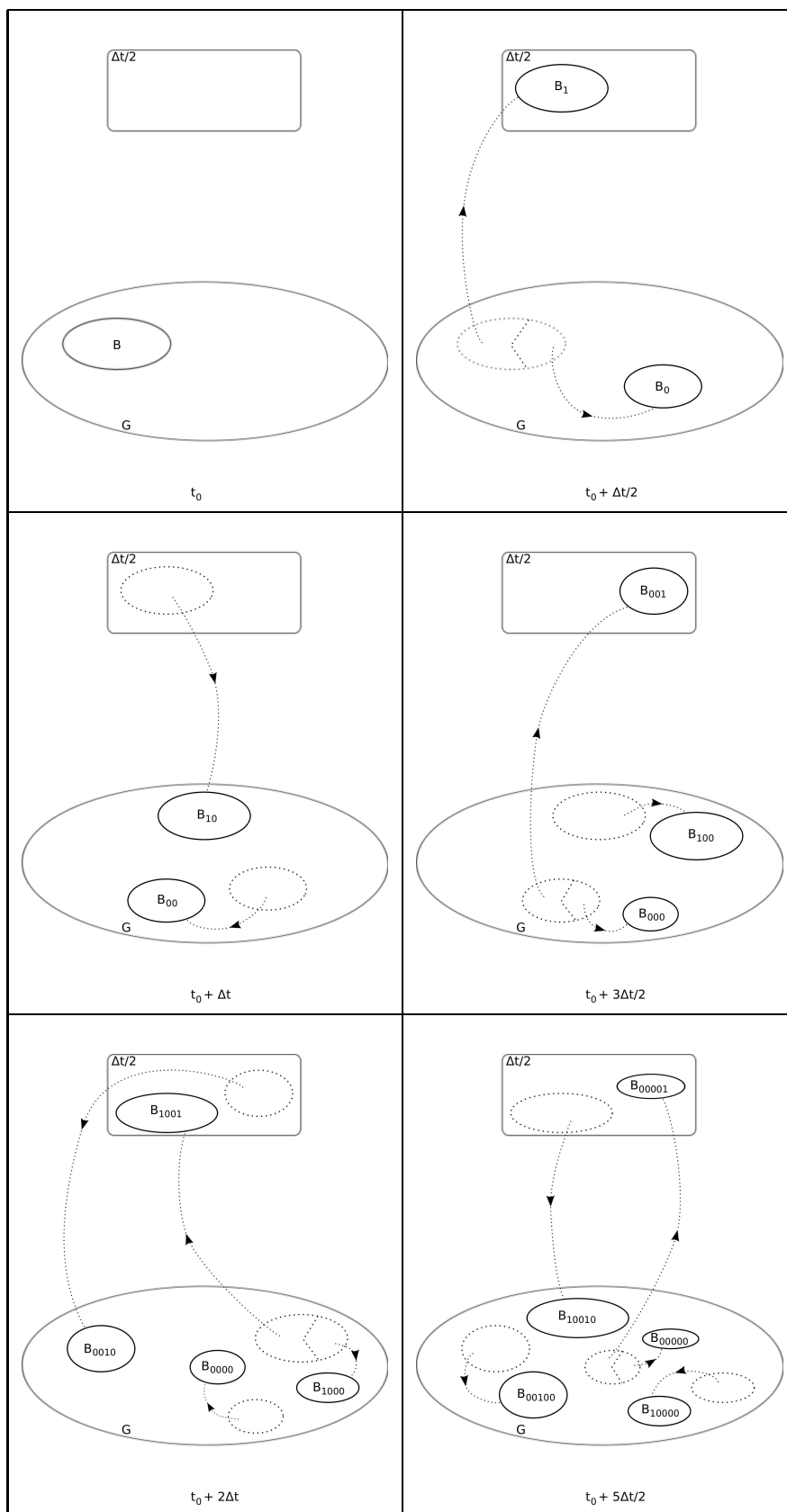
FIG. 8.2 – Dynamique avec $T_1(\Delta t) = 2\Delta t$ et $T_2(\Delta t) = 3\Delta t$.

8.2.3 Cas $\mathcal{T}(\Delta t) = q\Delta t\mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$

Tentons d'étendre le théorème 8.1, notamment lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_k(\Delta t) < \Delta t$. Considérons l'exemple suivant.

Exemple 8.4. On prend $K = 1$ et $T_1(\Delta t) = \Delta t/2$. Cette fois, $\mathcal{T}(\Delta t) = (\Delta t/2)\mathbb{Z}$. On suppose aussi pour simplifier que pour tout $t < t_0$, $\phi^t B \subset G$. À l'aide de la figure 8.3, déterminons les valeurs successives de N_B :

1. $N_B(t_0) = \mu'(B)$,
2. $N_B(t_0 + \Delta t/2) = \mu'(B_0) = p_0 N_B(t_0)$,
3. $N_B(t_0 + \Delta t) = \mu'(B_{00}) + \mu'(B_{10}) = N_B(t_0)$,
4. $N_B(t_0 + 3\Delta t/2) = \mu'(B_{000}) + \mu'(B_{100}) = p_0 N_B(t_0 + \Delta t/2) + p_1 N_B(t_0)$,
5. $N_B(t_0 + 2\Delta t) = (\mu'(B_{0000}) + \mu'(B_{0010})) + \mu'(B_{1000}) = p_0 N_B(t_0 + \Delta t) + p_1 N_B(t_0 + \Delta t/2)$,
6. $N_B(t_0 + 5\Delta t/2) = (\mu'(B_{00000}) + \mu'(B_{10000})) + (\mu'(B_{00100}) + \mu'(B_{10010}))$
 $= p_0 N_B(t_0 + 3\Delta t/2) + p_1 N_B(t_0 + \Delta t)$.

FIG. 8.3 – Dynamique avec $T_1(\Delta t) = \Delta t/2$.

Les deux dernières relations suggèrent la relation générale suivante :

$$\forall t_0 \in \mathcal{T}(\Delta t), \quad N_B(t_0 + \Delta t) = p_0 N_B(t_0) + p_1 N_B(t_0 - \Delta t/2). \quad (8.9)$$

Même s'il faudrait rendre rigoureux ce résultat, la relation (8.5) semble donc rester valable dans ce cas.

Plus généralement, s'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{T}(\Delta t) = q\Delta t\mathbb{Z}$, alors pour tout $1 \leq k \leq K$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $T_k(\Delta t) = qn_k\Delta t$. Comme pour le cas $\Delta t\mathbb{Z}$, la généralisation à un nombre quelconque de temps extérieurs ne devrait pas être problématique ; le théorème 8.1 semble donc rester valable lorsque $\mathcal{T}(\Delta t) = q\Delta t\mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Q}$. Cette généralisation inclut notamment le cas où $K < \infty$ et $T_k(\Delta t) \in \Delta t\mathbb{Q}$ pour tout $1 \leq k \leq K$.

8.2.4 Cas général

Si l'on considère à présent des $T_k(\Delta t)$ quelconques, plus précisément s'il existe $0 \leq k_1, k_2 \leq K$ tels que $T_{k_1}(\Delta t)/T_{k_2}(\Delta t) \notin \mathbb{Q}$, alors $\mathcal{T}(\Delta t)$ ne peut plus s'écrire sous la forme $q\Delta t\mathbb{Z}$, et est dense dans \mathbb{R} . En particulier, les crans ne sont plus constants. La démarche précédente ne s'applique donc plus car les différentes transitions ne sont plus synchronisées.

Toutefois, d'après le lemme 8.1, $\mathcal{T}(\Delta t)$ reste dénombrable et l'opération consistant à passer au cran suivant garde un sens. Vouloir généraliser (8.5) semble donc toujours raisonnable. Le fait que le membre de droite de cette équation reste inchangé pour des $T_k(\Delta t)$ quelconques nous conduit à la définition suivante.

Définition 8.5. L'opérateur d'évolution infinitésimale généralisée d'ordre Δt , noté $S(\Delta t)N_B(t_0)$, est défini par

$$\forall B \in \mathcal{T}'(G), \forall t_0 \in \mathcal{T}(\Delta t), \quad S(\Delta t)N_B(t_0) = p_0(\Delta t)N_B(t_0) + \sum_{k=1}^K p_k(\Delta t)N_B(t_0 - T_k(\Delta t)).$$

Précisons par contre que $S(\Delta t)N_B(t_0)$ n'est a priori plus égal à $N_B(t_0 + \Delta t)$; c'est pour cela qu'on qualifie cette évolution de "généralisée". Cette dénomination est bien sûr inspirée de celle de Zaslavsky concernant l'opérateur $\hat{\Delta}_t$ de (6.8) et la notation fait référence à l'opérateur (8.2) de Hilfer.

8.2.5 Générateur infinitésimal ?

Comme Hilfer, nous souhaiterions passer à une description continue, en faisant ici tendre Δt vers 0. Un objet pertinent serait alors le générateur infinitésimal associé à notre $S(\Delta t)$. Si nous verrons que $S(0) = \text{id}$, il n'y a malheureusement aucune raison que $S(\Delta t_1) \circ S(\Delta t_2) = S(\Delta t_1 + \Delta t_2)$; on ne peut donc espérer définir un générateur infinitésimal.

Toutefois, la limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0)}{\Delta t} \quad (8.10)$$

peut encore être évaluée, et c'est finalement elle qui nous intéresse ici ; elle peut représenter la dérivée qui conditionne la dynamique de notre système.

Définition 8.6. La dérivée généralisée de N_B en t_0 , notée $\mathcal{G}N_B(t_0)$, est définie comme étant la dérivée à droite de $\Delta t \mapsto S(\Delta t)N_B(t_0)$ en 0 :

$$\mathcal{G}N_B(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0)}{\Delta t}.$$

Nous allons l'expliciter dans le cas où les temps extérieurs sont associés à un piège fractal.

8.3 Application au chaos hamiltonien

Recentrons-nous à présent sur notre objectif initial et voyons comment notre modèle peut être utilisé pour les systèmes chaotiques. Comme nous allons le voir, notre modèle s'adapte bien aux pièges fractals et dans ce cas, la dérivée généralisée de N_B peut prendre la forme d'une dérivée fractionnaire.

8.3.1 Prise en compte des pièges fractals

Le modèle que nous avons considéré, adapté au cadre hamiltonien puisque sa dynamique préserve le volume, peut en particulier être utilisé pour les systèmes chaotiques. Comme nous l'avons vu au chapitre 6, les pièges fractals conditionnent la dynamique de nombreux systèmes. Nous allons donc les privilégier ici, en négligeant les zones de mer chaotique.

Cette démarche peut être illustrée par la figure 8.4 ; on simplifie la dynamique chaotique initiale (de section de Poincaré typique similaire à la figure 6.7) en ne gardant qu'un modèle idéal de ses pièges fractals associés (schématisé par la figure 6.9).

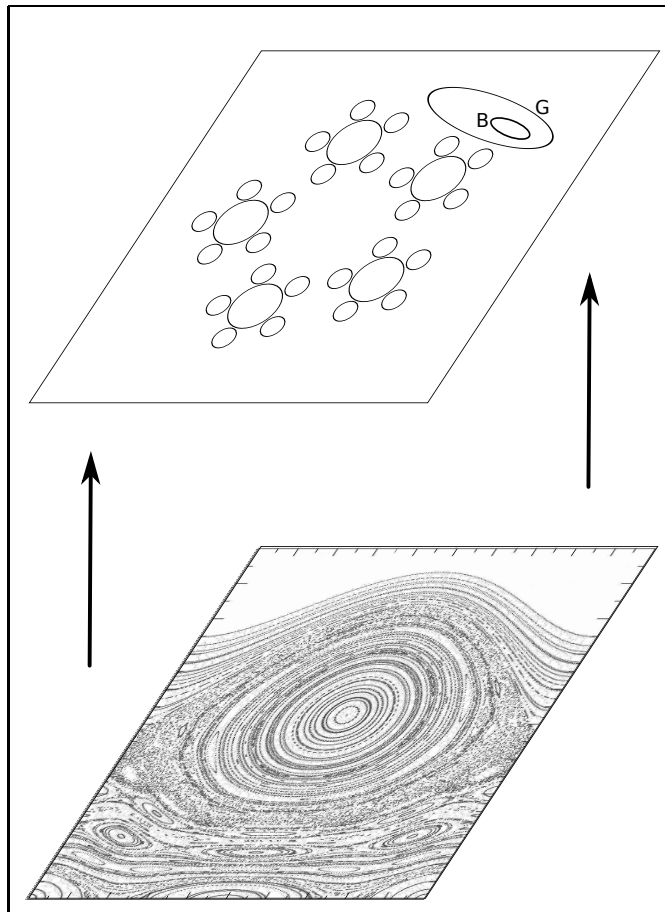


FIG. 8.4 – Simplification de la dynamique initiale.

Nous allons donc reprendre ici la définition 6.5 de piège fractal, mais nous devons pour cela l'adapter à la résolution Δt .

Définition 8.7. Soit $Z \subset \Gamma$. On dit que Z est un piège fractal bien résolu si pour tout $\Delta t > 0$, il

existe une partition $\{A_k(\Delta t)\}_{k \geq 1}$ de Z et des réels $\overline{\lambda}_T(\Delta t) > 1$ et $0 < \overline{\lambda}_T(\Delta t) < 1$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \mu(A_{k+1}(\Delta t)) = \overline{\lambda}_T(\Delta t) \mu(A_k(\Delta t)), \\ \langle \tau_{int}(A_{k+1}(\Delta t)) \rangle = \overline{\lambda}_T(\Delta t) \langle \tau_{int}(A_k(\Delta t)) \rangle. \end{cases}$$

Nous devons faire ici une hypothèse sur la dépendance des paramètres du piège en fonction de Δt .

Définition 8.8. Soit $Z \subset \Gamma$. On dit que Z est un piège fractal uniformément résolu si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

1. Z est un piège fractal bien résolu,
2. il existe $\lambda_T > 1$ et $0 < \lambda_T < 1$ tels que

$$\forall \Delta t > 0, \quad \overline{\lambda}_T(\Delta t) = \lambda_T^{\Delta t}, \quad \overline{\lambda}_T(\Delta t) = \lambda_T^{\Delta t}, \quad (8.11)$$

3. $\Delta t \mapsto \langle \tau_{int}(A_1(\Delta t)) \rangle$ possède une limite à droite en 0 égale à 0,
4. $\Delta t \mapsto p_0(\Delta t)$ admet une limite à droite en 0, notée $p_0(0^+)$.

Par conséquent, si Z est un piège fractal uniformément résolu, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu(A_{k+1}(\Delta t)) = \lambda_T^{k\Delta t} \mu(A_1(\Delta t)),$$

et

$$\langle \tau_{int}(A_{k+1}(\Delta t)) \rangle = \lambda_T^{k\Delta t} \langle \tau_{int}(A_1(\Delta t)) \rangle.$$

Puisque nous ne retenons que les pièges fractals, nous allons supposer que les trajectoires passant par G sont soit dans G , soit dans un piège fractal. Nous négligeons donc le chemin réel entre G et le piège ; concernant le système réel, une telle modélisation ne sera donc valable que si G est proche du piège fractal réel. La définition suivante traduit cette simplification.

Définition 8.9. Soit $G \subset \Gamma$ et $Z = \bigcup_{k \geq 1} A_k(\Delta t)$ un piège fractal uniformément résolu tel que $G \cap Z = \emptyset$. On dit que G est uniformément piégé par Z si la dynamique dans G est cyclique et si pour tout $\Delta t > 0$, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. la dynamique dans G est de résolution Δt ,
2. G est uniformément mélangé par $\{\langle \tau_{int}(A_k)(\Delta t) \rangle\}_{k \geq 1}$,
3. pour tout $k \geq 1$,

$$p_k(\Delta t) = \frac{\mu(A_k(\Delta t))}{\mu(Z)}. \quad (8.12)$$

La première hypothèse implique que chaque trajectoire qui quitte G est piégée par une seule génération de pièges (par un seul $A_k(\Delta t)$) ; la figure 8.5 illustre les différents types de trajets possibles. Cette condition stipule de plus que les temps de piégeages dans une génération sont tous identiques et égaux à $\tau_{int}(A_k)(\Delta t)$. La condition (8.12) signifie quant à elle que la probabilité d'être capturé par une génération est proportionnelle à la taille de celle-ci (ce qui peut sembler raisonnable).

