

Thèse de Doctorat
ASTRONOMIE FONDAMENTALE,
MECANIQUE CELESTE ET GEODESIE
INTEGRATION DU MOUVEMENT DES
PLANETES
DANS LE CADRE DE LA
RELATIVITE GENERALE
sous la direction de P. BRETAGNON et V. A.
BRUMBERG

Xavier MOISSON

Mars 2000

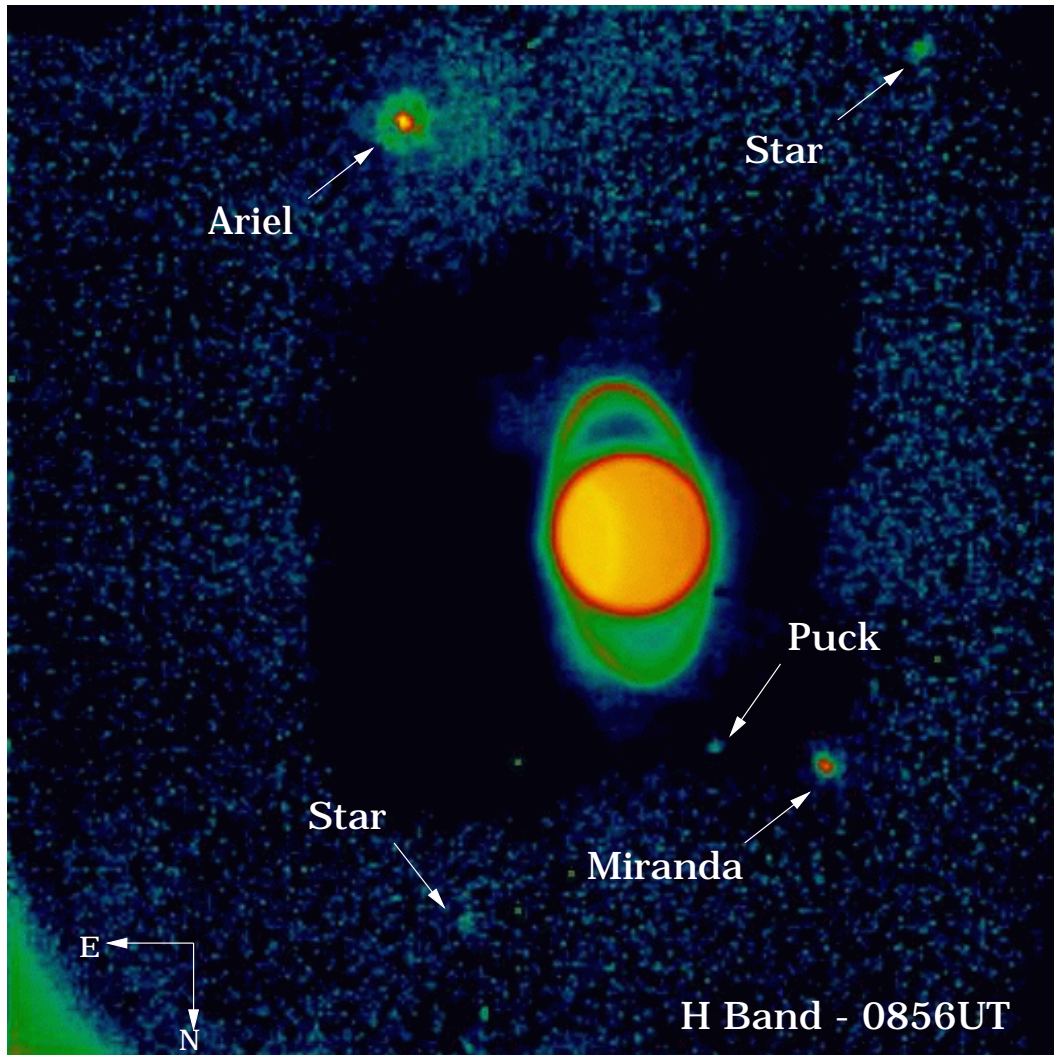


FIG. 1 – Image déconvoluée d'Uranus et de ses satellites réalisée au télescope de 3,60m de l'ESO.

Table des matières

Introduction	8
1 Relativité générale	10
1.1 L'espace-temps	10
2 Coordonnées elliptiques	21
2.1 Théories actuelles	21
2.1.1 Introduction	21
2.1.2 Les solutions VSOP	22
2.2 La solution VSOP2000	26
2.2.1 Perturbations au troisième ordre des masses	26
2.2.2 Méthode itérative	29
2.2.3 Réduction d'une itération	34
2.2.4 Compléments à la solution	37
2.2.5 Constantes d'intégration	39
2.2.6 Comparaisons à DE403	43
2.2.7 Comparaison à une intégration numérique interne	63
2.2.8 Comparaison à DE405.	68
2.2.9 Solutions dérivées	76
3 Coordonnées rectangulaires	86
3.1 Présentation	86
3.2 Lagrangien du problème des N corps	87
3.2.1 Equations du mouvement.	90
3.3 Méthode envisagée.	92
3.3.1 Notations	92
3.3.2 Orbites intermédiaires.	93
3.3.3 Forme générale de la solution.	95
3.3.4 Difficultés techniques	96
3.3.5 Autre forme de la solution	98
3.4 Exponentielle de Dyson	101

3.4.1	Introduction	101
3.4.2	Orbite intermédiaire képlérienne	101
3.4.3	Equations différentielles linéaires à coefficients variables	105
3.4.4	Equations différentielles linéaires à coefficients variables avec second membre	108
4	Théorie des Systèmes de Référence	114
4.1	Systèmes de référence relativistes	114
4.1.1	Introduction	114
4.1.2	Systèmes de référence	116
4.2	Relations analytiques entre les systèmes de référence	122
4.2.1	Liens spatiaux	122
4.2.2	Liens temporels	125
5	Intégrateur géodésique	127
5.1	Introduction	127
5.2	Méthode	128
5.3	Calcul des coefficients $h_{\mu\nu}$	130
5.4	Tests et résultats	130
5.4.1	Géodésique isotrope - le cas du photon	130
5.4.2	Les particules test - Orbite de Lageos	130
5.5	Conclusion	131
	Conclusion générale	133
6	ANNEXES	135
6.1	Annexe 1 - Résolution A4 de l'Union astronomique internatio- nale	135
6.2	Annexe 2 - Quelques solutions des équations du champ	144
6.3	Annexe 3 - Produit intégral sur un espace de Banach	146
6.3.1	Notations	146
6.3.2	Produit intégral de fonctions en escalier	146
6.4	Annexe 4 - Liens analytiques entre les temps coordonnées	150
6.4.1	Mercure	151
6.4.2	Vénus	152
6.4.3	Terre	153
6.4.4	Mars	154
6.4.5	Lune	155
6.5	Glossaire, Abréviations	157
	Bibliographie	165

Liste des tableaux

2.1	Solutions VSOP87	22
2.2	Moyens mouvements en longitudes moyennes de VSOP82	25
2.3	Fréquence ν en $''/\text{an}$	26
2.4	Différences entre VSOP82 et DE200	27
2.5	Masses IERS 1992	28
2.6	Fréquences (ν) et précisions associées (ε)	35
2.7	Constantes utilisées pour les petites planètes	39
2.8	Constantes d'intégration de VSOP2000	42
2.9	Différences théorie au troisième ordre des masses -DE403	43
2.10	Différences VSOP2000-DE403	45
2.11	Différences VSOP2000-DE403	45
2.12	Différences VSOP2000-DE403 sur six cents ans	54
2.13	Différences théorie au troisième ordre des masses -DE405	68
2.14	Pentes des différences entre VSOP2000 et DE405	70
2.15	Pentes induites par les petits corps - Mercure	72
2.16	Constantes d'intégration issues de DE405	73
2.17	Pentes entre deux solutions au premier ordre	74
2.18	Différences entre la solution VSOP2000A et DE403 sur un siècle	76
2.19	Différences entre les masses IERS 1992 et les masses de DE403	78
2.20	Différentes époques J2000	81
2.21	Constantes d'intégration de VSOP2000 (TCB)	84
2.22	Solutions VSOP2000	85

Table des figures

1	Uranus et ses satellites	2
1.1	Variété topologique	15
1.2	Cartes locales	16
2.1	Eléments elliptiques	24
2.2	Différences entre DE403 et la théorie au troisième ordre des masses sur un siècle - longitudes moyennes de Vénus, la Terre et Mars	29
2.3	Différences entre DE403 et la théorie au troisième ordre des masses sur un siècle - Mercure	30
2.4	Analyse spectrale de la différences entre la théorie au troisième ordre des masses et DE403	31
2.5	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Mercure.	46
2.6	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Vénus	47
2.7	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour la Terre	48
2.8	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Mars	49
2.9	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Jupiter	50
2.10	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Saturne	51
2.11	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Uranus	52
2.12	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Neptune	53
2.13	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Mercure	55
2.14	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Vénus	56
2.15	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour la Terre	57
2.16	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Mars	58

2.17	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Jupiter	59
2.18	Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Saturne	60
2.19	Différences entre DE403 et VSOP2000 sur six cents ans pour Uranus	61
2.20	Différences entre DE403 et VSOP2000 sur six cents ans pour Neptune	62
2.21	Comparaison à une intégration numérique interne - Longitudes de Mercure, Vénus, la Terre et Mars sur un siècle	64
2.22	Comparaison à une intégration numérique interne - Longitudes de Mercure, Vénus, la Terre et Mars sur 6000 ans	65
2.23	Comparaison à une intégration numérique interne - Longitudes de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune sur un siècle	66
2.24	Comparaison à une intégration numérique interne - Longitudes de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune sur 6000 ans	67
2.25	Différences entre DE403 et DE405	69
2.26	Contributions de la modification des masses, des constantes d'intégration et des astéroïdes	75
2.27	Différences entre VSOP2000B et DE403 pour le Soleil	77
2.28	Différences entre VSOP2000B et DE403 pour le Soleil	78
2.29	Différences entre VSOP2000B et DE403 pour la vitesse barycentrique de la Terre	79
2.30	Lectures des échelles TCB, TDB, TT et TAI au géocentre	82
4.1	Transport parallèle	115
4.2	Hierarchie des systèmes de référence	117
4.3	Angles d'Euler ψ , θ et φ	123
5.1	Orbite de Lageos	132

Introduction

Le travail entrepris au cours de cette thèse a pour objectif la construction des liens analytiques entre les systèmes de référence introduits en astronomie par la prise en compte de la nature relativiste de l'espace-temps.

Depuis la publication de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein, les efforts de compréhension de cette théorie du champ de gravitation ont amené physiciens et astronomes à réviser leurs concepts fondamentaux d'espace et de temps. Le système de référence, dans son acceptation newtonienne du terme, s'en trouve bouleversé et une théorie relativiste complète de description des systèmes de coordonnées s'est peu à peu mise en place pour l'étude de la dynamique des corps dans le système solaire, la réduction des données astronomiques et la définition des constantes du système solaire (masses des corps, unités de distance et de temps,...).

La communauté astronomique dispose donc aujourd'hui d'une classe de systèmes de référence, plus large qu'en théorie newtonienne de la gravitation. Le travail entrepris consiste à calculer, dans le cadre des concepts théoriques relativistes, les liens analytiques entre les coordonnées temporelles (échelles de temps) et les coordonnées d'espace introduites. Pour mener à bien ce travail, une étape indispensable consiste à construire une solution analytique pour le mouvement des planètes du système solaire répondant au modèle relativiste de la dynamique des N corps en champ faible. Cette dynamique est modélisée par les équations d'Einstein, Infeld et Hoffman lesquelles sont écrites en variables rectangulaires. La construction d'une solution analytique à ce problème différentiel s'effectue en plusieurs étapes. Nous avons commencé notre étude par le calcul d'une solution héliocentrique au troisième ordre des masses pour les planètes du système solaire en variables elliptiques puis nous avons complété cette solution par une méthode itérative. Cette solution ainsi complétée est ensuite convertie en variables rectangulaires avant d'être exprimée en temps coordonnée barycentrique, échelle de temps naturellement associée au système de référence barycentrique. Puis, ces solutions sont utilisées pour l'obtention de liens analytiques entre les systèmes de référence relativistes, à savoir le lien entre les échelles de temps

coordonnée barycentrique et géocentrique, et le calcul des différences entre les angles d'Euler (reliant les plans de l'écliptique et de l'équateur) obtenus pour chacun des deux systèmes de référence géocentriques que la théorie de la relativité introduit en astronomie.

Le mémoire aborde ensuite la construction par une méthode itérative d'une solution en variables rectangulaires répondant au problème différentiel d'Einstein, Infeld et Hoffman. La méthode des orbites intermédiaires circulaires est utilisée. Les difficultés rencontrées sont analysées. La suite du mémoire se penche alors sur le choix d'une orbite intermédiaire képlérienne pour l'intégration. Le résultat est l'obtention d'une équation différentielle à coefficients variables dont la fin du mémoire expose la méthode de calcul du noyau résolvant.

Enfin, l'application des solutions planétaires à l'intégration des trajectoires géodésique dans le système solaire est abordée en fin de mémoire par la présentation de l'intégrateur géodésique RMI (Relativistic motion integrator). Les premiers résultats obtenus de déflexion des rayons lumineux rasant le Soleil et de trajectoire du satellite artificiel de la Terre Lageos confirment la validité du modèle utilisé pour la construction de RMI.

Chapitre 1

Relativité générale

1.1 L'espace-temps

De tout temps, philosophes et scientifiques se sont forgé une conception du monde, une cosmogonie en accord avec les doctrines scientifiques, religieuses et philosophiques de l'époque qui les ont vu vivre. Les révolutions scientifiques successives n'ont cessé de donner aux questions en apparence élémentaires de la conception de l'espace et du temps, une portée toujours croissante. Le chemin parcouru depuis Copernic, prodigieux progrès de l'esprit scientifique et de la capacité d'abstraction, a permis une compréhension en profondeur de ces notions, en même temps qu'un bouleversement complet des concepts qui sous-tendent leur description¹.

Naïvement parlant, l'espace est l'ensemble des choses qui “sont”, sans référence à quoi que ce soit d'extérieur si ce n'est un processus de création. C'est ainsi que la notion d'objet matériel précède la notion d'espace.

Mais quelles limites, quelle structure donner à cet ensemble, comment le représenter en termes mathématiques pour ouvrir la voie à une étude systématique des relations entre les objets le composant? C'est en extrapolant des relations de voisinage que la notion d'espace s'ouvre une véritable existence indépendante de l'observateur, une existence en soi, telle la flèche de Zénon d'Elée ne pouvant atteindre les limites de l'Univers. Les remaniements profonds de la structure de l'espace-temps qu'impose la théorie d'Einstein ne modifient pas cette approche conceptuelle de l'espace [Ein52]:

Un contact permanent de deux corps en trois ou plusieurs “points” signifie qu'ils sont unis comme un corps composé (quasi rigide). Il est permis de dire que le second corps forme alors un

1. On consultera a profit [CTS86] sur le sujet

prolongement (quasi rigide) de premier corps et peut, à son tour, être prolongé d'une manière quasi rigide. La possibilité de prolonger un corps de manière quasi rigide est sans limite. La quintessence des prolongements quasi rigides d'un corps K_0 est "l'espace" infini déterminé par lui.

On peut dès lors axiomatiser les propriétés de l'espace ainsi défini, ce qui revient à choisir la géométrie de celui-ci. Dans la géométrie des Grecs, l'espace joue seulement un rôle qualitatif puisque la position des corps par rapport à l'espace est certes déterminée, mais n'est pas décrite au moyen de nombres.

Les conceptions spatiales de la physique classique, héritée de Copernic et Galilée, ne laissent guère de liberté à la structure globale de l'espace, infini et absolu [New87] :

L'espace absolu, qui est sans relation à quoi que ce soit d'extérieur, de par sa nature demeure toujours semblable et immobile.

Dans ce cadre, la géométrie de l'espace est euclidienne à trois dimensions, deux droites parallèles ne se coupant jamais et le théorème de Pythagore étant vérifié. On peut donc y construire un repère cartésien absolu, c'est-à-dire s'y repérer à partir d'un point origine et de trois axes de coordonnées orthonormés. La concrétisation de ce repère mathématique S dans l'espace réel se fait au moyen d'un système de référence absolu, que l'on suppose au repos. Pour Newton, ce système de référence était formé du Soleil (ou plus exactement du centre de masse du système solaire qu'il supposait être au repos) et de trois axes fictifs pointant vers trois étoiles.

La notion du temps n'échappe pas à l'extrapolation qui fonde la notion d'espace [New87] :

Le temps absolu, vrai et mathématique, qui est sans relation à quoi que ce soit d'extérieur, en lui-même et de sa nature coule uniformément; on l'appelle aussi "durée".

Ainsi, le temps absolu et uniforme existe a priori, indépendamment de tout mouvement. Le temps réel se mesure quant à lui à l'aide d'horloges, c'est-à-dire de phénomènes répétitifs et périodiques (la clepsydre chez les Egyptiens, le mouvement diurne du Soleil puis la révolution de la Terre autour du Soleil à partir de 1952 et enfin les processus de transition atomique après 1955 [Bdl94])

Dans ce cadre spatio-temporel, qui restera celui de la physique jusqu'au début du XX^e siècle, tout mouvement d'un objet sans étendue peut être

représenté dans un repère S par une courbe $x^\alpha = x^\alpha(t)$, où t désigne le temps absolu (en acceptant le concept de point matériel).

Plus précisément, la loi newtonienne du mouvement d'un point matériel s'écrit :

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (1.1)$$

l'accélération $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$ subie par le point matériel étant fonction des forces exercées par les autres corps du système, lesquelles sont comprises dans \vec{F} . On retrouve à travers cette loi la 1ère loi de Newton (principe de l'inertie) : pour les particules libres $\vec{F} = \vec{0}$ donc $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{0}$ si bien que leur mouvement est rectiligne et uniforme par rapport à l'espace absolu.

Cependant, pour une loi de force donnée, la validité de ce principe d'inertie ne s'étend plus à tous les repères S mais seulement à ceux qui possèdent un mouvement approprié (repères inertiels). En raison de ce fait, l'espace coordonné acquiert une propriété physique indépendante, qui est étrangère à la notion purement géométrique d'espace. D'autre part, la loi (1.1) avec $\vec{F} = \vec{0}$ a la même forme dans les repères inertiels en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un repère absolu, si bien que l'on ne peut déterminer le système de référence absolu à l'aide de particules libres. On pourrait cependant concevoir que des particules accélérées, pour lesquelles \vec{F} n'est pas nul, puissent, elles, permettre de déterminer le système de référence absolu. Mais si la force \vec{F} ne dépend que des positions relatives des corps perturbateurs et perturbés, elle se transforme comme un vecteur sous le groupe de Galilée et la loi (1.1) est encore invariante. Par exemple, il est impossible de savoir si le barycentre du système solaire est au repos absolu ou non.

Il apparaît expérimentalement que toutes les lois de la mécanique dépendent des positions relatives, propriété si générale qu'on en est arrivé à l'ériger en principe (le *Principe de relativité* : les lois de la mécanique sont invariantes de Galilée).

Ainsi, l'espace absolu de la mécanique newtonienne, investi d'une propriété physique indépendante de sa géométrie et impossible à matérialiser n'existe pas vraiment. Seule sa classe d'équivalence dynamique, c'est-à-dire l'ensemble des repères en translation rectiligne uniforme par rapport à lui, est absolue puisque tout mouvement accéléré par rapport à l'ensemble des repères inertiels est en revanche observable (l'accélération ne se transformant plus comme un vecteur).

De plus, les physiciens du XIX^e siècle furent confrontés à la non-invariance des lois de l'électromagnétisme sous une transformation de Galilée, puisqu'une charge en mouvement crée un champ magnétique (expérience de Biot et Savart) et un champ électrique apparaît dans un repère où un champ ma-

gnétique est variable (loi d'induction de Faraday). Einstein prit le parti de parier sur le principe de relativité et postula que les équations de Maxwell gardent la même forme dans tous les repères inertiels. Ceci implique d'abandonner la transformation de Galilée et d'adopter une nouvelle géométrie pour l'espace-temps, la géométrie de Minkowski, dans laquelle l'espace et le temps sont représentés par un espace pseudo-euclidien à quatre dimensions Σ . L'élément de longueur dans cet espace devient, pour deux points de coordonnées *minkowskiennes* x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$ et $x^\alpha + dx^\alpha$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_\alpha dx^\alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les dernières égalités définissent la métrique minkowskienne $\eta_{\alpha\beta}$ ainsi que la convention de sommation d'Einstein. Les coordonnées x^i , $i = 1, 2, 3$ sont les coordonnées spatiales et $t = x^0/c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, est le *temps coordonné*.

Ainsi, la représentation de l'espace et du temps diffère en théorie newtonienne et en relativité restreinte bien que la concrétisation du repère absolu se fasse de la même manière, par le choix de trois axes spatiaux centrés sur un solide de référence supposé au repos absolu, et d'une horloge immobile dans ce système.

Cependant, le problème de la concrétisation d'un repère accéléré dans l'espace physique réel est plus délicat en relativité restreinte qu'en théorie newtonienne. Les transformations générales de coordonnées de la forme $x^\alpha = x^\alpha(x'^\beta)$ peuvent dépendre de x^0 , c'est-à-dire du temps, si bien que les grilles de coordonnées curvilignes sont a priori "molles" en relativité restreinte. Le passage à un repère accéléré fait donc perdre sa pertinence à la notion de solide de référence (contraction des longueurs). A ce problème ouvert, une "solution" souvent adoptée consiste à admettre que tout système de coordonnées x'^α peut être associé à un repère matériel de référence, solide ou non. Il devient alors possible de rapporter la description des phénomènes physiques à des repères non-inertiels dans lesquels l'intervalle ds^2 (1.2) s'écrit :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \quad \text{avec} \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta}. \quad (1.3)$$

D'autre part, les expériences de Newton, d'Eotvos, de Dicke et de Braginski ont confirmé à une très bonne précision l'équivalence de la masse grave et de la masse inerte d'un corps. Ainsi peut-on interpréter que tous les corps, quels que soient leurs constituants, leur énergie interne ou forces de cohésion

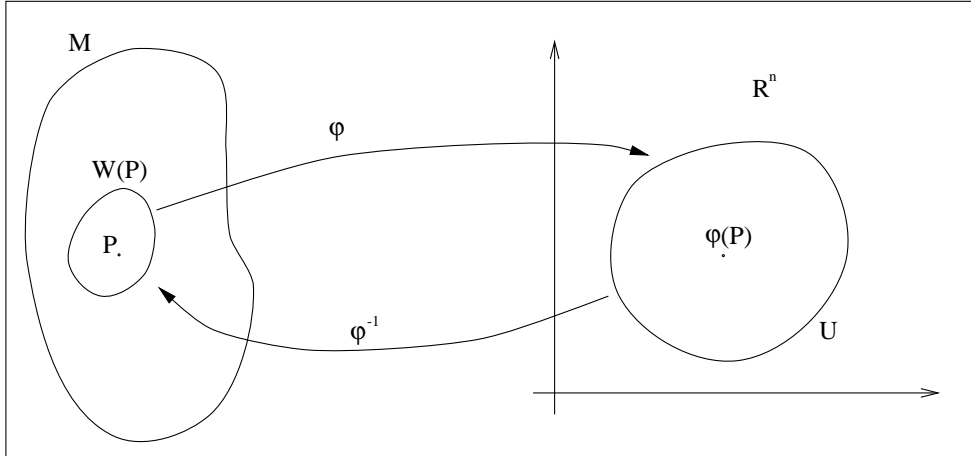
tombent de la même façon dans un champ de gravitation. Dès lors, l'accélération d'un corps dans un champ de gravitation devient indépendante de sa masse. Ce résultat remarquable, qui permet d'identifier forces d'inertie et de gravitation fonde la relativité générale sous le nom de *Principe d'équivalence*². Il implique d'une part que la gravitation doit être d'origine géométrique, tout comme les forces d'inertie, et qu'une accélération peut simuler un champ gravitationnel d'autre part. De plus, la notion de particule "libre", sur laquelle repose la définition des repères inertiels, perd de sa signification vu qu'une particule accélérée par un champ de gravitation est libre pour un observateur en co-mouvement, c'est-à-dire en chute libre dans ce champ. En d'autres termes, tous les repères deviennent équivalents puisque les repères inertiels perdent leurs privilèges. Comme la notion de corps solide (au sens naturel du terme) se trouve de facto restreinte aux repères inertiels ainsi que nous l'avons vu précédemment, elle fut abandonnée par Einstein.

Ainsi, à l'espace absolu de la mécanique newtonienne se substitue naturellement un ensemble d'événements Σ , différenciés par leur étiquetage dans un repérage quelconque lequel, localement, peut se réduire à l'espace-temps de Minkowski. Mathématiquement, cet espace-temps peut être représenté par une *variété* à quatre dimensions. Rappelons que l'on appelle variété topologique un espace topologique (c'est-à-dire un ensemble de points pour lesquels la notion de voisinage est définie) séparé \mathcal{M} , tel que tout point P admette un voisinage homéomorphe à un ouvert de R^n . n , entier constant sur toute composante connexe de \mathcal{M} , est la dimension de la variété. Si φ désigne l'homéomorphisme de $W(P)$ dans U , où $W(P)$ est un voisinage ouvert de P dans \mathcal{M} et U un ouvert de R^n , $(W(P), \varphi)$ est une *carte locale* de \mathcal{M} en P .

En ce sens, une carte locale, que l'on appelle aussi par abus de langage un système de coordonnées, n'exprime pas des relations métriques mais seulement le voisinage des choses décrites (en l'occurrence le voisinage du point P), c'est-à-dire l'ordre topologique des points dans l'espace (y compris son caractère quadridimensionnel dans le cas de la variété espace-temps Σ).

De plus, une variété générale \mathcal{M} de dimension n possède une courbure intrinsèque qui, si elle n'est pas nulle, interdit une correspondance isométrique globale entre \mathcal{M} et \mathbb{R}^n . Il n'existe donc pas, dans le cas de l'espace-temps

2. On peut remarquer que ce principe d'équivalence est local. Supposons en effet que l'on puisse absorber globalement la gravitation dans la géométrie de l'espace-temps et considérons alors deux particules en chute libre dans ce champ. La distance entre ces deux particules devrait rester inchangée au cours du mouvement puisqu'elles sont libres dans cette géométrie. Or ceci ne peut être vérifié globalement (il suffit pour s'en convaincre de considérer le champ gravitationnel du soleil; les lignes de forces convergent au centre du soleil, les particules en chute libre se rapprocheront l'une de l'autre)

FIG. 1.1 – Variété topologique \mathcal{M} et carte locale $(W(P), \varphi)$ en P .

Σ , d'application

$$\begin{aligned} f : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ e &\mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned}$$

telle que l'intervalle carré élémentaire ds^2 entre deux événements voisins puisse s'exprimer en fonction des différences infinitésimales de coordonnées selon

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (1.4)$$

La nouvelle géométrie de l'espace-temps Σ n'est donc plus lorentzienne, même si elle peut, localement s'y ramener par l'intermédiaire du principe d'équivalence, ce qui se traduit par la possibilité de relier les différences de coordonnées aux mesures physiques locales de distance et de durée au moyen d'une forme quadratique générale à coefficients non constants (la métrique $g_{\alpha\beta}$):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.5)$$

en utilisant la convention d'Einstein définie par l'équation (1.2)³.

3. \mathcal{M} désignant une variété différentiable, une métrique riemannienne est un tenseur deux fois covariant g qui définit en tout point P de \mathcal{M} un produit scalaire sur l'espace tangent à \mathcal{M} en P noté :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.6)$$

En particulier, g définissant un produit scalaire, on doit avoir :

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \quad (1.7)$$

Une variété riemannienne est un couple (\mathcal{M}, g) où g est une métrique riemannienne sur \mathcal{M} .

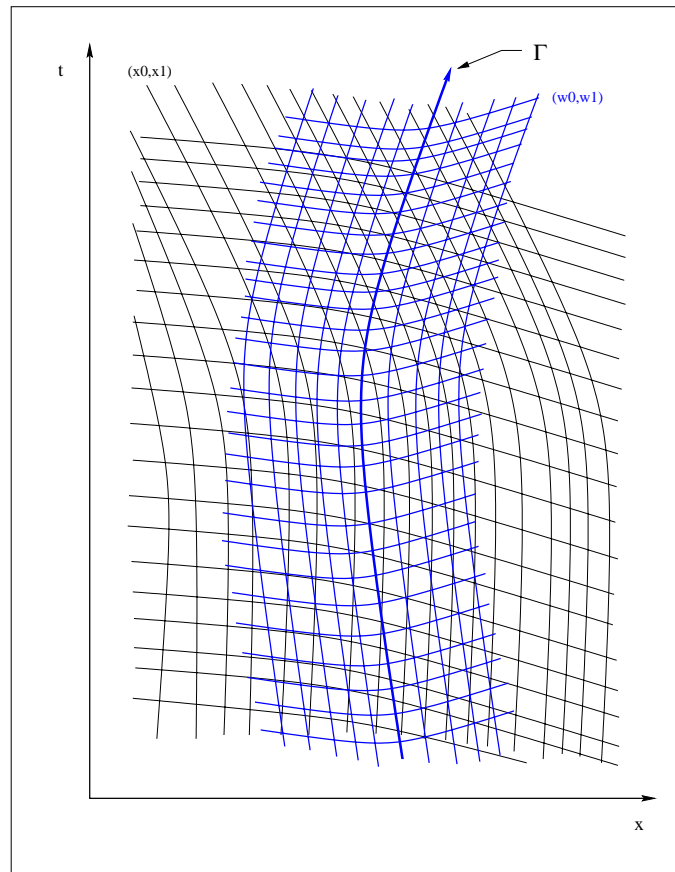


FIG. 1.2 – Cartes locales le long d'une ligne d'univers Γ .

La géométrie de Σ se retrouve donc codée dans la métrique $g_{\alpha\beta}$ et la connaissance de ce tenseur est nécessaire à la détermination de la géométrie de l'espace-temps Σ . Or, en relativité générale, le tenseur métrique est d'ordre deux et symétrique, c'est-à-dire qu'il possède dix coefficients indépendants, et donc que dix équations suffisent à le déterminer : *les équations du champ*. Les considérations suivantes sont à la base de leur formulation :

- l'énergie est proportionnelle à la masse inertielle (égale à la masse gravitationnelle). En outre, c'est une des composantes du tenseur énergie-impulsion. Le membre de droite de ces équations ne contiendra que ce tenseur;
- les équations du champ devront être formulées sous forme covariante assurant leur invariance par un changement de coordonnées;

- par analogie avec la loi de Poisson, ces équations devront être du second ordre;
- toute solution de ces équations peut, par changement de coordonnées donner une infinité d'autres solutions. La solution générale du problème doit donc contenir quatre fonctions arbitraires et satisfaire quatre identités. Comme le tenseur $T^{\alpha\beta}$ est à divergence nulle, il en sera de même du membre de gauche de ces équations.

Ces considérations se résument dans la formulation générale des équations du champ :

$$S^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

où $T^{\alpha\beta}$ est le tenseur énergie-impulsion et $S^{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique d'ordre deux, fonction des $g^{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées et à divergence nulle.

En 1922, Elie Cartan démontre que le tenseur vérifiant ces propriétés est unique [Car22] et on connaît un tel tenseur en géométrie de Riemann, le tenseur d'Einstein :

$$h \left[R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (R + 2\Lambda) \right] \quad (1.9)$$

où $R^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci et R la courbure riemannienne scalaire.

Du fait de l'introduction de la constante κ , on peut toujours considérer que h est égal à 1. Λ est la constante cosmologique qui ne joue pas de rôle en mécanique céleste en raison de son ordre de grandeur.

Les équations du champ s'écrivent ainsi :

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} \quad (1.10)$$

Les identités $[S^{\alpha\beta}_{;\beta} \equiv 0]$ impliquent alors les équations $\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$, sans qu'il soit nécessaire de les postuler en supplément.

En contractant le tenseur $S^{\alpha\beta}$ donné par $R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta}$, ainsi que les équations (1.10), on trouve :

$$-R = \kappa T \quad (1.11)$$

avec $T = T^{\alpha}_{\alpha}$, et les équations (1.10) peuvent se mettre sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta} &= \kappa T^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} R g^{\alpha\beta} \\ &= \kappa \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ces équations permettent de déterminer :

- six composantes du tenseur métrique $g^{\alpha\beta}$, quatre composantes demeurant arbitraires du fait de la covariance des équations.
- trois composantes v^i de la vitesse de la matière.
- la densité de masse ρ , une équation d'état supplémentaire étant nécessaire pour relier la pression p et cette densité.

Dans le cas où l'on se situe à l'extérieur des masses gravitantes, on a $T^{\alpha\beta} \equiv 0$ et les équations du champ se réduisent à :

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.13)$$

En multipliant cette relation par $g_{\alpha\beta}$, on a :

$$R = 0 \quad (1.14)$$

Donc, dans le cas extérieur :

$$R^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.15)$$

qui constitue la loi de gravitation dans le vide telle qu'Einstein l'avait formulée au départ.

Ainsi, la théorie de la relativité générale, dont de nombreuses vérifications expérimentales effectuées tout au long du XX^e siècle ont conforté la place de théorie ad-hoc de la gravitation, donne-t-elle à l'espace et au temps un nouveau statut. L'espace-temps Σ n'est plus le réceptacle passif de la matière, doué d'une existence indépendante de cette dernière. Au contraire, la matière façonne sa géométrie. La structure géométrique qui lui est imposée, décrite par le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, est contrainte par les équations d'Einstein (1.12), cette contrainte étant elle-même conditionnée par la distribution d'énergie $T^{\alpha\beta}$ de Σ .

Cette conception implique un remaniement conceptuel de la notion de systèmes de référence. La théorie newtonienne de la gravitation autorisait en effet une définition rigoureuse et conceptuellement simple de cette notion [Kov90]. Un système de référence newtonien est complètement déterminé une fois que l'on a précisé son origine (qui peut être en mouvement) et les orientations de ses axes de référence. Mais, les concepts fondamentaux de droites, plans, etc..., perdent leur signification précise en géométrie riemannienne donc dans la théorie de la relativité. On leur substitue les notions de courbes auto-parallèles (ou géodésiques).

Les courbes auto-parallèles d'une variété \mathcal{M} sont les courbes particulières pour lesquelles le transport parallèle du vecteur tangent à la courbe en un point P reste tangent à cette courbe. Une auto-parallèle est donc la généralisation de la droite euclidienne en tant que courbe toujours parallèle à

elle-même. Dans le cadre des variétés riemanniennes, les géodésiques sont les courbes qui extrémisent l'action

$$\int \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \quad (1.16)$$

ce qui nous donne pour équation d'une géodésique de vecteur tangent t :

$$\frac{dt^\gamma}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma t^\alpha t^\beta = 0 \quad (1.17)$$

où les $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les coefficients de la connexion sur \mathcal{M} . Si on identifie connexion et symboles de Christoffel, les notions d'auto-parallèles et de géodésiques se confondent.

Ainsi, un système de référence relativiste apparaît plus comme un “mollusque de référence” comme le définissait Einstein, possédant un nombre infini de degrés de liberté. Dans le cas où l'espace-temps Σ possède une métrique statique⁴, l'utilisation de coordonnées gaussiennes est possible [ABS]. Cela n'est cependant vrai que localement lorsque Σ possède moins de symétrie.

Pour le définir sans ambiguïté, il faut [Dam88] :

- donner explicitement les expressions mathématiques de tous les coefficients métriques, $g_{\alpha\beta}$, comme fonction des coordonnées x^μ , et aussi comme fonctionnelles des composantes du tenseur d'énergie-impulsion, $T^{\alpha\beta}$, décrivant la matière;
- préciser la description utilisée pour la matière (en indiquant la structure de $T^{\alpha\beta}$ et la modélisation adoptée pour approximer la distribution et le mouvement de la matière;
- lever toute ambiguïté résiduelle venant d'une possible invariance de forme des fonctionnelles $g_{\alpha\beta}[x, T(x)]$.