Notons que l'idée de segmenter la dynamique suivant la structure fractale des zones singulières et d'associer des probabilités à chaque génération n'est pas nouvelle ; elle est notamment utilisée dans [MO85] (sous une autre forme et dans le contexte de marches aléatoires).

Si G est uniformément piégé par Z , alors pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} T_k(\Delta t) &= \langle \tau_{int}(A_k(\Delta t)) \rangle = \lambda_T^{(k-1)\Delta t} \langle \tau_{int}(A_1(\Delta t)) \rangle, \\ &= \lambda_T^{(k-1)\Delta t} T_1(\Delta t), \end{aligned}$$

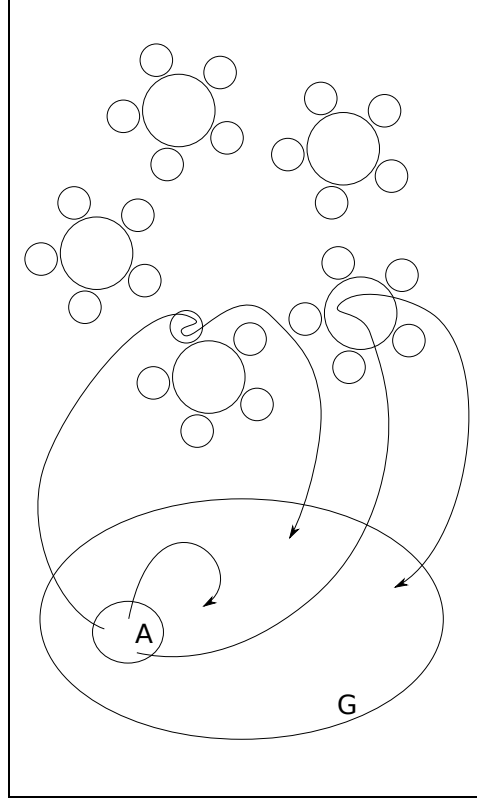


FIG. 8.5 – Prise en compte des pièges fractals.

et

$$p_k(\Delta t) = (1 - p_0(\Delta t)) (1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}) \lambda_\Gamma^{(k-1)\Delta t}.$$

On peut enfin obtenir une expression complète de l'opérateur d'évolution infinitésimale généralisée :

$$S(\Delta t)N_B(t_0) = p_0(\Delta t)N_B(t_0) + (1 - p_0(\Delta t)) (1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}) \sum_{k \geq 0} \lambda_\Gamma^{k\Delta t} N_B\left(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^k\Delta t\right). \quad (8.13)$$

Cette expression permet donc de relier explicitement la dynamique restreinte à G à la structure des pièges fractals. Ce lien va apparaître encore plus clairement en passant au continu.

8.3.2 Passage au continu

Les coefficients $\overline{\lambda_T}(\Delta t)$ et $\overline{\lambda_\Gamma}(\Delta t)$ sont ceux qui interviennent dans (6.13). S'ils vérifient (8.11), alors

$$\frac{|\ln(\overline{\lambda_\Gamma}(\Delta t))|}{\ln(\overline{\lambda_T}(\Delta t))} = \frac{|\ln \lambda_\Gamma|}{\ln \lambda_T}. \quad (8.14)$$

Par conséquent, le coefficient de transport μ devient indépendant de Δt :

$$\mu = \frac{|\ln \lambda_\Gamma|}{\ln \lambda_T}.$$

On va retrouver ce coefficient dans notre modèle.

Vérifions à présent que lorsque l'ordre caractéristique de l'évolution tend vers 0, celle-ci se fige.

Lemme 8.2. Soit $G \subset \Gamma$ et $Z = \bigcup_{k \geq 1} A_k(\Delta t)$ un piège fractal uniformément résolu tel que $G \cap Z = \emptyset$. On suppose que G est uniformément piégé par Z . Soit $0 < \beta < \mu$ et $\beta' = \min\{1, \beta\}$.

Si N_B est β' -höldérienne, alors

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} S(\Delta t)N_B(t_0) = N_B(t_0).$$

Démonstration. L'hypothèse que G soit uniformément piégé par Z permet d'écrire $S(\Delta t)$ sous la forme (8.13). Dans ce cas, la différence $S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0)$ vérifie

$$S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0) = (1 - p_0(\Delta t)) (1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}) \sum_{k \geq 0} \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \left[N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) - N_B(t_0) \right].$$

Remarquons que $\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta < 1$ si et seulement si $\beta < \mu$; par conséquent, $\lambda_\Gamma \lambda_T^{\beta'} < 1$. Comme N_B est β' -höldérienne, il existe $c_\beta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0)| &\leq (1 - p_0(\Delta t)) (1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}) \sum_{k \geq 0} \lambda_\Gamma^{k\Delta t} c_\beta \left(T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t} \right)^{\beta'}, \\ &\leq c_\beta (1 - p_0(\Delta t)) T_1(\Delta t)^{\beta'} \frac{1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{1 - (\lambda_\Gamma \lambda_T^{\beta'})^{\Delta t}}. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} (1 - p_0(\Delta t)) \frac{1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{1 - (\lambda_\Gamma \lambda_T^{\beta'})^{\Delta t}} = (1 - p_0(0^+)) \frac{\ln(\lambda_\Gamma)}{\ln(\lambda_\Gamma \lambda_T^{\beta'})},$$

et d'autre part, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} T_1(\Delta t) = 0$ d'après la condition 3 de la définition 8.8.

Par conséquent, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} (S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0)) = 0$.

□

Nous allons maintenant évaluer $\mathcal{G}N_B(t_0)$. Pour ce faire, notons d'abord pour tout $\Delta t > 0$,

$$\mathcal{G}(\Delta t)N_B(t_0) = \frac{S(\Delta t)N_B(t_0) - N_B(t_0)}{\Delta t}.$$

Introduisons aussi la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\Delta t, y) &\longmapsto \lambda_\Gamma^y \left[N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^y) - N_B(t_0) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{G}(\Delta t)N_B(t_0) = (1 - p_0(\Delta t)) \frac{1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{\Delta t} \sum_{k \geq 0} f(\Delta t, k\Delta t).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{aligned} I_k(\Delta t) &= f(\Delta t, k\Delta t) = \int_k^{k+1} f(\Delta t, x\Delta t) dx, \\ J_k(\Delta t) &= \int_k^{k+1} f(\Delta t, x\Delta t) dx. \end{aligned}$$

La quantité $\mathcal{G}(\Delta t)N_B(t_0)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathcal{G}(\Delta t)N_B(t_0) = (1 - p_0(\Delta t)) \frac{1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{\Delta t} \sum_{k \geq 0} I_k(\Delta t).$$

Cas $\mu > 1$

Théorème 8.2. *Soit $G \subset \Gamma$ et $Z = \bigcup_{k \geq 1} A_k(\Delta t)$ un piège fractal uniformément résolu tel que $G \cap Z = \emptyset$. On suppose que G est uniformément piégé par Z et que $\mu > 1$. Si N_B est dérivable et lipschitzienne sur \mathbb{R} et si T_1 est dérivable en 0, alors*

$$\boxed{\mathcal{G}N_B(t_0) = -\gamma \frac{d}{dt} N_B(t_0),}$$

avec $\gamma = (1 - p_0(0^+)) \frac{\mu}{\mu - 1} T_1'(0)$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} (I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)) = 0$.

La fonction N_B est dérivable, il en est donc de même pour $y \mapsto f(\Delta t, y)$ pour tout $\Delta t \geq 0$ et

$$\partial_2 f(\Delta t, y) = \ln(\lambda_\Gamma) f(\Delta t, y) - T_1(\Delta t) (\lambda_\Gamma \lambda_T)^y N_B'(t_0 - T_1(\Delta t) \lambda_T^y).$$

Notons c la constante de Lipschitz. On a alors

$$|\partial_2 f(\Delta t, y)| \leq \ln(\lambda_\Gamma) c T_1(\Delta t) (\lambda_\Gamma \lambda_T)^y + c T_1(\Delta t) (\lambda_\Gamma \lambda_T)^y.$$

En posant $c' = c(1 + \ln(\lambda_T))$, on obtient :

$$|\partial_2 f(\Delta t, y)| \leq c' T_1(\Delta t) (\lambda_\Gamma \lambda_T)^y.$$

Comme $\mu > 1$, $\lambda_\Gamma \lambda_T < 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} |I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)| &\leq \int_k^{k+1} |f(\Delta t, x\Delta t) - f(\Delta t, k\Delta t)| dx, \\ &\leq \Delta t \sup_{[k, k+1]} |\partial_2 f(\Delta t, x\Delta t)|, \\ &\leq c' \Delta t T_1(\Delta t) (\lambda_\Gamma \lambda_T)^{k\Delta t}, \quad \text{car } y \mapsto (\lambda_\Gamma \lambda_T)^y \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \Delta t \sum_{k \geq 0} (\lambda_\Gamma \lambda_T)^{k\Delta t} = \frac{1}{|\ln(\lambda_\Gamma \lambda_T)|}$ et $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} T_1(\Delta t) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} (I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{G}(\Delta t) N_B(t_0) \underset{\Delta t \rightarrow 0^+}{\sim} - (1 - p_0(0^+)) \ln(\lambda_\Gamma) \sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t). \quad (8.15)$$

Évaluons à présent $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t)$. Tout d'abord,

$$\sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) = \int_0^\infty \lambda_\Gamma^{x\Delta t} [N_B(t_0 - T_1(\Delta t) \lambda_T^{x\Delta t}) - N_B(t_0)] dx.$$

En effectuant le changement de variables $t = \lambda_T^{x\Delta t}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) &= \frac{1}{\Delta t \ln(\lambda_T)} \int_1^\infty t^{-(1+\mu)} [N_B(t_0 - t T_1(\Delta t)) - N_B(t_0)] dt, \\ &= \frac{1}{\ln(\lambda_T)} \frac{T_1(\Delta t)}{\Delta t} \int_1^\infty t^{-\mu} \frac{N_B(t_0 - t T_1(\Delta t)) - N_B(t_0)}{t T_1(\Delta t)} dt. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Pour tout $t \geq 1$, $\left| t^{-\mu} \frac{N_B(t_0 - tT_1(\Delta t)) - N_B(t_0)}{tT_1(\Delta t)} \right| \leq ct^{-\mu}$, cette dernière fonction étant intégrable sur $[1, +\infty)$. De plus,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{N_B(t_0 - tT_1(\Delta t)) - N_B(t_0)}{tT_1(\Delta t)} = -N'_B(t_0).$$

Par convergence dominée, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) &= \frac{1}{\ln(\lambda_T)} T'_1(0) (-N'_B(t_0)) \int_1^\infty t^{-\mu} dt, \\ &= \frac{1}{(1-\mu)\ln(\lambda_T)} T'_1(0) N'_B(t_0). \end{aligned}$$

D'après (8.15),

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(\Delta t) N_B(t_0) &= - (1 - p_0(0^+)) \frac{\ln(\lambda_T)}{(1-\mu)\ln(\lambda_T)} T'_1(0) N'_B(t_0), \\ &= - (1 - p_0(0^+)) \frac{\mu}{\mu-1} T'_1(0) N'_B(t_0). \end{aligned}$$

□

Remarque 8.1. Si N_B vérifie les hypothèses du théorème 8.2, alors N_B est en particulier 1-höldérienne et remplit les conditions du lemme 8.2.

Cas $\mu < 1$

Essayons d'évaluer $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t)$, en supposant que N_B soit assez régulière et à décroissance assez rapide en $-\infty$, afin que les quantités suivantes soient bien définies. Intégrons par parties (8.16) :

$$\sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) = \frac{-T_1(\Delta t)}{\mu \Delta t \ln(\lambda_T)} \int_1^\infty t^{-\mu} N'_B(t_0 - tT_1(\Delta t)) dt + \frac{N_B(t_0 - T_1(\Delta t)) - N_B(t_0)}{\mu \Delta t \ln(\lambda_T)}.$$

Avec le changement de variable $u = T_1(\Delta t)t$, on obtient

$$\sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) = \frac{-T_1(\Delta t)^\mu}{\mu \Delta t \ln(\lambda_T)} \int_{T_1(\Delta t)}^\infty u^{-\mu} N'_B(t_0 - u) du + \frac{N_B(t_0 - T_1(\Delta t)) - N_B(t_0)}{\mu \Delta t \ln(\lambda_T)}.$$

L'intégrale ne pose pas problème :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_{T_1(\Delta t)}^\infty u^{-\mu} N'_B(t_0 - u) du = \int_0^\infty u^{-\mu} N'_B(t_0 - u) du.$$

Si on suppose comme précédemment que T_1 est dérivable en 0, alors

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{N_B(t_0 - T_1(\Delta t)) - N_B(t_0)}{\mu \Delta t \ln(\lambda_T)} = -\frac{T'_1(0)}{\mu \ln(\lambda_T)} N'_B(t_0).$$

Par contre, $T_1(\Delta t)^\mu / \Delta t$ diverge vers $+\infty$, il en va donc de même pour $\sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t)$. Il faut ainsi remplacer l'hypothèse de dérivabilité de T_1 en 0.

Afin que $\frac{T_1(\Delta t)^\mu}{\Delta t}$ ait une limite finie, on suppose donc qu'il existe $b > 0$ tel que

$$T_1(\Delta t) \underset{\Delta t \rightarrow 0^+}{\sim} b(\Delta t)^{1/\mu}.$$

Physiquement, $T_1(\Delta t)$ et Δt sont homogènes à des temps, on introduit donc la constante de temps τ telle que $b = \tau^{1-1/\mu}$:

$$T_1(\Delta t) \underset{\Delta t \rightarrow 0^+}{\sim} \tau^{1-1/\mu} (\Delta t)^{1/\mu}. \quad (8.17)$$

Sous cette hypothèse, nous allons voir apparaître une dérivée fractionnaire de Marchaud.

Théorème 8.3. *Soit $G \subset \Gamma$ et $Z = \bigcup_{k \geq 1} A_k(\Delta t)$ un piège fractal uniformément résolu tel que $G \cap Z = \emptyset$. On suppose que G est uniformément piégé par Z , que $\mu < 1$ et qu'il existe $\tau > 0$ tel que (8.17) soit vérifiée.*

Si N_B est β -höldérienne et localement ν -höldérienne, avec $\beta < \mu < \nu$, alors

$$\boxed{\mathcal{G}N_B(t_0) = -\tilde{\gamma}\tau^{\mu-1} \mathbf{D}_+^\mu N_B(t_0)}, \quad (8.18)$$

où $\tilde{\gamma} = \Gamma(1-\mu)(1-p_0(0^+))$.