En 1991, au cours de sa vingtième assemblée générale, l'Union Astronomique Internationale (UAI) pose les bases des recommandations à suivre dans le futur pour se conformer à ce programme de redéfinition du concept de système de référence. Nous exposons en annexe les recommandations I à IV de la résolution A4 (Recommandations du Groupe de travail sur les

4. Cas correspondant à une distribution de matière et d'énergie stationnaire pour laquelle il existe un système de coordonnées tel que

$$\begin{cases} g_{0i} & = 0 \\ \partial_0 g_{\alpha\beta} & = 0 \end{cases}$$

systèmes de référence) qui servira de base à notre travail. Le travail entrepris au cours de cette thèse a en effet pour objectif

- de réaliser, dans le cadre de la résolution A4 de l’UAI, la construction d’éphémérides pour l’ensemble des planètes du système solaire, exprimées dans un système de coordonnées défini d’une manière non ambiguë au sens des remarques faites précédemment;
- d’exprimer cette solution en temps coordonnée barycentrique TCB;
- d’étudier les liens analytiques entre les échelles de temps dont l’usage est préconisé dans la résolution A4;
- de donner des expressions analytiques des matrices de rotation liant au géocentre les deux champs de bases vectorielles orthonormées associées aux systèmes de référence géocentriques DGRS et KGRS.

Pour ce faire, nous avons poursuivi la démarche suivante, dont chaque étape fera l’objet d’un des chapitres de ce mémoire :

- construction d’une solution planétaire au troisième ordre des masses en variables elliptiques dont les constantes d’intégration sont déterminées par ajustement à la théorie numérique DE403 du *Jet Propulsion Laboratory (JPL)*;
- construction à partir de cette solution d’une solution d’ordre élevé pour l’ensemble des planètes du système solaire en variables elliptiques par une méthode itérative dont les constantes d’intégration sont déterminées par ajustements aux solutions DE403 et DE405 du *JPL*;
- construction de solutions en variables rectangulaires héliocentriques et barycentriques,
- construction de solutions en variables rectangulaires héliocentriques et barycentriques exprimées en temps coordonnée barycentrique TCB,
- application des solutions construites aux changements de systèmes de coordonnées relativistes,
- développement d’une méthode de résolution analytique des équations d’Einstein-Infeld-Hoffman pour compléter les solutions précédentes des perturbations relativistes mutuelles entre planètes.

Chapitre 2

Intégration du mouvement des planètes en coordonnées elliptiques

2.1 Théories actuelles

2.1.1 Introduction

Actuellement, on dispose de deux types de méthodes pour construire une théorie du mouvement des planètes du système solaire. Les méthodes numériques développées dans différents laboratoires de mécanique céleste utilisent des intégrateurs numériques sophistiqués qui produisent des solutions ajustées aux observations. Parmi ces solutions, nous citerons les solutions DExxx du *Jet Propulsion Laboratory (JPL)* où xxx renvoie aux versions de l'éphéméride (200, 403, 405, 406) qui vont nous servir dans la suite.

La solution DE403 est construite dans le repère de référence J2000 de l'International Earth Rotation Service (IERS). Elle s'appuie sur différents types d'observations des corps du système solaire : observations optiques méridiennes, photographiques, radar, mesures de distance Terre-Lune, mesures sur des sondes spatiales, occultations. Exprimée dans l'échelle de temps dynamique barycentrique (TDB), cette éphéméride couvre la période [29 avril 1599, 22 juin 2199]. Elle inclut dans son modèle l'ensemble des planètes du système solaire et un nombre important d'astéroïdes (300).

D'un autre côté, les solutions semi-analytiques ont été sans cesse raffinées depuis le XVII^e siècle. Depuis Picard, Lalande et Delambre, beaucoup de chemin a été parcouru et en 1855, Le Verrier calcule à la main une théorie analytique du mouvement des planètes d'une précision de l'ordre de 1 seconde de degré (") pour les planètes intérieures et de quelques " à quelques

dizaines de " pour les planètes géantes. Le *Bureau des longitudes (Bdl)* publie depuis 1984 des éphémérides issues, pour les planètes de la solution VSOP82 [Bre82b] qui sert encore aujourd'hui dans de nombreux travaux de mécanique céleste.

L'existence de deux types d'approche complémentaires fournit des moyens efficaces, à la fois de déterminer les constantes d'intégration intervenant dans les solutions mais aussi de comparer les solutions entre elles pour s'assurer de la validité de celles-ci [Bre82a].

2.1.2 Les solutions VSOP

Les théories analytiques de grande précision du mouvement des planètes du système solaire ont été construites dans les années 80 au *Bureau des longitudes* [Bre82b] et [Sim83]. Exprimées à la fois en variables elliptiques, sphériques et rectangulaires, des solutions sont regroupées sous l'appellation VSOP87 (Variations séculaires des orbites planétaires) et le tableau (2.1) en donne les caractéristiques [BF88].

TAB. 2.1 – *Solutions VSOP87. ecl.=écliptique, BSS=Barycentre du système solaire. Me=Mercure, V=Vénus, BTL=Barycentre Terre-Lune, M=Mars, J=Jupiter, S=Saturne, U=Uranus, N=Neptune et Sol=Soleil, les variables L, B et r désignant respectivement la longitude, la latitude et le rayon vecteur d'une planète.*

Solution	Variables	Corps									Plan de ref.
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
VSOP87	a, λ, k, h, q, p	Me	V	BTL	M	J	S	U	N		ecl. J2000
VSOP87A	X, Y, Z	Me	V	T	M	J	S	U	N	BTL	ecl. J2000
VSOP87B	L, B, r	Me	V	T	M	J	S	U	N		ecl. J2000
VSOP87C	X, Y, Z	Me	V	T	M	J	S	U	N		ecl. de la date
VSOP87D	L, B, r	Me	V	T	M	J	S	U	N		ecl. de la date
VSOP87E	X, Y, Z	Me	V	T	M	J	S	U	N	Sol	BSS. ecl. J2000

Ces solutions ont été obtenues par intégration des équations de Lagrange (2.3) pour les variables a, λ, k, h, q et p , où a désigne le demi-grand axe de l'ellipse osculatrice, λ la longitude moyenne et les variables non singulières k, h, q et p sont reliées aux variables elliptiques classiques e, i, ω and Ω (cf. figure 2.1) par les formules :

$$\begin{aligned}
\varpi &= \Omega + \omega \\
k &= e \cos \varpi \quad ; \quad h = e \sin \varpi \\
q &= \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \quad ; \quad p = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega
\end{aligned} \tag{2.1}$$

où e , i , ω and Ω sont respectivement l'excentricité, l'inclinaison, l'argument du périhélie et la longitude du nœud ascendant de l'orbite.

Si on pose :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sqrt{1 - e^2} \\
\psi &= 1/(1 + \varphi) \\
R &= Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}'}{r'^3} \right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

m' étant la masse de la planète perturbatrice, \mathbf{V} et \mathbf{V}' les rayons vecteurs héliocentriques des planètes perturbée et perturbatrice respectivement, Δ la distance mutuelle entre les deux planètes et $r' = |\mathbf{V}'|$, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\
\frac{d\lambda}{dt} &= n + \frac{1}{na^2} \left[-2a \frac{\partial R}{\partial a} + \varphi \psi \left(k \frac{\partial R}{\partial k} + h \frac{\partial R}{\partial h} \right) + \frac{1}{2\varphi} \left(q \frac{\partial R}{\partial q} + p \frac{\partial R}{\partial p} \right) \right] \\
\frac{dk}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \left[\varphi \frac{\partial R}{\partial h} + \varphi \psi k \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{h}{2\varphi} \left(q \frac{\partial R}{\partial q} + p \frac{\partial R}{\partial p} \right) \right] \\
\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[\varphi \frac{\partial R}{\partial k} - \varphi \psi h \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{k}{2\varphi} \left(q \frac{\partial R}{\partial q} + p \frac{\partial R}{\partial p} \right) \right] \\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \left[\frac{1}{4\varphi} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{q}{2\varphi} \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda} - h \frac{\partial R}{\partial k} + k \frac{\partial R}{\partial h} \right) \right] \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left[\frac{1}{4\varphi} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2\varphi} \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda} - h \frac{\partial R}{\partial k} + k \frac{\partial R}{\partial h} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Les résultats de l'intégration, notés σ , sont exprimés sous forme de séries de Poisson du temps dans lesquelles les arguments à longue période (c'est-à-dire les arguments associés aux longitudes des nœuds et des périhélies, dont les périodes sont comprises entre quelques dizaines de milliers d'années et quelques millions d'années) sont développés en polynômes du temps :

$$\sigma = \sum_{m=0}^M T^m P_m \tag{2.4}$$

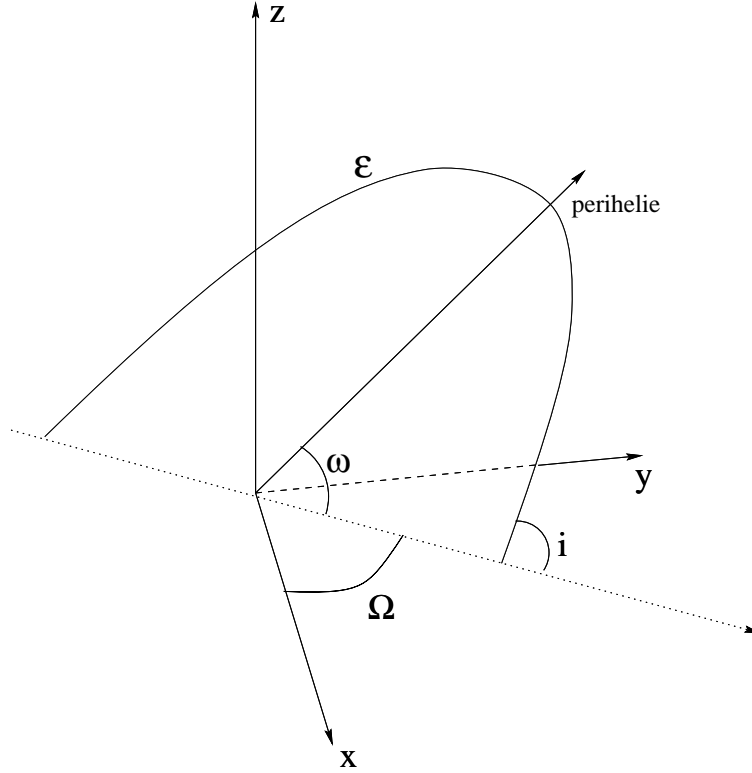


FIG. 2.1 – *Eléments elliptiques i , ω et Ω pour une ellipse osculatrice \mathcal{E} .*

où P_m est une série de Fourier :

$$P_m = \sum_{j \in J} A_{m,j} \sin(\phi_{m,j}) + B_{m,j} \cos(\phi_{m,j}) \quad (2.5)$$

avec $(A_{m,j}, B_{m,j}) \in \mathbb{R}^2$, J étant un ensemble de cardinal fini. Les arguments $\phi_{m,j}$ dans (2.5) sont des combinaisons linéaires des longitudes moyennes $\lambda_l = \lambda_l^0 + N_l T$, c'est-à-dire :

$$\phi_{m,j} = \sum_{l=1}^8 k_{m,j,l} \lambda_l \quad (2.6)$$

pour $k_{m,j,l} \in \mathbb{Z}$. Les moyens mouvements moyens N_l , ($l = 1, 8$), trouvés dans l'expression des longitudes moyennes λ_l sont donnés dans le tableau (2.2) et correspondent à l'ajustement de la théorie VSOP82 à la solution numérique DE200 du *JPL*.

La précision des solutions VSOP est déterminée par deux facteurs principaux, la précision du calcul de chaque terme d'une série, ce que nous appellerons la précision interne de la théorie, et le niveau de troncature de cette série.

TAB. 2.2 – Moyens mouvements moyens de VSOP82. L'unité est le rad/an, l'année correspondant à 365.25 jours de Temps dynamique barycentrique.

Planète	N
Mercure	26.087 903 141 574 2
Vénus	10.213 285 546 211 0
Bary. Terre-Lune	6.283 075 849 991 4
Mars	3.340 612 426 699 8
Jupiter	0.529 690 965 094 6
Saturne	0.213 299 095 438 0
Uranus	0.074 781 598 567 3
Neptune	0.038 133 035 637 8

Les solutions VSOP ont été tronquées au niveau de 10^{-1} mas (1 mas = 0."001) pour les planètes intérieures et 2×10^{-1} mas pour les planètes géantes. Quant à la précision interne de la théorie, la règle suivante s'applique : pour chaque planète, une fréquence minimum ν est imposée afin que chaque terme de fréquence $\nu' \geq \nu$ soit calculé à la précision de 1 mas au moins et que les autres termes soient calculés à la précision $\nu/\nu' \times 1 \text{ mas} > 1 \text{ mas}$ ($(\nu/\nu')^2 \times 1 \text{ mas}$ dans le cas de la longitude moyenne). Bien entendu, cette fréquence minimum ν est choisie en fonction des capacités de calcul disponibles puisqu'en diminuant ν , on obtient des séries plus volumineuses. Le tableau 2.3 donne, pour chaque planète, la fréquence ν et la période associée qui ont été utilisées pour la construction de VSOP82.

La qualité de cette théorie est déterminée par une comparaison aux observations. Cette étape de la construction de la théorie VSOP permet en outre de calculer les six constantes d'intégration par planète. En guise d'observations, les théories numériques DExxx du *Jet Propulsion Laboratory* ont été utilisées.

Le tableau (2.4) regroupe les différences maximales entre VSOP82 et DE200 sur l'intervalle de temps [25 septembre 1891, 0 h - 26 février 2000, 0 h]. Les unités sont 10^{-10} pour les variables sans dimension k , h , q et p , 10^{-10} rad pour la longitude moyenne λ (ainsi qu'un équivalent en secondes de degré) et 10^{-10} unité astronomique (au) pour le demi-grand axe .

TAB. 2.3 – Fréquence ν en "/an.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars
Fréquence ("/an)	2000	1000	300	300
Période (années)	648	1296	4320	4320
Planète	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
Fréquence ("/an)	200	200	200	200
Période (années)	6480	6480	6480	6480

2.2 La solution VSOP2000

2.2.1 Perturbations au troisième ordre des masses

Notations

Les équations de Lagrange (2.3) pour un problème à n corps (Soleil + (n-1) planètes) est un système de $6(n-1)$ équations différentielles du premier ordre. Considérons le problème restreint : le Soleil, une planète perturbatrice (P') de masse m' et une planète perturbée (P) de masse m . Nous noterons σ l'un des douze éléments elliptiques a , λ , k , h , q et p de (P) ou (P'); \mathbf{V} et \mathbf{V}' les vecteurs positions héliocentriques de (P) et (P') respectivement. Enfin, nous écrirons $r = |\mathbf{V}|$, $|\cdot|$ étant la norme euclidienne, $r' = |\mathbf{V}'|$ et $\Delta = |\mathbf{V} - \mathbf{V}'|$

Méthode

Pour ce problème restreint, nous écrirons une des équations de Lagrange sous la forme simplifiée :

$$\frac{d\sigma}{dt} = f_\sigma(x_i) \quad (2.7)$$

où x_i est l'un des douze éléments elliptiques a , λ , k , h , q et p de (P) ou (P') et f_σ est une fonction d'ordre 1 par rapport aux masses planétaires.

On effectue alors un développement de Taylor de x_i au voisinage de la solution képlérienne $x_i^{(0)}$:

$$x_i = x_i^{(0)} + \Delta^{(1)}x_i + \Delta^{(2)}x_i \quad (2.8)$$

où $\Delta^{(k)}x_i$ sont les perturbations du k-ième ordre par rapport aux masses.

TAB. 2.4 – Différences entre VSOP82 et DE200 sur l'intervalle de temps [1891 - 2000]. Les unités sont 10^{-10} pour k , h , q et p , 10^{-10} rad pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} unité astronomique pour le demi-grand axe a . Un équivalent en secondes de degré est donné pour λ .

Planète	a	λ	k	h	q	p
Mercure	3	29 (0."0006)	22	24	7	9
Vénus	39	205 (0."0042)	130	100	64	54
Terre	61	168 (0."0034)	161	141	83	60
Mars	270	534 (0."0110)	326	339	96	112
Jupiter	3017	1874 (0."0387)	1300	1403	152	104
Saturne	12836	4468 (0."0922)	3345	2647	145	203
Uranus	39081	2172 (0."0448)	1864	2101	177	200
Neptune	253770	8143 (0."1680)	7210	3670	132	212

On développe ensuite en série de Taylor la fonction f_σ au voisinage du mouvement elliptique $x_i^{(0)}$, et ce au troisième ordre :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} = & f_\sigma(x_i^{(0)}) + \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(1)}x_i + \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i} \right) \Delta^{(2)}x_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta^{(1)}x_i \Delta^{(1)}x_j \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour calculer les dérivées successives de f_σ , on exprime cette fonction sous la forme suivante :

$$f_\sigma(x_i) = D_\sigma \mathbf{V} \cdot (R_1 \mathbf{V} + R_2 \mathbf{V}') \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{n a m' 1}{1 + m \Delta^3} \\ R_2 &= \frac{n a m'}{1 + m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

et où chaque $D_\sigma \mathbf{V}$ est une quantité vectorielle.

De cette manière, on obtient sous forme fermée les dérivées première et seconde de f_σ [CBM75] et [Bre81]. Cette forme fermée des dérivées permet de déduire exactement les précisions auxquelles elles doivent être calculées afin d'assurer la précision interne de la théorie.

La méthode consiste alors à construire les perturbations ordre par ordre. Les perturbations $\Delta^{(1)}x_i$ sont obtenues en intégrant $f_\sigma(x_i^{(0)})$, l'intégration de $\sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}\right) \Delta^{(1)}x_i$ donne les perturbations du second ordre $\Delta^{(2)}x_i$ et enfin on calcule les perturbations du troisième ordre en intégrant les termes restants de (2.9).

Intégration

L'intégration des équations précédentes a été menée pour les corps suivants : Mercure, Vénus, barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune avec le jeu de masses IERS 1992 [McC92] donné par la table (2.5).

TAB. 2.5 – *Masses IERS 1992 utilisées pour VSOP2000. Nous donnons le rapport $M_{\text{Soleil}}/M_{\text{Planète}}$.*

Planète	Masse
Mercure	6 023 600.0000
Vénus	408 523.7100
Bary. Terre-Lune	328 900.5600
Mars	3 098 708.0000
Jupiter	1 047.3486
Saturne	3 497.9000
Uranus	22 902.9400
Neptune	19 412.2400

Pour les constantes utilisées (c'est-à-dire les valeurs des moyens mouvements moyens, des longitudes à l'origine, etc...), nous avons utilisé les éléments moyens J2000 donné dans [Bre82b] pour démarrer l'intégration.

Les fréquences ν données dans (2.3) ont été conservées mais nous avons choisi des précisions de 10^{-2} mas pour les planètes intérieures et 10^{-1} mas pour les grosses planètes. Les séries obtenues ont été tronquées au niveau de 10^{-4} mas pour les planètes intérieures et $2 \cdot 10^{-3}$ mas pour les grosses planètes.

2.2.2 Méthode itérative

Nécessité d'une théorie plus complète

Anticipant sur les résultats du prochain chapitre, nous admettrons l'insuffisance de la théorie au troisième ordre des masses surtout pour le système solaire extérieur¹.

Pour les quatre planètes géantes, les perturbations d'ordre 4, 5 ou même 6 sont importantes et ne peuvent pas être négligées au niveau de précision que nous souhaitons atteindre. Cependant, afin d'obtenir les perturbations à un ordre élevé des masses, il faudrait, dans la logique de ce qui a été vu précédemment, connaître le développement de Taylor des seconds membres des équations de Lagrange à un ordre plus élevé. Ces développements deviennent très vite complexes et volumineux, et il est utile, voire indispensable d'avoir recours à une méthode itérative [Bre81] pour s'affranchir de cette difficulté.

En ce qui concerne le système solaire intérieur, les figures (2.2) (2.3) représentent les différences entre la théorie au troisième ordre des masses et DE403 sur un siècle pour certaines variables des planètes intérieures. Ces figures indiquent que des termes à courtes périodes manquent ou sont mal calculés dans la théorie au troisième ordre des masses.

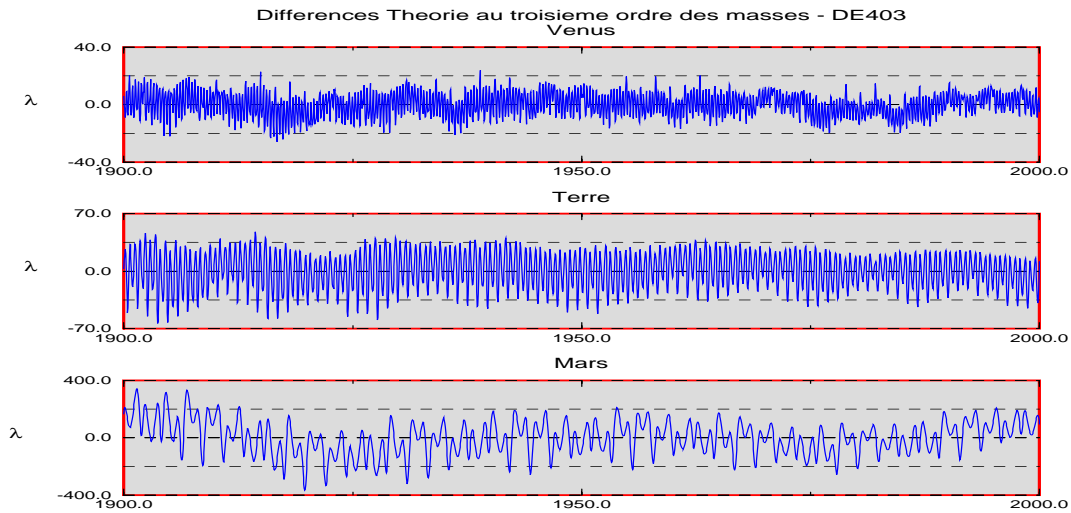


FIG. 2.2 – Différences entre DE403 et la théorie au troisième ordre des masses pour la longitude moyenne λ de Vénus, la Terre et Mars sur un siècle. Les unités sont 10^{-10} radian.

1. On pourra pour s'en convaincre comparer les données relatives aux grosses planètes des tableaux (2.4) et (2.9). La théorie au troisième ordre des masses, pour ces corps, n'atteint pas le niveau de précision de VSOP82.

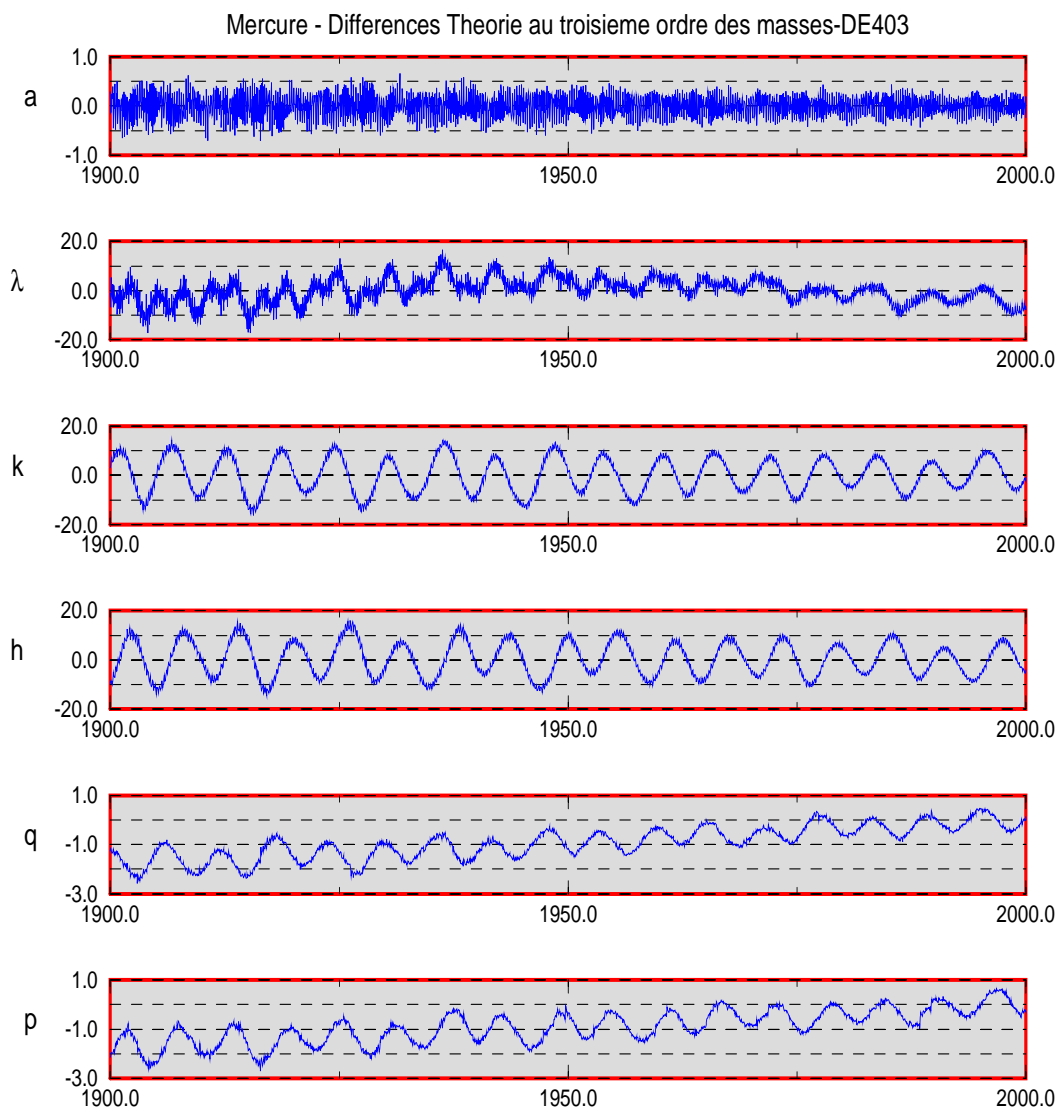


FIG. 2.3 – Différences entre DE403 et la théorie au troisième ordre des masses sur un siècle pour Mercure. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

La figure (2.4) représente le résultat d'une analyse de Fourier sur un siècle des différences entre notre théorie au troisième ordre des masses et DE403 pour le demi-grand axe de Mercure.

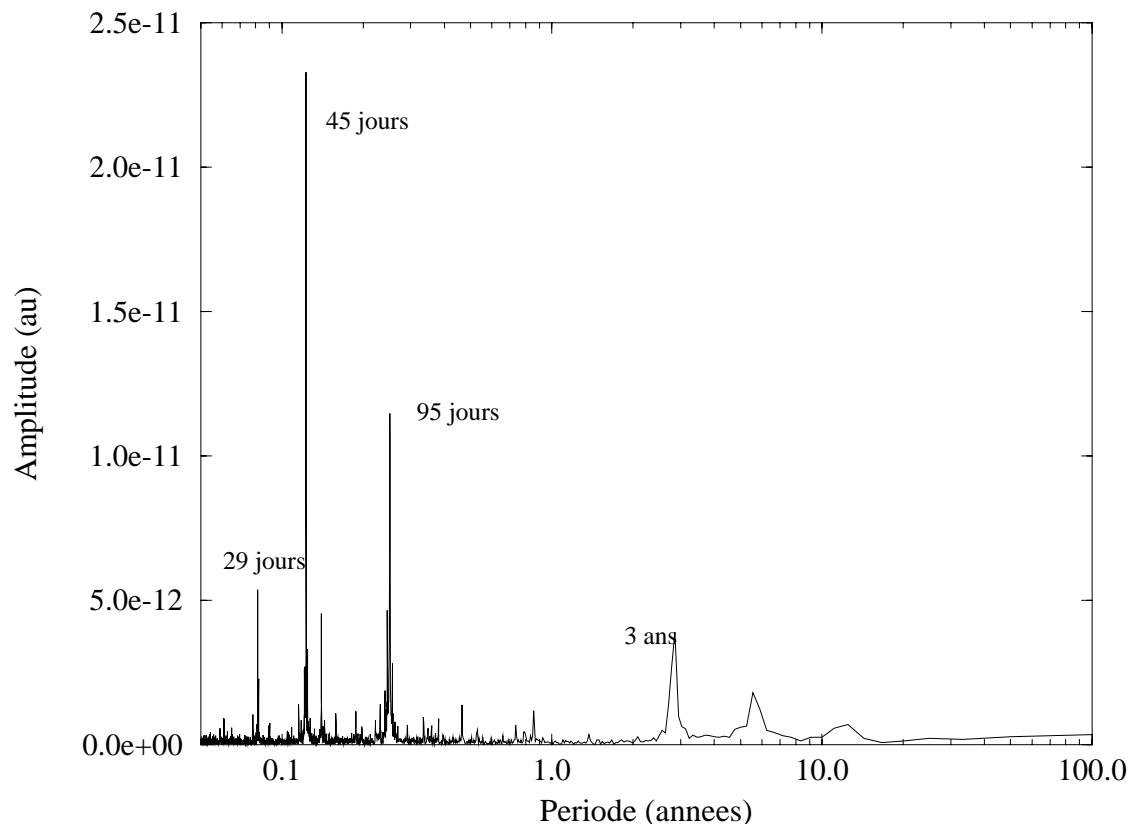


FIG. 2.4 – Analyse spectrale de la différences entre la théorie au troisième ordre des masses et DE403 pour le demi-grand axe de Mercure. L'échelle est logarithmique pour les périodes données en années. Les amplitudes sont données en unités astronomiques (ua). Les termes principaux ont été relevés avec des périodes de 29 jours, 45 jours, 95 jours et 3 ans.

Cette analyse montre que la puissance spectrale de ces résidus est quasi essentiellement contenue dans l'intervalle de période $[0, 10]$ ans. Le même phénomène se produit pour les autres planètes telluriques. Cela ne signifie pas que seules des courtes périodes sont mal déterminées ou inconnues dans la théorie au troisième ordre des masses². Cependant, la méthode itérative

². Pour prouver ce point il faudrait effectuer cette analyse spectrale sur un échantillon

permet l'amélioration des courtes périodes.

Ainsi, dans le cas du système solaire intérieur tout comme dans celui du système solaire extérieur, nous avons besoin d'une théorie développée à un ordre élevé des masses. La méthode itérative dont nous discutons le principe ci-après est bien adaptée à ce type de problématique.

Rappelons que pour chercher la solution d'une équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.12)$$

qui satisfait à la condition initiale

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.13)$$

telle que dans un certain rectangle

$$D \{ |t - t_0| < a, |y - y_0| < b \} \quad (2.14)$$

les conditions suivantes soient satisfaites :

- $f(t, y)$ est une fonction continue des deux variables t et y ;
- $f(t, y)$ possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ bornée

on peut procéder par itération de Picard, c'est-à-dire construire une suite $(y_n(t))$ de fonctions définie par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} y_0(t) & \equiv y_0 \\ y_n(t) & = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y_{n-1}(u)) du \end{cases} \quad (2.15)$$

qui converge vers la solution exacte de l'équation (2.12) avec la condition initiale (2.13) sur un intervalle $t_0 - h < t < t_0 + h$ où :

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right), \quad M = \max_{(t,y) \in D} |f(t, y)| \quad (2.16)$$

La méthode itérative consiste donc à substituer dans les membres de droite des équations de Lagrange (2.3) une solution approchée du problème planétaire, disons l'itération I_{n-1} pour construire en intégrant (2.3) l'itération I_n .

L'utilité de cette méthode pour la construction des perturbations d'ordre élevées dans la théorie du système solaire extérieur a été soulignée dans [Bre81]. Son utilisation pour le système solaire complet n'a jamais été entreprise et plus long, de quelques milliers d'années par exemple .

semblait même impossible compte tenu des moyens informatiques disponibles alors [Bre78] :

En effet, la méthode utilisée nous oblige à calculer globalement les seconds membres des équations de Lagrange conservant ainsi, avant intégration, tous les arguments à la précision nécessaire à la bonne détermination des petits diviseurs. Ceci fait proliférer les arguments au-delà des possibilités de l'ordinateur utilisé, en particulier dans l'équation du demi-grand axe $\frac{da}{dt}$ devant subir une double intégration pour donner les perturbations en longitude. La conséquence a été une précision insuffisante dans la détermination des petits diviseurs, notamment en ce qui concerne les planètes inférieures.

Cette situation ayant changé, non pas quant à la présence de petits diviseurs dans la solution mais en ce qui concerne les possibilités des ordinateurs, nous avons appliqué cette méthode à l'ensemble du système solaire (Mercure, Vénus, barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune).

La solution de départ du processus itératif que nous avons utilisée est la théorie au troisième ordre des masses dont nous avons discuté la construction précédemment. Une solution de départ moins élaborée, c'est-à-dire une solution développée à un ordre moins élevé des masses, risquerait d'entraîner la divergence de la méthode itérative. La raison de ce phénomène est la suivante. Le calcul ordre par ordre des amplitudes des termes résonants de la théorie (par exemple le terme $\lambda_{Uranus} - 2\lambda_{Neptune}$ de période 4233 ans dans la longitude moyenne d'Uranus) fait apparaître des contributions qui s'annulent. En effet, pour ce terme, les deux contributions aux perturbations du troisième ordre par rapport aux masses, c'est-à-dire d'après l'équation (2.9) :

$$O_{31} = \int \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial x_i} \right) \Delta^{(2)} x_i$$

d'un coté, et :

$$O_{32} = \int \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \left(\frac{\partial^2 f_{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Delta^{(1)} x_i \Delta^{(1)} x_j$$

d'un autre coté, sont respectivement de 2046 et -2051 secondes de degré dans la longitude moyenne d'Uranus, soit une perturbation de 5 secondes de degré au troisième ordre des masses. La méthode itérative lancée avec une solution de départ développée au premier ordre ne permet le calcul que de la seconde contribution O_{32} , soit -2051 secondes de degré. L'écart entre les 5 secondes

de degré attendues et les -2051 secondes calculées par la méthode itérative rend celle-ci divergente.

La construction de la théorie au troisième ordre des masses était donc nécessaire à cet égard.

2.2.3 Réduction d'une itération

Une fois calculés les seconds membres des équations de Lagrange à l'aide de l'itération I_{n-1} , on intègre (2.3) pour obtenir l'itération I_n .

Le résultat de l'intégration, que nous appellerons résultat brut dans ce qui suit, n'est pas directement exploitable. D'une part, les compléments à la longitude provenant des perturbations du demi-grand axe n'ont pas été pris en compte dans la solution. D'autre part, une multitude d'arguments à très longues périodes dont nous savons qu'ils ne sont pas calculés à une précision suffisante, si bien que leur convergence n'est pas assurée, se retrouvent dans la solution brute. Enfin, les constantes d'intégration de l'itération I_{n-1} qui servent à intégrer le système (2.3), issues d'un ajustement de cette itération à un ensemble d'observations, doivent être recalculées par un ajustement de l'itération I_n à ce même ensemble d'observations. Examinons point par point ces étapes de la réduction du résultat brut.

Compléments à la longitude provenant du demi-grand axe

La solution brute de l'intégration n'inclut pas les compléments à la longitude provenant du demi-grand axe. Par la troisième loi de Kepler $n_0^2 a_0^3 = cste$, on calcule pour une perturbation Δa du demi-grand axe un complément à la longitude :

$$\Delta n = n_0 \left[-\frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{15}{8} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^2 - \frac{35}{16} \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^3 + \dots \right] \quad (2.17)$$

Ces compléments, calculés à l'aide de la solution brute, sont ajoutés à la longitude à chaque itération.

Termes quasi-résonants

La construction d'une théorie à variation séculaire a pour objet l'obtention d'une solution valable sur des intervalles de temps de quelques milliers d'années. Dans ce type de théorie, les arguments dépendant des longitudes des nœuds et des longitudes des périhélie planétaires sont développés en polynômes du temps par construction.

Cependant, le résultat brut d'une itération contient une multitude de termes quasi-résonants (c'est-à-dire des termes associés à des fréquences très faibles) dont on sait que les amplitudes correspondantes ne sont pas calculées à une précision suffisante avant intégration. L'intégration d'un terme de ce type divisant son amplitude par une fréquence proche de zéro, a pour conséquence d'augmenter considérablement cette amplitude. Non contrôlé, ce comportement des termes quasi-résonants ferait diverger la solution dans son ensemble. D'une part en raison de la recombinaison de ces termes artificiellement gros avec les autres termes de la série à l'itération suivante et d'autre part en déphasant la solution lors de l'ajustement des constantes d'intégration. Afin de contrôler cette difficulté au cours des itérations, et ce malgré le volume important des séries traitées, nous avons adopté la méthode suivante. Nous savons que dans le résultat brut σ de l'intégration, un terme général de fréquence ω , noté $x_n = a_n \sin(\omega t)$, a été calculé à une précision p égale à :

$$\begin{aligned} \text{si } \omega > \nu, \quad p &= \varepsilon \frac{\nu}{\omega} \\ \text{si } \omega \leq \nu, \quad p &= \varepsilon \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 \quad \text{si } \sigma = \lambda \\ &= \varepsilon \frac{\nu}{\omega} \quad \text{si } \sigma \neq \lambda \end{aligned} \quad (2.18)$$

où ν et ε sont donnés dans le tableau (2.6).

TAB. 2.6 – *Fréquence (ν) et précision associée (ε). Les unités sont le radian par millier d'années pour ν , l'année pour la période associée à ν et 10^{-14} pour les précisions ε .*

Planète	Merc.	Vénus	Terre	Mars
Fréquence	3300	1435	1790	573
Période	1.90	4.38	3.51	10.97
Précision	1.000	3.397	2.500	38.93
Planète	Jup.	Sat.	Uran.	Nept.
Fréquence	41.4	36.1	3.70	2.36
Période	151.77	174.05	1698.16	2662.36
Précision	190.9	620.0	2500	1010

Supposons que la théorie au troisième ordre des masses nous ait donné pour ce terme le résultat $x_0 = a_0 \sin(\nu t)$. Posons $\Delta = |a_n - a_0|$. Nous défi-

nissons alors la quantité τ par la relation :

$$\tau = \frac{100p}{\Delta} \quad (2.19)$$

Pour chaque terme σ de chaque élément a, λ, k, h, q et p de chaque planète, nous calculons alors τ et l'un des cas suivants se produit :

- si $\tau \geq 100$, on rejette le terme c'est-à-dire que nous conservons la valeur obtenue dans la théorie au troisième ordre des masses.
- si $10 \leq \tau < 100$, on rejette le terme au cours des premières itérations.
- si $\tau < 10$, on conserve le terme.

A ce critère, nous avons ajouté une condition portant sur la période des termes obtenus. Pour chaque élément de chaque planète, nous avons fixé une période de coupure P_c telle que tous les termes de période supérieure à P_c ont été remplacés par leur valeur obtenue dans la théorie au troisième ordre des masses. Le choix de P_c a été effectué en fonction des termes quasi-résonants présents dans la solution et dont nous savons que la convergence n'est pas immédiate.

Ces deux critères de réduction ont permis la convergence de l'ensemble des termes à courtes périodes dans la méthode itérative, et ce au bout de quelques itérations. Ce fait est important pour le comportement global de la solution au cours des itérations. La convergence des termes à longue période est en effet liée à la bonne détermination de leurs amplitudes avant intégration, laquelle ne peut être obtenue qu'au moyen d'une stabilité des termes à courtes périodes.

Afin de conserver de plus en plus de termes provenant du calcul d'une itération, nous avons assoupli les critères définis précédemment au cours des itérations (augmentation de P_c), assurant une convergence progressive de la solution. Chaque itération a été soigneusement examinée afin de veiller au comportement de ces termes issus de la méthode itérative.

Enfin, pour certains arguments à longues périodes (c'est-à-dire ceux de période supérieure à P_c), ou pour certains termes rejetés en raison de l'application du critère sur la valeur de τ , nous avons examiné les amplitudes obtenues au cours des itérations successives et leur comportement convergent ou divergent, et, suivant le résultat de cette analyse, nous avons choisi de libérer certains d'entre eux, c'est-à-dire de conserver les amplitudes issues de la méthode itérative. Pour certains termes à très longue période, nous avons conservé l'amplitude déterminée au troisième ordre des masses et pour ceux-là, les perturbations d'ordre 4 et plus sont négligées

2.2.4 Compléments à la solution

Avant d'examiner le calcul des constantes d'intégration de la solution I_n , nous allons décrire les différents compléments analytiques ajoutés à la solution précédente, à savoir les compléments liés à la relativité, aux perturbations exercées par la Lune et aux perturbations par quelques astéroïdes. L'ajout de ces compléments, outre le fait qu'il contribue de manière importante à l'obtention d'une solution très précise, c'est-à-dire très proche des observations, permet, lors de l'ajustement de cette solution à un ensemble d'observations, de comparer des modèles similaires. En d'autres termes, la solution brute est une solution newtonienne d'un système solaire sans Lune ni astéroïdes, alors que les observations sont celles du système solaire.

Relativité

En variables elliptiques, nous pouvons compléter la solution par les perturbations relativistes déduites du problème de Schwarzschild. Ces compléments aux équations de Lagrange s'expriment sous la forme suivante [Bru72] :

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta a_R}{dt} &= \mu \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{na^2}{r^2} (k \sin w - h \cos w) \left(10 \frac{a}{r} - 3\right) \\
\frac{d\delta \lambda_R}{dt} &= \mu \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{na}{r^2} \left[-10(1-e^2) \frac{a^2}{r^2} - (1-e^2) \frac{a}{r} + 18 \frac{a}{r} - 7 \right] \\
&\quad + \mu \left[8(1-e^2) \frac{a}{r} - 20 + 6 \frac{r}{a} \right] \\
\frac{d\delta k_R}{dt} &= \mu \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{na}{r^2} \left[10k \sin w \cos w - 5h \cos^2 w + 5h \sin^2 w \right. \\
&\quad \left. + 3(1-e^2) \sin w + 4(k^2 - h^2) \sin w - 8hk \cos w - 3h \right] \\
\frac{d\delta h_R}{dt} &= -\mu \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{na}{r^2} \left[10h \sin w \cos w + 5k \cos^2 w - 5k \sin^2 w \right. \\
&\quad \left. + 3(1+e^2) \cos w - 4(k^2 - h^2) \cos w - 8hk \sin w - 3k \right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où $w = v + \varpi$, v désignant l'anomalie vraie, et μ est le rayon gravitationnel du Soleil.

Ces compléments ne sont pas complets au deuxième ordre en $1/c$. En effet, les perturbations relativistes mutuelles seraient à prendre en compte bien que celles-ci soient d'ordre M/c^2 où M désigne une masse planétaire. Nous les avons introduits pour toutes les planètes considérées dans la méthode itérative (Mercure, Vénus, barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune).

Lune

Les perturbations de la Lune sur Mercure, Vénus, le barycentre Terre-Lune et Mars sont ajoutées à notre solution sous la forme de compléments analytiques. Ces compléments sont issus de la théorie de la Lune ELP 2000 [CTC83].

Pluton

Il est nécessaire de tenir compte de Pluton dans notre solution. En effet, négliger Pluton conduit à un triple désavantage. Premièrement, l'orbite de Neptune se trouve mal déterminée, deuxièmement, cette imprécision nuit à la bonne connaissance des constantes d'intégration de la solution, fait impliquant une mauvaise détermination des arguments quasi-résonants et troisièmement cette lacune conduit à une mauvaise détermination de la position du barycentre du système solaire. Cependant la prise en compte de Pluton soulève des difficultés nouvelles. Nous pourrions envisager en effet d'intégrer les équations de Lagrange pour les huit planètes et Pluton par la méthode exposée précédemment. Cependant, la forte excentricité de l'orbite de Pluton ($e = 0.249$) et la valeur importante du rapport des demi-grands axes de Neptune-Pluton rend compliqué le calcul de l'inverse de la distance entre ces deux planètes dont nous avons besoin pour l'expression des dérivées successives de la fonction f_σ (cf eqs. 2.10 et 2.11).

Ainsi, nous avons choisi de compléter VSOP2000 des perturbations de Pluton sur le système solaire extérieur. Pour ce faire, nous utilisons les perturbations au premier ordre des masses produites par Pluton, calculées par J.-L. Simon [Sim99], que nous ajoutons sous forme de compléments analytiques. Les éléments de Pluton sont issus de [Cha84]. et ont été réévalués par ajustement à DE403.

Astéroïdes

Les perturbations induites par les astéroïdes ne sont pas négligeables au niveau de précision que nous souhaitons atteindre. Nous avons à cet effet porté notre étude sur les plus massifs d'entre eux ou bien sur ceux qui introduisent une quasi résonance avec Mars et Jupiter, en l'occurrence Vesta, Iris, Bamberga, Cérès et Pallas

Nous avons calculé les perturbations au premier ordre des masses induites par ces cinq corps sur l'ensemble du système solaire. Pour ce calcul, nous avons utilisé les éléments elliptiques à J2000 de ces corps reportés dans le tableau (2.7), les masses des astéroïdes étant identiques à celles utilisées dans la construction de DE403 [McC96].

TAB. 2.7 – *Éléments elliptiques des astéroïdes. Pour les masses, on donne le rapport $M_{\text{Astéroïde}}/M_{\text{Soleil}}$. Les unités sont le radian par an pour N , le rad pour λ^0 et 10^{-10} pour le rapport $M_{\text{Astéroïde}}/M_{\text{Soleil}}$.*

Astéroïde	N	λ^0	k	h
Vesta	1.731 176 502 2	4.091 497 76	−0.024 226 855	−0.086 147 151
Iris	1.704 450 791 1	1.717 801 46	0.162 676 547	0.162 154 931
Bamberg	1.428 903 016 8	5.593 351 32	0.331 352 426	0.071 208 447
Cérès	1.364 763 374 9	2.806 276 79	−0.069 102 469	0.035 248 334
Pallas	1.361 949 504 0	2.034 860 53	−0.127 958 153	0.194 688 580

Astéroïde	q	p	Masse
Vesta	−0.015 012 622	0.060 412 702	1.340
Iris	−0.008 434 956	−0.047 370 906	0.054
Bamberg	0.082 299 375	−0.051 004 062	0.088
Cérès	0.015 146 103	0.091 100 211	4.640
Pallas	−0.297 351 380	0.035 411 460	1.050

Les contributions analytiques de ces perturbations au premier ordre des masses sont introduites dans VSOP2000.

2.2.5 Constantes d'intégration

Une fois calculée l'itération I_n à l'aide des constantes d'intégration de l'itération I_{n-1} , nous complétons le résultat des contributions analytiques décrites précédemment.

Nous devons ensuite chercher les nouvelles valeurs des constantes d'intégration pour la nouvelle solution. En effet, il est facile de réaliser par exemple que la présence d'un terme à très longue période dans l'expression de la longitude moyenne d'une planète va déphaser celle-ci à l'origine des temps choisie (en l'occurrence J2000 dans notre théorie). Si aucune correction n'est apportée à la longitude à l'origine de cette planète, la solution ne représentera plus le système solaire réel mais un système solaire fictif répondant seulement aux mêmes lois dynamiques. De même, la présence d'un tel terme à très longue période dans une autre variable que la longitude modifierait le plan, l'excentricité ou la ligne des nœuds de l'orbite osculatrice à J2000.

D'autre part, les équations de Lagrange ne sont un problème de Cauchy qu'à partir du moment où les conditions initiales sont imposées. Pour déterminer ces conditions initiales, ou constantes d'intégration, nous devons nous référer aux observations astronomiques des planètes. Pour ce faire, nous avons choisi d'ajuster notre solution à la solution DE403 du *JPL* [SNWF95] qui est construite sur un ensemble d'observations (optiques, radar, sondes planétaires...) couvrant la période [1914 - 1995].

Nous avons décidé de déterminer nos constantes d'intégration sur l'intervalle de temps [1^{er} janvier 1900, 0h - 1^{er} janvier 2000, 0h], intervalle compatible avec l'ensemble d'observations. Ce choix n'est pas anodin. En effet, nous pourrions envisager naïvement que les données de Cauchy pour une planète soient déduites de quelques observations bien particulières de celle-ci, réalisées donc à des dates bien précises. Ces observations n'étant pas exemptes d'erreurs de mesure, les conditions initiales obtenues ne seraient pas précises. Pour limiter ce problème, nous adoptons la démarche suivante. Ajustons notre théorie à DE403 sur l'intervalle mentionné, puis déterminons une régression linéaire $\alpha T + \beta$ sur les résidus obtenus (T étant compté à partir de J2000). Le coefficient β représente la correction à apporter aux constantes de l'itération I_{n-1} pour obtenir celles de l'itération I_n . Le coefficient α obtenu n'est utilisé que dans le cas de la longitude moyenne et sert alors à corriger le moyen mouvement moyen de l'itération I_{n-1} pour obtenir celui de l'itération I_n .

Cependant, si nous choisissons un intervalle de comparaison différent, il n'y a aucune raison d'obtenir la même régression linéaire mais plutôt de nouveaux coefficients α' et β' . Mais alors le choix de l'intervalle de comparaison est déterminant. C'est ainsi que nous avons préféré l'intervalle [1^{er} janvier 1900, 0h - 1^{er} janvier 2000, 0h]. Celui-ci, comme nous l'avons mentionné couvre à peu près la période des observations ayant servi à construire DE403. De plus, par définition même des théories à variations séculaires, le but de notre solution est d'être d'une très grande précision sur un intervalle de temps court (mille ans de part et d'autre de J2000 et tout particulièrement sur la période actuelle).

Une dernière remarque s'impose ici. La première comparaison à DE403 est effectuée en substituant dans l'itération I_n les constantes d'intégration déduites de la comparaison de l'itération I_{n-1} à DE403 (c'est-à-dire celles ayant servi à construire l'itération I_n). Cette première comparaison implique des corrections aux moyens mouvements moyens, aux longitudes à l'origine et aux valeurs des variables k , h , q et p à l'origine (déduites des coefficients α et β). Ces corrections, en retour, vont modifier les substitutions numériques effectuées dans nos séries de l'itération I_n , si bien qu'une nouvelle comparaison de cette itération I_n à DE403 est nécessaire pour déterminer

les constantes d'intégration. Ainsi, c'est par itération successives que nous obtenons les constantes d'intégration de l'itération I_n .

Explicitons maintenant la méthode utilisée.

Lien entre l'équateur et l'écliptique dynamique

La solution DE403 est construite dans l'équateur dynamique moyen J2000 alors que notre solution est construite dans le plan de l'écliptique dynamique J2000.

La première étape de la méthode consiste donc à déterminer les deux angles ε et φ apparaissant dans la matrice de rotation entre ces deux plans. Nous noterons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{SA} = \mathcal{M}(\varepsilon, \varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{DE403} \quad (2.21)$$

où SA représente la solution analytique. $(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ sont les coordonnées cartésiennes d'une planète dans le repère \mathcal{R} et :

$$\mathcal{M}(\varepsilon, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Pour déterminer ε et φ , nous procédons par approximations successives à partir des valeurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21.''409 \\ \varphi_0 = -2604.605 \cdot 10^{-10} \text{rad} = -0.05372'' \end{cases} \quad (2.23)$$

L'ajustement d'une régression linéaire aux résidus entre les deux solutions pour les variables p et q de la Terre fournit les deux quantités Δq and Δp desquelles sont déduites les contributions $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$ et $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ par les formules :

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon = -2\Delta q \\ \Delta\varphi = -\frac{2\Delta p}{\sin \varepsilon_0} \end{cases} \quad (2.24)$$

Les constantes d'intégration de l'itération I_n sont ensuite déduites de celles de l'itération I_{n-1} par ajustements successifs à la solution DE403, les plans fondamentaux étant reliés par la matrice de rotation (2.22).

Constantes d'intégration de VSOP2000

L'ensemble de la théorie construite, c'est-à-dire le résultat de la méthode itérative obtenue au bout de huit itérations, complété des contributions analytiques décrites précédemment (relativité, Lune, Pluton et astéroïdes) sera désormais noté VSOP2000 dans la suite du mémoire.

Nous avons obtenu, par le procédé décrit précédemment, une matrice de rotation (2.22) entre les plans fondamentaux de VSOP2000 et DE403 avec pour valeurs des angles ε et φ :

$$\begin{cases} \varepsilon_{DE403} &= 23^{\circ}26'21.''40878 \\ \varphi_{DE403} &= -0.''05365 \end{cases} \quad (2.25)$$

Avec ces valeurs de ε et φ , par construction, la matrice de rotation (2.22) annule la partie constante des variables en inclinaison q et p de la Terre en J2000.

Les constantes d'intégration déduites de la comparaison de VSOP2000 à DE403 sont données dans le tableau (2.8).

TAB. 2.8 – Constantes d'intégration de VSOP2000 issues de la comparaison à DE403. Les unités sont le rad/an pour N et le rad pour λ^0 , l'année correspondant à 365.25 jours de Temps dynamique barycentrique.

Planète	N	λ^0	k
Mercure	26.087 903 140 604 2	4.402 608 634 29	0.044 660 635 76
Vénus	10.213 285 547 398 2	3.176 134 458 13	-0.004 492 819 98
Terre	6.283 075 850 455 3	1.753 469 946 86	-0.003 740 818 57
Mars	3.340 612 434 512 1	6.203 499 661 24	0.085 365 592 72
Jupiter	0.529 690 972 134 8	0.599 546 418 35	0.046 985 851 34
Saturne	0.213 299 079 755 4	0.874 016 925 16	-0.002 960 065 49
Uranus	0.074 781 665 817 6	5.481 227 537 78	-0.045 953 403 33
Neptune	0.038 132 918 333 9	5.311 894 133 38	0.005 998 123 99
Planète	h	q	p
Mercure	0.200 723 304 07	0.040 615 653 85	0.045 635 492 94
Vénus	0.005 066 848 32	0.006 824 113 18	0.028 822 824 04
Terre	0.016 284 488 21	0.000 000 000 00	0.000 000 000 00
Mars	-0.037 899 708 67	0.010 470 429 90	0.012 284 487 48
Jupiter	0.012 003 698 71	-0.002 065 444 20	0.011 183 809 86
Saturne	0.055 429 582 64	-0.008 717 285 46	0.019 891 309 23
Uranus	0.005 648 049 68	0.001 859 275 28	0.006 486 055 40
Neptune	0.006 691 008 47	-0.010 291 446 76	0.011 516 853 10

2.2.6 Comparaisons à DE403

Pour chaque théorie (théorie au troisième ordre des masses complétée des perturbations relativistes, des perturbations analytiques au premier ordre des masses par les astéroïdes et des perturbations de la Lune sur le barycentre Terre-Lune, et VSOP2000), nous avons calculé les différences avec la solution numérique DE403. Ces différences sont obtenues par substitution du temps dans les séries analytiques de la théorie au troisième ordre des masses ou de VSOP2000, effectuées à l'aide des constantes d'intégration respectives de ces solutions³. Nous donnons ci-après les résultats de ces comparaisons.

Différences entre la théorie au troisième ordre des masses et DE403

TAB. 2.9 – *Différences maximales entre la théorie au troisième ordre des masses complétée des perturbations relativistes, des contributions analytiques au premier ordre des masses induites par la prise en compte des astéroïdes et des perturbations de la Lune sur le barycentre Terre-Lune, et DE403 sur [1900-2000]. BTL=Barycentre Terre-Lune. Les unités sont 10^{-10} pour k , h , q et p , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} unité astronomique pour le demi-grand axe a . Un équivalent en secondes de degré est donné pour λ .*

Planète	a	λ	k	h	q	p
Mercure	0.8	17 (0."00035)	16	16	2.6	2.7
Vénus	8.2	26 (0."00054)	28	24	7.4	3.6
BTL	33	64 (0."00132)	71	71	1.6	2.9
Mars	176	365 (0."00753)	281	225	6.6	5.7
Jupiter	11322	9354 (0."19294)	6081	4193	44	63
Saturne	113176	26927 (0."55541)	11817	16166	118	184
Uranus	164138	6543 (0."13496)	6136	6690	57	30
Neptune	138175	3450 (0."07116)	5003	4701	19	23

Le tableau (2.9) donne les écarts maximaux entre notre théorie au troisième ordre des masses complétée des perturbations relativistes, des contributions analytiques au premier ordre des masses induites par la prise en

³. Nous n'avons pas indiqué les constantes d'intégration de la théorie au troisième ordre des masses dans ce mémoire puisque celles-ci ne sont pas celles que nous retenons pour la solution complète VSOP2000.

compte des astéroïdes et des perturbations de la Lune sur le barycentre Terre-Lune, d'une part, et DE403 d'autre part, sur un siècle [1^{er} janvier 1900, 0h - 1^{er} janvier 2000, 0h].

Les illustrations graphiques de ces différences sont représentées par les figures (2.3) pour Mercure et (2.2) pour les longitudes moyennes de Vénus, du barycentre Terre-Lune et de Mars.

Comme nous l'avons discuté dans le chapitre consacré à la présentation de la méthode itérative, on constate l'insuffisance de la théorie au troisième ordre des masses pour les quatre planètes géantes (chiffres en bleu dans le tableau (2.9)).

Différences entre VSOP2000 et DE403 sur [1900-2000]

Les différences entre VSOP2000 et DE403 sur l'intervalle de temps [1900-2000] sont reportées dans le tableau (2.10) et représentées sur les figures (2.5) à (2.12). On y constate une amélioration sensible des résidus pour l'ensemble des planètes sur cet intervalle de temps par rapport à VSOP82 (cf. tableaux (2.4) et (2.11)).

Le cas de la longitude de Mars reste un peu problématique et pour le moment aucune explication n'a été trouvée pour rendre compte de ces écarts entre les deux solutions. L'hypothèse des petits corps du système solaire reste la plus plausible même si en tenant compte des cinq astéroïdes Vesta, Iris, Bamberga, Cérès et Pallas nous avons calculé les perturbations principales de la ceinture d'astéroïdes sur Mars.

L'ensemble des 295 petits corps pris en compte dans la solution DE403 et non dans VSOP2000 représente une masse totale de $3.8 \cdot 10^{-10}$ masse solaire et pourrait expliquer ces résidus élevés.

En comparant les tableaux (2.4) et (2.10), on constate une amélioration importante de la qualité des variables en inclinaison de la Terre, q et p . Ce point est important puisqu'il nous assure une détermination de l'écliptique dynamique à une précision de $0.''00022$ (les angles ε et φ intervenant dans la matrice (2.22)).

Le tableau (2.11) regroupe les gains obtenus avec VSOP2000 par rapport à VSOP82. L'ensemble des planètes profite de l'amélioration apportée par la solution VSOP2000 et notamment les grosses planètes avec des résidus réduits d'un facteur 30 à 90 pour les longitudes.

TAB. 2.10 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur l'intervalle de temps 1900 - 2000. BTL = Barycentre Terre-Lune. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p . Un équivalent en secondes de degré est donné pour λ .

Planète	a	λ	k	h	q	p
 Mercure 	0.4	13 (0."00027)	8	4	0.5	0.8
 Vénus 	0.7	14 (0."00029)	10	3	1.1	1.5
 BTL 	1.4	20 (0."00041)	3	22	3.4	4.2
 Mars 	9.0	140 (0."00289)	12	30	2.6	7.2
 Jupiter 	61	23 (0."00047)	15	16	5.0	4.3
 Saturne 	453	85 (0."00175)	19	35	7.8	8.1
 Uranus 	1576	72 (0."00149)	66	57	38.2	11.0
 Neptune 	3141	90 (0."00186)	61	68	4.1	11.3

TAB. 2.11 – Rapports entre les différences du tableau (2.10) et du tableau (2.4).

Planète	a	λ	k	h	q	p
 Mercure 	8	2	3	5	13	11
 Vénus 	59	15	13	33	58	37
 BTL 	42	8	54	6	24	14
 Mars 	30	4	26	11	36	15
 Jupiter 	50	82	84	85	30	24
 Saturne 	28	53	179	75	19	25
 Uranus 	25	30	28	37	5	18
 Neptune 	81	91	119	54	32	19

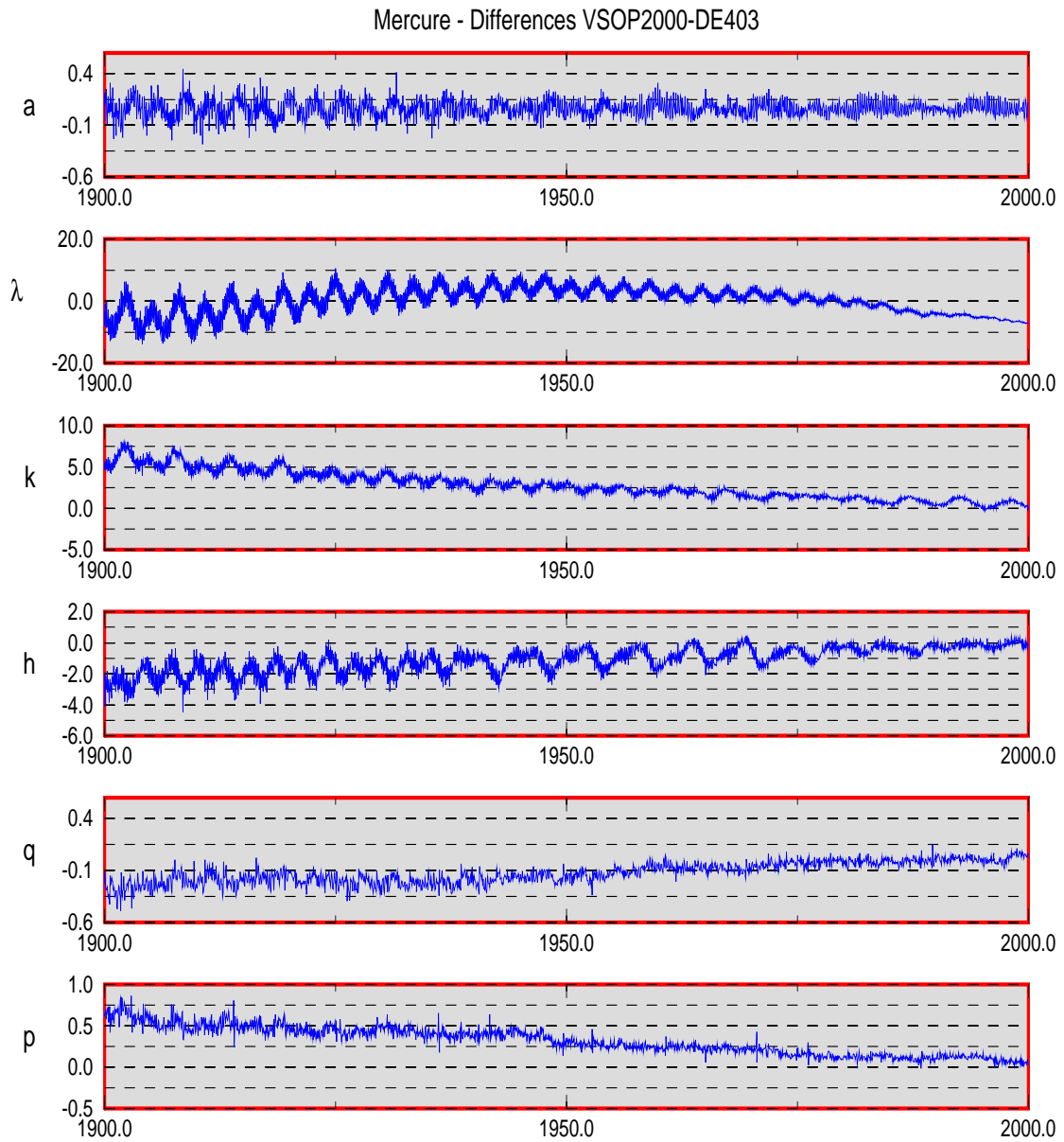


FIG. 2.5 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Mercure. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

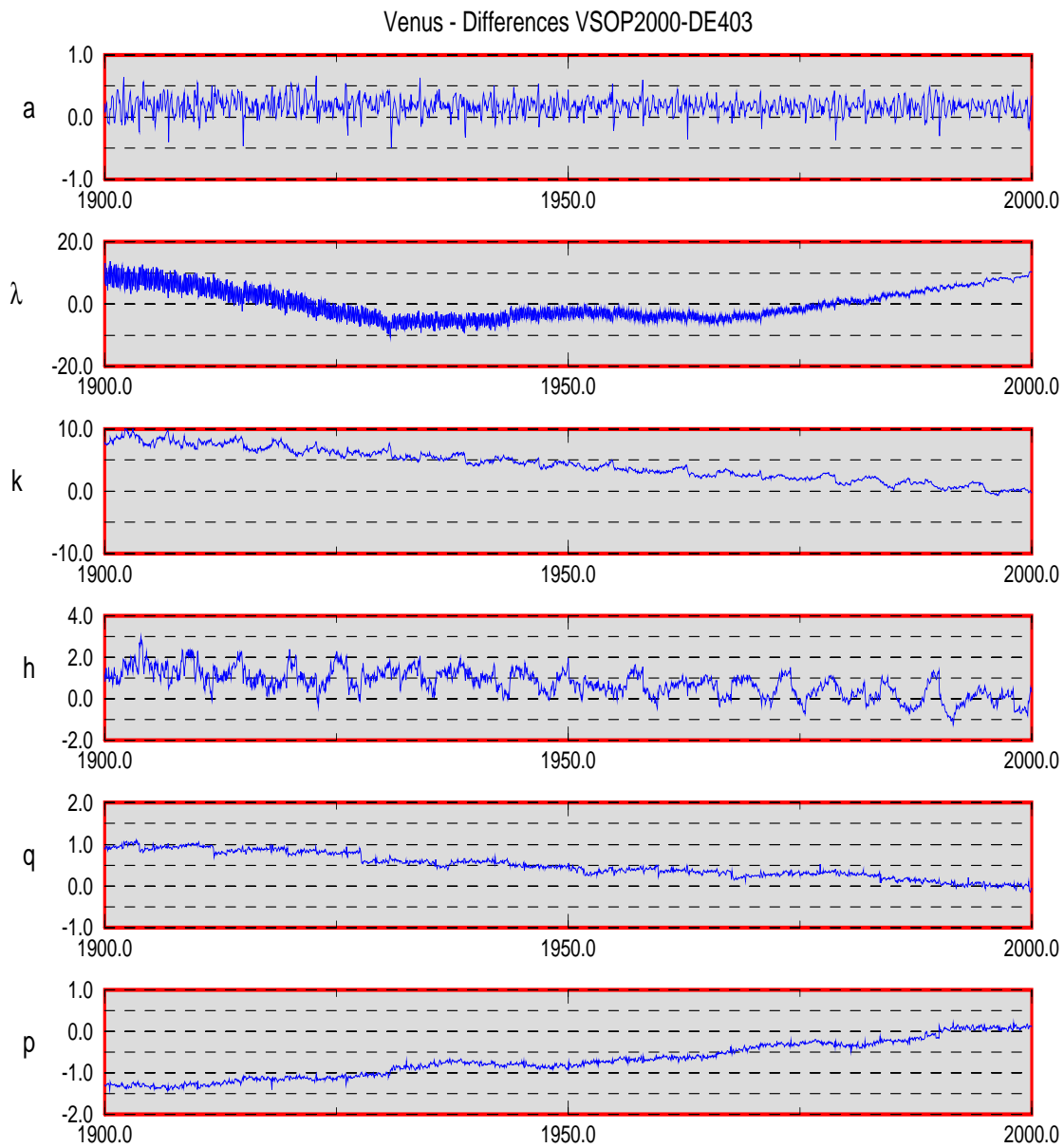


FIG. 2.6 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Venus. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

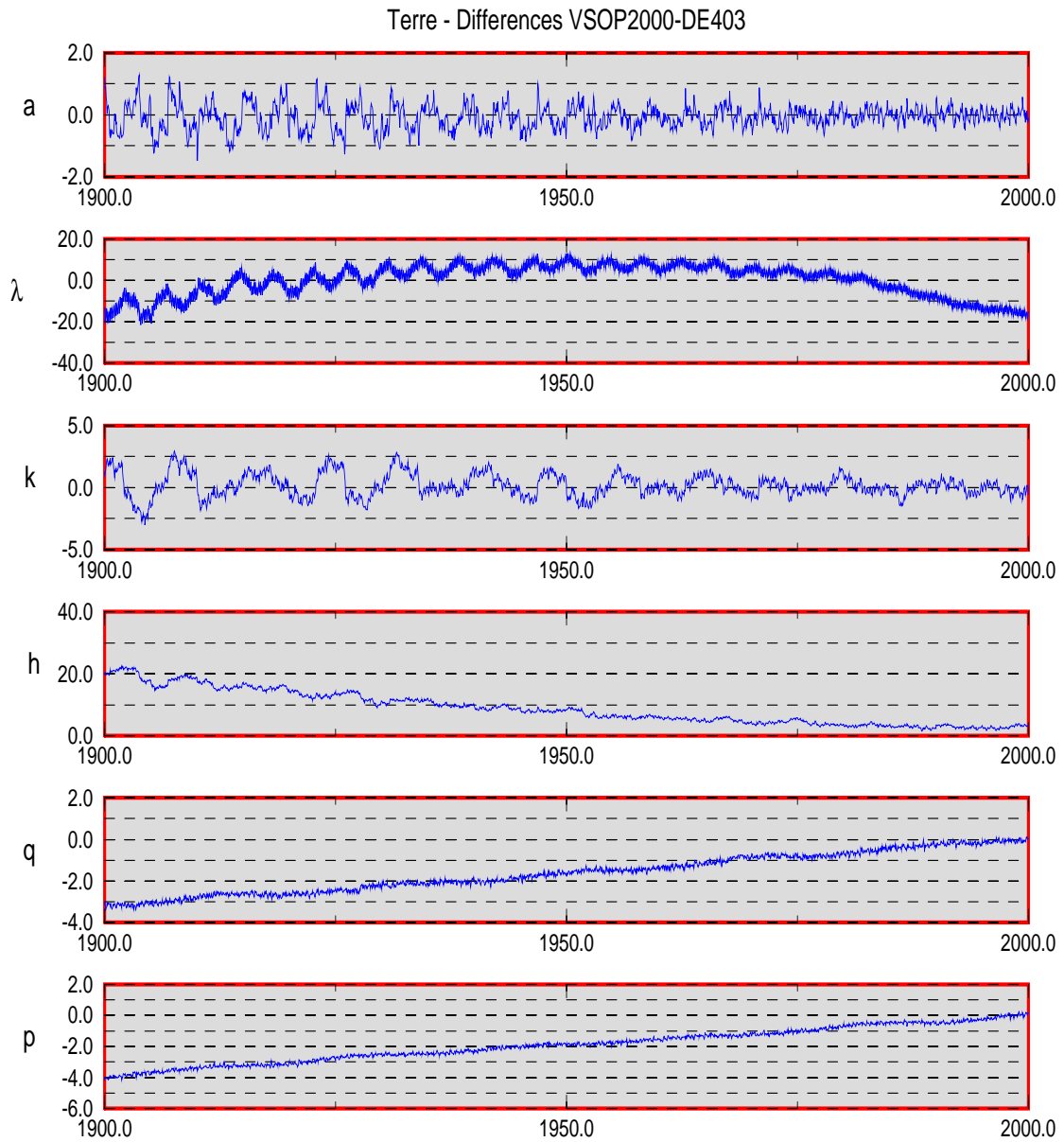


FIG. 2.7 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour la Terre. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