Démonstration. Comme précédemment, montrons d'abord que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} (I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)) = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\begin{aligned} f(\Delta t, x\Delta t) - f(\Delta t, k\Delta t) &= \lambda_\Gamma^{x\Delta t} \left[\left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{x\Delta t}) - N_B(t_0) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) - N_B(t_0) \right) \right] \\ &\quad + \left[\lambda_\Gamma^{x\Delta t} - \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \right] \left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) - N_B(t_0) \right), \\ &= \lambda_\Gamma^{x\Delta t} \left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{x\Delta t}) - N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) \right) \\ &\quad + \left[\lambda_\Gamma^{x\Delta t} - \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \right] \left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) - N_B(t_0) \right). \end{aligned}$$

Concernant le premier terme du membre de droite, on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} &\left| \int_k^{k+1} \lambda_\Gamma^{x\Delta t} \left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{x\Delta t}) - N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) \right) dx \right| \\ &\leq \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \int_k^{k+1} \left| N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{x\Delta t}) - N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) \right| dx, \\ &\leq c_\beta \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \int_k^{k+1} \left| T_1(\Delta t) \left(\lambda_T^{x\Delta t} - \lambda_T^{k\Delta t} \right) \right|^\beta dx, \quad \text{où } c_\beta \text{ la constante } \beta\text{-höldérienne de } N_B, \\ &\leq c_\beta \lambda_\Gamma^{k\Delta t} T_1(\Delta t)^\beta \left(\lambda_T^{(k+1)\Delta t} - \lambda_T^{k\Delta t} \right)^\beta, \\ &\leq c_\beta T_1(\Delta t)^\beta \left(\lambda_T^{\Delta t} - 1 \right) \left(\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta \right)^{k\Delta t}, \end{aligned}$$

et pour le second, on a :

$$\begin{aligned} &\left| \int_k^{k+1} \left[\lambda_\Gamma^{x\Delta t} - \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \right] \left(N_B(t_0 - T_1(\Delta t)\lambda_T^{k\Delta t}) - N_B(t_0) \right) dx \right| \\ &\leq c_\beta T_1(\Delta t)^\beta \lambda_T^{k\beta\Delta t} \int_k^{k+1} \left| \lambda_\Gamma^{x\Delta t} - \lambda_\Gamma^{k\Delta t} \right| dx, \\ &\leq c_\beta T_1(\Delta t)^\beta \lambda_T^{k\beta\Delta t} \left(\lambda_\Gamma^{k\Delta t} - \lambda_\Gamma^{(k+1)\Delta t} \right), \\ &\leq c_\beta T_1(\Delta t)^\beta \left(1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t} \right) \left(\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta \right)^{k\Delta t}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)| \leq c_\beta T_1(\Delta t)^\beta (\lambda_T^{\Delta t} - \lambda_\Gamma^{\Delta t}) \left(\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta\right)^{k\Delta t}.$$

Comme $\beta < \mu$, $\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta < 1$. Ainsi,

$$\sum_{k \geq 0} |I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)| \leq c_\beta T_1(\Delta t)^\beta \frac{\lambda_T^{\Delta t} - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{1 - \left(\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta\right)^{\Delta t}}.$$

Comme $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_T^{\Delta t} - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{1 - \left(\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta\right)^{\Delta t}} = \frac{\ln(\lambda_\Gamma) - \ln(\lambda_T)}{\ln\left(\lambda_\Gamma \lambda_T^\beta\right)}$ et $\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} T_1(\Delta t)^\beta = 0$, on en déduit que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} (I_k(\Delta t) - J_k(\Delta t)) = 0.$$

La relation (8.15) est donc encore valable ici. L'équation (8.16) aussi reste vraie pour $\mu < 1$. Avec le changement de variables $u = tT_1(\Delta t)$, il vient :

$$\sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) = \frac{T_1(\Delta t)^\mu}{\Delta t \ln(\lambda_T)} \int_{T_1(\Delta t)}^\infty u^{-(1+\mu)} [N_B(t_0 - u) - N_B(t_0)] du.$$

Par définition, $0 \leq N_B(t) \leq \mu'(G)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette fonction étant par hypothèse localement ν -höldérienne avec $\nu > \mu$, elle admet une dérivée fractionnaire de Marchaud d'ordre μ .

Par conséquent,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \int_{T_1(\Delta t)}^\infty u^{-(1+\mu)} [N_B(t_0 - u) - N_B(t_0)] du = -\frac{\Gamma(1-\mu)}{\mu} \mathbf{D}_+^\mu N_B(t_0).$$

En utilisant la relation (8.17), on en déduit que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sum_{k \geq 0} J_k(\Delta t) = -\frac{\tau^{\mu-1}}{\ln(\lambda_T)} \frac{\Gamma(1-\mu)}{\mu} \mathbf{D}_+^\mu N_B(t_0).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}N_B(t_0) &= (1 - p_0(0^+)) \frac{\tau^{\mu-1}}{\ln(\lambda_T)} \frac{\ln(\lambda_\Gamma) \Gamma(1-\mu)}{\mu} \mathbf{D}_+^\mu N_B(t_0) \\ &= -(1 - p_0(0^+)) \tau^{\mu-1} \Gamma(1-\mu) \mathbf{D}_+^\mu N_B(t_0). \end{aligned}$$

□

Dans l'expression (8.18), nous avons volontairement laissé apparaître la constante τ afin d'obtenir une dérivée homogène du type (5.31).

Remarque 8.2. Afin de respecter l'homogénéité dimensionnelle, il aurait aussi fallu introduire une constante de temps τ' et définir les constantes d'échelle comme suit :

$$\lambda_T(\Delta t) = (\lambda_T)^{\Delta t/\tau'}, \quad \lambda_\Gamma(\Delta t) = (\lambda_\Gamma)^{\Delta t/\tau'}.$$

Mais dans ce cas, d'après (8.14), le coefficient de transport aurait finalement été inchangé.

Remarque 8.3. Si G est une section transverse au flot hamiltonien (par exemple une section de Poincaré), alors $\mu'(G) = 0$ et comme toutes les trajectoires traversent G , $\tau_{int}(x) = 0$ pour tout $x \in G$. Par conséquent, pour tout $\Delta t > 0$, $G_0(\Delta t) = \emptyset$ puis $p_0(\Delta t) = 0$. Ainsi, $p_0(0^+) = 0$ et les expressions des coefficients γ et $\tilde{\gamma}$ des théorèmes 8.2 et 8.3 se simplifient. Cet exemple montre de plus que l'on peut ne pas avoir $p_0(0^+) = 1$.

Avec le théorème 8.3, on retrouve un résultat qui n'est pas sans rappeler (8.4). Dans notre modèle, la dérivée généralisée $\mathcal{G}N_B(t_0)$ n'est toutefois pas liée à un générateur infinitésimal. Par contre, l'ordre de la dérivée fractionnaire est cette fois fixé et explicitement relié à la dynamique du système, ce qui était l'objectif de notre étude.

8.3.3 Discussion sur l'exposant fractionnaire

Caractérisation de μ

À partir de la distribution $(p_k(\Delta t))_{k \geq 1}$ et des temps caractéristiques $(T_k(\Delta t))_{k \geq 1}$, on peut évaluer les moments $\langle \tau_{ext}(G)^\alpha \rangle_{\Delta t}$ avec $\alpha > 0$, définis par

$$\langle \tau_{ext}(G)^\alpha \rangle_{\Delta t} = \sum_{k \geq 1} p_k(\Delta t) T_k(\Delta t)^\alpha.$$

Dans le cas des pièges fractals, on obtient :

$$\langle \tau_{ext}(G)^\alpha \rangle_{\Delta t} = \begin{cases} (1 - p_0(\Delta t)) \frac{1 - \lambda_\Gamma^{\Delta t}}{1 - (\lambda_\Gamma \lambda_T^\alpha)^{\Delta t}} T_1(\Delta t)^\alpha & \text{si } \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq \mu. \end{cases}$$

Par conséquent, si on note $\langle \tau_{ext}(G)^\alpha \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \langle \tau_{ext}(G)^\alpha \rangle_{\Delta t}$, le paramètre μ apparaît comme point critique :

$$\langle \tau_{ext}(G)^\alpha \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < \mu, \\ +\infty & \text{si } \alpha \geq \mu. \end{cases}$$

Cependant, si $\mu(G) > 0$ et si $\mu \leq 1$, $\langle \tau_{ext}(G) \rangle = \infty$, ce qui ne respecte pas le lemme de Kac (théorème 6.3). Il faut donc que $\mu(G) = 0$ (ce qui est notamment le cas si G est une section de Poincaré). Cette condition est de plus appuyée par la nécessité d'avoir $p_0(0^+) < 1$ dans les expressions de γ et $\tilde{\gamma}$. Effectivement, si $\mu(G) > 0$, on risque fort d'avoir $p_0(0^+) = 1$ par continuité du flot.

Cette condition rejoint ainsi la démarche de Hilfer où le générateur infinitésimal fractionnaire apparaît pour des ensembles de mesure nulle.

Équation cinétique fractionnaire

Notre modèle ne permet pas d'expliquer l'émergence de dérivées fractionnaires dans les équations du type (6.10). Il fait néanmoins apparaître le coefficient de transport μ introduit dans (6.7). Si l'on arrivait à relier $\hat{\Delta}_t$ et $S(\Delta t)$, par exemple avec une relation de la forme

$$\hat{\Delta}_t P(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} S(\Delta t) N_B(t), \quad \text{avec } G = \{z \in \Gamma \mid \|z - x\| \leq \varepsilon\},$$

le fait que μ soit l'exposant fractionnaire temporel serait compatible avec (6.13).

Effectivement, supposons que l'on puisse appliquer $S(\Delta t)$ à $P(x, t)$ pour décrire, comme il est écrit dans [Zas05, p.246], "a generalized shift of $P(x, t)$ along t by Δt ". Dans ce cas, la dérivée temporelle associée à l'évolution temporelle de $P(x, t)$ est la dérivée généralisée \mathcal{G} . Dans le cas de diffusions anormales, les exposants α et β de (6.10) deviennent alors complètement déterminés (rappelons qu'au chapitre 6 seul leur rapport est fixé, via la relation $\mu = 2\beta/\alpha$). Effectivement,

- Si $\mu > 1$ (superdiffusion) alors la dérivée temporelle est classique d’après le théorème 8.2 : $\beta = 1$. La superdiffusion est exclusivement prise en compte par la dérivée spatiale, où $\alpha = \frac{2}{\mu}$. L’équation (6.10) devient ainsi

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^{2/\mu}}{\partial x^{2/\mu}} P(x, t).$$

- Si $\mu < 1$ (subdiffusion), $\beta = \mu$ d’après le théorème 8.3 et donc $\alpha = 2$; seule la dérivée temporelle est fractionnaire. L’équation (6.10) est alors :

$$\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} P(x, t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t).$$

Si notre modèle était applicable à la description probabiliste de Zaslavsky, il ne pourrait donc y avoir coexistence de dérivées fractionnaires en temps et en espace.

Nous sommes conscient que de nombreux points de ce chapitre peuvent être discutés. Certaines remarques devraient être justifiées et certaines définitions devraient être analysées plus précisément afin de déterminer leur pertinence. En particulier, il faudrait probablement considérer une famille continue d’ensembles $G(\Delta t)$ vérifiant toutes les conditions précédemment introduites et tels que leurs dynamiques “convergent” (selon une norme adaptée) vers une dynamique dans un ensemble limite G . Nous espérons toutefois que les idées fondamentales de notre modèle résisteront aux corrections potentielles.

Le théorème 8.3 constitue clairement l’aboutissement de notre modèle simplifié de dynamique. C’est lui qui s’approche le plus de l’objectif de cette partie III, à savoir trouver une origine dynamique à la dérivée fractionnaire dans les systèmes hamiltoniens chaotiques. De ce point de vue, il représente une tentative plus aboutie que celle du chapitre 6.

On peut synthétiser la philosophie de ce chapitre à travers les étapes suivantes.

1. On considère un système hamiltonien chaotique classique (régé par d/dt) présentant des phénomènes de subdiffusion.
2. On simplifie sa dynamique en ne considérant que ses pièges fractals (comme sur la figure 8.4).
3. On utilise le modèle présenté dans ce chapitre ; on étudie la dynamique moyenne restreinte à un sous-ensemble (de mesure nulle).
4. Cette dynamique est fractionnaire, d’ordre égal au coefficient de transport anormal (régé par \mathbf{D}_+^μ).

Notons toutefois que cette approche s’éloigne fortement du plongement fractionnaire, puisque nulle part dans ce modèle n’apparaissent explicitement d’équations lagrangiennes ou hamiltoniennes (bien que le caractère hamiltonien soit quand même sous-jacent). En ce sens, l’objectif général de cette thèse n’est pas atteint ; le plongement fractionnaire semble rester pour l’instant un outil formel, non relié aux systèmes réels. Il manque des piliers solides à notre cube, qui reste ainsi inachevé.

Nous allons toutefois voir dans la dernière partie que le plongement fractionnaire peut s’avérer utile pour certaines équations dissipatives classiques ; sa version asymétrique permet de les doter de structures lagrangiennes fractionnaires, ce qui pourrait être intéressant numériquement.

Quatrième partie

Structures lagrangiennes d'équations dissipatives et intégrateurs associés

Chapitre 9

Structures lagrangiennes d'équations dissipatives

Dans cette dernière partie, nous quittons les systèmes hamiltoniens chaotiques et revenons sur le plongement fractionnaire lui-même. Notre domaine d'application devient dans ce chapitre les équations dissipatives classiques (avec d/dt). Une équation est qualifiée de "dissipative" si elle contient un terme proportionnel à la dérivée première en temps de la variable d'évolution. Cette définition s'accorde bien dans la pratique avec la modélisation de phénomènes physiques de pertes d'énergie.

Dans [Bau31], Bauer montre que de tels systèmes ne possèdent pas de structures lagrangiennes classiques. Comme on l'a mentionné au début du chapitre 5, Riewe [Rie96] s'étonne que le formalisme Lagrangien si fécond ne soit pas adapté aux phénomènes dissipatifs, pourtant omniprésents dans la nature. C'est en souhaitant surmonter ce paradoxe qu'il introduit très naturellement le calcul fractionnaire :

If the Lagrangian contains a term proportional to $(d^n x/dt^n)^2$, then the Euler-Lagrange equation will have a corresponding term proportional to $d^{2n} x/dt^{2n}$. Hence a frictional force of the form $\gamma(dx/dt)$ should follow directly from a Lagrangian containing a term proportional to the fractional derivative $(d^{1/2} x/dt^{1/2})^2$.

La seule chose qu'il exige en fait de $d^{1/2}/dt^{1/2}$ est que cet opérateur vérifie

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} \circ \frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} = \frac{d}{dt}.$$

Il se trouve que c'est exactement la dérivée fractionnaire qui remplit cette condition.

Reformulons l'approche de Riewe en utilisant les chapitres 4 et 5 ; partant d'une équation différentielle (dissipative) classique $\mathcal{O}(x) = 0$, son but est de trouver un Lagrangien L et un ordre $\alpha_0 > 0$ tels que

$$(EL)_{\alpha_0} \equiv (\mathcal{O}(x) = 0).$$

Comme application, il considère l'équation de friction linéaire donnée par

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) - \nabla U(x(t)) = 0, \quad (9.1)$$

où $t \in [a, b]$, $m > 0$, $\gamma > 0$ et $U \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Le terme dissipatif est ici $\gamma \frac{d}{dt} x(t)$.

Il obtient un Lagrangien "étendu" tel que $\mathcal{E}_{1/2}(EL) \equiv (9.1)$. Malheureusement, comme ${}_t \mathcal{D}_b^{1/2} {}_a \mathcal{D}_t^{1/2} \neq \frac{d}{dt}$, $(EL)_{1/2} \not\equiv (9.1)$, ce qui l'empêche en fait d'atteindre son objectif.

Dans [Cre07, Cre09], Cresson poursuit cet axe de recherche en définissant plusieurs généralisations de Lagrangiens. Celles-ci permettent de réécrire certaines équations différentielles, notamment celles

de friction linéaire et de diffusion, sous la forme $\mathcal{E}_\alpha(EL)$. Concernant la structure lagrangienne de ces équations, il est montré que si x est solution de $\mathcal{E}_\alpha(EL)$, alors x est une \mathcal{V} -extrémale de l'action lagrangienne associée, où \mathcal{V} est définie par (5.2). Toutefois, outre la difficulté soulevée par le lemme 5.1, on n'obtient pas d'équivalence entre solution et extrémale.

Nous reprenons dans ce chapitre les généralisations de Lagrangiens de [Cre07] et montrons que leurs plongements asymétriques permettent d'obtenir des structures lagrangiennes complètes (avec équivalence entre solution et extrémale) pour les équations de friction linéaire et de diffusion. Enfin, nous montrons qu'il est aussi possible de munir l'équation de convection-diffusion d'une structure lagrangienne en considérant des dérivées fractionnaires en espace.

Les deux premières sections s'appuient sur [CI10] alors que la troisième fait l'objet de travaux en cours en collaboration avec Cresson et Greff.

Un des intérêt de ces structures pourrait être de nature numérique. Le caractère dissipatif de ces équations peut rendre délicate leur modélisation, tout particulièrement pour la convection-diffusion. Grâce à ces structures lagrangiennes, il pourrait être possible d'utiliser d'autres méthodes numériques plus efficaces. Le chapitre 10 constituera un premier pas dans cette direction, en ébauchant une discrétisation des systèmes lagrangiens fractionnaires.

9.1 Friction linéaire

Nous commençons par introduire le plongement fractionnaire asymétrique de nouveaux Lagrangiens dépendant de dérivées d'ordres supérieurs ou égaux à 2. Les plongements fractionnaires généraux (4.4) et (5.7) intégrant ces dérivées, cette généralisation se fait naturellement. Ce formalisme est ensuite appliqué à l'équation de friction linéaire.