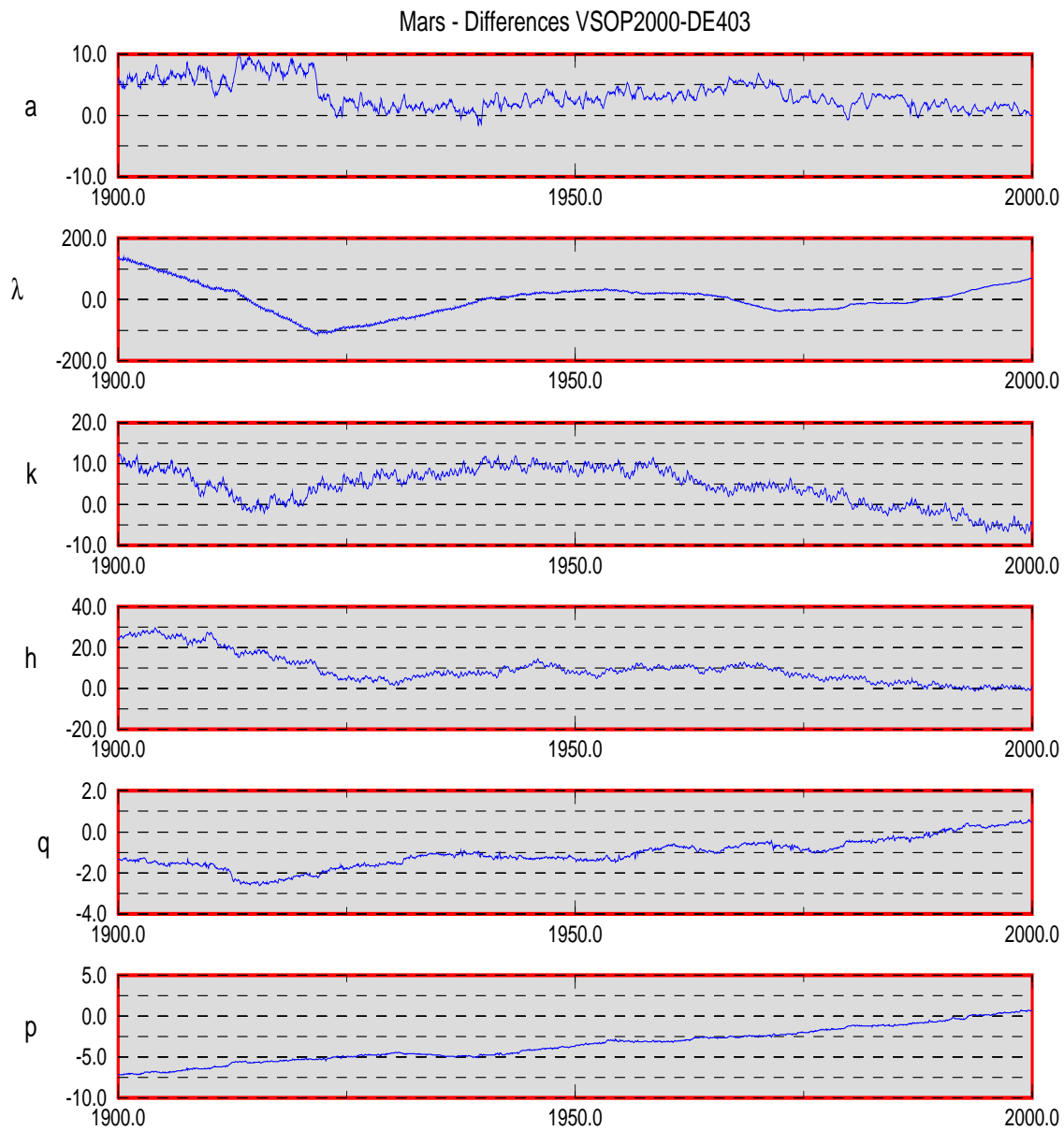


FIG. 2.8 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Mars. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

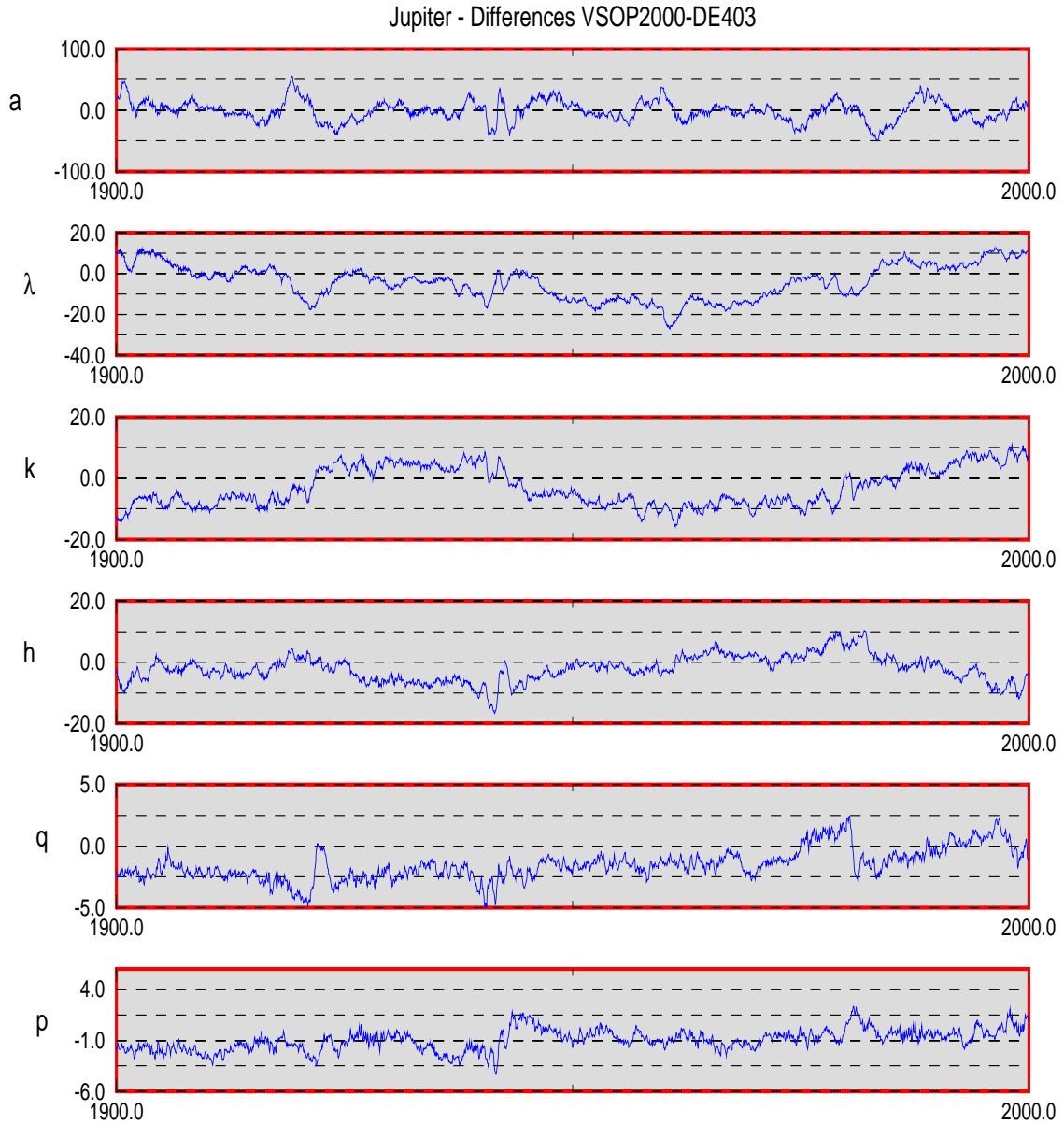


FIG. 2.9 – Différences entre VSOP2000 et DE403 un siècle pour Jupiter. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

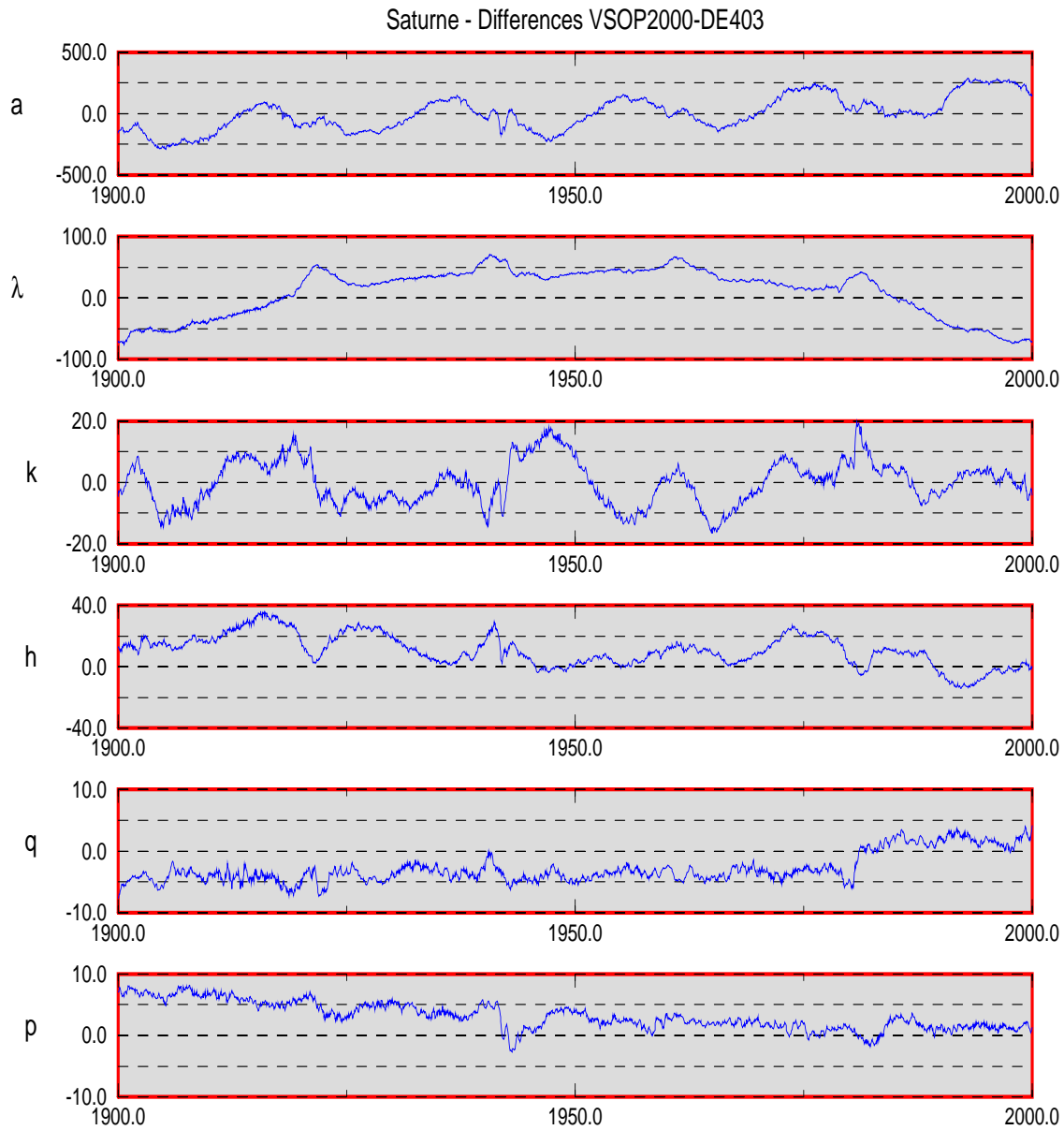


FIG. 2.10 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Saturne. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

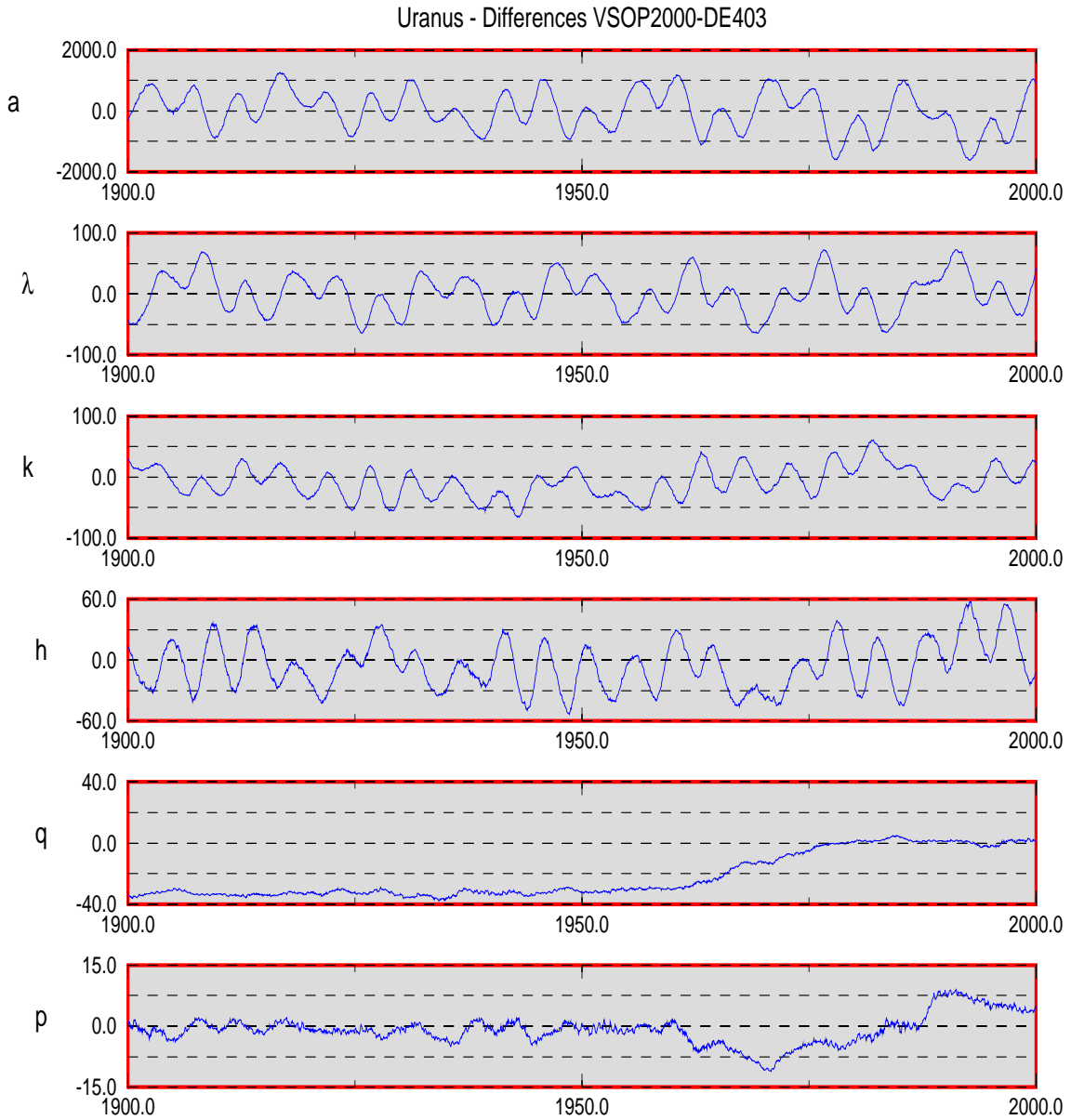


FIG. 2.11 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Uranus. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

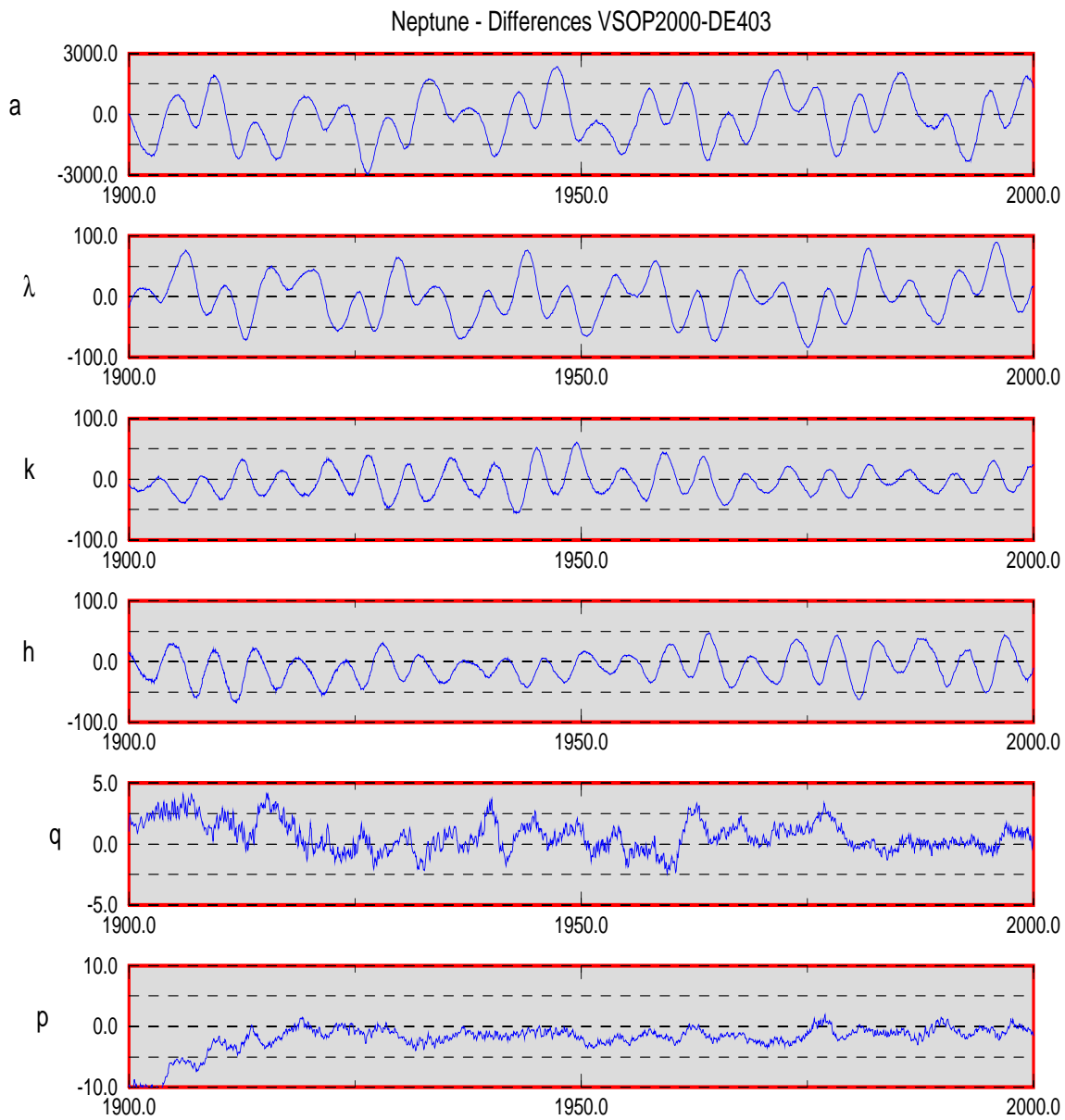


FIG. 2.12 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur un siècle pour Neptune. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

Différences entre VSOP2000 et DE403 sur [1600-2200]

Nous avons entrepris une comparaison entre VSOP2000 et DE403 sur tout l'intervalle de validité de cette solution numérique ([1600-2200]). Les résultats de cette comparaison sont reportés dans le tableau (2.12) et sont représentés par les figures (2.13) à (2.20).

TAB. 2.12 – *Différences entre VSOP2000 et DE403 sur l'intervalle de temps 1600 - 2200. BTL = Barycentre Terre-Lune. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p . Un équivalent en secondes de degré est donné pour λ .*

Planète	a	λ	k	h	q	p
Mercure	1.8	330 (0."00681)	124	44	5.6	9.1
Vénus	1.7	102 (0."00210)	62	22	1.6	5.0
BTL	4.5	284 (0."00586)	50	236	11.2	16.9
Mars	30.2	2888 (0."05957)	98	87	3.8	32.4
Jupiter	100	647 (0."01335)	29	44	11.4	7.3
Saturne	1378	2835 (0."05848)	82	52	10.4	13.1
Uranus	2639	687 (0."01417)	79	69	59.8	14.8
Neptune	4741	242 (0."00499)	85	80	26.8	46.5

Les résidus observés proviennent essentiellement des termes à longues périodes que la théorie à variation séculaire VSOP2000 ne détermine pas ou mal. Néanmoins, mis à part Mercure, les longitudes de Mars et de la Terre, ces résidus restent inférieurs aux différences entre VSOP82 et DE200 sur un siècle (tableau (2.4)). La solution VSOP2000 garde donc un niveau de précision équivalent ou meilleur sur six cents ans que celui de VSOP82 sur un siècle.

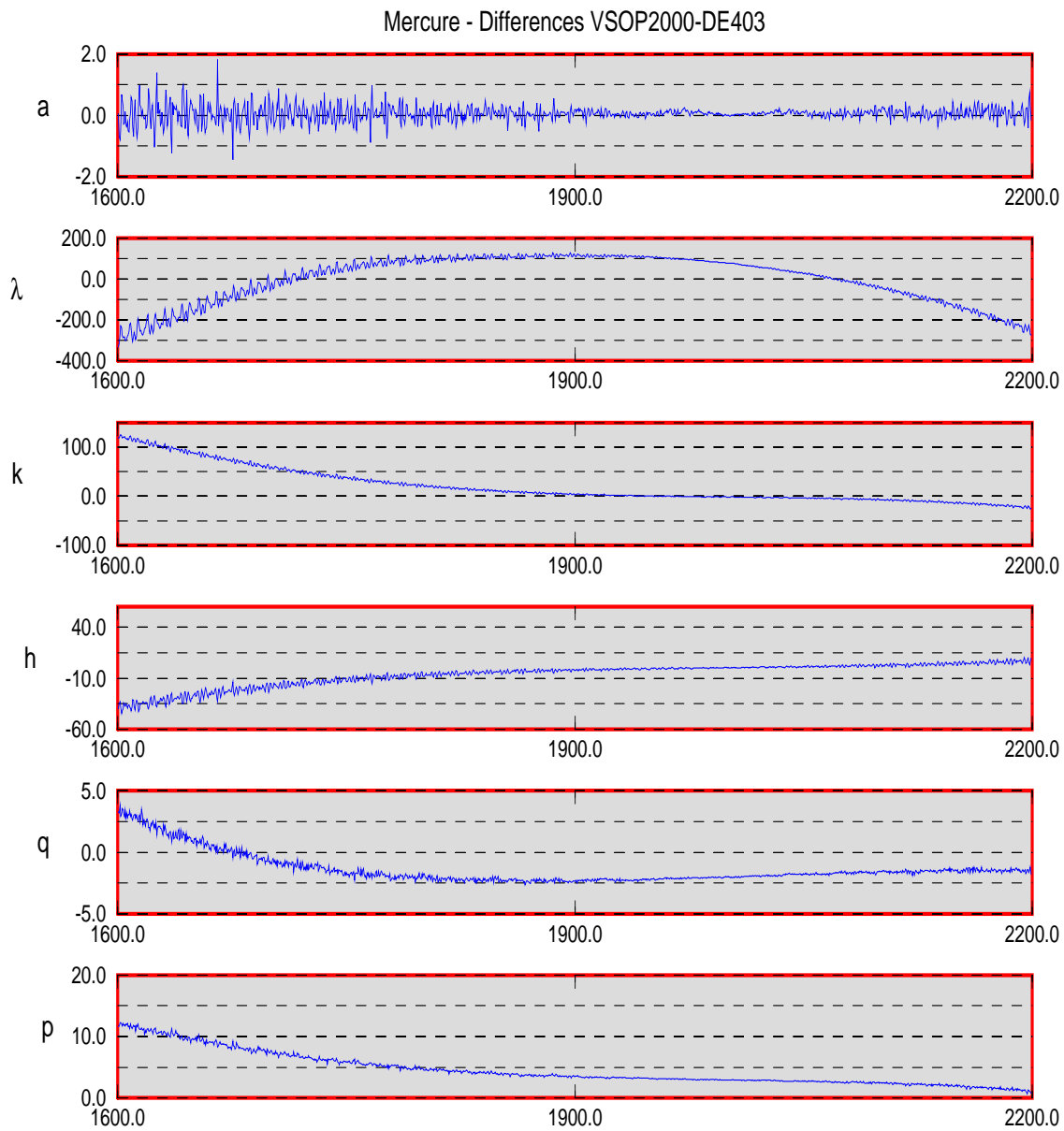


FIG. 2.13 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Mercure. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

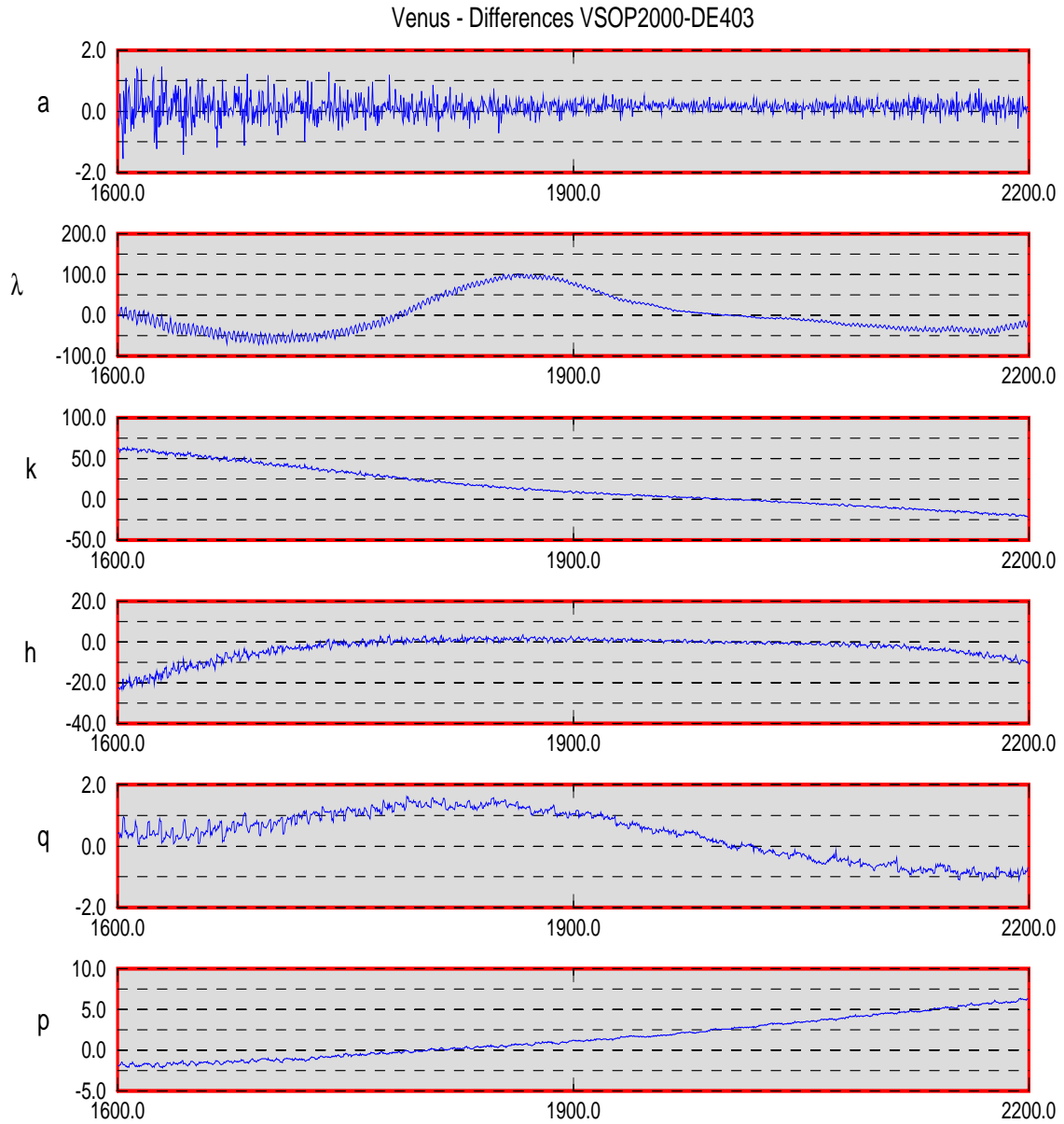


FIG. 2.14 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Venus. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

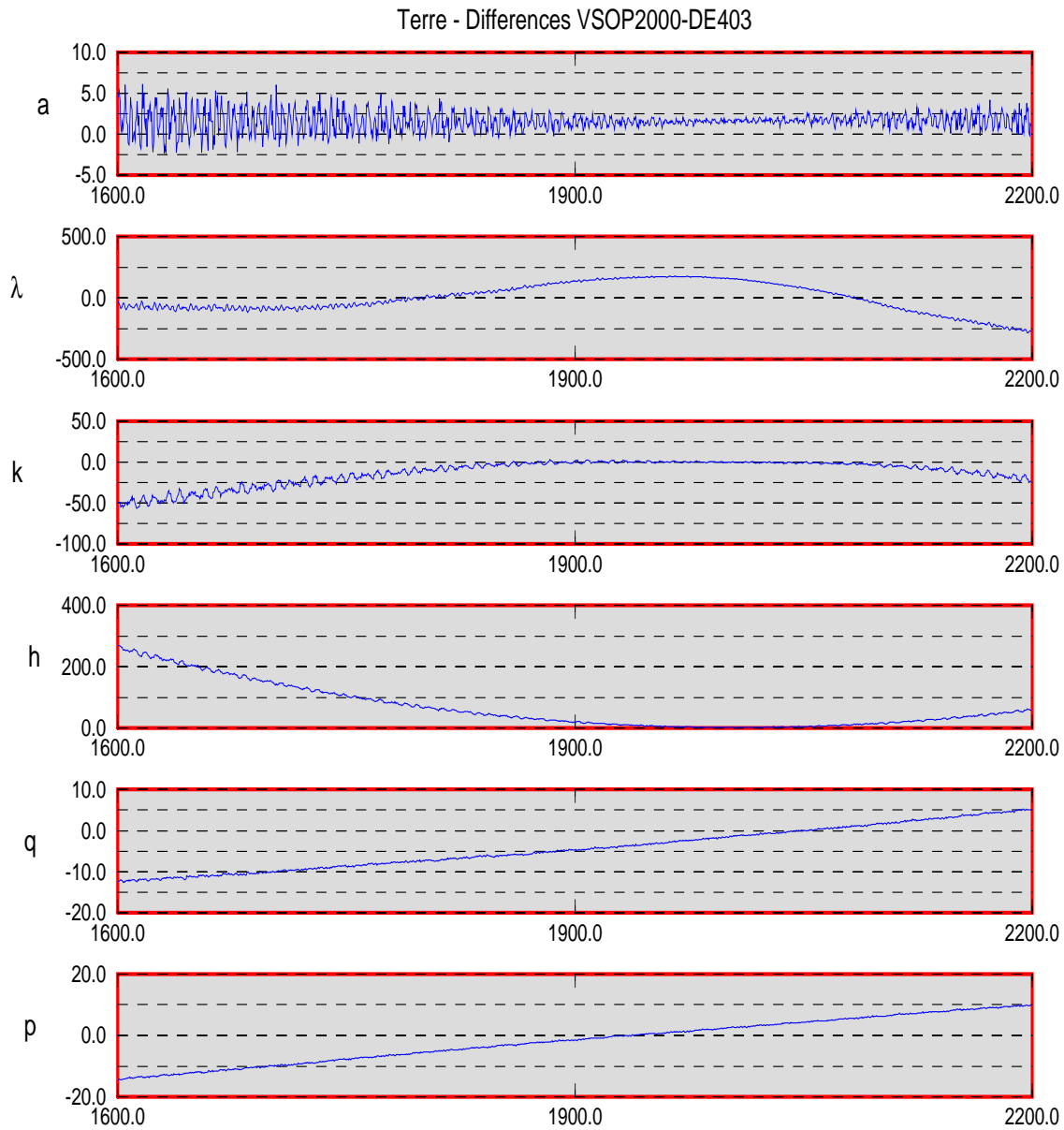


FIG. 2.15 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour la Terre. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

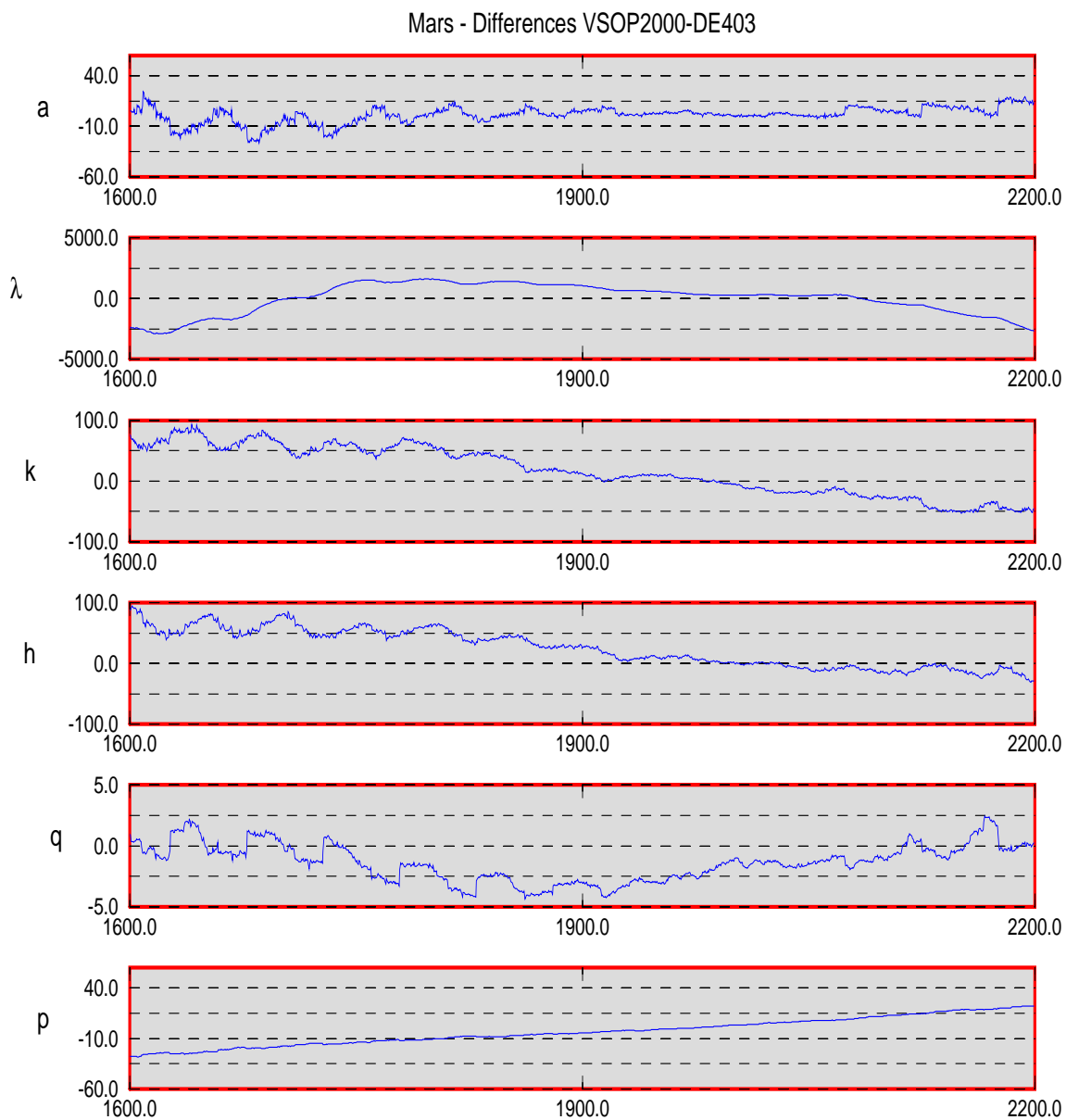


FIG. 2.16 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Mars. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