9.1.1 Plongement fractionnaire de Lagrangiens étendus

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $k \geq 2$. La définition suivante est directement tirée de [Cre07].

Définition 9.1. *Un Lagrangien étendu L est une fonction*

$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^{N(k+1)} \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y_0, y_1, \dots, y_k, t) &\longmapsto L(y_0, y_1, \dots, y_k, t), \end{aligned}$$

telle que $L \in C^1(\mathbb{R}^{N(k+1)} \times [a, b])$.

L'action associée est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(L) : \quad C^k([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^b L \left(x(t), \frac{d}{dt}x(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k}x(t), t \right) dt. \end{aligned}$$

Des résultats similaires à la section 3.2 peuvent être obtenus pour ces fonctions.

Lemme 9.1. *Soit L un Lagrangien étendu et soit $x \in C^k([a, b])$.*

On suppose que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\partial_{i+1}L \left(x(\bullet), \frac{d}{dt}x(\bullet), \dots, \frac{d^k}{dt^k}x(\bullet), \bullet \right) \in AC^i([a, b])$.

Alors $\mathcal{A}(L)$ est $C_0^k([a, b])$ -différentiable en x et pour tout $h \in C_0^k([a, b])$,

$$d\mathcal{A}(L)(x, h) = \int_a^b \left[\partial_1 L + \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \partial_{i+1} L \right] \left(x(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(t), t \right) \cdot h(t) dt.$$

Démonstration. Soit $h \in C_0^k([a, b])$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in [a, b]$,

$$L \left(x(t) + \varepsilon h(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \varepsilon \frac{d^k}{dt^k} h(t), t \right) = L \left(x(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(t), t \right) + \varepsilon \sum_{i=0}^k \partial_{i+1} L \left(x(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(t), t \right) \cdot \frac{d^i}{dt^i} h(t) + o(\varepsilon).$$

Comme pour le lemme 3.2, on intègre cette relation sur $[a, b]$, on effectue des intégrations par parties où aucun terme de bords n'apparaît puis on remarque que la fonction obtenue est linéaire. \square

On obtient alors l'équivalent du lemme 3.1.

Lemme 9.2. *Soit L un Lagrangien étendu et $x \in C^k([a, b])$.*

On suppose que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\partial_{i+1} L \left(x(\bullet), \frac{d}{dt} x(\bullet), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(\bullet), \bullet \right) \in AC^i([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

x est une $C_0^k([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L)$ si et seulement si x vérifie l'équation d'Euler-Lagrange (EL_k) définie par

$$(EL_k) : \quad \forall t \in [a, b], \quad \left[\partial_1 L + \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \partial_{i+1} L \right] \left(x(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k} x(t), t \right) = 0. \quad (9.2)$$

Démonstration. Similaire à celle du théorème 3.1, le lemme fondamental du calcul des variations étant valide pour des variations dans $C_0^\infty([a, b])$ (voir par exemple le théorème 1.2.4 de [Hör83]) et donc dans $C_0^k([a, b])$. \square

Nous nous intéressons ici directement au plongement fractionnaire asymétrique. Introduisons la constante de temps τ pour l'homogénéisation dimensionnelle et choisissons d'utiliser les dérivées homogènes $\tau^{\alpha-1} d^\alpha / dt^\alpha$.

Commençons par le plongement de (EL_k) . L'équation (9.2) peut s'écrire sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}}(x) = 0$, avec $p = k$, $\mathbf{f} = \{\partial_1 L, 1, \dots, 1\}$ et $\mathbf{g} = \{-\partial_2 L, \dots, (-1)^k \partial_{k+1} L\}$. Dans ce cas, le plongement fractionnaire de (EL_k) , noté $\mathcal{E}_\alpha(EL_k)$, vérifie

$$\mathcal{E}_\alpha(EL_k) : \quad \left[\partial_1 \tilde{L} + \sigma(X) \sum_{i=1}^k \left(\begin{array}{c} (-1)^i \tau^{i(\alpha-1)} {}_a \mathcal{D}_t^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L} \\ \tau^{i(\alpha-1)} {}_t \mathcal{D}_b^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L} \end{array} \right) \right] \left(X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c \mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t \right) = 0.$$

Notons $\mathcal{E}_\alpha(EL_k)_+$ l'équation $\mathcal{E}_\alpha(EL_k)$ évaluée en $(x_+, 0)$:

$$\mathcal{E}_\alpha^+(EL_k) : \quad \left[\partial_1 L + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau^{i(\alpha-1)} {}_a \mathcal{D}_t^{\alpha i} \partial_{i+1} L \right] \left(x_+(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c \mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+(t), t \right) = 0. \quad (9.3)$$

De même, $\mathcal{E}_\alpha(EL_k)_-$ représente l'évaluation en $(0, x_-)$:

$$\mathcal{E}_\alpha^-(EL_k) : \quad \left[\partial_1 L + \sum_{i=1}^k \tau^{i(\alpha-1)} {}_t \mathcal{D}_b^{\alpha i} \partial_{i+1} L \right] \left(x_-(t), \dots, (-\tau^{\alpha-1} {}^c \mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-(t), t \right) = 0. \quad (9.4)$$

Considérons à présent le plongement du Lagrangien étendu. Nous avons d'abord besoin d'un espace vectoriel pour les trajectoires, adapté au calcul des variations. Soit F_k^α l'espace fonctionnel défini par

$$F^{\alpha, k}([a, b]) = \{X \in C^0([a, b])^2 \mid \forall 1 \leq i \leq k, ({}^c \mathcal{D}^\alpha)^i X \in C^0([a, b])^2\}.$$

On introduit aussi les espaces

$$F_+^{\alpha,k}([a, b]) = F^{\alpha,k}([a, b]) \cap (\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N) \times \{0\}),$$

$$F_-^{\alpha,k}([a, b]) = F^{\alpha,k}([a, b]) \cap (\{0\} \times \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^N)).$$

Le plongement fractionnaire asymétrique de L , toujours noté L_α , est donné par

$$\begin{aligned} L_\alpha(X)(t) &= \tilde{L}(X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \\ &= L(x_+(t) + x_-(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+(t) + (-\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-(t), t), \end{aligned}$$

pour tout $X = (x_+, x_-) \in F^{\alpha,k}([a, b])$ et $t \in [a, b]$.

L'action associée vérifie à présent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(L_\alpha) : F^{\alpha,k}([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \int_a^b \tilde{L}(X(t), \tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) dt. \end{aligned}$$

Les variations doivent bien entendu être dans $F^{\alpha,k}([a, b])$ et annuler les termes de bords dans les intégrations par parties. L'espace $C_0^k([a, b])$ vérifie ces conditions (mais peut ne pas être optimal). Effectivement, $C_0^k([a, b]) \subset F^{\alpha,k}([a, b])$ d'après le corollaire 2.1 et le lemme 2.6.

Pour tout $x > 0$, on note \underline{x} l'entier vérifiant $\underline{x} - 1 < x \leq \underline{x}$ (l'intérêt de cet entier apparaîtra dans la preuve du théorème 9.2). La différentielle de l'action est donnée par le résultat suivant.

Lemme 9.3. *Soit L un Lagrangien étendu et $X \in F^{\alpha,k}([a, b])$.*

On suppose que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\partial_{i+1} \tilde{L}(X(\bullet), \dots, ({}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(\bullet), \bullet) \in AC^{\underline{\alpha}i}([a, b])$.

Alors $\mathcal{A}(L_\alpha)$ est $C_0^k([a, b])^2$ -différentiable en X et pour tout $H = (h_+, h_-) \in C_0^k([a, b])^2$,

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}(L_\alpha)(X, H) &= \int_a^b \left[\partial_1 \tilde{L} + \sum_{i=1}^k \tau^{i(\alpha-1)} {}_t\mathcal{D}_b^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L} \right] (X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \cdot h_+(t) dt \\ &\quad + \int_a^b \left[\partial_1 \tilde{L} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau^{i(\alpha-1)} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L} \right] (X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \cdot h_-(t) dt. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $H = (h_+, h_-) \in C_0^k([a, b])^2$ et $\varepsilon > 0$. Comme pour le lemme 9.1, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(L_\alpha)(X + \varepsilon H) &= \mathcal{A}(L_\alpha)(X) + \varepsilon \int_a^b \partial_1 \tilde{L}(X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \cdot (h_+(t) + h_-(t)) dt \\ &\quad + \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^k \partial_{i+1} \tilde{L}(X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \cdot \tau^{i(\alpha-1)} (({}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^i h_+(t) + (-{}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^i h_-(t)) dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Soit $1 \leq i \leq k$. Comme $h_+ \in C_0^i([a, b])$, on a $({}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^i h_+ = {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i}$ d'après le corollaire 2.1. On peut alors utiliser le corollaire 2.2 avec $n = \underline{\alpha}i$:

$$\int_a^b \partial_{i+1} \tilde{L}(\dots) \cdot \tau^{i(\alpha-1)} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} h_+(t) dt = \int_a^b \tau^{i(\alpha-1)} {}_t\mathcal{D}_b^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L}(\dots) \cdot h_+(t) dt.$$

Une relation similaire existe pour h_- . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(L_\alpha)(X + \varepsilon H) &= \mathcal{A}(L_\alpha)(X) \\ &\quad + \varepsilon \int_a^b \left[\partial_1 \tilde{L} + \sum_{i=1}^k \tau^{i(\alpha-1)} {}_t\mathcal{D}_b^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L} \right] (X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \cdot h_+(t) dt \\ &\quad + \varepsilon \int_a^b \left[\partial_1 \tilde{L} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau^{i(\alpha-1)} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} \partial_{i+1} \tilde{L} \right] (X(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}^\alpha)^k X(t), t) \cdot h_-(t) dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Les termes en h_+ et h_- sont linéaires, ce qui achève la preuve. \square

Les équations d'Euler-Lagrange causales associées sont données par le résultat suivant.

Théorème 9.1. *Soit $(x_+, 0) \in F_+^{\alpha,k}([a, b])$.*

On suppose que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\partial_{i+1}L(x_+(\bullet), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+(\bullet), \bullet) \in AC^{\alpha i}([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

$(x_+, 0)$ est une $\{0\} \times C_0^k([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_\alpha)$ si et seulement si x_+ vérifie

$$(EL_k)_\alpha^+ : \quad \forall t \in [a, b], \quad \left[\partial_1 L + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau^{i(\alpha-1)} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha i} \partial_{i+1} L \right] \left(x_+(t), \dots, (\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^k x_+(t), t \right) = 0. \quad (9.5)$$

Soit $(0, x_-) \in F_-^{\alpha,k}([a, b])$.

On suppose que pour tout $1 \leq i \leq k$, $\partial_{i+1}L(x_-(\bullet), \dots, (-\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-(\bullet), \bullet) \in AC^{\alpha i}([a, b])$.

L'équivalence suivante a lieu :

$(0, x_-)$ est une $C_0^k([a, b]) \times \{0\}$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_\alpha)$ si et seulement si x_- vérifie

$$(EL_k)_\alpha^- : \quad \forall t \in [a, b], \quad \left[\partial_1 L + \sum_{i=1}^k \tau^{i(\alpha-1)} {}_t\mathcal{D}_b^{\alpha i} \partial_{i+1} L \right] \left(x_-(t), \dots, (-\tau^{\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_b^\alpha)^k x_-(t), t \right) = 0. \quad (9.6)$$

Démonstration. Voir celle du lemme 9.2. \square

Les équations (9.5) et (9.6) sont similaires à (9.3) et (9.4) :

$$(EL_{k,\alpha})_\pm \equiv \mathcal{E}_\alpha^\pm(EL_k).$$

Le plongement asymétrique est donc là encore cohérent et les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha^+} & L_\alpha \\ \downarrow C_0^k([a,b]) & & \downarrow \{0\} \times C_0^k([a,b]) \\ (EL_k) & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha^+} & \mathcal{E}_\alpha(EL_k)_+ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha^-} & L_\alpha \\ \downarrow C_0^k([a,b]) & & \downarrow C_0^k([a,b]) \times \{0\} \\ (EL_k) & \xrightarrow{\mathcal{E}_\alpha^-} & \mathcal{E}_\alpha(EL_k)_- \end{array}$$

Comme nous allons le voir à présent, l'équation de friction linéaire peut s'écrire sous la forme $\mathcal{E}_{1/2}^+(EL_2)$.

9.1.2 Structure lagrangienne de l'équation de friction linéaire

Rappelons l'équation de friction linéaire :

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) - \nabla U(x(t)) = 0.$$

Même si $U(x)$ est quadratique, il est montré dans [Bau31] que cette équation ne peut être dérivée d'un principe variationnel classique. Mais cela devient possible avec les dérivées fractionnaires, grâce à la relation $d/dt = {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} \circ {}^c\mathcal{D}_t^{1/2}$ donnée par le lemme 2.11 pour des fonctions de $AC^2([a, b])$. Comme nous allons le voir, l'équation (9.1) peut effectivement s'écrire sous la forme $\mathcal{E}_{1/2}^+(EL_2)$ grâce à la fonction

$$L(x, v, w, t) = \frac{m \tau^2}{2} w^2 - \frac{\gamma \tau}{2} v^2 - U(x), \quad (9.7)$$

qui constitue un Lagrangien étendu.

D'après le lemme 9.2, l'équation d'Euler-Lagrange associée est donnée par

$$m\tau^2 \frac{d^4}{dt^4}x(t) + \gamma\tau \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \nabla U(x(t)) = 0, \quad (9.8)$$

et son plongement fractionnaire est donné par le lemme suivant.

Lemme 9.4. *Le plongement fractionnaire asymétrique de (9.8) vérifie pour $(x_+, 0)$:*

$$-\nabla U(x_+(t)) + \gamma\tau^{2\alpha-1} {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t) + m\tau^{4\alpha-2} {}_a\mathcal{D}_t^{2\alpha} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x_+(t) = 0. \quad (9.9)$$

Démonstration. Soit $t \in [a, b]$. Les dérivées partielles du Lagrangien étendu (9.7) vérifient

- $\partial_1 L(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), \tau^{2\alpha-2} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x_+(t), t) = -\nabla U(x_+(t)),$
- $\partial_2 L(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), \tau^{2\alpha-2} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x_+(t), t) = -\gamma\tau^\alpha {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t),$
- $\partial_3 L(x_+(t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t), \tau^{2\alpha-2} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x_+(t), t) = m\tau^{2\alpha} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x_+(t).$

On remplace ensuite ces expressions dans (9.3) (avec $k = 2$). □

Lorsque $\alpha = 1/2$, on retrouve l'équation qui nous intéresse.

Corollaire 9.1. *Si $\alpha = 1/2$, (9.9) est définie au moins sur $C^2([a, b])$ et pour tout $x_+ \in C^2([a, b])$, (9.9) coïncide avec (9.1).*

Démonstration. Soit $x_+ \in C^2([a, b])$. D'après le lemme 2.11 et sa démonstration,

$${}_a\mathcal{D}_t^{1/2} {}_a^c\mathcal{D}_t^{1/2} x_+(t) = ({}_a^c\mathcal{D}_t^{1/2})^2 x_+(t) = \frac{d}{dt}x_+(t),$$

et donc

$${}_a\mathcal{D}_t^1 ({}_a^c\mathcal{D}_t^{1/2})^2 x_+(t) = \frac{d^2}{dt^2}x_+(t). \quad \square$$

On retrouve le résultat de Riewe : l'équation de friction linéaire peut être vue comme le plongement d'une équation d'Euler-Lagrange. Il faut maintenant s'assurer de l'équivalence entre cette équation et les extrémales d'une action lagrangienne.

Le plongement fractionnaire asymétrique de L (noté \tilde{L}_α) vérifie

$$\tilde{L}_\alpha((x_+, 0))(t) = \frac{m\tau^{4\alpha-2}}{2} \left[({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x_+(t) \right]^2 - \frac{\gamma\tau^{2\alpha-1}}{2} ({}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x_+(t))^2 - U(x_+(t)).$$

D'après le théorème 9.1, les variations devraient être choisies dans $C_0^2([a, b])$, mais l'espace

$$AC_0^2([a, b]) = \{f \in AC^2([a, b]) \mid f(a) = f(b) = 0\}$$

est en fait suffisant.