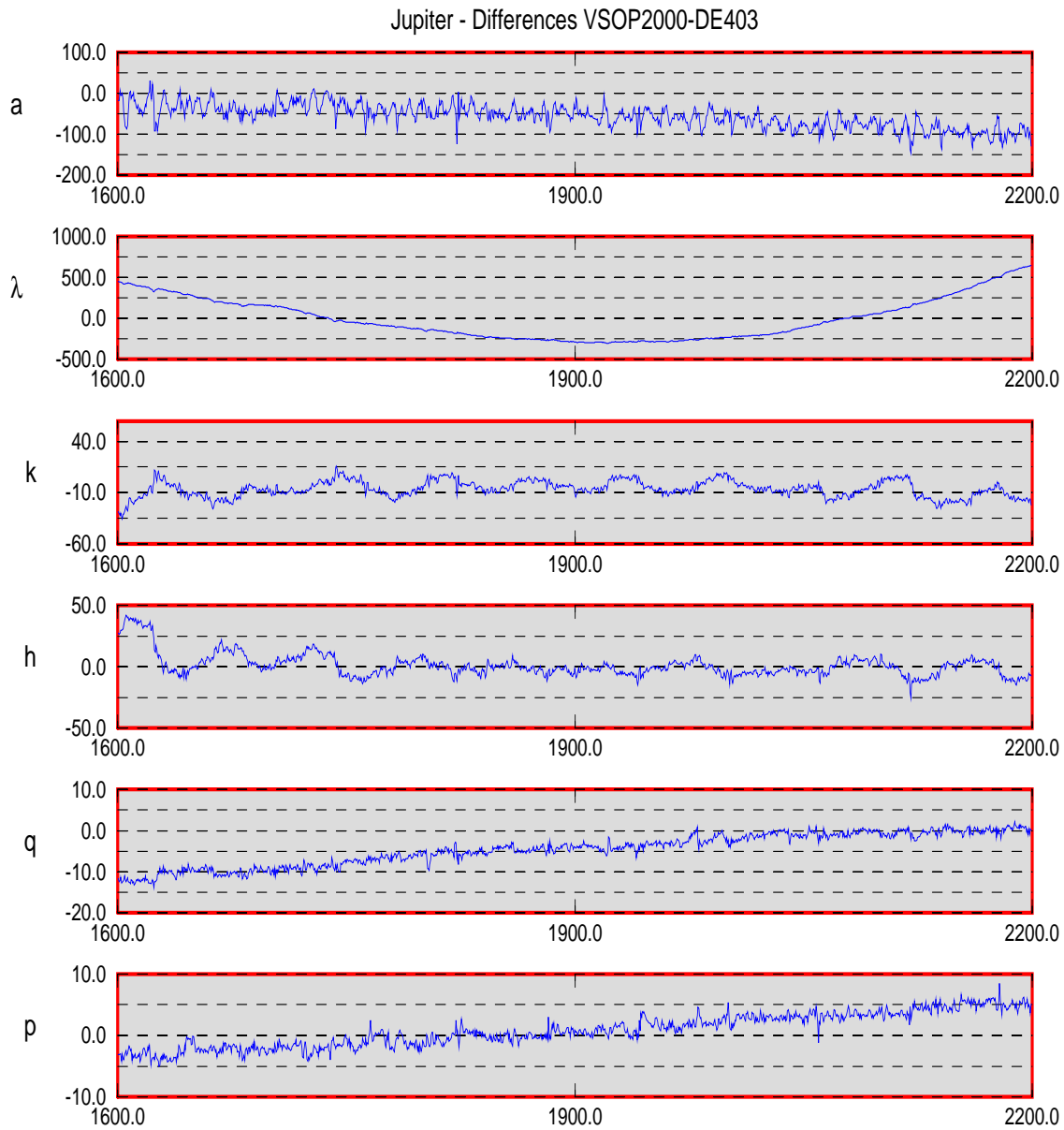


FIG. 2.17 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Jupiter. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

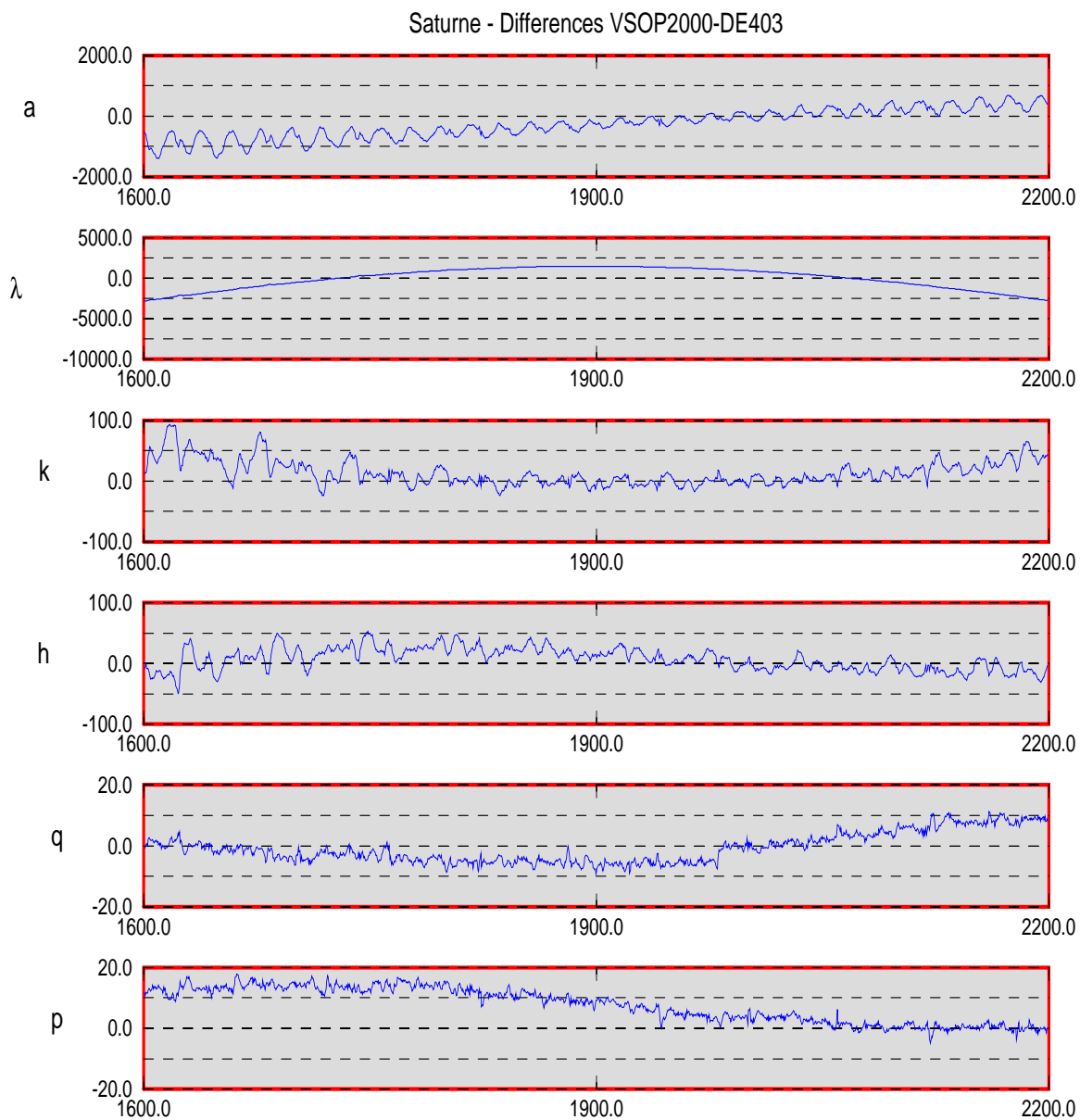


FIG. 2.18 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Saturne. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

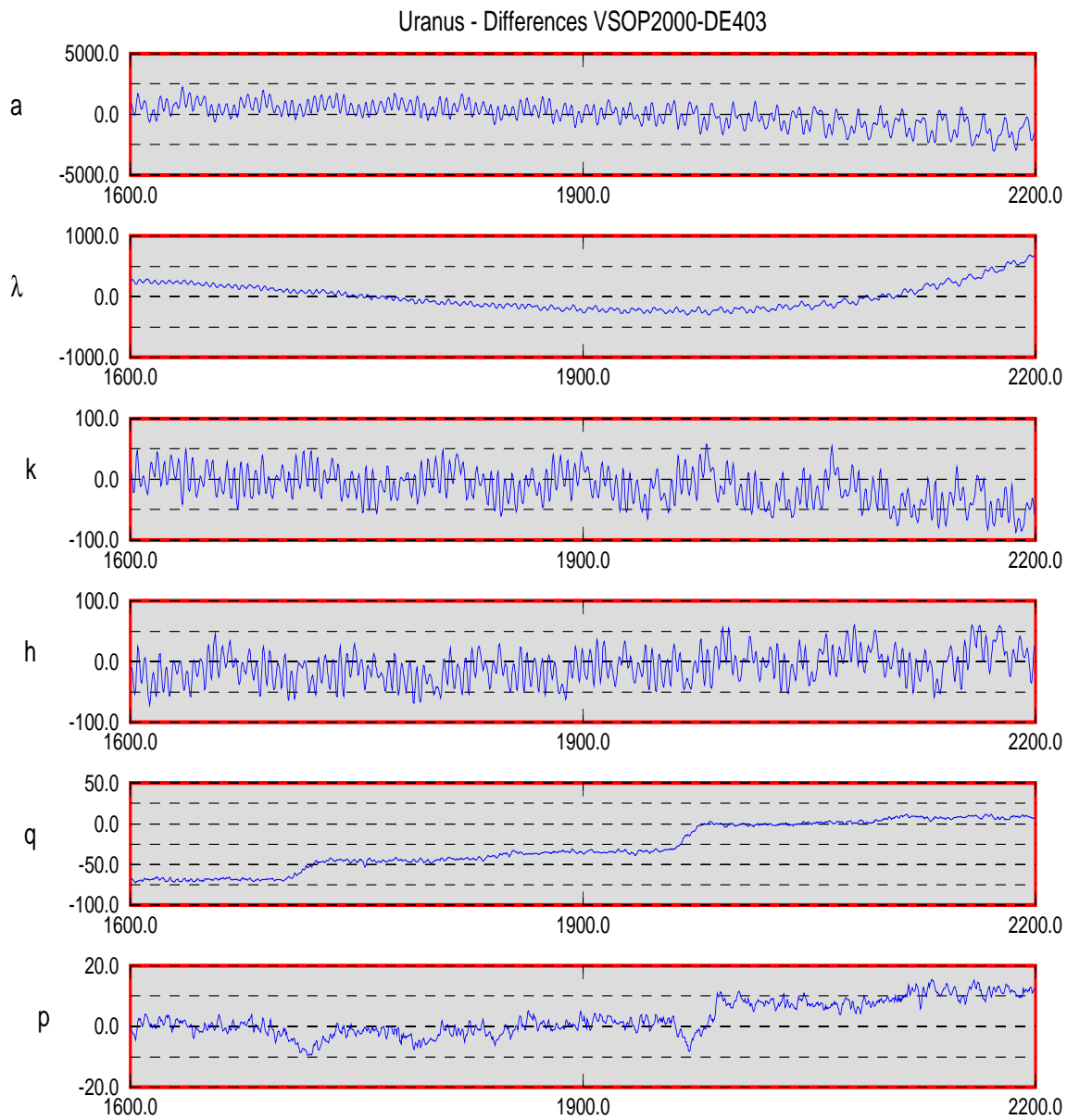


FIG. 2.19 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Uranus. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

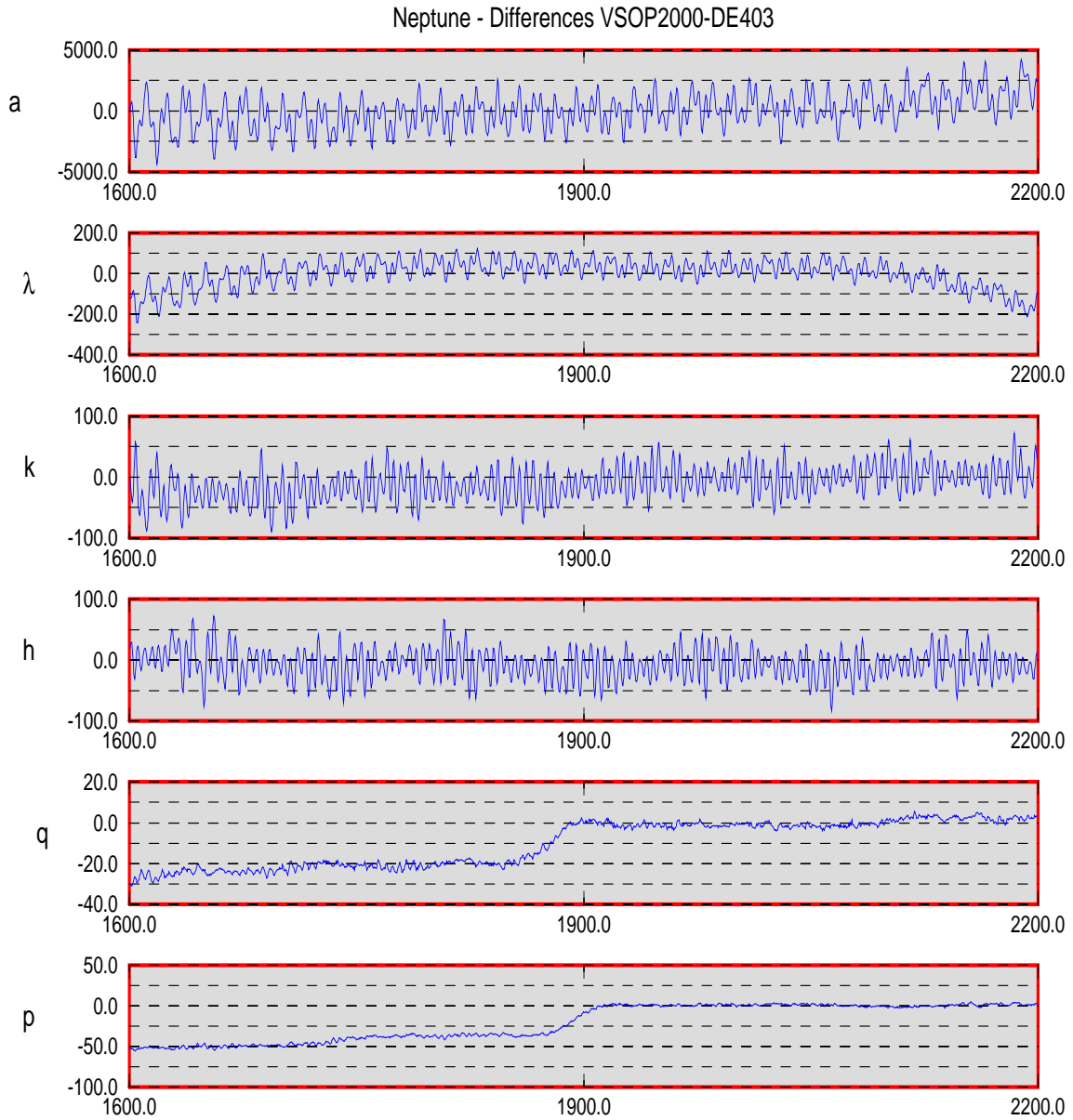


FIG. 2.20 – Différences entre VSOP2000 et DE403 sur six cents ans pour Neptune. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

2.2.7 Comparaison à une intégration numérique interne

Afin de tester la précision interne de VSOP2000, nous avons effectué une comparaison de cette solution à une intégration numérique interne. Le principe de cette comparaison est le suivant. Nous calculons à l'aide de la théorie analytique des conditions initiales que nous injectons dans une intégration numérique du problème des N corps en gravitation newtonienne. L'intégrateur nous permet d'obtenir pour un ensemble de dates les positions et vitesses des N corps que nous comparons aux valeurs obtenues en substituant ces mêmes dates dans la théorie analytique. L'intégrateur numérique modélisant le problème des N corps, nous ne considérons que la solution analytique des équations de Lagrange issue de la méthode itérative⁴ pour calculer les conditions initiales et les positions-vitesses aux dates choisies. Ainsi nous comparons des modèles équivalents. Les résultats de cette comparaison donnent une bonne idée de la précision interne à laquelle la résolution analytique du problème des N corps a été obtenue.

L'intégration a été réalisée sur un siècle et sur 6000 ans (3000 ans de part et d'autre de J2000). Nous avons utilisé le programme d'intégration de Le Guyader [Guy93] basé sur les séries de Taylor et qui permet d'obtenir avec une grande précision le mouvement des planètes sur de grands intervalles de temps (et en particulier de Mercure dont la rapide révolution orbitale est gênante pour ce type d'intégration).

Les figures (2.21) à (2.24) donnent les différences, pour la longitude moyenne λ , entre la théorie analytique et l'intégration numérique sur ces deux intervalles de temps. La date 0 en abscisse correspond à J2000, le temps est compté en années et l'unité des ordonnées est la seconde de degré.

Comme on peut le noter sur ces graphiques, les résidus obtenus sur un siècle en comparant notre solution à l'intégration numérique interne sont plus faibles que ceux obtenus dans la comparaison à DE403, sauf pour Jupiter, Saturne et Uranus où ils sont équivalents. Ces résultats montrent que les écarts entre VSOP2000 et DE403 ne proviennent pas d'une mauvaise résolution analytique des équations de Lagrange puisque la précision interne de la théorie VSOP2000 est supérieure à son niveau de précision en comparaison à DE403. Si nous supposons que la résolution du problème des N corps réalisée par DE403 est d'un niveau de précision interne équivalent, les résultats des comparaisons exposés précédemment montrent alors que des divergences de modèle faibles doivent exister entre VSOP2000 et DE403 (astéroïdes, Lune, relativité, ...).

4. c'est-à-dire VSOP2000 sans compléments relativistes, ni Lune, ni astéroïdes

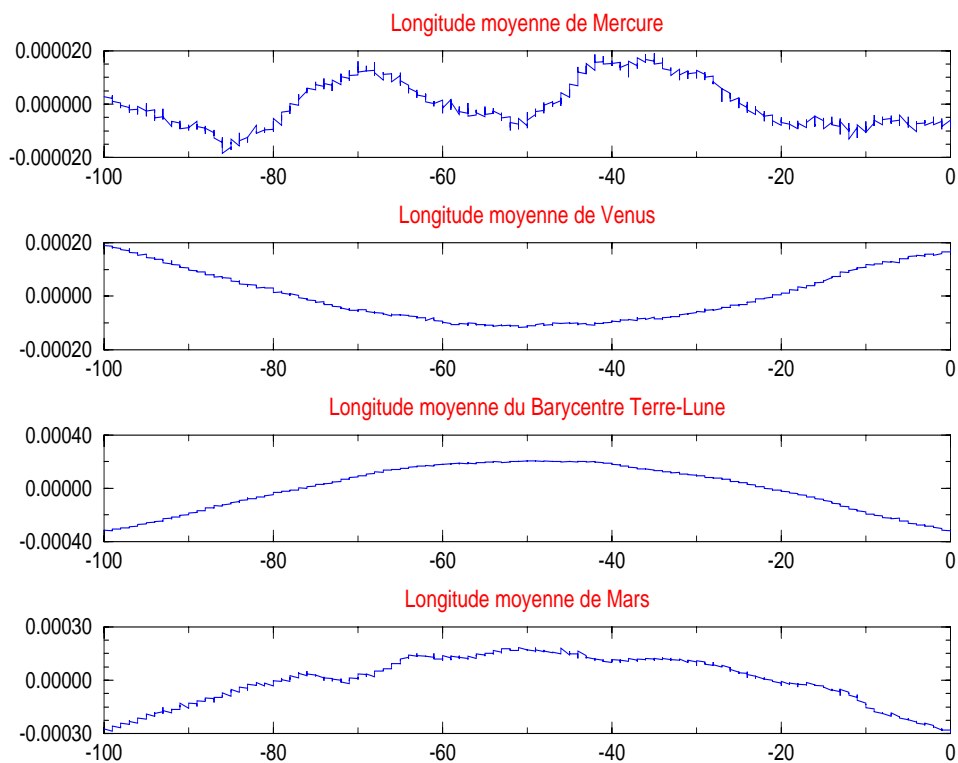


FIG. 2.21 – *Comparaison à une intégration numérique interne. Longitudes de Mercure, Vénus, la Terre et Mars sur un siècle. La date 0 en abscisse correspond à J2000, le temps est compté en années et l'unité des ordonnées est la seconde de degré.*

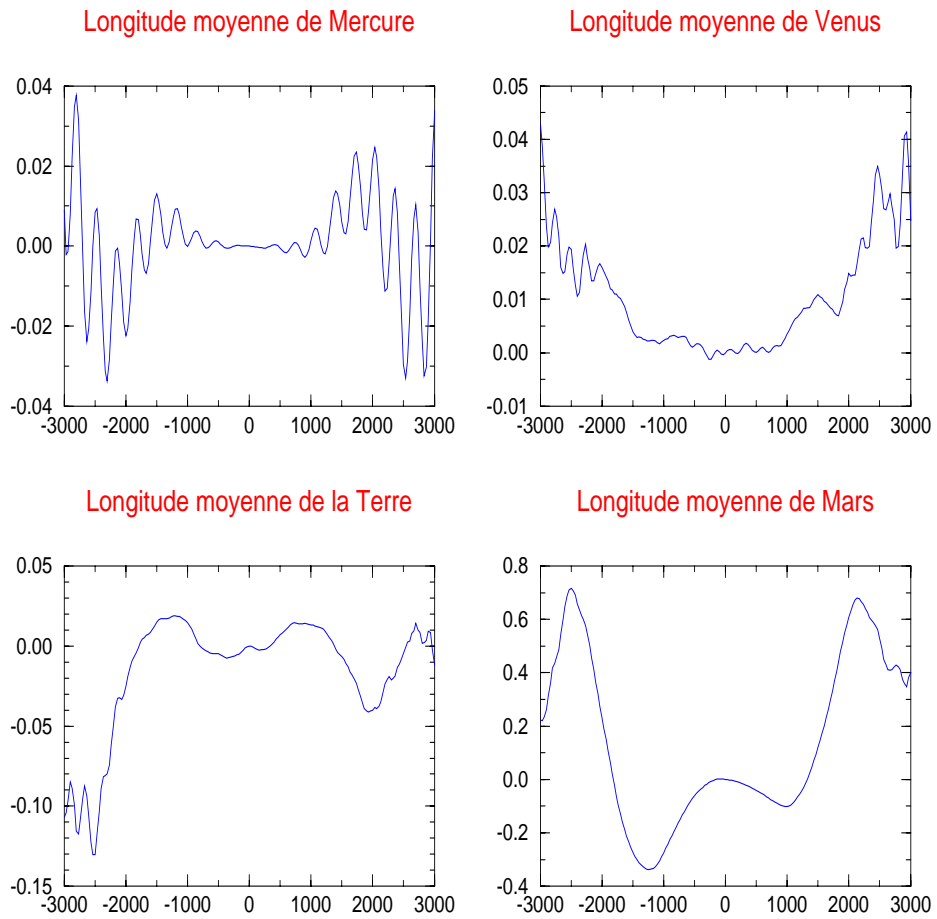


FIG. 2.22 – *Comparaison à une intégration numérique interne. Longitudes de Mercure, Vénus, la Terre et Mars sur 6000 ans. La date 0 en abscisse correspond à J2000, le temps est compté en années et l'unité des ordonnées est la seconde de degré.*

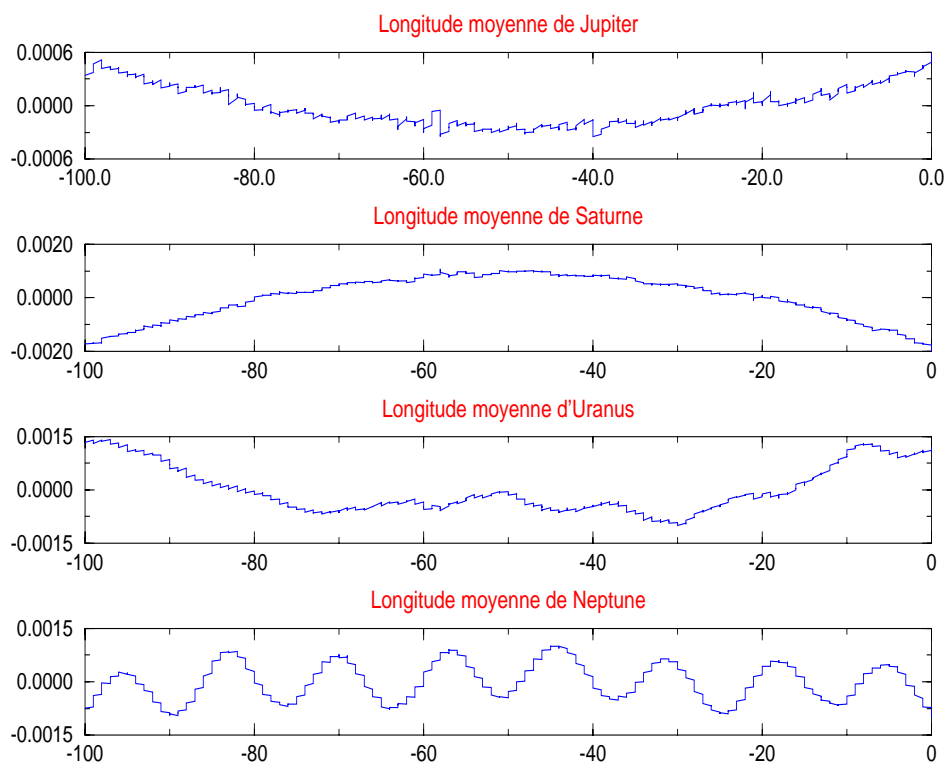


FIG. 2.23 – Comparaison à une intégration numérique interne. Longitudes de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune sur un siècle. La date 0 en abscisse correspond à J2000, le temps est compté en années et l'unité des ordonnées est la seconde de degré.

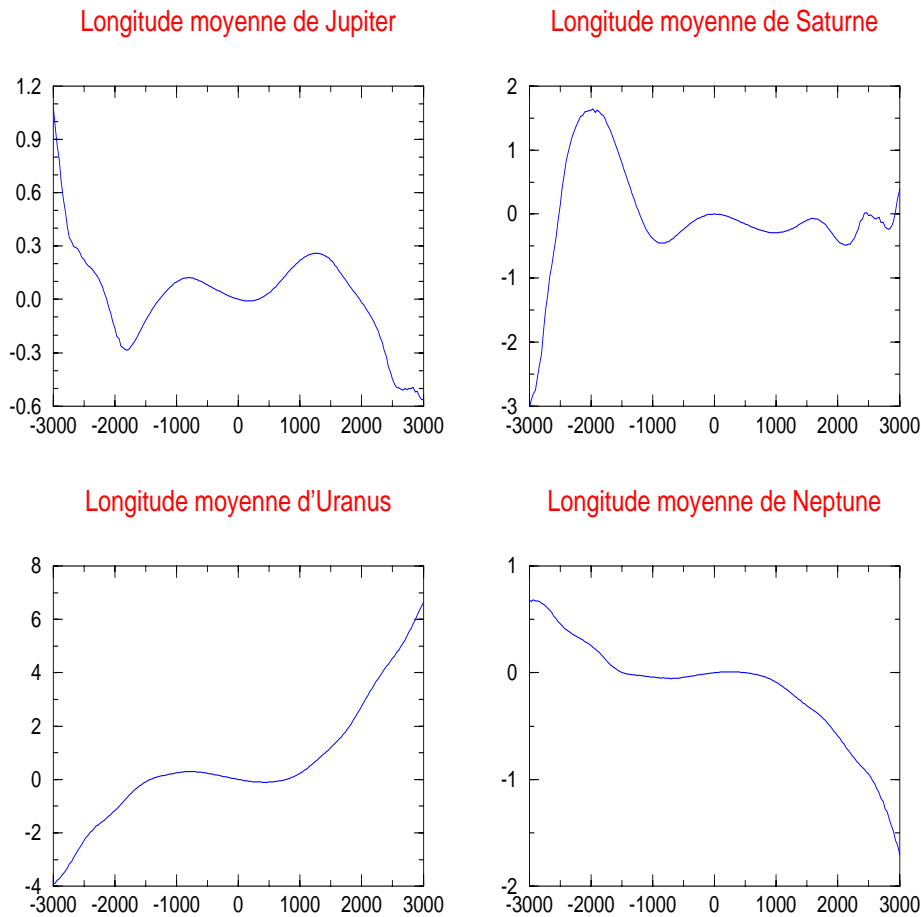


FIG. 2.24 – Comparaison à une intégration numérique interne. Longitudes de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune sur 6000 ans. La date 0 en abscisse correspond à J2000, le temps est compté en années et l'unité des ordonnées est la seconde de degré.

2.2.8 Comparaison à DE405.

La méthode de comparaison à la solution DE403 a ensuite été appliquée à la solution DE405 du *JPL* [Sta98].

Pour cette solution numérique, nous avons obtenu les valeurs suivantes de ε et φ (intervenant dans la matrice de rotation (2.22)) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{DE405} &= 23^{\circ}26'21.''40900 \\ \varphi_{DE405} &= -0.''05126 \end{cases} \quad (2.26)$$

Le tableau (2.13) regroupe les différences maximales entre VSOP2000 et DE405 sur l'intervalle de temps [1^{er} janvier 1900, 0h - 1^{er} janvier 2000, 0h] pour l'ensemble des planètes, le moyen mouvement moyen ayant été corrigé de son éventuelle dérive séculaire :

TAB. 2.13 – Différences entre VSOP2000 et DE405 sur l'intervalle de temps 1900 - 2000. BTL = Barycentre Terre-Lune. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p . Un équivalent en secondes de degré est donné pour λ dont l'éventuelle dérive séculaire a été corrigée.

Planète	a	λ	k	h	q	p
Mercure	0.4	14 (0.''00029)	<u>241</u>	<u>54</u>	<u>19.7</u>	<u>31.3</u>
Vénus	0.7	17 (0.''00035)	10	2	<u>5.1</u>	<u>4.0</u>
Terre	1.4	21 (0.''00043)	3	22	<u>8.8</u>	<u>9.4</u>
Mars	9.0	138 (0.''00285)	16	30	<u>8.4</u>	<u>18.8</u>
Jupiter	51.62	22 (0.''00045)	15	20	4.4	3.5
Saturne	395.12	85 (0.''00175)	65	59	9.8	7.6
Uranus	1847.51	87 (0.''00179)	67	60	40.2	11.5
Neptune	3706.21	89 (0.''00184)	56	69	4.9	10.6

Si on compare les tableaux (2.10) et (2.13), on constate des différences sur les variables k et h de Mercure bien plus importantes dans la comparaison à DE405 que dans celle effectuée avec DE403, et on retrouve le même type de comportement pour les variables q et p de toutes les planètes intérieures (quantités soulignées dans le tableau (2.13)). Nous avons donc effectué une comparaison directe des deux solutions DE403 et DE405 qui indique clairement qu'il y a une divergence linéaire entre elles (figure 2.25).

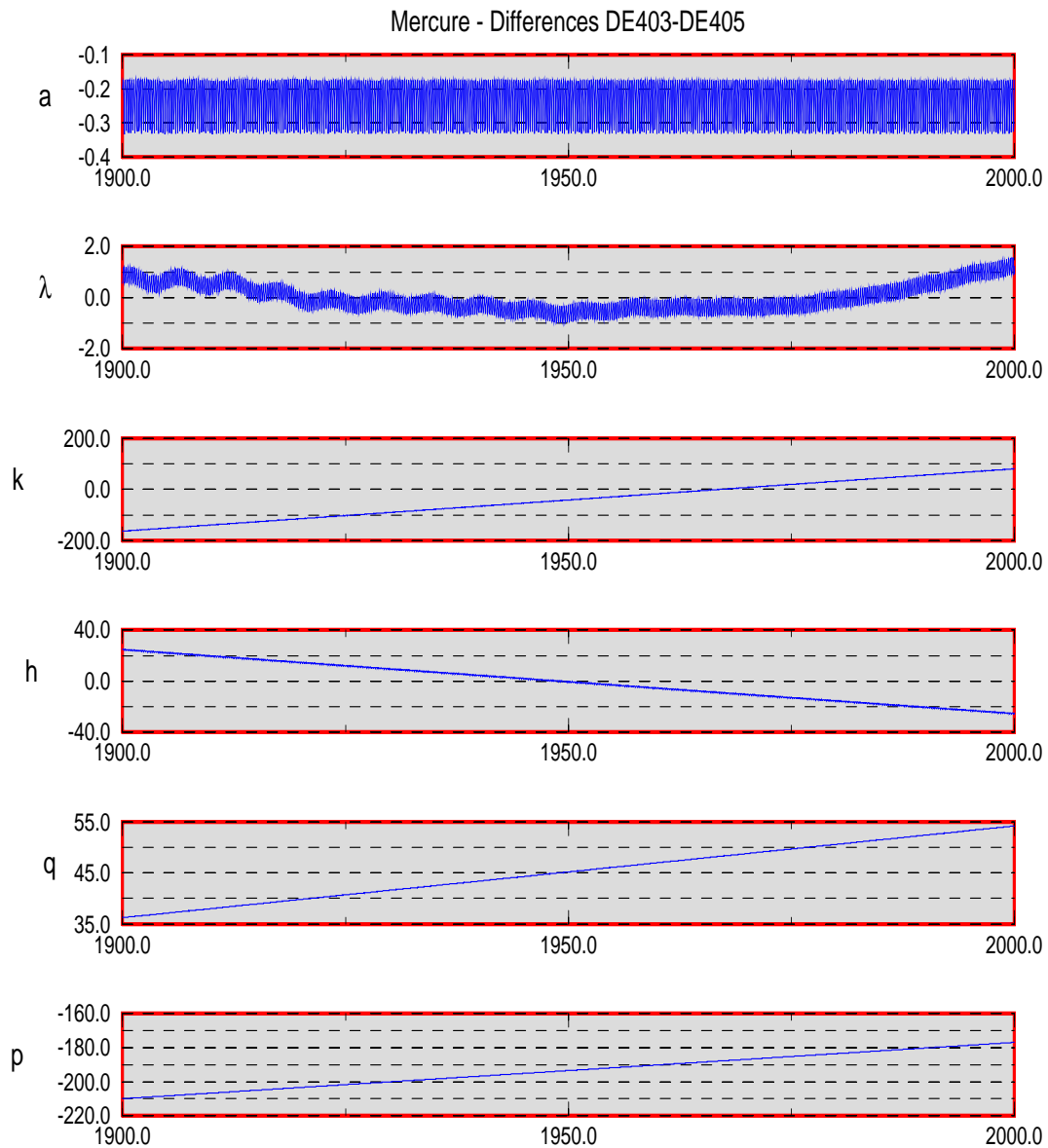


FIG. 2.25 – Différences entre DE403 et DE405 pour les variables a , λ , k , h , q , et p de Mercure. Les unités sont 10^{-10} unité astronomique (ua) pour le demi-grand axe a , 10^{-10} radian pour la longitude moyenne λ et 10^{-10} pour les variables k , h , q et p .