Théorème 9.2. *Soit $x \in C^2([a, b])$. L'équivalence suivante a lieu :*

x est solution de (9.1) si et seulement si $(x, 0)$ est une $\{0\} \times AC_0^2([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(\tilde{L}_{1/2})$.

Démonstration. Comme $({}^c\mathcal{D}_t^\alpha)^2 x(t) = \frac{d}{dt}x(t)$,

$$\tilde{L}_{1/2}((x, 0))(t) = \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt}x(t) \right)^2 - \frac{\gamma}{2} \left({}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t) \right)^2 - U(x(t)).$$

Comme de plus $U \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{L}_{1/2}((x, 0)) \in C^0([a, b])$ et $\mathcal{A}(\tilde{L}_{1/2})$ est bien définie. Soit $t \in [a, b]$. Les dérivées partielles de L vérifient

- $\partial_1 L(x(t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t), \tau^{-1} x'(t), t) = -\nabla U(x(t))$,
- $\partial_2 L(x(t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t), \tau^{-1} x'(t), t) = -\gamma \tau^{1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t)$,
- $\partial_3 L(x(t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t), \tau^{-1} x'(t), t) = m \tau x'(t)$.

Puisque $x' \in AC([a, b])$, ${}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x = {}^c\mathcal{I}_t^{1/2} x' \in AC([a, b])$, d'après le théorème 2.1. Par conséquent,

$$\partial_2 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(\bullet), x'(\bullet), \bullet) \in AC([a, b]).$$

De plus, $x' \in C^1([a, b]) \subset AC([a, b])$, donc

$$\partial_3 L(x(\bullet), {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(\bullet), x'(\bullet), \bullet) \in AC([a, b]).$$

Les conditions d'application du théorème 9.1 sont donc vérifiées, puisque $\frac{1}{2} = \frac{2.1}{2} = 1$. C'est en fait ici que se justifie la condition sur n du corollaire 2.2 et l'introduction de \underline{x} ; si on avait considéré $[\alpha i] + 1$ (choix naturel au vue du chapitre 2) plutôt que $\underline{\alpha i}$, il aurait fallu ici que $x' \in AC^2([a, b])$, soit $x \in AC^3([a, b])$. Cette condition est clairement trop restrictive pour (9.1).

Puisque $C_0^\infty([a, b]) \subset AC_0^2([a, b])$, le choix de $\{0\} \times AC_0^2([a, b])$ pour les variations est valide et le théorème 9.1 peut être appliqué :

$(x, 0)$ est une $\{0\} \times AC_0^2([a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_{1/2})$ si et seulement x vérifie (9.9) avec $\alpha = 1/2$, soit (9.1) d'après le corollaire 9.1. \square

Remarque 9.1. *Le choix de $({}^c\mathcal{D}^\alpha)^i$ plutôt que ${}^c\mathcal{D}^{\alpha i}$ à l'intérieur du plongement fractionnaire transparent dans ce cas particulier. Effectivement, si l'on avait choisit des ordres fractionnaires du type αi , l'évaluation du Lagrangien aurait été ici*

$$L(x(t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t), \tau^{-1}(x'(t) - x'(a)), t),$$

puisque ${}^c\mathcal{D}_t^{1/2} x(t) = x'(t) - x'(a)$. Il aurait fallu par conséquent imposer $x'(a) = 0$ afin de retrouver $(EL_k)_\alpha^+$, ce qui aurait été trop restrictif dans le cas général. Notons toutefois que dans le cas de la friction, cette condition n'est pas indispensable puisque seule la dérivée de $x'(t) - x'(a)$ intervient.

Les solutions de (9.1) peuvent donc être obtenues par un principe de moindre action (en minimisant l'action lagrangienne $\mathcal{A}(L_{1/2})$). L'objectif de Riewe est cette fois atteint pour l'équation de friction linéaire, grâce au plongement asymétrique. Faisons maintenant de même pour l'équation de diffusion.

9.2 Diffusion

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Nous ne nous intéressons plus ici à l'évolution d'une trajectoire $x(t)$ mais à celle d'une fonction $u(x, t) \in \mathbb{R}$, avec $(x, t) \in \Omega \times [a, b]$, appelée *champ*. La température $T(x, t)$ de la section 1.1.2, la densité de probabilité $P(x, t)$ de la section 6.3 en sont des exemples. Considérons plus précisément l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = k \Delta u(x, t), \tag{9.10}$$

où $t \in [a, b]$, $x \in \Omega$, $k > 0$, et Δ est l'opérateur Laplacien. Le terme dissipatif est cette fois $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$.

Afin de lui associer un Lagrangien fractionnaire, étendons les Lagrangiens aux fonctions de plusieurs variables.

9.2.1 Lagrangiens pour les champs

En suivant [Cre07], nous étendons les Lagrangiens à ces champs de la manière suivante.

Définition 9.2. *Un Lagrangien continu est une fonction*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w, x, t) &\longmapsto L(u, v, w, x, t) \end{aligned}$$

telle que $L \in C^1(\mathbb{R}^{2N+2} \times [a, b])$.

Dans le cas classique, l'évaluation de ce Lagrangien sur un champ $u(x, t)$ est définie par

$$L(u(x, t), \nabla u(x, t), \partial_t u(x, t), x, t),$$

avec $x \in \Omega$ et $t \in [a, b]$. La notation $\nabla u(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est le gradient de $x \mapsto u(x, t)$ et $\partial_t u(x, t) \in \mathbb{R}$ désigne la dérivée partielle de u par rapport à t . Mentionnons ici [BM05] où une généralisation du même type est utilisée dans le cadre fractionnaire.

Par souci de lisibilité, nous ne généralisons pas ici le plongement fractionnaire dans le cas général (encore moins sa version asymétrique), mais les idées seraient semblables. Contentons-nous de plonger le Lagrangien puisque c'est cette voie qui nous intéresse surtout ici.

On définit la représentation asymétrique d'un Lagrangien continu L par

$$\begin{aligned} \tilde{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, x, t) &\longmapsto L(u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2, x, t). \end{aligned}$$

Notons $C_0^p(\Omega) = \{f \in C^p(\Omega) \mid f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et

$$C_0^2(\Omega \times [a, b]) = \{h \in C^2(\Omega \times [a, b]) \mid \forall t \in [a, b], x \mapsto h(x, t) \in C_0^0(\Omega), \quad (9.11)$$

$$\forall x \in \Omega, h(x, a) = h(x, b) = 0\}. \quad (9.12)$$

Dans ce cadre, les dérivées fractionnaires sont associées aux dérivées partielles selon t . Par exemple, on note ${}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha u_x(t)$, où $u_x : t \mapsto u(x, t)$. De même pour $U = (u_+, u_-)$, on note ${}^c \mathcal{D}^\alpha U(x, t) = ({}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha u_+(x, t), -{}_t^c \mathcal{D}_b^\alpha u_-(x, t))$. L'action est cette fois définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\tilde{L}_\alpha) : C^1(\Omega \times [a, b])^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ U &\longmapsto \int_a^b \int_\Omega \tilde{L}(U(x, t), \nabla U(x, t), \tau^{\alpha-1} {}^c \mathcal{D}^\alpha U(x, t), x, t) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Pour un Lagrangien continu $L(u, v, w, x, t)$, nous notons $\partial_u L$, $\partial_{v_i} L$ et ∂_w les dérivées partielles respectives de L par rapport à ses premières, $i+1$ -ième et $N+2$ -ième variables. Mentionnons simplement le résultat suivant.

Théorème 9.3. *Soit $u_+ \in C^1(\Omega \times [a, b])$. On suppose que*

- $\forall x \in \Omega, t \mapsto \partial_u L(u_+(x, t), \nabla u_+(x, t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha u_+(x, t), x, t) \in AC([a, b])$,
- $\forall 1 \leq i \leq N, \forall t \in [a, b], x \mapsto \partial_{v_i} L(u_+(x, t), \nabla u_+(x, t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha u_+(x, t), x, t) \in C^1(\Omega)$.

L'équivalence suivante a lieu :

$(u_+, 0)$ est une $\{0\} \times C_0^2(\Omega \times [a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_\alpha)$ si et seulement si u_+ vérifie

$$\left[\partial_u L - \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \partial_{v_i} L - \tau^{\alpha-1} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha \partial_w L \right] \left(u_+(x, t), \nabla u_+(x, t), \tau^{\alpha-1} {}_a^c \mathcal{D}_t^\alpha u_+(x, t), x, t \right) = 0,$$

pour tout $x \in \Omega, t \in]a, b]$.

Démonstration. Comme pour les cas précédents, on évalue d'abord la différentielle de l'action. On utilise ensuite une intégration par parties pour la partie temporelle et la formule de Green pour la partie spatiale ; aucun terme de bords n'apparaît car les variations sont dans $C_0^2(\Omega \times [a, b])$. On utilise finalement une extension à $\Omega \times [a, b]$ du lemme fondamental du calcul des variations qui nous permet de conclure. \square

Appliquons à présent ce résultat à l'équation de diffusion.

9.2.2 Structure lagrangienne de l'équation de diffusion

Redonnons ici l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = k \Delta u(x, t). \quad (9.13)$$

En suivant [Cre07] (et en ajoutant la constante de temps extrinsèque), considérons le Lagrangien continu

$$L(u, v, w, x, t) = \frac{\tau}{2}w^2 - \frac{k}{2}v^2.$$

Théorème 9.4. *Soit $u \in \mathcal{F}(\Omega \times [a, b], \mathbb{R})$ tel que*

- $\forall x \in \Omega, t \mapsto u(x, t) \in AC^2([a, b])$,
- $\forall t \in [a, b], x \mapsto u(x, t) \in C^2(\Omega)$.

L'équivalence suivante a lieu :

u est solution de (9.10) si et seulement si $(u, 0)$ est une $\{0\} \times C_0^2(\Omega \times [a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_{1/2})$.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ et $t \in [a, b]$. Les dérivées partielles de L vérifient :

- $\partial_u L(u(x, t), \nabla u(x, t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t), x, t) = 0$,
- $\partial_w L(u(x, t), \nabla u(x, t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t), x, t) = \tau^{1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t)$,
- $\forall 1 \leq i \leq N, \partial_{v_i} L(u(x, t), \nabla u(x, t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t), x, t) = -k \partial_{x_i} u(x, t)$.

Les conditions du théorème 9.3 sont vérifiées et on obtient l'équivalence suivante :

$(u, 0)$ est une $\{0\} \times C_0^2(\Omega \times [a, b])$ -extrémale de l'action $\mathcal{A}(L_{1/2})$ si et seulement si u vérifie

$$\left[\partial_u L - \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \partial_{v_i} L - \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} \partial_w L \right] (u(x, t), \nabla u(x, t), \tau^{-1/2} {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t), x, t) = 0. \quad (9.14)$$

Étant donné que $\sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_i} u(x, t) = \Delta u(x, t)$ et que ${}^c\mathcal{D}_t^{1/2} \circ {}^c\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$, (9.14) est exactement (9.10). \square

Là encore, le plongement asymétrique est indispensable pour obtenir cette équivalence. Remarquons que le résultat précédent resterait valable pour $0 < \alpha < 1/2$. L'équation de diffusion fractionnaire serait alors

$$\tau^{2\alpha-1} {}^c\mathcal{D}_t^{2\alpha} u(x, t) = k \Delta u(x, t), \quad (9.15)$$

et ses solutions seraient exactement les $\{0\} \times C_0^2(\Omega \times [a, b])$ -extrémales de l'action $\mathcal{A}(L_\alpha)$.

La nature des Lagrangiens étendus est différente de celle des Lagrangiens étendus continus ; les premiers fournissent des équations différentielles ordinaires et restent liés à la dynamique de systèmes, alors que les seconds donnent des équations aux dérivées partielles qui ne concernent plus les trajectoires de systèmes.

Nous allons maintenant voir que si l'on rajoute un terme de convection (∇u) à (9.10), il est toujours possible de doter la nouvelle équation d'une structure lagrangienne.

9.3 Convection-diffusion

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N , que l'on suppose ici convexe. Notons $\overline{\Omega}$ son adhérence et $\partial\Omega$ sa frontière. Considérons l'équation de convection-diffusion, donnée par

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \operatorname{div}(k \nabla u(x, t)) + c \cdot \nabla u(x, t), \quad (9.16)$$

avec $c \in (\mathbb{R}_*^+)^N$ et $k \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Le symbole div représente l'opérateur de divergence. Là encore, la dissipation est caractérisée par $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$.

Cette équation, aussi très présente en physique, reste actuellement problématique à modéliser numériquement à cause de la présence simultanée de $\operatorname{div}(k \nabla u(x, t))$ et $c \cdot \nabla u(x, t)$.

Nous allons en fait voir ∇ comme la composition de deux dérivées spatiales fractionnaires d'ordre $1/2$. Nous devons donc d'abord préciser ces opérateurs pour ensuite prendre en compte dans les Lagrangiens continus. On obtiendra alors la structure lagrangienne recherchée.

9.3.1 Dérivées fractionnaires en espace

On s'intéresse ici aux champs du type

$$\begin{aligned} u : \overline{\Omega} \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t) \end{aligned}$$

Soit (e_1, \dots, e_N) la base canonique de \mathbb{R}^N . Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on note x_i la i -ème composante de x dans la base canonique de \mathbb{R}^N . Soit $1 \leq i \leq N$ et $x \in \overline{\Omega}$. On note $\delta_{i,x}$ la droite affine de \mathbb{R}^N définie par

$$\delta_{i,x} = x + \operatorname{Vect}(e_i),$$

et $\Omega_{i,x} = \overline{\Omega} \cap \delta_{i,x}$. Comme Ω est borné et convexe, $\Omega_{i,x}$ est un segment. Il existe donc $a_{i,x} \leq b_{i,x}$ tels que

$$\Omega_{i,x} = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) \mid t \in [a_{i,x}, b_{i,x}]\}.$$

La figure 9.1 illustre ces définitions.

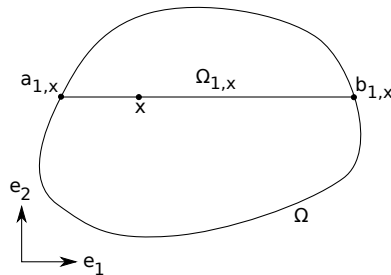


FIG. 9.1 – Segment $\Omega_{1,x}$.

Si $x, y \in \mathbb{R}^N$, on note $x \times y$ le vecteur de \mathbb{R}^N défini par

$$x \times y = (x_1 y_1, \dots, x_N y_N).$$

Soit $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$ et $x \in \bar{\Omega}$. On note $v_{i,x}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} v_{i,x} : \Omega_{i,x} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto v(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Si $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, on notera encore v son extension à \mathbb{R}^N telle que $v(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$. On peut maintenant définir les dérivées partielles fractionnaires.

Définition 9.3. Soit $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $1 \leq i \leq N$.

La dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α et selon e_i est définie par

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \partial_i^\alpha v(x) = {}_{a_{i,x}}\mathcal{D}_{x_i}^\alpha v_{i,x}(x_i).$$

La dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α et selon e_i est définie par

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \bar{\partial}_i^\alpha v(x) = {}_{x_i}\mathcal{D}_{b_{i,x}}^\alpha v_{i,x}(x_i).$$

Définition 9.4. Soit $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $1 \leq i \leq N$.

La dérivée partielle fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α et selon e_i est définie par

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad {}^c\partial_i^\alpha v(x) = {}^c_{a_{i,x}}\mathcal{D}_{x_i}^\alpha v_{i,x}(x_i).$$

La dérivée partielle fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α et selon e_i est définie par

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad {}^c\bar{\partial}_i^\alpha v(x) = {}^c_{x_i}\mathcal{D}_{b_{i,x}}^\alpha v_{i,x}(x_i).$$

Par exemple,

$${}^c\partial_i^\alpha v(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a_{i,x}}^y (y-s)^{-\alpha} \partial_i v(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_N) ds.$$

On peut alors définir le gradient fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche composante par composante :

$$\nabla^\alpha v(x) = \begin{pmatrix} \partial_1^\alpha v(x) \\ \vdots \\ \partial_N^\alpha v(x) \end{pmatrix}$$

On définit de même ${}^c\nabla^\alpha v(x)$, $\bar{\nabla}^\alpha v(x)$ et ${}^c\bar{\nabla}^\alpha v(x)$ en utilisant les dérivées des définitions 9.3 et 9.4.