Nous reportons dans le tableau (2.14) les coefficients α des droites de régression $\alpha * T + \beta$ ajustées aux différences entre VSOP2000 et DE405. Dans ce tableau, les chiffres en noir correspondent à des dérives séculaires entre VSOP2000 et DE405 que nous avons déjà constaté lors de la comparaison de VSOP2000 à DE403 (cf. tableau 2.10 et figures 2.6, 2.7 et 2.8). En revanche, les chiffres en bleu correspondent à des dérives séculaires entre VSOP2000 et DE405 absentes quand on compare VSOP2000 à DE403, et que nous allons tenter d'expliquer.

TAB. 2.14 – *Pentes des régressions linéaires entre VSOP2000 et DE405 pour les variables k , h , q et p des planètes intérieures (BTL = Barycentre Terre-Lune). Les unités sont 10^{-10} /siècle.*

Planète	k	h	q	p
Mercure	240	-53	20	31
Vénus	-8	-9	5	4
BTL	0	-18	9	9
Mars	-11	-20	9	19

Peut-on expliquer les écarts entre DE403 et DE405 ?

Le modèle pour DE405 est quasiment le même que pour DE403, les seules différences résidant dans des valeurs différentes de la masse du barycentre Terre-Lune d'une part, et dans la prise en compte des astéroïdes d'autre part. Pour ces derniers, des éléments képlériens augmentés de dérives séculaires sont utilisés dans DE403, alors que pour DE405, les orbites des astéroïdes sont intégrées à l'aide de DE404 [Sta99].

Nous allons utiliser les méthodes développées pour la construction de la solution VSOP2000 afin de tester l'influence de ces différences de modèles. A la différence des moyens mouvements moyens N ajustés à l'observation, les termes séculaires des variables k , h , q et p sont des perturbations calculées analytiquement dans VSOP2000. Seules les valeurs osculatrices J2000 de ces variables sont ajustées à l'observation. Il n'est donc pas possible de modifier ces termes séculaires. Le cas de la variable k de Mercure étant le plus critique, nous le retiendrons en exemple. La théorie au troisième ordre des masses nous donne :

$$\begin{aligned}
k = & \quad 0.044\,660\,636\,00 && \text{constante d'intégration} \\
& -5102887.47\, 10^{-10}\, T && \text{perturbations séculaires} \\
& && \text{au premier ordre des masses} \\
& +1012.25\, 10^{-10}\, T && \text{perturbations séculaires} \\
& && \text{au deuxième ordre des masses} \\
& -4.85\, 10^{-10}\, T && \text{perturbations séculaires} \\
& && \text{au troisième ordre des masses} \\
& && + \dots
\end{aligned}$$

où T est mesuré en siècle depuis J2000.

Modification des masses

Nous pouvons imaginer que l'introduction d'une masse différente pour le système Terre-Lune puisse modifier significativement les termes séculaires des variables k , h , q et p des planètes intérieures dans une solution analytique. Les valeurs des masses du système Terre-Lune dans DE403 et DE405 sont, en unités astronomiques³/jour² dans le système barycentrique (BRS) muni de l'échelle de temps dynamique barycentrique (TDB) :

$$\begin{aligned}
GM_{DE403} &= 0.8997011374291877 \times 10^{-9} \\
GM_{DE405} &= 0.8997011346712499 \times 10^{-9}
\end{aligned}$$

Un calcul direct de l'influence de cette modification de masses conduit à une modification des termes séculaires des variables k , h , q et p des planètes intérieures de quelques 10^{-15} par an soit quelques 10^{-13} au bout d'un siècle ce qui reste largement inférieur aux quelques 10^{-8} attendus. Dans le cas de la variable k de Mercure, nous avons :

$$|\Delta k|_{\text{Masse}} \leq 0.01\, 10^{-10}\, T$$

où T est compté en siècle.

Astéroïdes

La solution VSOP2000 contient les perturbations au premier ordre des masses des astéroïdes Vesta, Iris, Bamberga, Cérés et Pallas (appelé premier groupe).

Il reste à étudier les perturbations de l'ensemble des petits corps intégrés dans la solution DE405 et non pris en compte pour la création de VSOP2000, soit 295 astéroïdes pour une masse totale de $3.8\, 10^{-10}$ masse solaire. Nous avons supposé que ces 295 astéroïdes étaient réunis en un seul et que ce corps unique (appelé second groupe) suivait la même orbite que Cérés. Bien entendu cela modélise très pauvrement la ceinture d'astéroïdes mais nous ne souhaitons qu'obtenir une approximation de l'influence de ces 295 petits

TAB. 2.15 – Termes séculaires des perturbations par les astéroïdes au premier ordre des masses sur les variables k , h , q et p de Mercure. Les unités sont 10^{-10} /siècle.

Astéroïdes	Δk_s	Δh_s	Δq_s	Δp_s
Vesta	-2.50	0.56	-0.22	-0.85
Iris	-0.08	0.01	0.04	-0.03
Bamberga	-0.12	-0.02	0.06	0.03
Cérès	-4.92	1.29	-1.20	-0.83
Pallas	0.70	0.44	-0.06	-1.73
Second groupe	-4.04	1.06	-0.98	-0.68
Total	-10.96	3.34	-2.36	-4.09

corps sur Mercure. Nous avons ensuite calculé les perturbations au premier ordre des masses du second groupe sur les variables k , h , q et p de Mercure. Le tableau (2.15) regroupe les termes séculaires de ces perturbations sur les variables k , h , q et p de Mercure.

Ainsi, pour le cas de Mercure, on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta k_{Ast.} &= -6.92 \cdot 10^{-10} T \quad (\text{perturbations séculaires du 1er groupe}) \\ &\quad -4.04 \cdot 10^{-10} T \quad (\text{perturbations séculaires du 2nd groupe}) \end{aligned}$$

Ces perturbations sont donc insuffisantes pour expliquer les divergences linéaires entre DE403 et DE405 et a fortiori si, entre ces solutions numériques, seules les trajectoires des petits corps sont modifiées.

Modification des constantes d'intégration

La théorie VSOP2000 a été construite par ajustement à la solution DE403. De cet ajustement, nous obtenons les constantes d'intégration de la théorie (tableau 2.8). Si nous avons choisi DE405 au lieu de DE403, nous aurions obtenus les constantes d'intégration reportées dans le tableau (2.16).

L'utilisation de ce jeu de constantes dans la méthode itérative conduirait à une nouvelle solution, disons VSOP2000'. Afin d'évaluer les différences entre VSOP2000 et VSOP2000', nous avons calculé les solutions au premier ordre des masses⁵ issues de ces deux jeux de constantes (tableaux (2.8) et (2.16)). Les résultats de ces intégrations étant notés σ_{DE403} et σ_{DE405} respectivement,

5. dont nous savons qu'elles représentent 90% de la solution globale

TAB. 2.16 – Constantes d'intégration de VSOP2000 issues de la comparaison à DE405. Les unités sont le rad/an pour N et le rad pour λ^0 .

Planète	N	λ^0	k
 Mercure 	26.087 903 140 71	4.402 608 643 47	0.044 660 631 33
 Vénus 	10.213 285 547 27	3.176 134 459 59	-0.004 492 819 99
 Terre 	6.283 075 850 40	1.753 469 950 63	-0.003 740 818 62
 Mars 	3.340 612 434 82	6.203 499 605 55	0.085 365 592 97
 Jupiter 	0.529 690 969 54	0.599 546 604 70	0.046 985 854 54
 Saturne 	0.213 299 078 63	0.874 016 756 59	-0.002 959 977 64
 Uranus 	0.074 781 669 29	5.481 227 788 27	-0.045 953 212 63
 Neptune 	0.038 132 924 91	5.311 894 571 93	0.005 998 415 72

Planète	h	q	p
 Mercure 	0.200 723 306 05	0.040 615 648 74	0.045 635 507 43
 Vénus 	0.005 066 848 21	0.006 824 116 24	0.028 822 822 70
 Terre 	0.016 284 488 21	0.000 000 000 00	0.000 000 000 00
 Mars 	-0.037 899 708 18	0.010 470 429 60	0.012 284 487 54
 Jupiter 	0.012 003 713 25	-0.002 065 621 94	0.011 183 895 47
 Saturne 	0.055 429 483 19	-0.008 717 358 91	0.019 891 375 79
 Uranus 	0.005 647 934 58	0.001 859 214 22	0.006 486 081 01
 Neptune 	0.006 691 010 51	-0.010 291 526 42	0.011 516 898 60

nous avons calculé les différences $\sigma_{DE403} - \sigma_{DE405}$ pour les variables k , h , q et p des planètes intérieures.

Nous avons regroupé dans le tableau (2.17) les coefficients séculaires $\Delta\sigma_s$ de ces différences ($\sigma \in \{k, h, q, p\}$)

Par exemple, dans le cas de la variable k de Mercure, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}
k_{DE403} - k_{DE405} &= 0.000\,000\,004\,44 \\
&+ 0.416\,10^{-12} \sin 2\lambda_5 + 0.703\,10^{-12} \cos 2\lambda_5 \\
&- 0.070\,10^{-12} \sin \lambda_5 - 0.403\,10^{-12} \cos \lambda_5 \\
&+ \dots \\
&- 0.38600\,10^{-10} T + \dots
\end{aligned}$$

où T est compté en siècle depuis J2000, $\lambda_5 = \lambda_{\text{Jupiter}}$.

La comparaison des tableaux (2.14 et 2.17), montre que les modifications des constantes d'intégration peuvent expliquer les différences séculaires entre

TAB. 2.17 – Coefficients séculaires des différences, pour les variables k , h , q et p , entre une solution au premier ordre des masses calculée avec les constantes d'intégration DE403 (tableau (2.8)) et une solution au premier ordre des masses calculée avec les constantes d'intégration DE405 (tableau (2.16)). Les unités sont 10^{-10} /siècle.

Planète	Δk_s	Δh_s	Δq_s	Δp_s
Mercure	-0.386	0.476	0.320	1.421
Vénus	-0.330	0.272	1.906	3.890
Terre	-0.383	0.460	3.009	6.171
Mars	0.186	0.211	6.235	12.796

DE403 et DE405 pour les variables q et p de Vénus, la Terre et Mars. Pour ce qui concerne Mercure, par contre, ces modifications de constantes d'intégration restent insuffisantes.

Conclusion

Pour conclure cette analyse, résumons le cas de la variable k de Mercure. Pour cette variable, nous avons trouvé une différence séculaire entre DE403 et DE405 de pente $\Delta_0 T = 240 \cdot 10^{-10}$ par siècle. La modification de la masse du système Terre-Lune n'explique que quelques 10^{-13} par siècle. La modification des constantes d'intégration implique une contribution de $0.386 \cdot 10^{-10}$ par siècle. Les astéroïdes contribuent à la hauteur de $-6.92 \cdot 10^{-10}$ par siècle pour le premier groupe et le second groupe ne peut expliquer plus que $4.04 \cdot 10^{-10}$ par siècle. Le total de ces perturbations séculaires noté ΔT est bien inférieur à $\Delta_0 T$. La figure (2.26) donne le rapport $\Delta_0 T / \Delta T$ pour les variables k , h , q et p pour Mercure (échelle logarithmique). Comme le montre cette figure, on ne peut expliquer plus de 10% des écarts entre DE403 et DE405 pour Mercure par les hypothèses testées précédemment.

Le cas des divergences séculaires entre DE403 et DE405 pour les variables q et p de Vénus, la Terre et Mars se comprend quant à lui par l'influence des modifications des constantes d'intégration.

L'ajustement de VSOP2000 à DE403, que nous avons effectué pour le calcul des constantes d'intégration de cette théorie analytique, n'a mis en évidence aucune divergence linéaire importante entre ces deux solutions pour le mouvement des corps du système solaire. En revanche, la solution DE405 présente, pour Mercure, une dérive séculaire des variables k , h , q et p , associées (cf. équation 2.1) à l'excentricité et à la longitude du périhélie de

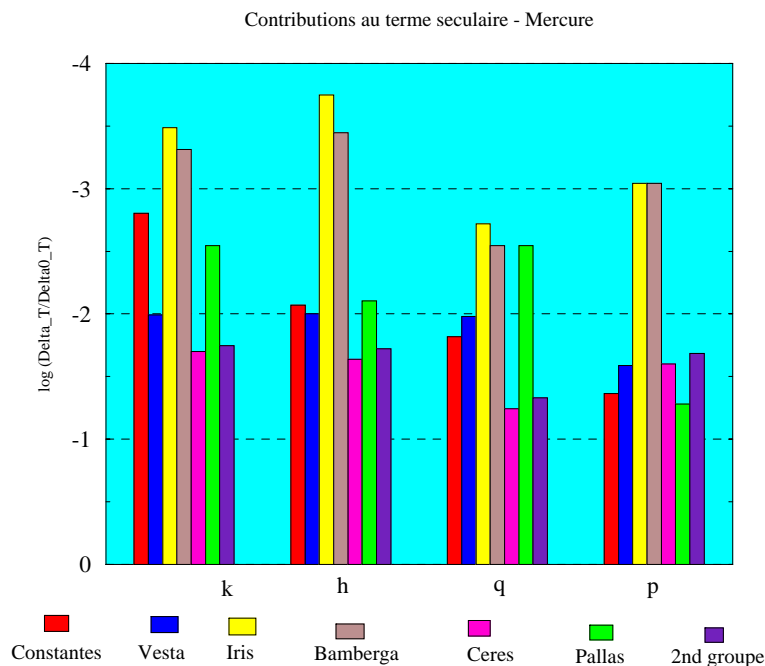


FIG. 2.26 – Contributions de la modification des masses, des constantes d'intégration et des astéroïdes aux termes séculaires des variables k , h , q et p de Mercure.

l'orbite pour k et h , à la longitude du nœud ascendant et à l'inclinaison du plan de l'orbite pour q et p . Ces dérives ne peuvent pas s'expliquer par les différences de modèle entre DE403 ou DE405 que les auteurs de ces solutions nous ont communiquées. Il faut donc prescrire, en l'absence d'informations complémentaires, l'utilisation de DE403 et non de DE405 pour le calcul des éphémérides de position des corps du système solaire.

2.2.9 Solutions dérivées

Solutions en coordonnées cartésiennes

A partir de la solution VSOP2000, nous avons construit des solutions en variables rectangulaires héliocentriques (VSOP2000A) et barycentriques (VSOP2000B). Ces solutions rectangulaires ont été comparées à la solution DE403.

Pour la solution rectangulaire héliocentrique, les différences maximales obtenues par comparaison à DE403 sont regroupées dans le tableau (2.18). Ces différences, exprimées en mètres, sont compatibles avec les écarts obtenus en variables elliptiques (cf tableau 2.10).

TAB. 2.18 – *Différences maximales entre les coordonnées rectangulaires X, Y et Z des solutions VSOP2000A et DE403 sur [1900-2000]. Les écarts sont exprimés en mètres.*

Planète	ΔX	ΔY	ΔZ
Mercure	98	60	21
Vénus	246	140	41
Terre	256	326	116
Mars	2 694	3 070	391
Jupiter	2 778	2 810	1 212
Saturne	15 695	19 292	3 961
Uranus	89 079	77 369	26 076
Neptune	91 422	69 896	33 967
BTL	263	317	116

On notera l'absence de Pluton dans le tableau (2.18). Cela tient au fait que la solution analytique utilisée pour cette planète a pour vocation une prise en compte des effet perturbatifs qu'elle induit sur les planètes géantes et dans le calcul de la position du barycentre du système solaire et non une éphéméride de position précise de Pluton.

La solution barycentrique rectangulaire VSOP2000B est simplement obtenue en calculant la position du barycentre du système solaire B à l'aide de VSOP2000A, d'après la formule classique :

$$\sum_i M_i \overrightarrow{BP_i} = \vec{0} \quad (2.27)$$

la sommation étant étendue aux corps P_i considérés dans ce travail (Mercure, Vénus, Barycentre Terre-Lune, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune et Pluton), M_i désignant les masses planétaires.

La comparaison à DE403 effectuée sur les solutions rectangulaires barycentriques VSOP2000B nous a conduit à constater que les Soleils barycentriques de VSOP2000B et de DE403 différaient de plusieurs centaines de mètres (figure 2.27), ce qui n'est pas compatible avec la précision de la solution héliocentrique VSOP2000.

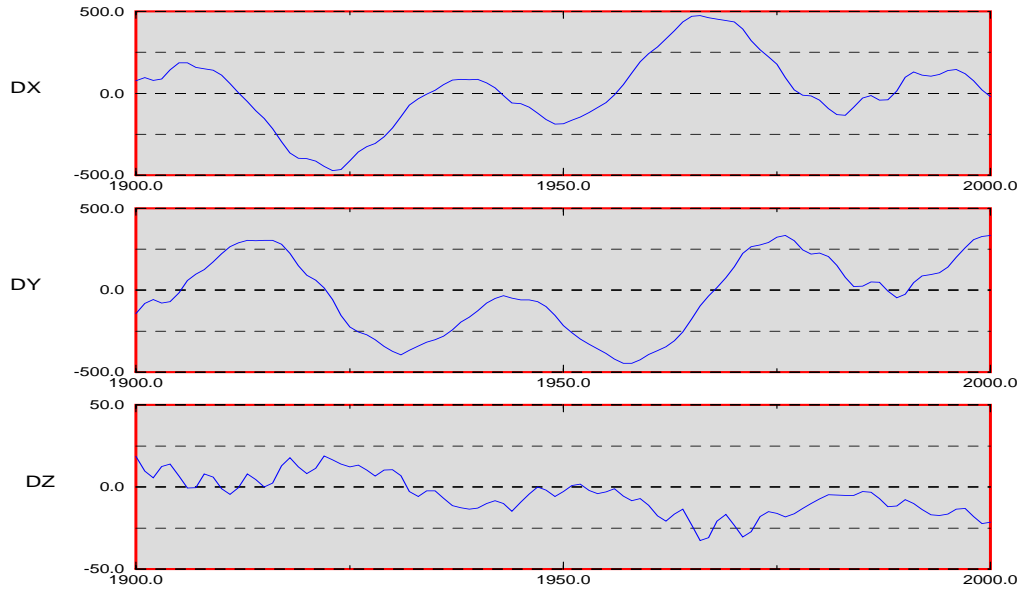


FIG. 2.27 – Différences entre VSOP2000B et DE403 pour les coordonnées rectangulaires barycentriques X , Y et Z du Soleil. Le calcul de la position du barycentre du système solaire a été effectué à l'aide des masses IERS 1992. Les différences sont données en mètres.

Ces écarts importants proviennent principalement de deux différences dans le calcul de la position du barycentre du système solaire de DE403 et de VSOP2000 (eq. 2.27) : la prise en compte des astéroïdes ainsi que les différences entre les masses IERS 1992⁶ et les masses de DE403 (tableau 2.19).

Le problème des astéroïdes est résolu en introduisant dans la formule (2.27) les perturbations au premier ordre des masses des cinq astéroïdes considérés dans le cadre de ce travail, c'est-à-dire Vesta, Iris, Bamberga, Cérés et Pallas.

Pour ce qui concerne les différences de masses, nous avons entrepris la construction, à partir de la solution rectangulaire héliocentrique VSOP2000A, d'une solution barycentrique utilisant le jeu de masses de DE403.

6. utilisées pour construire VSOP2000

TAB. 2.19 – Différences absolue $|\Delta M|$ entre les masses IERS 1992 et les masses de DE403. Les valeurs des masses données sont divisées par la masse du Soleil.

Planète	M_{DE403}	$M_{IERS\ 1992}$	$ \Delta M $
Saturne	$2.858859806 \times 10^{-4}$	$2.858858172 \times 10^{-4}$	1.634×10^{-10}
Uranus	$4.366244043 \times 10^{-5}$	$4.366251669 \times 10^{-5}$	7.626×10^{-11}
Pluton	$7.396449704 \times 10^{-9}$	$7.407407407 \times 10^{-9}$	1.096×10^{-11}

Comme le montre la figure (2.28), à comparer à la figure (2.27), cette démarche nous ramène à un Soleil plus proche de DE403, ce qui nous permet de nous assurer que les différences entre le Soleil barycentrique de DE403 et de VSOP2000B proviennent bien de cette modification de masses.

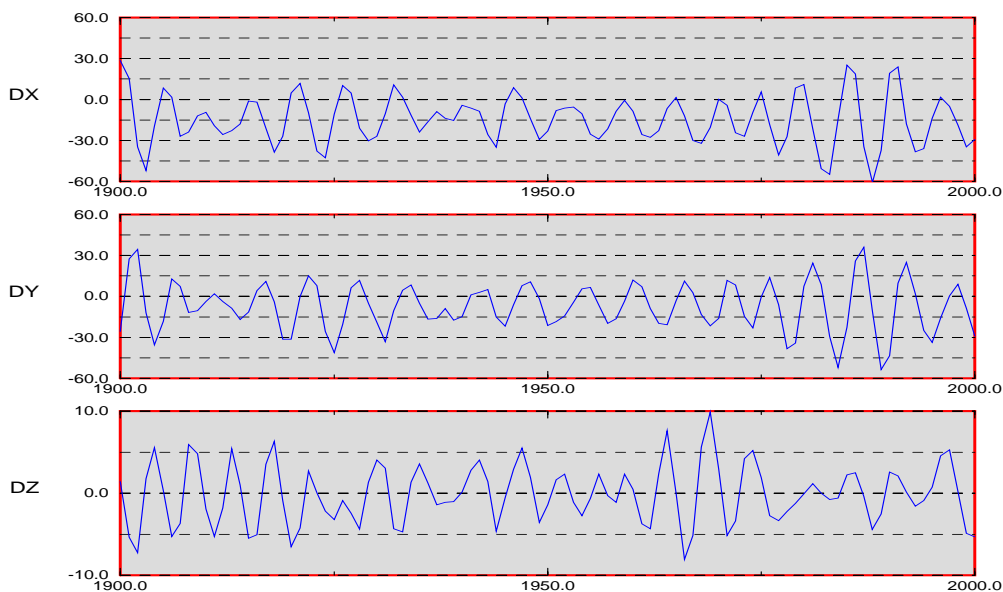


FIG. 2.28 – Différences entre VSOP2000B et DE403 pour les coordonnées rectangulaires barycentriques X , Y et Z du Soleil. Le calcul de la position du barycentre du système solaire a été effectué à l'aide des masses de DE403. Les différences sont données en mètres.

Il faut cependant garder présent à l'esprit que la solution en coordonnées rectangulaires barycentriques VSOP2000B, issue de VSOP2000, doit être construite à l'aide du même jeu de masses (IERS 1992). Cette solution présente donc pour le Soleil des écarts de quelques centaines de mètres avec DE403. Ces écarts se propagent à l'ensemble des planètes puisque le vecteur

barycentrique d'un corps est obtenu par addition à son vecteur héliocentrique du vecteur Barycentre-Soleil.

Cependant, en ce qui concerne la vitesse barycentrique de la Terre, déduite de la solution VSOP2000B par dérivation des séries analytiques, la précision obtenue par comparaison à DE403 est tout à fait compatible avec les exigences de la mission spatiale d'astrométrie GAIA [Mig98], [GMPF⁺98]. Comme le montre la figure (2.29), les différences maximales entre VSOP2000B et DE403 sont inférieures à deux dixièmes de millimètres par seconde sur l'intervalle de temps [1980,2020], ce qui reste bien inférieur à l'exigence de 1.5 mm.s^{-1} requise par GAIA.

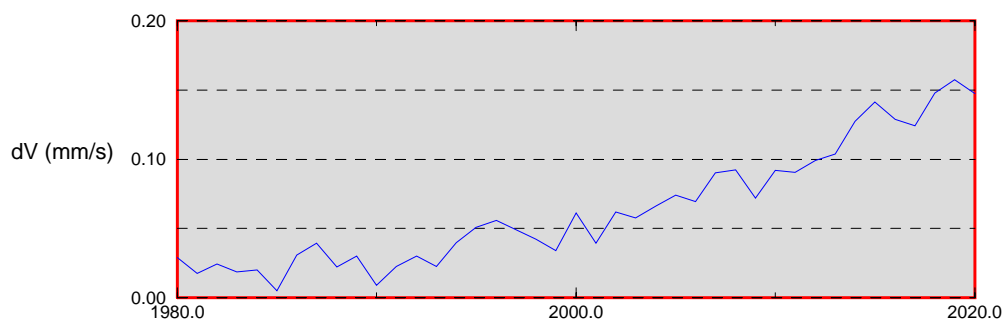


FIG. 2.29 – Différences entre VSOP2000B et DE403 pour la vitesse barycentrique de la Terre. L'unité est le mm/s .

Solutions en Temps Coordonnée Barycentrique

Les recommandations de l'*UAI* (voir annexe 1) stipulent que les éphémérides de position des corps du système solaire doivent être exprimées en TCB. Or, l'argument "temps" utilisé dans la théorie VSOP2000 est, puisque les constantes d'intégration de cette théorie ont été obtenues par ajustement à DE403, le même que celui utilisé dans cette solution numérique, à savoir le temps dynamique barycentrique (TDB). Nous présentons ici les solutions rectangulaires VSOP2000C et D, respectivement héliocentrique et barycentrique, exprimées en Temps coordonnée barycentrique.

L'échelle de temps TDB est à cheval entre le temps coordonnée barycentrique (TCB) et le temps terrestre (TT)⁷. En effet, TDB et TT sont les

7. noté aussi TDT

échelles de temps qui ont été introduites en 1976 sur recommandations de l’UAI, avec la contrainte de ne différer que de termes périodiques. TT est quant à lui la forme idéale du TAI⁸, par définition, et il est relié à celui-ci par décalage de l’origine⁹ [SF92], [GS88]. Les échelles de temps TT, TDB et TCB ont été synchronisées en 1977, le 1^{er} janvier à 00^h00^m00^s TAI exactement (jour julien 2443144.5) et leur lecture étaient alors : 1977, janvier, 1^d.0003725 (jour julien 2443144.5003725).

Par recommandation de l’UAI [IAU94], l’événement J2000.0 est défini au géocentre à la date 1^{er} Janvier 2000 1.5 TT ($TT = 2451545.0$). L’introduction du TCB dans VSOP2000 pose la question de l’époque de référence que nous devons utiliser pour la solution. Aucune recommandation n’est donnée sur l’époque initiale à utiliser dans les éphémérides de position des corps du système solaire et libre choix nous est laissé entre trois solutions raisonnables, à savoir :

- 1977, Janvier, 1^d.0003725 TT, c’est-à-dire l’époque de synchronisation des échelles TT, TDB et TCB.
- J2000(TCB), c’est-à-dire l’événement $TCB = 2451545.0$ au géocentre.
- J2000(TDB) (époque de référence de la solution VSOP2000), c’est-à-dire l’événement $TDB = 2451545.0$ au géocentre, avec la convention de synchronisation explicitée auparavant.

L’échelle de temps TCB a une marche plus “rapide” que l’échelle TDB. Cela signifie que l’événement $TCB = 2451545.0$ au géocentre (J2000(TCB)) précède l’événement $TDB = 2451545.0$ au géocentre (J2000(TDB)) (cf. figure 2.30). A J2000(TCB), l’échelle de temps TAI indique exactement $TAI = 2451544.9994972$ au géocentre, ce qui correspond à un décalage de 43.44192 secondes (SI) entre les deux événements (J2000 TCB) et J2000(TAI)¹⁰

L’époque J2000(TDB) correspond, si on néglige les différences périodiques entre TDT et TDB à l’événement $TAI = 2451544.9996275$ au géocentre. A cet événement précis, $TAI = 2451544.9996275$ au géocentre, correspond l’événement $TCB = 2451545.0001303$ au géocentre.

Le tableau (2.20) résume ce qui vient d’être dit sur les différentes époques J2000.

8. TAI est la forme réalisée du TT

9. $TT = TAI + 32^s.184$ à l’origine en 1977.

10. Calcul effectué dans le cas où on néglige les différences périodiques entre les échelles TDB et TT. Si on soustrait les 32.184 secondes (SI) historiques entre les échelles TAI et TDB, cela nous donne un décalage de 11.25792 secondes (SI) entre les deux événements J2000(TCB) et J2000(TDB).

TAB. 2.20 – Tableau donnant, pour les événements 1^{er} janvier à 00^h00^m00^s TAI (notée 1977(TAI)), J2000(TAI), J2000(TDB) et J2000(TCB) les lectures de TAI, TDB et TCB au géocentre dont on néglige les différences de marche périodiques.

Echelle	TAI	TDB	TCB
1977 (TAI)	2 443 144.5000000	2 443 144.5003725	2 443 144.5003725
J2000(TAI)	2 451 545.0000000	2 451 545.0003725	2 451 545.0005028
J2000(TDB)	2 451 544.9996275	2 451 545.0000000	2 451 545.0001303
J2000(TCB)	2 451 544.9994972	2 451 544.9998697	2 451 545.0000000

Par construction, l'époque origine de VSOP2000 est J2000(TDB) (les constantes d'intégration ayant été ajustée à DE403). Nous avons choisi, pour la solution dérivée exprimée en TCB, d'adopter pour époque origine J2000(TDB) de sorte que seules de légères modifications des constantes d'intégration affectant les moyens mouvements moyens et les masses soient à considérer.

L'utilisation pratique d'une solution VSOP2000 exprimée en TCB consistera donc, pour une date donnée en TCB à substituer dans la solution la quantité $TCB - 2451545.000130$ avec la convention suivante :

$$TCB = 2451545.00013033 \Leftrightarrow (\text{époque}=\text{J2000(TDB)})$$

En général, la date d'une observation est exprimée en TAI. Afin de comparer cette observation à VSOP2000, on utilisera le lien analytique entre les échelles de temps TCB et TCG ou bien, si on peut négliger les différences périodiques entre TT et TDB, on appliquera les formules simples suivantes :

- N_{TAI} =nombre de secondes du Système International (SI) entre J2000 (TDB) et la date =lecture de TAI à la date – 2451544.9996275 en secondes (SI);
- N_{TCB} =nombre de secondes (SI) correspondant sur l'échelle TCB = $N_{TAI} \times 1/(1 - L_B)$;
- Valeur à entrer dans VSOP2000 = 2451 545.0001303 + N_{TCB} exprimé en jour juliens.

Pour ce qui concerne la substitution de TCB à TDB dans VSOP2000, écrivons sans perdre de généralité une des variables rectangulaires d'une pla-

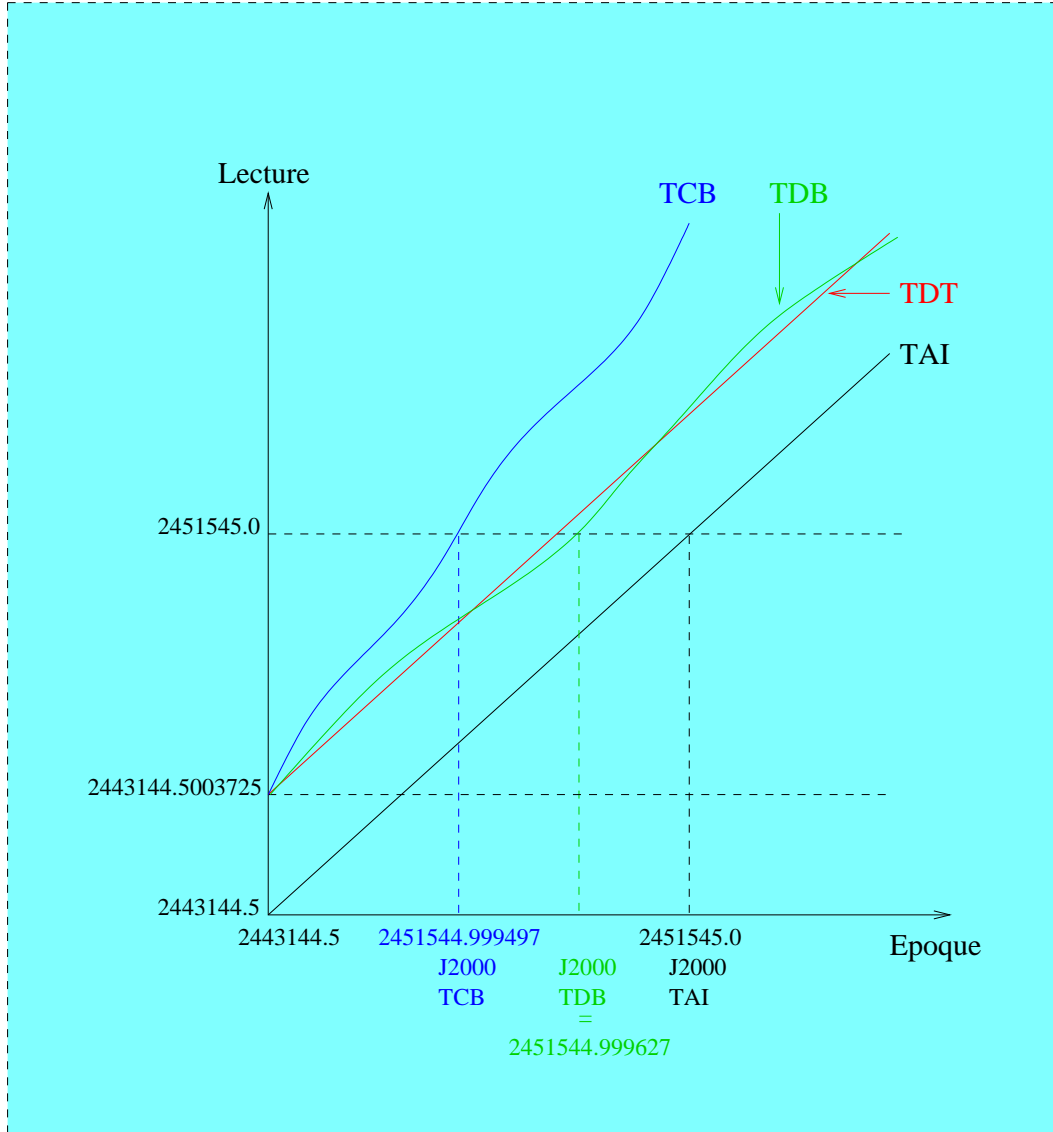


FIG. 2.30 – Lecture des échelles TCB, TDB, TT et TAI au géocentre en fonction de l'époque. L'axe des abscisses indique l'époque d'un événement et l'indication de l'échelle en en TAI pour cet événement. Les dérivés entre les différentes échelles ont été fortement exagérés par soucis de clarté.

nète sous la forme analytique¹¹ :

$$X_\alpha(T) = (T - T_0)^\alpha \left[a_\alpha \sin \left(\sum_k c_{\alpha k} [N_k(T - T_0) + \lambda_k^0] \right) + b_\alpha \cos \left(\sum_k c_{\alpha k} [N_k(T - T_0) + \lambda_k^0] \right) \right] \quad (2.28)$$

11. Les solutions analytiques VSOP2000A ou B se présente comme combinaison linéaire de tels termes.

où $T = \text{TDB}$, $T_0 = \text{J2000(TDB)}$, N_k sont les moyens mouvements en longitudes moyennes et les coefficients $(T - T_0)^\alpha a_\alpha$ et $(T - T_0)^\alpha b_\alpha$ sont homogènes à des longueurs.

D'après [FFKA86] et [Hel86], les transformations suivantes permettent de substituer TCB (noté t) à TDB (noté T) dans les équations du mouvement, en notant $t_0 = \text{J2000(TDB)}$ dans l'échelle $\text{TCB} = 2\,451\,545.0001303$:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{1}{1 - L_B}(T - T_0) \\ \hat{a}_\alpha &= \left(\frac{1}{1 - L_B}\right)^{1-\alpha} a_\alpha \\ \hat{b}_\alpha &= \left(\frac{1}{1 - L_B}\right)^{1-\alpha} b_\alpha \\ \hat{N}_k &= (1 - L_B)N_k \\ (\widehat{GM}) &= \frac{1}{1 - L_B}GM \end{aligned} \quad (2.29)$$

où L_B est une constante dépendant des valeurs de L_C et W_0 , respectivement constante de proportionnalité entre les échelles de temps TCB et TCG¹² et valeur du potentiel au niveau du géoïde [Fuk94]. La valeur actuellement estimée de L_B est déuite de la valeur de W_0 [Bur95] :

$$W_0 = 62636856.85 \pm 1.0^{-17} m^2/s^{-2}$$

et vaut :

$$L_B = 1.550519748 \times 10^{-8} \pm 4 \times 10^{-17}.$$

Dans ces transformations, les quantités avec un chapeau sont associées à BRS avec l'échelle de temps TCB, et celles sans chapeau à BRS muni de TDB.