On procède de même pour la divergence fractionnaire :

$$\operatorname{div}^\alpha v(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^\alpha v_i(x).$$

Là encore, on définit ${}^c\operatorname{div}^\alpha v(x)$, $\bar{\operatorname{div}}^\alpha v(x)$ et ${}^c\bar{\operatorname{div}}^\alpha v(x)$.

Soit maintenant $u : \bar{\Omega} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [a, b]$, on pose

$$\partial_i^\alpha u(x, t) = \partial_i^\alpha u_t(x),$$

où $u_t : x \mapsto u(x, t)$. On fait de même pour les autres opérateurs.

Remarque 9.2. L'inconvénient de ces définitions est qu'elles dépendent de la base choisie (ici la base canonique). Pour s'en affranchir, il faudrait peut-être utiliser la dérivée de Riesz, au prix peut-être d'une plus grande complexité.

Établissons à présent trois propriétés de ces opérateurs.

Lemme 9.5. *Soit $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $v \in C_0^1(\Omega)$. Alors*

$$\boxed{\int_{\Omega} u(x) \cdot {}^c\overline{\partial}_i^\alpha v(x) dx = \int_{\Omega} \partial_i^\alpha u(x) \cdot v(x) dx.}$$

Démonstration. Commençons par étendre sur \mathbb{R}^N les fonctions u , ${}^c\overline{\partial}_i^\alpha v$, $\partial_i^\alpha u$ et v en les prenant nulles si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \cdot {}^c\overline{\partial}_i^\alpha v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \cdot {}^c\overline{\partial}_i^\alpha v(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{x_i=-\infty}^{+\infty} u(x) {}^c\overline{\partial}_i^\alpha v(x) dx_i \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_N. \end{aligned}$$

Le terme entre crochets peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{x_i=-\infty}^{+\infty} u(x) \cdot {}^c\overline{\partial}_i^\alpha v(x) dx_i = \int_{a_{i,x}}^{b_{i,x}} u_{i,x}(x_i) {}^c\mathcal{D}_{b_{i,x}}^\alpha v_{i,x}(x_i) dx_i.$$

Comme $u_{i,x} \in C^1([a_{i,x}, b_{i,x}])$ et $v_{i,x} \in C_0^1([a_{i,x}, b_{i,x}])$, on peut utiliser la formule d'intégration par parties du corollaire 2.2 :

$$\begin{aligned} \int_{a_{i,x}}^{b_{i,x}} u_{i,x}(x_i) {}^c\mathcal{D}_{b_{i,x}}^\alpha v_{i,x}(x_i) dx_i &= \int_{a_{i,x}}^{b_{i,x}} a_{i,x} \mathcal{D}_{x_i}^\alpha u_{i,x}(x_i) v_{i,x}(x_i) dx_i, \\ &= \int_{a_{i,x}}^{b_{i,x}} \partial_i^\alpha u(x) v_{i,x}(x_i) dx_i, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \partial_i^\alpha u(x) v(x) dx_i. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x) \cdot {}^c\overline{\partial}_i^\alpha v(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \partial_i^\alpha u(x) v(x) dx_i \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n, \\ &= \int_{\Omega} \partial_i^\alpha u(x) \cdot v(x) dx. \end{aligned}$$

□

Ce lemme nous permet alors d'obtenir la formule suivante.

Lemme 9.6. *Soit $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $v = (v_1, \dots, v_N) \in C_0^1(\Omega)^N$. Alors*

$$\boxed{\int_{\Omega} v(x) \cdot {}^c\overline{\nabla}^\alpha u(x) dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}^\alpha(v(x)) u(x) dx.}$$

Démonstration. En développant le produit scalaire sur la base canonique, on obtient

$$\int_{\Omega} v(x) \cdot {}^c\overline{\nabla}^\alpha u(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} v_i(x) {}^c\overline{\partial}_i^\alpha u(x) dx$$

D'après le lemme précédent, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\int_{\Omega} v_i(x) {}^c\overline{\partial}_i^\alpha u(x) dx = \int_{\Omega} \partial_i^\alpha v_i(x) u(x) dx.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x) \cdot {}^c \nabla^{\alpha} u(x) dx &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \partial_i^{\alpha} v_i(x) u(x) dx, \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \partial_i^{\alpha} v_i(x) \right) u(x) dx, \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}^{\alpha}(v(x)) u(x) dx. \end{aligned}$$

□

Mentionnons enfin un lemme utile pour la suite.

Lemme 9.7. *Soit $c \in \mathbb{R}^N$, $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et $x \in \Omega$. Alors*

$$\boxed{\operatorname{div}^{1/2} \left(c \times {}^c \nabla^{1/2} u(x) \right) = c \cdot \nabla u(x).}$$

Démonstration. Nous avons tout d'abord

$$c \times {}^c \nabla^{1/2} u(x) = \begin{pmatrix} c_1 {}^c \partial_1^{1/2} u(x) \\ \dots \\ c_N {}^c \partial_N^{1/2} u(x) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{div}^{1/2} \left(c \times {}^c \nabla^{1/2} u(x) \right) = \sum_{i=1}^N c_i \left(\partial_i^{1/2} \circ {}^c \partial_i^{1/2} \right) u(x).$$

Comme $u'_{i,x} \in C^0([a_{i,x}, b_{i,x}])$, on a

$${}_{a_{i,x}} \mathcal{I}_{x_i}^{1/2} \circ {}_{a_{i,x}} \mathcal{I}_{x_i}^{1/2} u'_{i,x}(x_i) = {}_{a_{i,x}} \mathcal{I}_{x_i}^1 u'_{i,x}(x_i) = u_{i,x}(x_i) - u_{i,x}(a_{i,x}),$$

d'après le lemme 2.7. On obtient alors

$$\partial_i^{1/2} \circ {}^c \partial_i^{1/2} u(x) = \frac{d}{dx_i} {}_{a_{i,x}} \mathcal{I}_{x_i}^{1/2} \circ {}_{a_{i,x}} \mathcal{I}_{x_i}^{1/2} u'_{i,x}(x_i) = u'_{i,x}(x_i) = \partial_i u(x).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{1/2} \left(c \times {}^c \nabla^{1/2} u(x) \right) &= \sum_{i=1}^N c_i \partial_i u(x), \\ &= c \cdot \nabla u(x). \end{aligned}$$

□

Nous disposons à présent des outils nécessaires pour obtenir notre structure lagrangienne.

9.3.2 Structure lagrangienne de l'équation de convection-diffusion

Rappelons l'équation de convection-diffusion :

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \operatorname{div}(k \nabla u(x, t)) + c \cdot \nabla u(x, t). \quad (9.17)$$

Nous devons d'abord étendre les Lagrangiens continus aux dérivées fractionnaires spatiales. Pour l'homogénéisation, il faut donc introduire une constante de longueur χ .

On appellera Lagrangien continu étendu une fonction

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w, z, x, t) &\longmapsto L(u, v, w, z, x, t) \end{aligned}$$

telle que $L \in C^1(\mathbb{R}^{3N+2} \times [a, b])$. Dans le cas classique, son évaluation en $u(x, t)$ est définie par

$$L(u(x, t), \nabla u(x, t), (\nabla)^2 u(x, t), \partial_t u(x, t), x, t).$$

Comme pour l'équation de diffusion, nous ne définissons pas toutes les étapes du plongement fractionnaire asymétrique. Plongeons simplement ce Lagrangien en s'inspirant de la procédure du chapitre 5.

La représentation asymétrique d'un Lagrangien continu étendu L est définie par

$$\begin{aligned} \tilde{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2, x, t) &\longmapsto L(u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2, z_1 + z_2, x, t). \end{aligned}$$

Pour un couple de champs $U = (u_+, u_-)$, le plongement fractionnaire asymétrique de L vérifie ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha(U) = L(u_+ + u_-, \chi^{\alpha-1}({}^c \nabla^\alpha u_+ - \overline{{}^c \nabla^\alpha} u_-), \chi^{2\alpha-2}(({}^c \nabla^\alpha)^2 u_+ + (\overline{{}^c \nabla^\alpha})^2 u_-), \\ \tau^{\alpha-1}({}_a \mathcal{D}_t^\alpha u_+ - {}_t \mathcal{D}_b^\alpha u_-), x, t). \end{aligned}$$

Par souci de lisibilité, nous ne donnons pas l'équivalence entre extrémales et solution d'une équation d'Euler-Lagrange dans le cas général (cela serait fastidieux, difficilement lisible mais ne ferait pas apparaître d'idée nouvelle). Considérons directement le Lagrangien suivant :

$$L(u, v, w, z, x, t) = \frac{\tau}{2} z^2 - \frac{\chi c}{2} \cdot (v \times v) + \frac{\chi^2 k}{2} (w \cdot w).$$

Ses dérivées partielles vérifient

- $\partial_u L = 0$,
- $\partial_v L = -\chi c \times v$,
- $\partial_w L = -\chi^2 k w$,
- $\partial_z L = \tau z$.

On obtient l'équivalence suivante.

Théorème 9.5. *Soit $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [a, b])$. L'équivalence suivante a lieu :*

u est solution de (9.17) si et seulement si $(u, 0)$ est une $\{0\} \times C_0^2(\Omega \times [a, b])$ -extrémale de $\mathcal{A}(\tilde{L}_{1/2})$.

Démonstration. Comme $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [a, b])$, pour tout $1 \leq i \leq N$, $u_{i,x} \in C^2([a_{i,x}, b_{i,x}])$. D'après le lemme 2.11,

$${}^c \partial_i^{1/2} \circ {}^c \partial_i^{1/2} u(x) = \partial_i u(x).$$

Par conséquent,

$$({}^c\nabla^{1/2})^2 u = \nabla u.$$

Ainsi,

$$\tilde{L}_{1/2}(u, 0)(x, t) = L\left(u(x, t), \chi^{-1/2} {}^c\nabla^{1/2} u(x, t), \chi^{-1} \nabla u(x, t), \tau^{-1/2} {}^c_a\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t), x, t\right).$$

Notons pour simplifier $L[u] = \tilde{L}_{1/2}(u, 0)(x, t)$.

Soit $h \in C_0^2(\Omega \times [a, b])$. Comme $h \in C^2(\bar{\Omega} \times [a, b])$, on a aussi

$$(\overline{{}^c\nabla^{1/2}})^2 h = -\nabla h.$$

La différentielle de $\mathcal{A}(\tilde{L}_{1/2})$ vérifie

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}(L_{1/2})((u, 0), (0, h)) &= \int_a^b \int_{\Omega} \left\{ \partial_u L[u] h + \partial_v L[u] \cdot (-\chi^{-1/2} \overline{{}^c\nabla^{1/2}} h) \right. \\ &\quad \left. + \partial_w L[u] \cdot (-\chi^{-1} \nabla h) + \partial_z L[u] (-\tau^{-1/2} {}^c_t\mathcal{D}_b^{1/2} h) \right\} dx dt. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de $L[u]$ vérifient

- $\partial_u L[u] = 0$,
- $\partial_v L[u] = -\chi^{1/2} c \times {}^c\nabla^{1/2} u(x, t)$,
- $\partial_w L[u] = \chi k \nabla u(x, t)$,
- $\partial_z L[u] = \tau^{1/2} {}^c_a\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t)$.

La différentielle devient ainsi

$$d\mathcal{A}(L_{1/2})((u, 0), (0, h)) = \int_a^b \int_{\Omega} \left((c \times {}^c\nabla^{1/2} u) \cdot \overline{{}^c\nabla^{1/2}} h - k \nabla u \cdot \nabla h - {}^c_a\mathcal{D}_t^{1/2} u(x, t) {}^c_t\mathcal{D}_b^{1/2} h \right) dx dt.$$

D'après le lemme 9.6,

$$\int_{\Omega} (c \times {}^c\nabla^{1/2} u) \cdot \overline{{}^c\nabla^{1/2}} h dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}^{1/2}(c \times {}^c\nabla^{1/2} u) h dx.$$

En utilisant ensuite le lemme 9.7, on trouve que

$$\int_{\Omega} (c \times {}^c\nabla^{1/2} u) \cdot \overline{{}^c\nabla^{1/2}} h dx = \int_{\Omega} (c \cdot \nabla u) h dx.$$

Concernant le second terme, la formule de Green montre que

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla h dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \nabla u) h dx,$$

car h est nul sur $\partial\Omega$. Enfin, les régularités de h et u suivant t permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_a^b ({}^c_a\mathcal{D}_t^{1/2} u) ({}^c_t\mathcal{D}_b^{1/2} h) dt &= \int_a^b ({}_a\mathcal{D}_t^{1/2} {}^c_a\mathcal{D}_t^{1/2} u) h dt, \\ &= \int_a^b \partial_t u h dt. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini pour intervertir les intégrales, on trouve que

$$d\mathcal{A}(L_{1/2})((u, 0), (0, h)) = \int_a^b \int_{\Omega} (c \cdot \nabla u + \operatorname{div}(k \nabla u) - \partial_t u) h dx dt.$$

On conclut avec une généralisation du lemme fondamental du calcul des variations. \square

Remarque 9.3. *On peut noter que pour les trois équations, les constantes caractéristiques τ et χ n'apparaissent pas dans les équations finales. Nous les avons toutefois mentionner pour montrer que l'homogénéité peut être conservée même lorsque l'on considère une dérivée comme la composition de deux dérivées fractionnaires. Ces constantes permettraient aussi d'obtenir des équations de friction linéaire et de convection-diffusion fractionnaires homogènes, de la même manière que nous l'avons noté pour l'équation de diffusion fractionnaire (9.15).*

Parmi les trois équations que nous venons de voir, c'est probablement pour l'équation de convection-diffusion que la structure lagrangienne est la plus prometteuse, puisque c'est elle qui semble être la plus difficile à modéliser numériquement.

Les équivalences entre solutions des équations et extrémales d'actions pourrait permettre d'utiliser des méthodes d'optimisation sur ces actions. Toutefois, le fait que les variations soient orthogonales aux solutions dans le plongement asymétrique empêchera probablement l'utilisation de méthodes de descente de type "gradient". Trouver une méthode d'optimisation adaptée risque donc d'être une tâche ardue... Il semblerait toutefois possible que la modélisation numérique de ces équations puisse être améliorée grâce à des schémas numériques basés sur les structures lagrangiennes exhibées ici. Dans cette optique, nous esquissons au chapitre 10 un premier pas pour la discrétisation du plongement fractionnaire.

Chapitre 10

Schémas numériques pour les systèmes lagrangiens fractionnaires

Comme on l'a déjà mentionné, l'outil numérique joue un rôle important pour la compréhension des systèmes chaotiques. Il faut, pour les modéliser, utiliser des algorithmes très précis du fait de la sensibilité aux conditions initiales illustrée en figure 6.1. Précisons ici que même si la prévision à long terme d'un système chaotique est impossible, sa modélisation reste significative pour des temps "assez courts" de l'ordre de $1/\lambda$, où λ est l'exposant de Lyapunov donné par (6.1). Par exemple, λ est de l'ordre de quelques millions d'années pour le mouvement des planètes du système solaire. Les intégrateurs symplectiques sont conçus afin de conserver l'énergie du système, lui conférant alors une grande précision. Le chaos étant présent dans de nombreux systèmes de mécanique céleste, ces intégrateurs occupent une place importante dans ce domaine. Une construction de tels algorithmes pour les systèmes hamiltoniens de la forme $H_0 + \varepsilon H_1$, où H_0 et H_1 sont des Hamiltoniens intégrables, est donnée dans [LR01]¹. Plus généralement, il est montré dans [MW01] qu'un intégrateur préservant la structure variationnelle d'une équation (lagrangienne ou hamiltonienne) est symplectique. Un tel intégrateur est qualifié de "variationnel".

Avec les formulations lagrangiennes fractionnaires obtenues au chapitre précédent (et plus généralement avec les équations d'Euler-Lagrange fractionnaires), on peut souhaiter étendre ces intégrateurs variationnels au cas fractionnaire. La mise au point de tels schémas numériques serait intéressante en particulier pour l'équation de convection-diffusion car la modélisation de celle-ci reste actuellement problématique, à cause de la présence simultanée de $\text{div}(k\nabla u)$ et $c \cdot \nabla u$. Ce chapitre constitue un premier pas vers ces intégrateurs variationnels fractionnaires. Précisons toutefois qu'il ne représente qu'une ébauche de schémas numériques. En particulier, nous n'abordons pas les questions de convergence de schéma et nous nous restreignons au plongement fractionnaire initial du chapitre 4, qui plus est pour les systèmes lagrangiens naturels. Il faudrait ainsi inclure ce schéma dans des méthodes de type éléments finis pour modéliser les équations de diffusion et de convection-diffusion.

Nous commençons par discrétiser certains objets puis, après avoir établi quelques propriétés sur la discrétisation de dérivées fractionnaires, nous étudions celle du plongement fractionnaire.

10.1 Définition de la discrétisation

Soit $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < \alpha < 1$. On pose $h = \frac{b-a}{n}$. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $t_k = a + kh$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $(\mathbb{R}^m)^n$ l'ensemble des suites de $\{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Afin de discrétiser les systèmes lagrangiens fractionnaires, nous avons besoin de discrétiser les fonctions, les intégrales, la dérivée fractionnaire et son itérée d'ordre 2. Notons \rightsquigarrow la procédure générale

¹La figure 6.7 a été réalisée à l'aide de ces intégrateurs.

de discrétisation.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

1. On définit la discrétisation de f par

$$f \rightsquigarrow (f_k)_{0 \leq k \leq n}, \quad \text{où } f_k = f(t_k).$$

Par conséquent, si $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$,

$$g \circ f \rightsquigarrow (g(f_k))_{0 \leq k \leq n}. \quad (10.1)$$

2. On discrétise l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme suit :

$$\int_a^b f(t) dt \rightsquigarrow h \sum_{k=0}^{n-1} f_k. \quad (10.2)$$

3. La dérivée de Grünwald-Letnikov est utilisée ici pour discrétiser la dérivée fractionnaire. Définie sur \mathbb{R} au chapitre 2, nous avons noté qu'elle coïncidait avec la dérivée de Marchaud, voire de Liouville si la fonction est assez régulière. D'après [SKM93, p.385], on peut faire de même sur $[a, b]$ en définissant la dérivée de Grünwald-Letnikov à gauche par

$$\forall t \in [a, b], \quad \tilde{D}_+^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh),$$

et celle à droite par

$$\forall t \in [a, b], \quad \tilde{D}_+^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{b-t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t + jh),$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

D'après [SKM93, p.386], ces expressions coïncident avec les dérivées de Marchaud définissables sur $[a, b]$ ([SKM93, p.224]), voire avec celles de Riemann-Liouville si f est assez régulière.

Ce sont donc les dérivées de Riemann-Liouville que nous allons discrétiser avec les définitions suivantes.

Définition 10.1. *La dérivée discrète de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α est définie par*

$$\begin{aligned} D^\alpha : \quad (\mathbb{R}^m)^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^m)^n \\ (f_k)_{0 \leq k \leq n} &\longmapsto (D^\alpha f_k)_{0 \leq k \leq n}, \end{aligned}$$

où

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad D^\alpha f_k = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j f_{k-j}, \quad \text{avec } w_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j}.$$

Définition 10.2. *La dérivée discrète de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α est définie par*

$$\begin{aligned} D_*^\alpha : \quad (\mathbb{R}^m)^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^m)^n \\ (f_k)_{0 \leq k \leq n} &\longmapsto (D_*^\alpha f_k)_{0 \leq k \leq n}, \end{aligned}$$

où

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad D_*^\alpha f_k = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j f_{k+j}.$$

On définit ainsi les discrétisations de ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f$ et ${}_t\mathcal{D}_b^\alpha f$ par

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \rightsquigarrow D^\alpha(f_k), \quad {}_t\mathcal{D}_b^\alpha f \rightsquigarrow D_*^\alpha(f_k).$$

4. On discrétise enfin la composition de dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville par la composition de leurs discrétisations. Par exemple,

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \rightsquigarrow D^\alpha D^\alpha(f_k), \quad {}_t\mathcal{D}_b^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f \rightsquigarrow D_*^\alpha D^\alpha(f_k). \quad (10.3)$$

10.2 Propriétés des dérivées discrètes

Les expressions $D^\alpha D^\alpha(x_k)$ et $D_*^\alpha D^\alpha(x_k)$ apparaissant par la suite, nous devons déterminer une forme simple de leurs expressions.

Lemme 10.1. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors pour tout $0 \leq k \leq n$,*

$$\begin{aligned} D^\alpha D^\alpha f_k &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{p=0}^k \left(\sum_{j=0}^p w_j w_{p-j} \right) f_{k-p}, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{r=0}^k \left(\sum_{s=r}^k w_{s-r} w_{k-s} \right) f_r. \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} D^\alpha D^\alpha f_k &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j D^\alpha f_{k-j}, \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{l=0}^{k-j} w_l f_{k-j-l} \right), \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{k-j} w_j w_l f_{k-j-l}, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{j=0}^k \sum_{p=j}^k w_j w_{p-j} f_{k-p} \quad \text{en posant } p(l) = j + l, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{p=0}^k \left(\sum_{j=0}^p w_j w_{p-j} \right) f_{k-p}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} D^\alpha D^\alpha f_k &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{r=0}^k \left(\sum_{j=0}^{k-r} w_j w_{k-r-j} \right) f_r \quad \text{en posant } r(p) = k - p, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{r=0}^k \left(\sum_{s=r}^k w_{s-r} w_{k-s} \right) f_r \quad \text{en posant } s(j) = j + r. \end{aligned}$$

□

Lemme 10.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$D_*^\alpha D^\alpha f_k = \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{q=0}^n \left(\sum_{p=0}^{\min(q,k)} w_{k-p} w_{q-p} \right) f_q.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} D_*^\alpha D^\alpha f_k &= D_*^\alpha \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j f_{k-j} \right), \\ &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k w_j D_*^\alpha f_{k-j}, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{j=0}^k w_j \left(\sum_{l=0}^{n-(k-j)} w_l f_{l+k-j} \right), \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^{n-k+j} w_j w_l f_{l+k-j}, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{p=0}^k \sum_{l=0}^{n-p} w_{k-p} w_l f_{l+p} \quad \text{en posant } p(j) = k - j, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=p}^n w_{k-p} w_{q-p} f_q \quad \text{en posant } q(l) = l + p, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=p}^k w_{k-p} w_{q-p} f_q + \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{p=0}^k \sum_{q=k+1}^n w_{k-p} w_{q-p} f_q, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{q=0}^k \left(\sum_{p=0}^q w_{k-p} w_{q-p} \right) f_q + \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{q=k+1}^n \left(\sum_{p=0}^k w_{k-p} w_{q-p} \right) f_q, \\ &= \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{q=0}^n \left(\sum_{p=0}^{\min(q,k)} w_{k-p} w_{q-p} \right) f_q. \end{aligned}$$

□

Par ailleurs, D^α et D_*^α restent liées par une relation d'intégration par parties discrète.

Lemme 10.3. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot D_*^\alpha g_k = \sum_{k=0}^{n-1} D^\alpha f_k \cdot g_k + g_n \left(D^\alpha f_n - \frac{1}{h^\alpha} f_n \right). \quad (10.4)$$

En particulier, si $g(b) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot D_*^\alpha g_k = \sum_{k=0}^{n-1} D^\alpha f_k \cdot g_k$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot D_*^\alpha g_k &= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \left(\sum_{j=0}^{n-k} w_j g_{k+j} \right), \\
&= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k} w_j f_k g_{k+j}, \\
&= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^n w_{p-k} f_k g_p \quad (p(j) = k + j), \\
&= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=k}^{n-1} w_{p-k} f_k g_p + \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} w_{n-k} f_k g_n, \\
&= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^p w_{p-k} f_k \right) g_p + g_n \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{s=1}^n w_s f_{n-s} \right) \quad (s(k) = n - k), \\
&= \frac{1}{h^\alpha} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^p w_r f_{p-r} \right) g_p + g_n \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{s=0}^n w_s f_{n-s} - \frac{1}{h^\alpha} w_0 f_n \right) \quad (r(k) = p - k), \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} D^\alpha f_p \cdot g_p + g_n \left(D^\alpha f_n - \frac{1}{h^\alpha} f_n \right) \quad \text{car } w_0 = 1.
\end{aligned}$$

De plus, si $g(b) = 0$, alors $g_n = 0$ (par définition) et la relation précédente se simplifie. \square

Nous pouvons à présent nous pencher sur la discrétisation du plongement fractionnaire.

10.3 Discrétisation des systèmes lagrangiens naturels fractionnaires

Rappelons qu'un système lagrangien est dit naturel si son Lagangien L s'écrit sous la forme

$$L(x, v) = \frac{1}{2} {}^t v M v - U(x),$$

où $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique. L'équation d'Euler-Lagrange associée est

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \nabla U(x(t)) = 0. \quad (10.5)$$

Comme pour le cas continu, il existe deux moyens d'obtenir une version fractionnaire discrète de (10.5). Notons cependant que la discrétisation de la dérivée fractionnaire concerne la dérivée de Riemann-Liouville; il faut donc remplacer à l'intérieur du plongement fractionnaire la dérivée de Caputo par celle de Riemann-Liouville, ce qui est problématique d'après la remarque liée à (4.8). Il faudrait donc imposer $x(a) = 0$ ou considérer une autre discrétisation. Nous n'entrerons pas plus dans les détails et nous contenterons de supposer $x(a) = 0$ (condition qui n'est pas essentielle pour la version discrète), afin de n'utiliser que des dérivées de Riemann-Liouville.

10.3.1 Discrétisation directe

Avec la remarque précédente, le plongement fractionnaire direct de (10.5) est donné par

$$\forall t \in [a, b], \quad M {}_a D_t^\alpha {}_a D_t^\alpha x(t) + \nabla U(x(t)) = 0. \quad (10.6)$$

D'après (10.3), le premier terme se discrétise ainsi :

$$M {}_a\mathcal{D}_t^\alpha {}_a\mathcal{D}_t^\alpha x \rightsquigarrow MD^\alpha D^\alpha x_k.$$

Celle du second est donnée par (10.1) :

$$\nabla U(x(t)) \rightsquigarrow (\nabla U(x_k))_{0 \leq k \leq n}.$$

En utilisant le lemme 10.1, on trouve donc que (10.6) peut être discrétisée de la manière suivante :

$$(10.6) \rightsquigarrow \forall 0 \leq k \leq n, \quad \frac{M}{h^{2\alpha}} \sum_{q=0}^k \left(\sum_{p=q}^k w_{k-p} w_{p-q} \right) x_q + \nabla U(x_k) = 0. \quad (10.7)$$

On peut réécrire cette équation sous la forme d'une relation de récurrence implicite :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad Mx_k + h^{2\alpha} \nabla U(x_k) = -M \sum_{q=0}^{k-1} \left(\sum_{p=q}^k w_{k-p} w_{p-q} \right) x_q.$$

Ce schéma ne fait pas apparaître la structure lagrangienne de (10.6), contrairement au schéma proposé ci-dessous.

10.3.2 Principe de moindre action discret

Cas général

Afin de conserver une trace du principe de moindre action, nous allons ici discrétiser l'action lagrangienne, lui appliquer le principe de moindre action, pour obtenir une autre discrétisation de (10.6).

Soit L un Lagrangien. D'après (10.1), son plongement L_α se discrétise en

$$L(x(t), {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) \rightsquigarrow L(x_k, D^\alpha x_k, t_k),$$

et d'après (10.2), l'action associée

$$\mathcal{A}(L_\alpha)(x) = \int_a^b L(x(t), {}_a^c\mathcal{D}_t^\alpha x(t), t) dt$$

devient

$$\mathcal{A}(L_\alpha)(x) \rightsquigarrow h \sum_{k=0}^{n-1} L(x_k, D^\alpha x_k, t_k).$$

On note $\mathcal{A}_d(L_\alpha)(x_k)$ cette action discrétisée :

$$\mathcal{A}_d(L_\alpha) : \quad (\mathbb{R}^N)^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_k)_{0 \leq k \leq n} \longmapsto h \sum_{k=0}^{n-1} L(x_k, D^\alpha x_k, t_k).$$

Introduisons l'espace des variations qui nous intéresse ici :

$$(\mathbb{R}^N)_0^n = \{y \in (\mathbb{R}^N)^n \mid y_n = 0\}.$$

Les ensembles $(\mathbb{R}^N)^n$ et $(\mathbb{R}^N)_0^n$ étant des espaces vectoriels, le calcul des variations exposé en section 3.2.1 reste valide ici.

Lemme 10.4. Soit $x \in (\mathbb{R}^N)^n$. L'action discrétisée $\mathcal{A}_d(L_\alpha)$ est $(\mathbb{R}^N)_0^n$ -différentiable en x et pour tout $y \in (\mathbb{R}^N)_0^n$,

$$d\mathcal{A}_d(L_\alpha)(x, y) = h \sum_{k=0}^{n-1} [\partial_1 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) + D_*^\alpha \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k)] y_k.$$

Démonstration. Soit $y \in (\mathbb{R}^N)_0^n$ et $\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_d(L_\alpha)(x + \varepsilon y) &= h \sum_{k=0}^{n-1} L(x_k + \varepsilon y_k, D^\alpha x_k + \varepsilon D^\alpha y_k, t_k), \\ &= h \sum_{k=0}^{n-1} L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) + \varepsilon h \sum_{k=0}^{n-1} \partial_1 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) \cdot y_k \\ &\quad + \varepsilon h \sum_{k=0}^{n-1} \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) \cdot D^\alpha y_k + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Comme $y_n = 0$, le lemme 10.3 montre que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) \cdot D^\alpha y_k = \sum_{k=0}^{n-1} D_*^\alpha \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) y_k.$$

Ainsi,

$$\mathcal{A}_d(L_\alpha)(x + \varepsilon y) = \mathcal{A}_d(L_\alpha)(x) + \varepsilon h \sum_{k=0}^{n-1} [\partial_1 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) + D_*^\alpha \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k)] y_k + o(\varepsilon).$$

On conclut en utilisant la linéarité de $h \mapsto h \sum_{k=0}^{n-1} [\partial_1 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) + D_*^\alpha \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k)] y_k$. \square

On obtient alors une nouvelle équation d'Euler-Lagrange fractionnaire et discrète.

Lemme 10.5. Soit $x \in (\mathbb{R}^N)^n$. L'équivalence suivante a lieu :

x est une $(\mathbb{R}^N)_0^n$ -extrémale de $\mathcal{A}_d(L_\alpha)$ si et seulement si x est solution de l'équation suivante :

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \partial_1 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) + D_*^\alpha \partial_2 L(x_k, D^\alpha x_k, t_k) = 0. \quad (10.8)$$

Démonstration. On utilise le lemme 10.4 avec les suites y^j , $0 \leq j \leq n-1$, définies par

$$y_j^j = 1, \quad \forall k \neq j, \quad y_k^j = 0.$$

\square

Systèmes lagrangiens naturels

L'action discrétisée est dans ce cas

$$\mathcal{A}_d(L_\alpha)(x) = h \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} {}^t D^\alpha x_k M D^\alpha x_k - U(x_k) \right),$$

et l'équation (10.8) associée devient

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad D_*^\alpha M D^\alpha x_k + \nabla U(x_k) = 0,$$

autrement dit, en utilisant le lemme 10.2,

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad M \frac{1}{h^{2\alpha}} \sum_{q=0}^n \left(\sum_{p=0}^{\min(q,k)} w_{k-p} w_{q-p} \right) x_q + \nabla U(x_k) = 0.$$

La violation de causalité du plongement initial se traduit ici par la présence à chaque instant de toutes les valeurs x_q . Dans l'éventualité où un tel schéma ait un sens, la détermination des x_q ne pourrait se faire que globalement, en inversant une matrice de taille $n \times n$ (il faudrait auparavant expliciter le terme $\nabla U(x_k)$). On pourrait aussi discrétiser la version asymétrique du plongement, ce qui conduirait vraisemblablement à (10.7).