Ces transformations (2.29) sont équivalentes à un changement conforme de la métrique g du système $(c\,TDB, x^1, x^2, x^3)$ au système $(c\,TCB, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$, de la forme :

$$\hat{g} = e^\gamma g \quad (2.30)$$

avec $\gamma = 2 \ln\left(\frac{1}{1-L_B}\right)$. De ce fait, les angles sont conservés par la transformation.

Les moyens mouvements en longitudes moyennes du tableau (2.8) ainsi que les masses du tableau (2.5) doivent être recalculés conformément aux formules (2.29). Le tableau (2.21) regroupe les valeurs des constantes d'intégration dans le système BRS (muni de TCB).

12. C'est-à-dire que $\text{TCB} - \text{TCG} = L_C \times \text{TCB} + \dots$

TAB. 2.21 – Constantes d'intégration des solutions VSOP2000C et D issues de la comparaison à DE403. Ces constantes sont exprimées dans le système BRS muni de TCB. Les unités sont le rad/an pour N et le rad pour λ^0 .

Planète	N	λ^0	k
Mercure	26.0879027361061	4.40260863429	.04466063576
Vénus	10.2132853890391	3.17613445813	−.00449281998
Terre	6.2830757530349	1.75346994686	−.00374081857
Mars	3.3406123827152	6.20349966124	.08536559272
Jupiter	.5296909639218	.59954641835	.04698585134
Saturne	.2132990764481	.87401692516	−.00296006549
Uranus	.0747816646580	5.48122753778	−.04595340333
Neptune	.0381329177426	5.31189413338	.00599812399
Planète	h	q	p
Mercure	.20072330407	.04061565385	.04563549294
Vénus	.00506684832	.00682411318	.02882282404
Terre	.01628448821	.00000000000	.00000000000
Mars	−.03789970867	.01047042990	.01228448748
Jupiter	.01200369871	−.00206544420	.01118380986
Saturne	.05542958264	−.00871728546	.01989130923
Uranus	.00564804968	.00185927528	.00648605540
Neptune	.00669100847	−.01029144676	.01151685310

Le tableau (2.22) reprend les caractéristiques des solutions analytiques développées au cours de cette thèse. Outre les variables de la solution (elliptiques ou rectangulaires), le plan de référence, le centre du repère de chaque solution, ce tableau donne l'échelle de temps de la solution et le tableau de constantes de la solution. Le vecteur héliocentrique ou barycentrique de la Terre est obtenu sur la base de la solution VSOP2000 pour le barycentre Terre-Lune et à l'aide du vecteur Terre-Lune de la théorie ELP2000[CTC83] grâce à la formule :

$$\overrightarrow{BTL.T} = \frac{-\mu}{1+\mu} \overrightarrow{TL}.$$

Nous avons utilisé pour ce faire la valeur suivante du rapport de la masse de la Terre à la masse de la Lune[SNWF95] :

$$\mu = 0.0123000345$$

Un point dans une colonne indique que la solution est disponible pour le corps concerné. Rappelons que la solution pour Pluton ne contient que les perturbations au premier ordre des masses calculées par J.-L. Simon [Sim99]

TAB. 2.22 – *Solutions VSOP2000. BSS=Barycentre du système solaire. BTL=Barycentre Terre-Lune, ec=écliptique, ell=variables elliptiques a , λ , k , h , q et p , X , Y , Z =variables rectangulaires.*

Solution	VSOP2000	VSOP2000A	VSOP2000B	VSOP2000C	VSOP2000D
Mercure	•	•	•	•	•
Vénus	•	•	•	•	•
Terre		•	•	•	•
Mars	•	•	•	•	•
Jupiter	•	•	•	•	•
Saturne	•	•	•	•	•
Uranus	•	•	•	•	•
Neptune	•	•	•	•	•
Pluton	•	•	•	•	•
BTL	•	•	•	•	•
Soleil			•		•
Variables	ell	X,Y,Z	X,Y,Z	X,Y,Z	X,Y,Z
Plan de ref.	ec. J2000	ec. J2000	ec. J2000	ec. J2000	ec. J2000
Centre	Soleil	Soleil	BSS	Soleil	BSS
Echelle de temps	TDB	TDB	TDB	TCB	TCB
Tableau de cste.	2.8	2.8	2.8	2.21	2.21

Chapitre 3

Intégration du mouvement des planètes en coordonnées rectangulaires

3.1 Présentation

En mécanique newtonienne, le problème des N corps en interaction mutuelle n'admet pas de solution explicite pour $N > 2$. L'approche relativiste du problème complique encore un peu plus les choses puisque l'on ne connaît pas de solutions explicites des équations du champ et par conséquent des équations du mouvement des corps, même pour $N=2$.

Après la publication de la théorie de la relativité générale, Einstein, Infeld et Hoffman développèrent une méthode où les équations du champ (1.12) sont résolues dans le cas extérieur et où les masses sont considérées comme des singularités [EIH16]. Ce sont les équations (EIH) dont nous souhaitons obtenir une solution analytique¹.

Pour obtenir ces équations, il faut se placer loin de la source et considérer des vitesses faibles devant la célérité c de la lumière dans le vide. Ainsi le problème des N corps dans le système solaire est caractérisé par trois aspects simplificateurs (approximation PPN) [Bru91a]:

- 1) Les mouvements sont lents: $v \ll c$.
- 2) Le champ de gravitation à l'intérieur et à l'extérieur des corps est faible: $U \ll c^2$, U étant le potentiel newtonien ce qui exclut l'application de ces méthodes aux pulsars binaires par exemple.
- 3) Les corps sont considérés comme quasi-ponctuels, c'est-à-dire que nous

1. Fock s'est servi du tenseur énergie-impulsion des corps non ponctuels pour dériver les équations du mouvement [Foc55].

avons : $L \ll R$ où L désigne la taille caractéristique du corps et R la distance caractéristique entre deux corps.

Sous ces hypothèses, vérifiées dans le système solaire, les solutions des équations (EIH) décrivent, via la métrique obtenue, à la fois le système de coordonnées utilisé et la dynamique des N corps dans ce système de coordonnées. L'argument temps utilisé dans ces équations de la dynamique des corps est le temps coordonnée barycentrique (TCB). Cela rend ces équations particulièrement intéressantes pour la problématique de cette thèse. En effet, la construction d'une solution des équations de Lagrange exposée dans le chapitre précédent, constitue une étape indispensable à l'obtention de liens analytiques entre les systèmes de référence relativistes, mais le résultat obtenu ne constitue un point de départ satisfaisant à l'obtention de ces liens analytiques que dans la mesure où :

- les perturbations relativistes y sont incluses à un niveau suffisant de précision;
- la solution est exprimée en TCB;
- les constantes physiques du problème (masses, constantes d'intégration) sont exprimées dans le système de référence barycentrique (BRS) avec pour échelle de temps TCB, tel qu'il est décrit dans les recommandations de l'UAI.

En ayant inclus dans VSOP2000 les perturbations relativistes du problème de Schwarzschild et en ayant transformé ces solutions pour les exprimer en TCB, nous répondons à ces exigences. Cependant, les équations (EIH), qui incluent les perturbations relativistes entre planètes et qui sont exprimées dans le système (BRS), offrent d'emblée une modélisation du problème cohérente et complète.

Nous examinerons donc dans ce chapitre une méthode de résolution de ces équations et les difficultés nouvelles que cette méthode soulève. Rappelons tout d'abord le moyen d'obtenir les équations (EIH) dans le cadre du problème des N corps soumis aux conditions 1), 2) et 3) décrites précédemment.

3.2 Lagrangien du problème des N corps

On peut montrer que la perte d'énergie d'un système de masse grave par rayonnement d'ondes de gravitation n'apparaît qu'au cinquième ordre en

$1/c$. Aux quatre premières approximations, le système est conservatif si bien qu'on peut le décrire au moyen d'une fonction de Lagrange².

Pour déterminer cette fonction de Lagrange dans le cas du système solaire, nous utilisons le fait que les champs gravitationnels en jeu sont faibles, de même que les vitesses coordonnées des corps de composantes v_i^j . De plus, les corps sont supposés ponctuels³.

Supposons le champ de gravitation créé par un système de particules donné. La fonction de Lagrange d'une particule a , de masse grave M_i , n'appartenant pas au système s'écrit :

$$L_a = -M_a c \frac{ds}{dt} = -M_a c^2 \left(g_{00} + 2g_{0k} \frac{v_a^k}{c} + g_{jk} \frac{v_a^j v_a^k}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

où $v_a^k = dx_a^k/dt$, x_a^k désignant la position de la particule a .

Approximation post-newtonienne

Pour des applications au système solaire, on utilise l'approximation des champs faibles et des vitesses faibles. Dans cette optique, on linéarise les équations d'Einstein autour de la métrique de Minkowski en puissance d'un petit paramètre, typiquement $(v/c)^2$ où v est la vitesse orbitale du corps considéré⁴. On écrit donc formellement :

$$\begin{aligned} g_{00} &= \eta_{00} + h_{00} \\ &= 1 + h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(4)} + h_{00}^{(5)} + \dots \\ g_{0i} &= \eta_{0i} + h_{0i} \\ &= h_{0i}^{(3)} + \dots \\ g_{ij} &= \eta_{ij} + h_{ij} \\ &= -\delta_{ij} + h_{ij}^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

où $h_{\alpha\beta}^{(k)}$ est de l'ordre $1/c^k$. La parité est fixée par la condition que la métrique soit invariante par renversement du temps et les ordres sont justifiés a posteriori.

2. Ce n'est pas le cas pour un champ électromagnétique pour lequel la fonction de Lagrange n'est donnée qu'aux termes du troisième ordre près.

3. C'est-à-dire, rappelons-le, que nous nous plaçons à des distances R grandes par rapport à la taille caractéristique L des corps et petites par rapport à la longueur d'onde λ des ondes de gravitation émises par le système.

4. Par la loi de Newton, si M est la masse du Soleil et r la distance au corps, GM/r et v^2 sont du même ordre.

On constate alors en calculant les expressions des symboles de Christoffel et du tenseur de Ricci que ce dernier se simplifie beaucoup si on utilise un système de coordonnées tel que :

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}) = 0 \Leftrightarrow g^{\alpha\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^\beta = 0 \quad (3.2)$$

De tels systèmes de coordonnées sont dits harmoniques.

Ensuite, on développe le tenseur énergie-impulsion décrivant la source du champ de gravitation selon :

$$T^{00} = T^{(0)00} + T^{(2)00} + \dots, \quad T^{0i} = T^{(1)0i} + \dots, \quad T^{ij} = T^{(2)ij} + \dots$$

et on résout les équations du champ ordre par ordre. L'intégration au premier ordre est relativement immédiate⁵ et donne :

$$\begin{aligned} h_{00}^{(2)} &= -2\phi \quad \text{avec} \quad \phi = -G \int d^3x' \frac{T^{(0)00}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ h_{0i}^{(3)} &= \zeta_i \quad \text{avec} \quad \zeta_i = -G \int d^3x' \frac{T^{(1)0i}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ h_{ij}^{(2)} &= -2\delta_{ij}\phi \\ h_{00}^{(4)} &= -2\phi^2 + \psi \end{aligned} \quad (3.3)$$

les intégrales étant prises sur toute l'étendue des sources (Soleil et planètes); $\vec{x} - \vec{x}'$ est la distance spatiale (harmonique) entre la planète et un point courant de la source; ϕ n'est autre que le potentiel newtonien et l'expression explicite du potentiel additionnel ψ importe peu. Enfin, la condition d'harmonicité (3.2) s'exprime par $4\partial\phi/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta} = 0$ et est équivalente à la condition de conservation du tenseur énergie-impulsion $\nabla_\beta T^{\alpha\beta}$. Une dernière étape consiste à utiliser le fait que la distance spatiale entre les corps est grande vis-à-vis de leur taille caractéristique. Dans ce cas on peut développer dans les expressions de ϕ , ζ (et ψ) $|\vec{x} - \vec{x}'|$ selon $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = 1/r + (\vec{x} \cdot \vec{x}')/r^3 + \dots$

Dans le cas où \vec{x} est la distance de la planète au centre de masse des sources du champ, on montre [Wei72] que le rôle de ψ est seulement de remplacer, dans l'expression de ϕ , $M^{(0)}$ par $M = M^{(0)} + M^{(2)}$ (avec $M^{(i)} \equiv \int d^3x T^{(i)00}$) où seul importe le fait que M est la masse totale créant le champ.

Dans le cas du système solaire, on applique cette technique dans un système de coordonnées rectangulaires barycentriques harmoniques, avec pour modèle de distribution d'énergie-impulsion un courant de particules⁶ et on trouve les corrections jusqu'au quatrième ordre inclus en $1/c$ à la métrique de

5. On se retrouve en effet en présence d'équations de propagation.

6. Le tenseur énergie impulsion d'un tel système physique est donné par $c^2 T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$ où ρ est la densité de masse au repos et u^α les composantes de la quadri-vitesse des particules.

Minkowski $\eta_{00} = 1$, $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$, $\eta_{0i} = 0$, donnant la métrique barycentrique en coordonnées rectangulaires harmoniques $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ [Bru91a]:

$$\begin{cases} h_{00}(t, \mathbf{x}) &= -2 \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} + 2 \left(\sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \right)^2 + 2 \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{r_{ij} c^2} \\ &\quad - 3c^{-2} \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} v_i^2 - c^{-2} \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \left(v_i^2 - \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i - \frac{1}{r_i^2} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{v}_i)^2 \right) \\ h_{0k}(t, \mathbf{x}) &= 4c^{-1} \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} (v_i^k) \\ h_{jk}(t, \mathbf{x}) &= 2 \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \eta_{jk} \end{cases} \quad (3.4)$$

les sommations étant étendues à tous les corps du système solaire. Dans cette expression, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, \mathbf{x}_i est le vecteur position barycentrique du corps i , $r_i = |\mathbf{r}_i|$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ et $\mathbf{v}_i = d\mathbf{x}_i/dt$.

Développant le radical de (3.1) et négligeant la constante non essentielle $-M_i c^2$, il vient :

$$L_i = \frac{M_i v_i^2}{2c^2} + \frac{M_i v_i^4}{8c^4} - M_i c^2 \left(\frac{h_{00}}{c^2} + h_{0j} \frac{v_i^j}{c} + \frac{1}{2c^2} h_{jk} v_i^j v_i^k - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2} v_i^2 \right) \quad (3.5)$$

Les valeurs des $h_{\alpha\beta}$ sont prises ici au point \mathbf{r}_i . Ce faisant, il est à noter qu'il faut omettre dans l'expression ci-dessus les termes devenant infinis. Cette procédure correspond à une renormalisation de la masse de la particule i qui a pour résultat qu'elle prend sa valeur réelle, tenant compte du champ créé par la particule même.

Remplaçons dans (3.5) les $h_{\alpha\beta}$ par les valeurs des coefficients de la métrique barycentrique en coordonnées rectangulaires (3.4). On obtient :

$$\begin{aligned} L &= \sum_i \frac{M_i v_i^2}{2} + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{3GM_i M_j v_i^2}{2c^2 r_{ij}} + \sum_i \frac{M_i v_i^4}{8c^2} + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{GM_i M_j}{2r_{ij}} \\ &\quad - \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{GM_i M_j}{4c^2 r_{ij}} [7(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})] - \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{G^2 M_i M_j M_k}{2c^2 r_{ij} r_{ik}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

où \mathbf{n}_{ij} est le vecteur unitaire dirigé du corps i vers le corps j .

3.2.1 Equations du mouvement.

Les équations d'Euler Lagrange obtenues à partir du Lagrangien (3.6), c'est-à-dire les équations barycentriques du mouvement géodésique⁷ s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.8)$$

7. La notion de géodésique introduite au premier chapitre est fondamentale en ce sens que les particules plongées dans un champ de gravitation et n'interagissant pas avec celui-ci, appelées point matériel ou particule test selon les auteurs, suivent ces courbes particu-

En coordonnées rectangulaires, sous forme d'équations du mouvement perturbé et si on pose $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ et $(\dot{}) = d()/dt$, on trouve[Bru91a] :

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} + \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{c^2} (A_{ij} \mathbf{r}_{ij} + B_{ij} \dot{\mathbf{r}}_{ij}) \quad (3.9)$$

les expressions de A_{ij} et de B_{ij} étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ij} = \frac{\dot{\mathbf{x}}_i^2}{r_{ij}^3} - 2 \frac{\dot{\mathbf{r}}_{ij}^2}{r_{ij}^3} + \frac{3}{2r_{ij}^5} (\mathbf{r}_{ij} \dot{\mathbf{x}}_j)^2 + G [5M_i + 4M_j] \frac{1}{r_{ij}^4} \\ \quad + \sum_{k \neq i, j} GM_k \left[\frac{4}{r_{ij}^3 r_{ik}} + \frac{1}{r_{ij}^3 r_{jk}} + \frac{4}{r_{ij} r_{jk}^3} - \frac{7}{2} \frac{1}{r_{ik} r_{jk}^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{r_{jk}^3 r_{ij}^3} (\mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_{ik}) \right] \\ B_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} (4\mathbf{r}_{ij} \dot{\mathbf{r}}_{ij} + \mathbf{r}_{ij} \dot{\mathbf{x}}_j) \end{array} \right.$$

A partir des équations barycentriques, on construit sans difficultés les équations héliocentriques en remplaçant dans (3.9) les vecteurs de position barycentrique \mathbf{x}_i des planètes par les vecteurs héliocentriques $\mathbf{R}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$, l'indice 0 se rapportant à des quantités liées au soleil.

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = -G(M_0 + M_i) \frac{\dot{\mathbf{R}}_i}{R_i^3} + \sum_{j \neq i} GM_j \left(\frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{R}_j}{R_j^3} \right) \quad (3.10)$$

lières qui extrémisent l'action (1.16) [Lic55] :

La trajectoire spatio-temporelle de tout point matériel dans un champ de gravitation extérieur donné est une géodésique du ds^2 extérieur, orientée dans le temps.

Cette loi résulte des équations du champ. En effet, dans le cas d'un flux de particules test sans interaction, $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$, u^α étant les composantes de la quadri-vitesse de la particule, et le cas extérieur des équations du champ s'écrit : $R^{\alpha\beta} = 0$. Ceci implique :

$$\nabla_\beta R^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

puisque, par définition de la connexion riemannienne, $\nabla_\beta g^{\alpha\beta} = 0$.

Compte tenu que la conservation de l'impulsion exprimée sous forme covariante est $\nabla_\beta (\rho u^\beta) = 0$, on a $u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$. Or

$$\frac{Du^\alpha}{ds} = \nabla_\beta u^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = \nabla_\beta u^\alpha u^\beta = 0,$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{Du^\alpha}{ds} &\equiv \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

qui, d'après (1.17) est l'équation d'une géodésique.

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{GM_0}{c^2} A_{i0} + \frac{GM_i}{c^2} A_{0i} \right) \mathbf{R}_i + \left(\frac{GM_0}{c^2} B_{i0} + \frac{GM_i}{c^2} B_{0i} \right) \dot{\mathbf{R}}_i \\
& + \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{c^2} \left[A_{ij} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) + A_{0j} \mathbf{R}_j + B_{ij} (\dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_j) + B_{0j} \dot{\mathbf{R}}_j \right]
\end{aligned}$$

3.3 Méthode envisagée.

3.3.1 Notations

Nous noterons \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs, \mathbb{R} la droite numérique et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$, nous noterons respectivement \bar{z} et $|z|$ le complexe conjugué de z et sa norme. \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n seront tous deux munis de la norme euclidienne que nous désignerons par la notation $|\cdot|$.

Soit m un entier strictement positif. Etant donnés m réels (n_1, n_2, \dots, n_m) , nous noterons pour tout m -uplet (k_1, k_2, \dots, k_m) de \mathbb{Z}^m :

$$k.n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_m n_m \quad (3.11)$$

Nous supposerons fixés 2 N -uplets de réels $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$. Soit α_{max} , un entier positif. Etant donnée, pour tout entier $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$, une partie finie I_α d'éléments de \mathbb{Z}^N , nous considérerons les fonctions S de la forme :

$$\begin{aligned}
S : \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} & (3.12) \\
t & \mapsto \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{max}} \sum_{k_i \in I_\alpha} t^\alpha [(A_{\alpha i} \sin(k_i.n t + k_i.\varepsilon) + B_{\alpha i} \cos(k_i.n t + k_i.\varepsilon))]
\end{aligned}$$

où pour tout $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$, $(A_{\alpha i}, B_{\alpha i}) \in \mathbb{C}^2$.

Nous noterons $\mathcal{FP}_{\alpha_{max}}[t]$ l'espace vectoriel des séries de Fourier-Poisson S de la forme (3.12) en la variable t , de degré inférieur ou égal à α_{max} . $\mathcal{FP}_{\alpha_{max}}[t]$ se décompose en trois sous-espaces, ce que nous écrirons formellement :

$$\mathcal{FP}_{\alpha_{max}}[t] = \mathbb{C}^{\alpha_{max}}[t] + \mathcal{F}[t] + \mathcal{P}_{\alpha_{max}}[t]$$

où $\mathbb{C}^{\alpha_{max}}[t]$ est l'espace des polynômes en t de degré inférieur ou égal à α_{max} à coefficients complexes, $\mathcal{F}[t]$ l'espace des fonctions purement trigonométriques et $\mathcal{P}_{\alpha_{max}}[t]$ l'espace des fonctions mixtes. Nous supposerons que dans cette décomposition, le terme constant d'une série $S \in \mathcal{FP}_{\alpha_{max}}[t]$ est inclus dans la composante polynomiale de S (et non dans $\mathcal{F}[t]$).

Nous munirons $M_n(\mathbb{R})$, algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (ou aussi bien $M_n(\mathbb{C})$) de la norme suivante. Pour un élément

de $M_n(\mathbb{R})$, notons M sa matrice associée dans une base B et m_{ij} son terme général.

On pose alors :

$$\|u\| = \|M\| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|$$

Cette norme vérifie les propriétés suivantes. Soient u et v deux endomorphismes, M et M' leur matrice associée et x un élément de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . On a :

$$\begin{cases} \|u \circ v\| = \|M.M'\| \leq \|M\| \|M'\| \\ \|M.x\| \leq \|M\| \|x\| \end{cases}$$

Nous appellerons Id l'élément neutre de $M_n(\mathbb{R})$ (ou de $M_n(\mathbb{C})$).

On rappelle que l'application exponentielle vérifie pour A et B éléments de $M_n(\mathbb{R})$ (ou de $M_n(\mathbb{C})$) tels que $M = \max(\|A\|, \|B\|)$:

$$\|\exp(A) - \exp(B)\| \leq e^M \|A - B\|$$

Il suffit en effet de remarquer que $A^n - B^n = A^{n-1}(A - B) + A^{n-2}(A - B)B + \dots + (A - B)B^{n-1}$ si bien que nous avons :

$$\|A^n - B^n\| \leq n \|A - B\| M^{n-1}$$

3.3.2 Orbites intermédiaires.

En variables elliptiques, les équations de Lagrange rendent compte de l'évolution temporelle des éléments osculateurs d'une orbite. La solution du problème des deux corps en gravitation newtonienne étant une ellipse képlérienne, ce choix de variables pour résoudre le problème des N corps est judicieux puisque les équations de Lagrange sont justement les équations d'évolution de l'ellipse osculatrice à la trajectoire et on est en droit de penser que cette évolution ne sera pas trop rapide si la fonction perturbatrice est de magnitude faible (ce qui est le cas dans le système solaire). Ce fait donne aux équations de Lagrange le statut privilégié d'équations de perturbations au voisinage d'une orbite elliptique.

En théorie relativiste de la gravitation, nous avons vu que les équations du mouvement s'écrivent en coordonnées rectangulaires sous la forme (3.10). Cette forme contient, outre les perturbations newtoniennes contenues dans les équations de Lagrange, les perturbations relativistes directes et les perturbations relativistes mutuelles entre planètes.

Pour construire une solution planétaire à partir de ces équations, nous pouvons envisager de convertir (3.10) en coordonnées elliptiques puis de dégager du résultat un système analogue au système (2.3) que nous pourrions intégrer en utilisant les méthodes exposées dans le précédent chapitre.

Cette méthode, très coûteuse en calculs, n'a pas été envisagée dans le cadre de cette thèse. Cependant, l'intégration du système (3.10) par une méthode itérative ne peut pas être immédiate puisque, ce système n'étant pas un système d'équations aux variations, la convergence de la méthode sera très lente, voire impossible.

Afin de transformer le système (3.10) en un système d'équations aux variations, nous procédons comme suit. Pour une planète donnée, décrivant une orbite $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ solution du système (3.10), définissons les variables sans dimension p complexe et w réelle par les relations :

$$\begin{cases} x + iy &= a(1 - p)e^{i\lambda} \\ z &= aw \end{cases} \quad (3.13)$$

où $\lambda = nt + \varepsilon$, n étant le moyen mouvement moyen de l'orbite.

La variable p représente l'écart entre une trajectoire solution de (3.10) projetée dans le plan ($z \equiv 0$) et l'orbite circulaire képlérienne de demi-grand axe a (parcourue donc avec un moyen mouvement n déduit de la troisième loi de Kepler) contenue dans ce même plan.

Effectuons le changement de variables (3.13) dans (3.10). Pour cela, écrivons les équations du mouvement en variables rectangulaires (3.10), sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \ddot{x} + G(M_0 + M)\frac{x}{r^3} &= \mathcal{P}_X \\ \ddot{y} + G(M_0 + M)\frac{y}{r^3} &= \mathcal{P}_Y \\ \ddot{z} + G(M_0 + M)\frac{z}{r^3} &= \mathcal{P}_Z \end{cases} \quad (3.14)$$

\mathcal{P}_X , \mathcal{P}_Y et \mathcal{P}_Z étant les composantes des perturbations (newtoniennes et relativistes).

On a en dérivant (3.13) par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} + i\dot{y} &= [ina(1 - p) - a\dot{p}]e^{i\lambda} \\ \dot{z} &= a\dot{w} \end{cases} \quad (3.15)$$

puis :

$$\begin{cases} \ddot{x} + i\ddot{y} &= [-a\ddot{p} - 2inap - n^2a(1 - p)]e^{i\lambda} \\ \ddot{z} &= a\ddot{w} \end{cases} \quad (3.16)$$

En remplaçant (3.15) et (3.16) dans (3.14), on obtient le système :

$$\begin{cases} \ddot{p} + 2in\dot{p} - n^2p &= n^2 \left[-1 - \frac{\varepsilon^{-i\lambda}}{n^2a} \left(-\frac{G(M_0+M)}{r^3}(x + iy) + \mathcal{P}_X + i\mathcal{P}_Y \right) \right] \\ \ddot{w} &= \frac{1}{a} \left[-\frac{G(M_0+M)}{r^3}z + \mathcal{P}_Z \right] \end{cases} \quad (3.17)$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \ddot{p} + 2in\dot{p} - n^2p &= n^2 \left[-1 + \frac{a^3}{r^3}(1-p) - \frac{1}{n^2a}(\mathcal{P}_X + i\mathcal{P}_Y)e^{-i\lambda} \right] \\ \ddot{w} &= \left[-\frac{a^3}{r^3}w + \mathcal{P}_Z \right] \end{cases} \quad (3.18)$$

Nous poserons désormais :

$$\begin{cases} P_0 &= -1 + \frac{a^3}{r^3}(1-p) - \frac{1}{n^2a}(\mathcal{P}_X + i\mathcal{P}_Y)e^{-i\lambda} \\ W_0 &= -\frac{a^3}{r^3}w + \frac{1}{n^2a}\mathcal{P}_Z \end{cases} \quad (3.19)$$

et ainsi nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \ddot{p} + 2in\dot{p} - n^2p &= n^2P_0 \\ \ddot{w} &= n^2W_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

3.3.3 Forme générale de la solution.

Pour résoudre le système (3.20), on procède par itération de Picard (2.15). Afin de “permettre” la convergence de ce procédé itératif, on va linéariser le système d'équations différentielles au voisinage de $p = 0$. Un simple calcul nous donne la partie linéaire de P_0 :

$$n^2 \left. \frac{\partial P_0}{\partial p} \right|_{p=0} = \frac{1}{2}n^2p + \frac{3}{2}n^2\bar{p} \quad (3.21)$$

si bien qu'en retranchant cette valeur aux deux membres de la première équation de (3.20), on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{p} + 2in\dot{p} - \frac{3}{2}(p + \bar{p}) &= n^2P \\ \ddot{w} + n^2w &= n^2W \end{cases} \quad (3.22)$$

avec :

$$\begin{cases} P &= -\frac{3}{2}(p + \bar{p}) + \left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)(1-p) - \frac{1}{n^2a}(\mathcal{P}_X + i\mathcal{P}_Y)e^{-i\lambda} \\ W &= -\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)w + \frac{1}{n^2a}\mathcal{P}_Z \end{cases} \quad (3.23)$$

La solution générale de ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} p &= Ae^{i\lambda} - 3\bar{A}e^{-i\lambda} + inB + 3inCt - 2C \\ &+ \frac{3}{4}ine^{-i\lambda} \int (3P - \bar{P})e^{i\lambda} dt + \frac{1}{4}ine^{i\lambda} \int (3\bar{P} - P)e^{-i\lambda} dt \\ &- 2in \int P dt - \frac{3}{2}n^2 \iint (P - \bar{P}) dt dt \\ w &= De^{i\lambda} + \bar{D}e^{-i\lambda} + \frac{1}{2}ine^{-i\lambda} \int We^{i\lambda} dt - \frac{1}{2}ine^{i\lambda} \int W e^{-i\lambda} dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

où A et D sont des constantes d'intégration complexes, B et C des constantes d'intégration réelles.

Ainsi posé, le problème de la construction d'une théorie planétaire revient à effectuer les opérations suivantes : étant donnée une approximation de la solution du système (3.20), c'est-à-dire N fonctions $p_i^{(0)}$ et N fonctions $w_i^{(0)}$ pour les N corps, on construit N fonctions $p_i^{(1)}$ et N fonctions $w_i^{(1)}$ en calculant les seconds membres de (3.24) à l'aide des $2N$ fonctions $p_i^{(0)}$ et $w_i^{(0)}$ puis on recommence ce procédé jusqu'à obtenir $2N$ fonctions $p_i^{(K)}$ et $w_i^{(K)}$ au bout de K itérations. La question de la convergence de ce procédé est traitée dans les deux prochains paragraphes.

3.3.4 Difficultés techniques

Notre objectif est la construction d'une théorie à variations séculaires des orbites planétaires. Dans ce type de solution, les arguments à longue période (c'est-à-dire, rappelons-le, les termes associés aux longitudes des nœuds et des périhélie des orbites) sont développés par construction en polynômes du temps. La solution contiendra donc explicitement un polynôme du temps. D'après l'expression (3.23) il en sera de même pour P .

Par construction, les quantités p et P sont respectivement du premier et du second ordre en excentricité. Cependant, si la partie réelle de P est du second ordre en excentricité, ce n'est que par la différence de deux quantités du premier ordre,

$$-3/2(p + \bar{p}) \quad (3.25)$$

d'un coté et

$$(a^3/r^3 - 1)(1 - p) \quad (3.26)$$

de l'autre.

Ces deux quantités peuvent être obtenues sous forme analytique si on utilise la théorie VSOP pour les calculer. Mais il faudrait, pour obtenir une précision suffisante sur la détermination de P , que les solutions analytiques VSOP permettent le calcul de ces quantités à une très grande précision. Explicitement, si on veut calculer P à la précision absolue ε , il nous faudra obtenir la quantité p à la précision absolue $2/3(\varepsilon/e)$, où e est l'excentricité de l'orbite ($e < 1$). Pour éviter cet inconvénient, nous pouvons développer P en fonction de l'excentricité et obtenir une expression du type :

$$P = e^2 \chi$$

où χ est de l'ordre de 1.

Une autre difficulté concerne la forme (3.24) de la solution. Soit π la partie purement polynomiale de la fonction P , que nous supposons s'écrire :

$$\pi = \sum_{j=0}^{\alpha_{max}} (a_j + ib_j) t^j \quad (3.27)$$

où $i^2 = -1$, a_j et b_j étant réels. Soit C un réel. Considérons la fonction linéaire Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}^{\alpha_{max}}[t] &\rightarrow \mathcal{FP}_{\alpha_{max}+2}[t] \\ \pi &\mapsto \Pi = \frac{3}{4}ine^{-i\lambda} \int (3\pi - \bar{\pi})e^{i\lambda} dt + \frac{1}{4}ine^{i\lambda} \int (3\bar{\pi} - \pi)e^{-i\lambda} dt \\ &\quad - 2in \int \pi dt - \frac{3}{2}n^2 \int \int (\pi - \bar{\pi}) dt dt \\ &\quad + 3inCt - 2C \end{aligned} \quad (3.28)$$

On constate immédiatement que l'image de Φ est incluse dans $\mathbb{C}^{\alpha_{max}+2}[t]$ si bien que $\Phi(\pi)$ est un polynôme (celui de p dans le cas où Π est le polynôme de P). Ainsi, nous noterons :

$$\Phi(\pi) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha_{max}+2} \delta_{\alpha} t^{\alpha} \quad (3.29)$$

où $\delta_{\alpha} \in \mathbb{C}$.

Nous avons calculé le polynôme $\Phi(\pi)$ et nous obtenons :

$$\delta_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1)!}{n^{2j}} \left[\left(\frac{a_{2j}}{2j+1} - \frac{2}{n} b_{2j+1} \right) + i \left(4 \frac{b_{2j}}{2j+1} + \frac{2}{n} a_{2j+1} \right) \right] - 2C \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2j+1)!}{n^{2j}} \left[a_{2j+1} - \frac{2(2j+2)}{n} b_{2j+2} + 2i \left(\frac{2j+2}{n} a_{2j+2} + 2b_{2j+1} \right) \right] \\ &\quad - 2in(a_0 + ib_0) + 3inC \end{aligned} \quad (3.31)$$

et pour $\alpha \geq 1$:

$$\begin{aligned} \delta_{2\alpha} &= \sum_{j=\alpha}^{\infty} (-1)^{j-\alpha} \frac{(2j)!}{(2\alpha)! n^{2j-2\alpha}} \left[a_{2j} - \frac{2(2j+1)}{n} b_{2j+1} \right] + \frac{2n}{2\alpha} b_{2\alpha-1} \\ &\quad + 2i \left[\sum_{j=\alpha}^{\infty} (-1)^{j-\alpha} \frac{(2j)!}{(2\alpha)! n^{2j-2\alpha}} \left[\frac{(2j+1)}{n} a_{2j+1} + 2b_{2j} \right] \right] \\ &\quad - \frac{2in}{2\alpha} a_{2\alpha-1} - \frac{3in^2}{(2\alpha-1)(2\alpha)} b_{2\alpha-2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{2\alpha+1} &= \sum_{j=\alpha}^{\infty} (-1)^{j-\alpha} \frac{(2j+1)!}{(2\alpha+1)!} \frac{1}{n^{2j-2\alpha}} \left(a_{2j+1} - \frac{2(2j+2)}{n} b_{2j+2} \right) + \frac{2n}{2\alpha+1} b_{2\alpha} \\
&+ 2i \left[\sum_{j=\alpha}^{\infty} (-1)^{j-\alpha} \frac{(2j+1)!}{(2\alpha+1)!} \frac{1}{n^{2j-2\alpha}} \left(\frac{2j+2}{n} a_{2j+2} + 2b_{2j+1} \right) \right] \\
&- \frac{2in}{2\alpha+1} a_{2\alpha} - \frac{3in^2}{(2\alpha)(2\alpha+1)} b_{2\alpha-1}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Comme on peut le constater, on trouve dans l'expression (3.32) du coefficient $\delta_{2\alpha}$ la quantité :

$$- \frac{2in}{2\alpha} a_{2\alpha-1} - \frac{3in^2}{(2\alpha-1)(2\alpha)} b_{2\alpha-2} \tag{3.34}$$

et une quantité de la même forme dans l'expression (3.33) du coefficient $\delta_{2\alpha+1}$. C'est donc par différence de deux termes d'amplitudes quasiment égales et de signes opposés (comme nous l'ont montré les calculs entrepris au début de ce travail) que les coefficients du polynôme de p s'obtiennent après évaluation du membre de gauche de la solution (3.24).