Par manque de temps, nous n'avons pas réussi à appréhender les intérêts et enjeux de ces schémas. Nous nous contenterons de remarquer que contrairement au plongement direct, la seconde méthode ne dépend pas de la discrétisation de la dérivée seconde ; une fois définie la discrétisation de la dérivée, c'est le principe de moindre action (causal ou non) qui impose la structure des dérivées itérées. C'est peut-être ici que réside l'intérêt numérique d'une structure lagrangienne. En ce qui concerne l'équation de convection-diffusion – celle pour laquelle l'utilisation d'un tel schéma serait la plus prometteuse –, il faudrait étendre cette discrétisation aux dimensions spatiales. Plusieurs étapes devront ainsi être franchies avant de pouvoir appliquer ce chapitre au précédent.

Conclusion et perspectives

Au cours de ce travail, nous avons tenté d'appliquer le plongement fractionnaire aux systèmes chaotiques hamiltoniens décrits par Zaslavsky, à travers plusieurs angles d'approches. La première partie nous a permis de nous familiariser avec l'outil fractionnaire et a fourni quelques résultats nouveaux, élémentaires certes, mais utiles pour notre étude. Nous avons ensuite dans la seconde partie abordé notre problématique en partant du plongement fractionnaire, pour essayer de le relier du mieux possible à la physique. Homogénéisation dimensionnelle, approche formelle de l'irréversibilité et respect de la causalité sont autant de concepts physiques que nous nous sommes efforcé de formaliser. Dans la troisième partie, au contraire, notre point de départ a été les systèmes hamiltoniens chaotiques. Nous avons essayé de rattacher certaines de leurs propriétés au fractionnaire, avec des succès inégaux. Le temps interne, concept pourtant parfaitement adapté à notre thématique, n'a pas pu ancrer le plongement dans le réel. Par contre, notre modèle simple de dynamique s'est avéré plus satisfaisant, sans toutefois répondre non plus à notre question initiale. Nous avons enfin vu dans la dernière partie que la version asymétrique du plongement dotait certaines équations classiques de nouvelles structures lagrangiennes, ce qui pourrait s'avérer intéressant numériquement.

Finalement, quatre résultats principaux semblent se dégager de cette thèse.

Homogénéisation temporelle : même si son principe est simple, cette procédure n'en reste pas moins nécessaire. La constante de τ reste maintenant à préciser. Comprendre l'origine physique de celle-ci permettrait assurément de mieux appréhender le lien qu'entretient le calcul fractionnaire avec le réel.

Version asymétrique du plongement fractionnaire : bien que fort théorique, ce dédoublement de dimension semble englober un contenu assez riche, avec une approche formelle de l'irréversibilité, le respect de la causalité, un nouvel éclairage sur la vision finaliste du principe de moindre action ainsi que le point suivant.

Structure lagrangienne de l'équation de convection-diffusion : ce corollaire du plongement asymétrique relève moins d'un travail personnel, le lagrangien de cette équation ayant été déterminé par Cresson, mais l'équivalence trouvée ici entre solutions et extrémals pourrait présenter un intérêt numérique. Reste à le déterminer précisément... C'est peut-être par cette voie que le plongement fractionnaire a le plus de chance de quitter sa bulle formelle.

Modèle simple de dynamique fractionnaire pour le chaos hamiltonien : même s'il possède encore des zones d'ombres, ce modèle réalise un réel lien entre ces deux domaines et constitue ainsi la réponse la plus aboutie à notre problématique initiale. Le fait que l'exposant fractionnaire soit compatible avec l'analyse de Zaslavsky semble encourageant. Il reste maintenant à peaufiner ce modèle, à le tester numériquement et à le confronter avec des systèmes chaotiques réels.

Bibliographie

- [Abe23] N.H. Abel. Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. *Magazin fur Naturvidenskaberne*, Aargang I, Bind 2, 1823.
- [Agr02] O.P. Agrawal. Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 272 :368–379, 2002.
- [Arn89] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989.
- [ASZ91] V.V. Afanasiev, R.Z. Sagdeev, and G.M. Zaslavsky. Chaotics jets with multifractal space-time random walk. *Chaos*, 1(2), 1991.
- [Ave83] A. Avez. *Calcul Différentiel*. Masson, 1983.
- [BA06] D. Baleanu and O.P. Agrawal. Fractional Hamilton formalism within Caputo's derivative. *Czechoslovak Journal of Physics*, 56(10-11), 2006.
- [Bau31] P.S. Bauer. Dissipative dynamical systems I. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 17 :311, 1931.
- [Bin71] N.H. Bingham. Limit theorems for occupation times of Markov processes. *Z. Warscheinlichkeitsth.*, 17 :1–22, 1971.
- [BM05] D. Baleanu and S.I. Muslih. Lagrangian formulation of classical fields within Riemann-Liouville fractional derivatives. *Physica Scripta*, 72 :119–121, 2005.
- [Bre22] W.C. Brenke. An application of Abel's integral equation. *Amer. Math. Monthly*, 29 :58–60, 1922.
- [BT83] R.L. Bagley and P.J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27 :201–210, 1983.
- [BT86] R.L. Bagley and P.J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelasticity behavior. *Journal of Rheology*, 30 :133–155, 1986.
- [CD07] J. Cresson and S. Darses. Stochastic embedding of dynamical systems. *Journal of Mathematical Physics*, 48 :072703, 2007.
- [CF03] E. Cuesta and J. Finat. Image processing by means of a linear integro-differential equation. *IASTED*, pages 438–442, 2003.
- [CI08] J. Cresson and P. Inizan. Irreversibility, least action principle and causality. *arXiv*, 0812.3529v2, 2008. Unpublished.
- [CI09] J. Cresson and P. Inizan. About fractional Hamiltonian systems. *Physica Scripta*, T136 :014007, 2009.
- [CI10] J. Cresson and P. Inizan. Variational formulations of differential equations and asymmetric fractional embedding. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010. Submitted.
- [CK08] G. Cristadoro and R. Ketzmerick. Universality of algebraic decays in Hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 100(18) :184101(4), 2008.
- [Com96] A. Compte. Stochastic foundations of fractional dynamics. *Physical Review E*, 53(4) :4191–4193, 1996.

- [Cre07] J. Cresson. Fractional embedding of differential operators and Lagrangian systems. *Journal of Mathematical Physics*, 48(3) :033504, 2007.
- [Cre09] J. Cresson. Inverse problem of fractional calculus of variations for partial differential equations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2009.
- [CS84] B.V. Chirikov and D.L. Shepelyansky. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems. *Physica*, 13D, 1984.
- [CS99] B.V. Chirikov and D.L. Shepelyansky. Asymptotic statistics of Poincaré recurrences in Hamiltonian systems with divided phase space. *Physical Review Letters*, 82(3), 1999.
- [DDCC92] A. Dahan Dalmedico, J.L. Chabert, and K. Chemla. *Chaos et déterminisme*. Éditions du Seuil, 1992.
- [DGP10] F. Dubois, A.C. Galucio, and N. Point. Introduction à la dérivation fractionnaire, théorie et applications. *Techniques de l'Ingénieur*, AF510, 2010.
- [ENT07] R.A. El Nabulsi and D.F.M. Torres. Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with riemann-liouville derivatives of order (α, β) . *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30 :1931–1939, 2007.
- [Eul38] L. Euler. De Progressionibus Transcendentibus, sev Quarum Termini Algebraice Dari Nequeunt. *Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae*, 5 :36–57, 1738.
- [Fel71] Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II*. Wiley, New York, 1971.
- [FT07] G.S.F. Frederico and D.F.M. Torres. A formulation of Noether's theorem of fractional problems of the calculus of variations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334 :834–846, 2007.
- [FT08] G.S.F. Frederico and D.F.M. Torres. Fractional conservation laws in optimal control theory. *Nonlinear Dynamics*, 53 :215–222, 2008.
- [GDMD06] A.C. Galucio, J.-F. Deü, S. Mengué, and F. Dubois. An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6073–6085, 2006.
- [GM97] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order. In *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer Verlag, 1997.
- [GN95] W.G. Glöckle and T.F. Nonnenmacher. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics. *Biophysical Journal*, 68 :46–53, 1995.
- [GR92] M. Giona and H.E. Roman. Fractional diffusion equation on fractals : one-dimensional case and asymptotic behaviour. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 25 :2093–2105, 1992.
- [Gui09] P. Guidotti. A new nonlocal nonlinear diffusion of image processing. *Journal of Differential Equations*, 246(12) :4731–4742, 2009.
- [GVH06] E. Gerolymatou, I. Vardoulakis, and R. Hilfer. Modelling infiltration by means of a nonlinear fractional diffusion model. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 39 :4104–4110, 2006.
- [HA95] R. Hilfer and L. Anton. Fractional master equations and fractal time random walks. *Physical Review E*, 51(2), 1995.
- [Hil93] R. Hilfer. Classification theory for anequilibrium phase transitions. *Physical Review E*, 48(4) :2466–2475, 1993.
- [Hil95a] R. Hilfer. Foundations of fractional dynamics. *Fractals*, 3(3) :549–556, 1995.
- [Hil95b] R. Hilfer. Fractional dynamics, irreversibility and ergodicity breaking. *Chaos, Soliton & Fractals*, 5(8) :1475–1484, 1995.

- [Hil00a] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publ. Co., Singapore, 2000.
- [Hil00b] R. Hilfer. Fractional evolution equations and irreversibility. In D. Helbing, H. Herrmann, M. Schreckenberg, and D. Wolf, editors, *Traffic and Granular Flow '99*. Springer, 2000.
- [Hil03] R. Hilfer. Remarks on fractional time. In L. Castell and O. Ischebeck, editors, *Time, Quantum and Information*, page 235. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [Hil08] R. Hilfer. Threefold introduction to fractional derivatives. In R. Klages, G. Radons, and I.M. Sokolov, editors, *Anomalous Transport : Foundations and Applications*. Wiley-VCH, 2008.
- [HM06] T. Hélie and D. Matignon. Diffusive representations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc.*, pages 503–536, 2006.
- [Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial differential Operators I*. Springer-Verlag, 1983.
- [HSV99] M. Hirata, B. Saussol, and S. Vaienti. Statistics of return times : A general framework and new applications. *Commun. Math. Phys.*, 206 :33–55, 1999.
- [Ini07] P. Inizan. Compatibility between Hamiltonian formalisms. *Int. J. Ecol. Econ. Stat.*, 9(F07) :83–91, 2007.
- [Ini08] P. Inizan. Homogeneous fractional embeddings. *Journal of Mathematical Physics*, 49(8) :082901, 2008.
- [Ini10] P. Inizan. Fractal traps and fractional dynamics. *Fractals*, 2010. Submitted.
- [Las89] J. Laskar. A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system. *Nature*, 338, 1989.
- [LK04] A. Lion and C. Kardelky. The Payne effect in finite viscoelasticity : constitutive modeling based on fractional derivatives and intrinsic time scales. *International Journal of Plasticity*, 20 :1313–1345, 2004.
- [LN04] K. Logvinova and M.C. Néel. A fractional equation for anomalous diffusion in a randomly heterogeneous porous medium. *Chaos*, 14(4) :982–987, 2004.
- [LR01] J. Laskar and P. Robutel. High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80 :39–62, 2001.
- [Lub86] C. Lubich. Discretized fractional calculus. *Siam J. Math. Anal.*, 17(3) :704–719, 1986.
- [Mat96] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational engineering in systems applications, Lille*, volume 2, pages 963–968. IMACS, IEEE-SMC, 1996.
- [Mat02] D. Matignon. Introduction à la dérivation fractionnaire. In *Lois d'échelle, fractales et ondelettes*. Hermes, 2002.
- [MBR07] S.I. Muslih, D. Baleanu, and E.M. Rabei. Fractional Hamilton's equations of motion in fractional time. *Central European Journal of Physics*, 5(4), 2007.
- [Mei97] J.D. Meiss. Average exit time for volume-preserving maps. *Chaos*, 7(1) :139–147, 1997.
- [MK00] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339 :1–77, 2000.
- [MO85] J.D Meiss and E. Ott. Markov-tree model of intrinsic transport in Hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, 55(25), 1985.
- [Mor02] A. Morbidelli. *Modern Celestial Mechanics*. Taylor & Francis, 2002.

- [MR93] K.S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, New York, 1993.
- [MR06] F. Martin-Robine. *Histoire du principe de moindre action*. Vuibert, Paris, 2006.
- [MS04] M.M. Meerschaert and H.-P. Scheffler. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. *J. Appl. Prob.*, 41 :623–638, 2004.
- [MW65] E.W. Montroll and G.H. Weiss. Random walks on lattices, II. *Journal of Mathematical Physics*, 6 :167–181, 1965.
- [MW01] J.E. Marsden and M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 10 :357–514, 2001.
- [OMN96] A. Oustaloup, X. Moreau, and M. Nouillant. The CRONE suspension. *Control Eng. Practice*, 4(8) :1101–1108, 1996.
- [OS70] K.B. Oldham and J. Spanier. The replacement of Fick’s laws by a formulation involving semidifferentiation. *J. Electroanal. Chem.*, 26 :331–341, 1970.
- [OS74] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York and London, 1974.
- [Pes07] Y. Pesin. Existence and genericity problems for dynamical systems with nonzero lyapunov exponents. *Regular and Chaotic Dynamics*, 12(5) :476–489, 2007.
- [Pfi04] T. Pfitzenreiter. A physical basis for fractional derivatives in constitutive equations. *Z. Angew. Math. Mech.*, 84(4) :284–287, 2004.
- [Pri94] I. Prigogine. *Les lois du chaos*. Champs. Flammarion, 1994.
- [Pri99] I. Prigogine. Laws of nature, probability and time symmetry breaking. *Physica A*, 263 :528–539, 1999.
- [Rie96] F. Riewe. Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, 53(2) :1890, 1996.
- [SATM07] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A. Tenreiro Machado. *Advances in fractional calculus*. Springer, 2007.
- [Sch66] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [SCL⁺10] J. Sabatier, M. Cugnet, S. Laruelle, S. Grugeon, B. Sahut, A. Oustaloup, and J.M. Tarascon. A fractional order model for lead-acid battery crankability estimation. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 15 :1308–1317, 2010.
- [SKM93] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach, 1993.
- [Sta04] A.A. Stanislavsky. Probability interpretation of the integral of fractional order. *Theoretical and Mathematical Physics*, 138(3), 2004.
- [Sta06] A.A. Stanislavsky. Hamiltonian formalism of fractional systems. *Eur. Phys. J. B*, 49 :93–101, 2006.
- [SZ97] A.I. Saichev and G.M. Zaslavsky. Fractional kinetic equations : solutions and applications. *Chaos*, 7(4) :753–764, 1997.
- [SZK93] M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, and J. Klafter. Strange kinetics. *Nature*, 363 :31–37, 1993.
- [TZ06] V.E. Tarasov and G.M. Zaslavsky. Dynamics with low-level fractionality. *Physica A*, 368 :399–415, 2006.
- [TZ08] V.E. Tarasov and G.M. Zaslavsky. Fractional equations of kicked systems and discrete maps. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 41, 2008.

- [VDBFL10] T.L. Van Den Berg, D. Fanelli, and X. Leoncini. Stationary states and fractional dynamics in systems with long-range interactions. *Europhysics Letters*, 89, 2010.
- [Wig03] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.
- [Wys86] W. Wyss. The fractional diffusion equation. *J. Math. Phys.*, 27(11), 1986.
- [Zas94a] G.M. Zaslavsky. Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos. *Physica D*, 76 :110–122, 1994.
- [Zas94b] G.M. Zaslavsky. Renormalization group theory of anomalous transport in systems with hamiltonian chaos. *Chaos*, 4(1) :25–33, 1994.
- [Zas99] G.M. Zaslavsky. Chaotic dynamics and the origin of statistical laws. *Physics Today*, August 1999.
- [Zas02] G.M. Zaslavsky. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, 371, 2002.
- [Zas05] G.M. Zaslavsky. *Hamiltonian Chaos & Fractional Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [ZEN97] G.M. Zaslavsky, M. Edelman, and B.A. Niyazov. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of hamiltonian chaotic dynamics. *Chaos*, 7(1) :159–181, 1997.
- [ZNC10] A. Zoia, M.C. Néel, and A. Curtis. Continuous-time random-walk model of transport in variably saturated heterogeneous porous media. *Physical Review E*, 81, 2010.
- [ZSE06] G.M. Zaslavsky, A.A. Stanislavsky, and M. Edelman. Chaotic and pseudochaotic attractors of perturbed fractional oscillator. *Chaos*, 16 :013102, 2006.