Cette circonstance est un handicap pour un calcul de grande précision de la solution. Notamment, l'éphéméride de départ en coordonnées rectangulaires permettant le calcul de $p_i^{(0)}$, donc de P , doit être déjà extrêmement précise pour assurer la convergence de la méthode itérative.

Nous envisageons ci-après une autre forme de la solution du système (3.20) que nous transformons en un système du premier ordre.

3.3.5 Autre forme de la solution

On associe à la première équation différentielle du système (3.20), le système équivalent :

$$\frac{dX(s)}{ds} - A_0 X(s) = H(X(s)) + \Psi(X(s), X'(s)) \tag{3.35}$$

dans lequel on a posé :

$$X(s) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n^2 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & n^2 & -2n & 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Les quantités $X'(t)$ sont les vecteurs d'état des autres corps du système. H est une fonction de X donnée par la partie képlérienne de (3.20) c'est-à-dire

que nous avons posé :

$$H(X(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n^2 \left[-1 + \frac{a^3}{r^3} (1 - p_x) \right] \\ -n^2 p_y \frac{a^3}{r^3} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

et la fonction Ψ quant à elle, contient les perturbations newtoniennes et relativistes de composantes (X, Y) .

Dans le problème plan limité au deuxième ordre en $|p|$, p étant considéré comme un petit paramètre du problème, nous avons :

$$H(X(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2n^2 p_x + \frac{3}{2} n^2 (2p_x^2 - p_y^2) \\ -n^2 p_y - 3n^2 p_x p_y \end{pmatrix} + o(|p|^2) \quad (3.38)$$

On notera :

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2n^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

et :

$$H_1(X(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} n^2 (2p_x^2 - p_y^2) \\ -3n^2 p_x p_y \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

si bien qu'avec ces notations, le système (3.35) prendra la forme suivante :

$$\frac{dX(s)}{ds} - A_0 \cdot X(s) = \Delta A \cdot X(s) + H_1(X(s)) + \Psi(X(s), X'(s)) \quad (3.41)$$

On écrit sans difficultés une solution explicite de (3.41) sous la forme :

$$X(t) = e^{(A_0 + \Delta A) \cdot t} X(0) + \int_0^t e^{(A_0 + \Delta A) \cdot (t-s)} \cdot (H_1(X(s)) + \Psi(X(s), X'(s))) ds \quad (3.42)$$

avec :

$$e^{(A_0 + \Delta A) \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_0 + \Delta A)^k t^k}{k!} \quad (3.43)$$

Calculs des matrices $e^{A_0.t}$ et $e^{(A_0+\Delta A).t}$

On montre sans difficulté par récurrence sur p que :

$$A_0^{2p} = (-1)^p n^{2p-1} \begin{pmatrix} -(2p-1)n & 0 & 0 & -2p \\ 0 & -(2p-1)n & 2p & 0 \\ 0 & -2pn^2 & (2p+1)n & 0 \\ 2pn^2 & 0 & 0 & (2p+1)n \end{pmatrix}$$

et

$$A_0^{2p+1} = (-1)^p n^{2p} \begin{pmatrix} 0 & -2pn & (2p+1) & 0 \\ 2pn & 0 & 0 & (2p+1) \\ (2p+1)n^2 & 0 & 0 & (2p+2)n \\ 0 & (2p+1)n^2 & -(2p+2)n & 0 \end{pmatrix}$$

En calculant les sommes associées à chacune des composantes de la matrice $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_0^p t^p}{p!}$, on reconnaît les développements en séries entières de fonctions usuelles. Par exemple pour la première composante, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_0^p t^p [1, 1]}{p!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (nt)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} 2p (nt)^{2p}}{(2p)!} \\ &= \cos(nt) + nt \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (2q+2)(nt)^{2q+1}}{(2q+2)!} \\ &= \cos(nt) + nt \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q (nt)^{2q+1}}{(2q+1)!} \\ &= \cos(nt) + nt \sin(nt) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons, en posant $\omega = nt$:

$$e^{A_0.t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) + \omega \sin(\omega) & -\omega \cos(\omega) + \sin(\omega) & t \cos(\omega) & t \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) + \omega \cos(\omega) & \cos(\omega) + \omega \sin(\omega) & -t \sin(\omega) & t \cos(\omega) \\ n\omega \cos(\omega) & n\omega \sin(\omega) & \cos(\omega) - \omega \sin(\omega) & \omega \cos(\omega) + \sin(\omega) \\ -n\omega \sin(\omega) & n\omega \cos(\omega) & -\omega \cos(\omega) - \sin(\omega) & \cos(\omega) - \omega \sin(\omega) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

De même, on trouve :

$$e^{(A_0+\Delta A).t} = \begin{pmatrix} 4 - 3 \cos(\omega) & 0 & \frac{\sin(\omega)}{n} & \frac{-2 \cos(\omega) + 2}{n} \\ 6 \sin(\omega) - 6\omega & 1 & \frac{2 \cos(\omega) - 2}{n} & \frac{-3\omega + 4 \sin(\omega)}{n} \\ 3n \sin(\omega) & 0 & \cos(\omega) & 2 \sin(\omega) \\ 6n \cos(\omega) - 6n & 0 & -2 \sin(\omega) & -3 + 4 \cos(\omega) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

3.4 Exponentielle de Dyson

3.4.1 Introduction

Le problème intégrable de Kepler ne constitue qu'une modélisation extrêmement simplifiée du mouvement d'une planète soumise à l'action perturbatrice des autres corps du système solaire. La prise en compte des perturbations newtoniennes et relativistes dans la modélisation de la dynamique des planètes a pour effet de transformer l'ellipse képlérienne en une trajectoire perturbée, proche cependant (sur des intervalles de temps raisonnables) de l'ellipse képlérienne si la perturbation est de magnitude faible. L'orbite intermédiaire circulaire dont nous avons discuté la méthode dans le chapitre précédent permet l'obtention d'un système d'équations différentielles à coefficients constants. Dans le cas cependant des planètes à orbite fortement excentrique, comme Mercure ($e \simeq 0.205$), le paramètre perturbatif p peut devenir grand en magnitude (pour Mercure, on a en effet $|p| \simeq 0.45$).

Nous envisageons dans ce chapitre l'introduction d'une orbite intermédiaire plus "complexe" dans le problème planétaire en coordonnées rectangulaires. Celle-ci pourra être une ellipse képlérienne, tournant ou non. Ce choix d'une nouvelle orbite intermédiaire implique d'une part un calcul du noyau résolvant du système, qui à la différence du cas précédent ($p =$ "orbite circulaire") ne sera plus représentée par l'exponentielle d'un endomorphisme indépendant du temps, et d'autre part un abaissement de l'ordre de grandeur du paramètre perturbatif $|p|$.

3.4.2 Orbite intermédiaire képlérienne

Etant données dans le plan $z \equiv 0$ une orbite képlérienne \mathcal{E} , de demi-grand axe a , d'excentricité e et de moyen mouvement moyen n , et $(x_k(t), y_k(t))$ les coordonnées d'un point de \mathcal{E} au temps t . Nous définirons la quantité sans dimension p_k par la relation :

$$x_k(t) + iy_k(t) = a(1 - p_k(t))e^{i\lambda} \quad (3.46)$$

où $i^2 = -1$.

Soit maintenant $(x(t), y(t), z(t))$ une orbite solution du système (3.20). Nous définirons comme précédemment la quantité sans dimension p par la relation :

$$x(t) + iy(t) = a(1 - p(t))e^{i\lambda} \quad (3.47)$$

Séparons la partie képlérienne p_k de p :

$$p = p_k + \delta p \quad (3.48)$$

et dérivons l'équation différentielle vérifiée par δp . A cet effet, nous posons :

$$\begin{aligned}
p &= p_x + ip_y \\
p_k &= p_{kx} + ip_{ky} \\
\delta p &= \delta p_x + i\delta p_y \\
r_k^2/a^2 &= (x_k^2 + y_k^2)/a^2 = (1 - p_k)(1 - \bar{p}_k) \\
S &= -1 + \frac{a^3}{r_k^3} (1 - p) \\
S_k &= -1 + \frac{a^3}{r_k^3} (1 - p_k) \\
\Phi_1 &= 2 - 4p_{kx} + 2p_{kx}^2 - p_{ky}^2 \\
\Phi_2 &= 3p_{kx}p_{ky} - 3p_{ky} \\
\Phi_3 &= -1 + 2p_{kx} - p_{kx}^2 + 2p_{ky}^2 \\
\mathcal{R} &= S - S_k - \frac{a^5}{r_k^5} [\delta p_x (\Phi_1 + i\Phi_2) + \delta p_y (\Phi_2 + i\Phi_3)] \\
\mathcal{P} &= -\frac{1}{n^2 a} (\mathcal{P}_X + i\mathcal{P}_Y) e^{-i\lambda}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Par définition de la quantité p_k et en se limitant au problème plan, il est immédiat de noter que p_k vérifie l'équation différentielle en p du système (3.20) dans lequel on néglige les perturbations X et Y , c'est-à-dire l'équation différentielle du problème de Kepler :

$$\begin{aligned}
\ddot{p}_k + 2in\dot{p}_k - n^2 p_k &= n^2 \left[-1 + \frac{a^3}{r_k^3} (1 - p_k) \right] \\
&= n^2 S_k
\end{aligned} \tag{3.50}$$

En effectuant un développement de la quantité S au voisinage de $\delta p = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
S &= S_k + \frac{a^5}{r_k^5} \left[\frac{1}{2} \delta p (1 - p_k) (1 - \bar{p}_k) + \frac{3}{2} \overline{\delta p} (1 - p_k)^2 \right] + o(\delta p^2) \\
&= S_k + \frac{a^5}{r_k^5} [\delta p_x (\Phi_1 + i\Phi_2) + \delta p_y (\Phi_2 + i\Phi_3)] + o(\delta p^2) \\
&= S_k + \frac{a^5}{r_k^5} [\delta p_x (\Phi_1 + i\Phi_2) + \delta p_y (\Phi_2 + i\Phi_3)] + \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

L'équation en p du système (3.20) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(p_k + \delta p)}{dt^2} + 2in \frac{d(p_k + \delta p)}{dt} - n^2 (p_k + \delta p) &= n^2 S - \frac{1}{a} (\mathcal{P}_X + i\mathcal{P}_Y) e^{-i\lambda} \\
&= n^2 S_k + n^2 (S - S_k) + n^2 \mathcal{P}
\end{aligned}$$

si bien qu'avec les notations (3.49) et les résultats (3.50) et (3.51), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \delta p}{dt^2} + 2in \frac{d\delta p}{dt} - n^2 \delta p = n^2 \frac{a^5}{r_k^5} [\delta p_x (\Phi_1 + i\Phi_2) + \delta p_y (\Phi_2 + i\Phi_3)] + n^2 [\mathcal{R} + \mathcal{P}] \tag{3.52}$$

\mathcal{P} contenant les perturbations.

Par analogie avec le chapitre précédent (équation 3.35), transformons le système (3.52) en un système du premier ordre :

$$\frac{dX(s)}{ds} - A(s).X(s) = n^2 [\mathcal{R} + \mathcal{P}] \quad (3.53)$$

dans lequel on a posé :

$$X(s) = \begin{pmatrix} \delta p_x \\ \delta p_y \\ \frac{d\delta p_x}{dt} \\ \frac{d\delta p_y}{dt} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

et

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n^2 \frac{a^5}{r_k^5} [1 + \Phi_1(s)] & n^2 \frac{a^5}{r_k^5} \Phi_2(s) & 0 & 2n \\ n^2 \frac{a^5}{r_k^5} \Phi_2(s) & n^2 \frac{a^5}{r_k^5} [1 + \Phi_3(s)] & -2n & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Cette forme (3.53) du problème différentiel est bien moins utilisable que son homologue (3.35) puisque la fonction $A(s)$ se substitue à la matrice A du chapitre précédent. Or, on ne connaît pas d'expression explicite du noyau résolvant d'un tel système, et l'intégration n'est donc pas immédiate. Nous allons cependant exposer une méthode générale de résolution de ce type d'équations reposant sur la notion de produit intégral [Ave91] dont la construction est rappelé en annexe 3. Rappelons les notations utilisées pour construire le produit intégral.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} de la forme $[0, T]$, c et t deux éléments de I . F désignera un espace de Banach de dimension finie (certains résultats démontrés sur la résolvante s'étendent sans difficulté à la dimension infinie mais nous n'en aurons pas besoin ici). $\mathcal{C}^k(I, F)$ désignera l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k définies sur I et à valeur dans F . Nous munirons cet espace vectoriel de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|$$

où $\|f(t)\|$ désigne la norme de $f(t)$ dans F .

$\mathcal{C}^k(I, \text{End}(F))$ désignera l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeur dans les endomorphismes de F . Pour A élément de $\mathcal{C}^k(I, \text{End}(F))$, nous noterons :

$$\|A\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$$

où cette fois-ci, $\|A(t)\|$ désigne la norme de $A(t)$ déduite de la norme sur F par une relation du type :

$$\|A(t)\| = \sup_{X \in F, \|X\|=1} \|A(t).X\|$$

Le produit intégral sur $[c, t]$, d'une fonction A de $\mathcal{C}^0(I, \text{End}(F))$, noté $R(A, c, t)$, est un endomorphisme de F vérifiant les propriétés suivantes :

- Avec la notation (3.43), on a pour $A \equiv cste$:

$$R(A, c, t) = \exp\left(\int_c^t A(s)ds\right) = e^{A(t-c)}$$

- $\|R(A, c, t)\| \leq e^{(t-c)\|A\|_\infty}$.
- (Théorème de Jacobi-Liouville)

$$\det R(A, c, t) = \exp \int_c^t \text{tr}(A(s))ds$$

où $\det R(A, c, t)$ est le déterminant de $R(A, c, t)$ et $\text{tr}(A(s))$ la trace de la matrice $A(s)$

- D'après le théorème de Jacobi-Liouville, $R(A, c, t)$ est inversible et $R(A, c, c) = Id$. Ceci permet de définir, pour $c > t$, $R(A, c, t)$ par $[R(A, t, c)]^{-1}$.

- (Relation de Chasles)

Avec la convention précédente, on a $R(A, c, t) = R(A, u, t)R(A, c, u)$ pour c, t et u dans I .

- Si $c < u < t$ alors $f(u) = R(A, c, u)$ est dérivable et $f'(u) = A(u)f(u)$.

Dans le cas de l'équation différentielle (3.53) que nous cherchons à résoudre, nous nous placerons dans le cas particulier $F = \mathbb{R}^4$ et la fonction A utilisée dans le produit intégral ci-dessus désigne alors une application de I dans l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^4 qui s'identifie à l'ensemble des matrices carrées à 4x4 éléments, ce qui est bien le cas dans l'équation (3.53). De plus, toujours dans le cas de l'équation différentielle (3.53), on a $\text{tr}(A(s)) = 0$ et donc, d'après le théorème de Jacobi-Liouville, le produit intégral de A sur l'intervalle $[c, t] \in I$ est un élément de $SL(4)$ (groupe unimodulaire des automorphismes de \mathbb{R}^4 de déterminant +1).

3.4.3 Equations différentielles linéaires à coefficients variables

Le théorème suivant permet de faire le lien entre les équations différentielles linéaires à coefficients variables, dont (3.53) est un exemple, et le produit intégral défini ci-dessus. Nous noterons X' la dérivée de X par rapport à t .

Théorème 1 Soit $X_0 \in F$, $t_0 \in I$ et $A : I \rightarrow \text{End}(F)$ une fonction continue. Alors $\exists X : I \rightarrow F$ et une seule telle que :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t).X(t) \text{ pour } t \in I \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Cette application est C^1 et on a $X(t) = R(A, t_0, t).X_0$.

Démonstration

L'existence de X résulte de la dernière des propriétés du produit intégral rappelées ci-dessus. Pour l'unicité, nous supposons qu'il existe une fonction Y répondant à la question. Posons $Z(t) = \phi(t)^{-1}.Y(t)$ où $\phi(t) = R(A, t_0, t)$.

Z est dérivable⁸ et :

$$\begin{aligned} Z'(t) &= -\phi(t)^{-1} \circ \phi'(t) \circ \phi(t)^{-1}.Y(t) + \phi(t)^{-1}.Y'(t) \\ &= -\phi(t)^{-1} \circ [A(t).\phi(t)] \circ \phi(t)^{-1}.Y(t) + \phi(t)^{-1}.[A(t).Y(t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $Z \equiv \text{cste}$ et $\phi(t_0) = Id_E \Rightarrow Z(t_0) = X_0 \Rightarrow Z(t) = X_0$ si bien que $Y(t) = \phi(t).X_0 = X(t)$

†

Corollaire 1 L'équation différentielle $X'(t)=A(t).X(t)$ possède une solution maximale $X : \mathbb{R} \rightarrow F$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ et toute autre solution $Y : I \in \mathbb{R} \rightarrow F$ vérifiant (3.56) est la restriction de X à I .

Corollaire 2

8. Rappelons que l'application \mathcal{J} qui à un isomorphisme d'espaces de Banach associe son inverse est de classe \mathcal{C}^∞ avec :

$$D\mathcal{J}(u).h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

i) L'espace vectoriel des solutions maximales $X : \mathbb{R} \rightarrow F$ de $X'(t) = A(t).X(t)$ est isomorphe à F .

ii) La solution générale $R(A, t_0, t)$ de $X'(t) = A(t).X(t)$ dépend linéairement de X_0 .

Théorème 2 Soient $X_0 \in F$, $t_0 \in I$, $A : I \rightarrow \text{End}(F)$ et $B : I \rightarrow \text{End}(F)$ deux fonctions continues. Soient $X : I \rightarrow F$ et $Y : I \rightarrow F$ les solutions (uniques) respectives des équations différentielles

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'(t) &= B(t)X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

Alors

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq e^{|t-t_0|M} \cdot |t - t_0| \cdot \|A - B\|_\infty \cdot \|X_0\|$$

où $M = \max(\|A\|_\infty, \|B\|_\infty)$.

Démonstration

Le théorème 1 donne les expressions de X et Y . Il suffit ensuite d'appliquer le lemme 1 donné en annexe 3, étendu aux fonctions continues.

†

On appelle $R(A, t_0, t)$ la résolvante ou le noyau résolvant de l'équation $X'(t) = A(t).X(t)$.

Exponentielle de Dyson

Soit $A : I \rightarrow \text{End}(F)$ une fonction continue. Si c et $t \in I$, on définit par récurrence les applications $R_n : I \rightarrow \text{End}(F)$ par

$$\begin{aligned} R_0(A, c, t) &= Id_E \\ R_{n+1}(A, c, t) &= \int_c^t A(s)R_n(A, c, s)ds \end{aligned} \quad (3.57)$$

On montre facilement par récurrence que

$$\|R_n(A, c, t)\| \leq \frac{\|A\|_\infty^n |t - c|^n}{n!}$$

La série $R_n(A, c, t)$ converge donc uniformément sur I vers une limite

$$R(A, c, t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(A, c, t)$$

qui vérifie

$$R(A, c, t) = Id_E + \int_c^t A(s)R(A, c, s)ds$$

Il résulte de cette dernière égalité que $u(t) = R(A, c, t)$ est dérivable par rapport à t et qu'elle vérifie l'équation différentielle $u'(t) = A(t)u(t)$ avec la condition initiale $u(c) = Id_F$ si bien que $R(A, c, t)$ s'identifie à la résolvante de l'équation $X'(t) = A(t)X(t)$.

L'exponentielle de Dyson fournit donc une méthode pour obtenir une expression explicite du noyau résolvant d'une équation différentielle linéaire homogène $X'(t) = A(t)X(t)$. Le théorème suivant montre qu'il est possible de séparer les variables dans l'évaluation de la récurrence (3.57), ce qui permettra le calcul du noyau résolvant au moyen d'un manipulateur algébrique de séries à une seule variable.

Théorème 3 *Soit $A \in \mathcal{C}^0(I, End(F))$. Soit $R(A, c, t)$ la résolvante de l'équation différentielle linéaire $X'(t) = A(t).X(t)$ et $R_n(A, c, t)$ le terme général de la série convergeant uniformément vers $R(A, c, t)$ sur tout compact de I . Alors il existe une suite $(A_n)_{0 \leq n \leq \infty}$ de fonctions dérivables de I dans $End(F)$ et une suite $(B_n)_{0 \leq n \leq \infty}$ de fonctions dérivables de I dans $End(F)$ telles que pour c et $t \in I$:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n(A, c, t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(t).B_k(c) \quad (3.58)$$

Démonstration

Soit α un élément de I . Posons $A_0 = Id_F$ et définissons A_n par la formule de récurrence

$$A_{n+1}(t) = \int_{\alpha}^t A(s)A_n(s)ds \quad (3.59)$$

De même, posons $B_0 = Id_F$ et définissons par récurrence les fonctions B_n en posant :

$$B_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} A_{n+1-k}(t).B_k(t) \quad (3.60)$$

Les fonctions A_n et B_n ainsi définies sont dérivables d'après les règles classiques concernant les fonctions définies par des intégrales. Pour $n = 0$, on a

$$R_0(A, c, t) = Id_E = A_0(t).B_0(c)$$

Supposons donc que nous puissions écrire

$$R_n(A, c, t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(t).B_k(c)$$

Par définition de $R_{n+1}(A, c, t)$, nous avons

$$\begin{aligned}
 R_{n+1}(A, c, t) &= \int_c^t A(s) \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(s) \cdot B_k(c) ds \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_c^t A(s) \cdot A_{n-k}(s) ds \cdot B_k(c) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k [A_{n+1-k}(t) - A_{n+1-k}(c)] \cdot B_k(c) \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n+1-k}(t) \cdot B_k(c) - \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n+1-k}(c) \cdot B_k(c)
 \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de la suite (B_n)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n+1-k}(c) \cdot B_k(c) = (-1)^n B_{n+1}(c)$$

Comme $A_0 = Id_F$, on a bien

$$\begin{aligned}
 R_{n+1}(A, c, t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n+1-k}(t) \cdot B_k(c) + (-1)^{n+1} A_0(t) \cdot B_{n+1}(c) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k A_{n+1-k}(t) \cdot B_k(c)
 \end{aligned}$$

†

Remarque

Bien que la définition par récurrence des suites (A_n) et (B_n) fasse intervenir un réel α arbitraire, on peut remarquer qu'il n'en est pas de même de R_n (par construction). Il existe donc une infinité de suites (A_n) et (B_n) répondant à la question.

3.4.4 Equations différentielles linéaires à coefficients variables avec second membre

Définition 1 Soient A un élément de $\mathcal{C}^0(I, \text{End}(F))$ et B dans F . On dit que l'application différentiable f vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre $X'(t) = A(t) \cdot X(t) + B(t)$ sur I si

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = A(t) \cdot f(t) + B(t) \quad (3.61)$$

Il est facile de démontrer l'unicité d'une application f vérifiant

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t).X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases} \quad (3.62)$$

à l'aide du théorème 1. L'existence de cette solution résulte des propriétés du produit intégral. En effet, soit $R(A, t_0, t)$ la résolvante de l'équation différentielle linéaire homogène associée $X'(t) = A(t).X(t)$. Posons $f(t) = R(A, t_0, t).g(t)$ où $g : I \rightarrow F$ est une fonction inconnue. On a

$$f'(t) = A(t).R(A, t_0, t).g(t) + R(A, t_0, t).g'(t) = A(t).f(t) + R(A, t_0, t).g'(t) \quad (3.63)$$

Ainsi, on obtient en reportant cette expression dans $f'(t) = A(t).f(t) + B(t)$:

$$g'(t) = R(A, t, t_0).B(t)$$

puisque $R(A, t_0, t)^{-1} = R(A, t, t_0)$. L'intégration de cette expression compte tenu de la condition initiale $g(t_0) = R(A, t_0, t_0).f(t_0) = f(t_0) = X_0$ donne

$$g(t) = X_0 + \int_{t_0}^t R(A, s, t_0).B(s)ds$$

En utilisant la relation de Chasles et le fait que pour L forme linéaire continue sur F et u fonction continue de I dans F , on a

$$L\left[\int_{t_0}^t u(s)ds\right] = \int_{t_0}^t [L \circ u](s)ds$$

on obtient

$$f(t) = R(A, t_0, t).X_0 + \int_{t_0}^t R(A, s, t).B(s)ds \quad (3.64)$$

Théorème 4 Soient A et B des éléments de $\mathcal{C}^0(I, \text{End}(F))$. Soient $R(A, c, t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(A, c, t)$ la résolvante de l'équation différentielle homogène $X'(t) = A(t).X(t)$, $(A_n)_{0 \leq n \leq \infty}$ et $(B_n)_{0 \leq n \leq \infty}$ deux suites de fonctions continues vérifiant

$$\forall n \geq 0, \quad R_n(A, c, t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(t).B_k(c) \quad (3.65)$$

Alors la solution générale de l'équation différentielle linéaire avec second membre (3.62) s'écrit

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k(t_0)X_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k(s)B(s)ds \quad (3.66)$$

Démonstration

D'après l'expression (3.64) de la solution du système (3.62)

$$X(t) = R(A, t_0, t).X_0 + \int_{t_0}^t R(A, s, t).B(s)ds \quad (3.67)$$

on a :

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(A, t_0, t).X_0 + \int_{t_0}^t \sum_{n=0}^{\infty} R_n(A, s, t).B(s)ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(t).B_k(t_0).X_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(t).B_k(s).B(s)ds \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'expression

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k A_{n-k}(t).B_k(s)$$

le produit des séries $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_k(s)$ si bien que nous avons le résultat dès lors que ces séries convergent.

Or, on montre facilement par récurrence que :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad \|A_n(t)\| &\leq 4 \frac{\|A\|_{\infty}^n |t - \alpha|^n}{n!} \\ &\leq 4 \frac{\|A\|_{\infty}^n T^n}{n!} \end{aligned}$$

La série de terme général $A_n(t)$ converge donc normalement sur I .

Nous n'avons pas réussi à démontrer la convergence de la suite (B_n) car pour celle-ci, le même type de majoration conduit à l'existence d'une suite de réels (μ_n) définie par récurrence sur n :

$$\begin{cases} \mu_0 &= 1 \\ \mu_n &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\mu_j}{(n-j)!} \end{cases}$$

telle que, pour tout $n \geq 0$ et tout $t \in I$, on ait :

$$\|B_n(t)\| \leq \|A\|_{\infty}^n |t - \alpha|^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu_k}{(n-k)!}$$

Cependant, par construction, la suite (μ_n) diverge.

†

Le calcul explicite de la solution d'une équation différentielle à coefficients variables peut donc s'envisager ainsi : connaissant la matrice $A(t)$, on calcule les suites (A_n) et (B_n) d'après les formules de récurrence (3.59) et (3.60). On utilise ensuite la formule (3.66) pour obtenir le résultat. Ces calculs peuvent être réalisés au moyen d'un manipulateur algébrique.

Dans le cas qui nous intéresse, la fonction $A(s)$ est donnée par (3.55) et, par construction, cette fonction est "proche" de la fonction constante A_0 (cf. 3.36) obtenue pour une orbite intermédiaire circulaire. Donc la matrice $R(A, c, t)$ est a priori "proche" de la matrice $R(A_0, c, t)$ dont nous savons qu'elle est égale à $\exp[A_0(t - c)]$. Afin de nous assurer de ce résultat, nous démontrons ci-après que la résolvante dépend continûment de la fonction $A(s)$ (et même différentiablement).

Notations 1 *On note :*

- $\Omega = \mathcal{C}^0(I, \text{End}(F)) \times \mathcal{C}^0(I, \text{End}(F)) \times I \times I$
- $\Theta = \mathcal{C}^k(I, \text{End}(F)) \times I \times I$
- Pour $e = (A, M, c, t)$ élément de Ω , on posera

$$\|e\|_{\Omega} = \|A\| + \|M\| + |c| + |t|$$

qui définit une norme sur Ω .

Propriété 1 *Soient c et t deux éléments de I . L'application :*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}^0(I, \text{End}(F)) &\rightarrow GL(F) \\ A &\mapsto R(A, c, t) \end{aligned} \quad (3.68)$$

est continue.

Démonstration

$R(A, c, t)$ est élément de $GL(F)$ d'après le théorème de Jacobi-Liouville. Soient A et A' deux éléments de $\mathcal{C}^0(I, \text{End}(F))$, $R_n(A, c, t)$ et $R_n(A', c, t)$ les termes généraux des séries convergeant vers $R(A, c, t)$ et $R(A', c, t)$ respectivement. On sait que :

$$\begin{cases} \|R_n(A, c, t)\| &\leq \frac{\|A\|^n |t-c|^n}{n!} \\ \|R_n(A', c, t)\| &\leq \frac{\|A'\|^n |t-c|^n}{n!} \end{cases}$$

Par récurrence sur n , on montre que :

$$\forall n \geq 1, \|R_n(A, c, t) - R_n(A', c, t)\| \leq \|A - A'\| (\|A\| + \|A'\|)^{n-1} \frac{|t-c|^n}{n!}$$

Par définition,

$$R_1(A, c, t) - R_1(A', c, t) = \int_c^t (A(s) - A'(s)) ds$$

donc

$$\|R_1(A, c, t) - R_1(A', c, t)\| \leq |t - c| (\|A - A'\|)$$

si bien que la propriété est vérifiée au rang 1.

On a de plus :

$$\begin{aligned} R_{n+1}(A, c, t) - R_{n+1}(A', c, t) = \\ \int_c^t (A(s) - A'(s))R_n(A, c, s) + A'(s)(R_n(A, c, s) - R_n(A', c, s))ds \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \|R_{n+1}(A, c, t) - R_{n+1}(A', c, t)\| \leq \\ \int_c^t \|A - A'\| \frac{\|A\|^n |s - c|^n}{n!} + \|A'\| \|A - A'\| (\|A\| + \|A'\|)^{n-1} \frac{|s - c|^n}{n!} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|R_{n+1}(A, c, t) - R_{n+1}(A', c, t)\| \leq \\ \|A - A'\| \frac{|t - c|^{n+1}}{(n+1)!} (\|A\|^n + \|A'\| (\|A\| + \|A'\|)^{n-1}) \end{aligned}$$

Or $\|A^n\| \leq \|A\| (\|A\| + \|A'\|)^{n-1}$ si bien que :

$$\|R_{n+1}(A, c, t) - R_{n+1}(A', c, t)\| \leq \|A - A'\| (\|A\| + \|A'\|)^n \frac{|t - c|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et la propriété est démontrée au rang $n + 1$.

La série de terme général $\mu(n) = (\|A\| + \|A'\|)^{n-1} \frac{|t-c|^n}{n!}$ est convergente vers une limite notée μ . Ainsi,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \eta = \frac{\varepsilon}{\mu} \quad , \quad \|A - A'\| < \eta$$

$$\Rightarrow \|R(A, c, t) - R(A', c, t)\| < \sum_{n=0}^{\infty} \|R_n(A, c, t) - R_n(A', c, t)\| < \varepsilon$$

†

Théorème 5 *L'application*

$$\begin{aligned} S : \quad \Omega & \rightarrow \text{End}(F) \\ (A, M, c, t) & \mapsto \int_c^t A(s)M(s)ds \end{aligned} \quad (3.69)$$

est différentiable sur Ω

Démonstration

Ce résultat découle des théorèmes classiques de différentiabilité des fonctions définies par des intégrales de fonctions continues (on vérifie sans peine que l'application qui à A et $A' \in \mathcal{C}^0(I, \text{End}(F))$ associe $AA' \in \mathcal{C}^0(I, \text{End}(F))$ est continue). Notons $e = (A, M, c, t)$ et $h = (a, m, h1, h2)$ deux éléments de Ω .

On a :

$$\begin{aligned} S(e+h) &= S(e) + S(A, m, c, t) + S(a, M, c, t) \\ &\quad + S(A, M, c+h1, c) + S(A, M, t, t+h2) \\ &\quad + S(A, m, c+h1, c) + S(a, M, c+h1, c) + S(a, m, c+h1, c) \\ &\quad + S(A, m, t, t+h2) + S(a, M, t, t+h2) + S(a, m, t, t+h2) \end{aligned}$$

On posera donc

$$DS|_e.h = S(A, m, c, t) + S(a, M, c, t) + A(t)M(t)h2 - A(c)M(c)h1 \quad (3.70)$$

qui définit bien la différentielle de S en e .

†

Corollaire 3 *L'application*

$$\begin{aligned} R : \quad \Theta &\rightarrow \text{End}(F) \\ (A, c, t) &\mapsto R(A, c, t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

est différentiable sur Θ

Ainsi, la solution d'une équation différentielle à coefficients variables dépend différentiablement des conditions initiales et de plus la résolvante $R(A, c, t)$ d'une équation différentielle $X'(t) = A(t).X(t)$ dépend différentiablement de la fonction A .

On pourra donc chercher une expression de la résolvante de l'équation (3.53), pour laquelle nous avons $A(s) = A_0 + \varepsilon(s)$, sous la forme d'une perturbation de la résolvante de l'équation $X'(t) = A_0.X(t)$ (qui vaut exactement $\exp[A_0(t-c)]$).

On peut montrer [Pou94] que si l'on a $A(t) = A_0(t) + \varepsilon(t)$, alors :

$$R(A, c, t) = R(A_0, c, t)H(t) \quad (3.72)$$

où la fonction $H(t) : I \rightarrow \text{End}(F)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dH(t)}{dt} = D(t).H(t)$$

avec la définition :

$$D(t) = R(A_0, c, t)\varepsilon(t)R(A_0, t, c)$$

Chapitre 4

Théorie des Systèmes de Référence

4.1 Systèmes de référence relativistes en astronomie

4.1.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la théorie de la relativité générale substitue à l'espace euclidien et au temps absolu une variété pseudo-riemannienne Σ de dimension 4. Dans ce contexte, les systèmes de coordonnées "privilegiés" pour la description des lois physiques n'existent plus, et pour rendre la forme de ces lois invariante sous un changement quelconque du système de coordonnées, elles sont écrites à l'aide de tenseurs (sous forme covariante).

D'autre part, la réalisation d'un système de référence implique de pouvoir définir univoquement la notion de solide de référence, ce qui reste très subtil en relativité. La géométrie non-euclidienne utilisée en relativité induit une autre différence fondamentale avec la théorie newtonienne de la gravitation. Si en effet on effectue le transport parallèle (de Fermi-Walker) d'un vecteur v^α le long de géodésiques d'une variété formant un contour fermé ABC ¹, ce vecteur sera augmenté après un tour complet d'une quantité δv^α liée à la courbure de la variété le long de la trajectoire. En d'autres termes, un système de référence en chute libre² ne peut pas a priori retrouver sa configuration

1. Dans le cadre de la mécanique céleste, ce contour fermé sera défini par exemple en projetant sur une sous-variété $x^0 = cste$ la trajectoire spatio-temporelle d'un corps dans le problème képlérien.

2. Par exemple un système de coordonnées lié à une planète supposée ponctuelle dans

spatiale après une révolution.

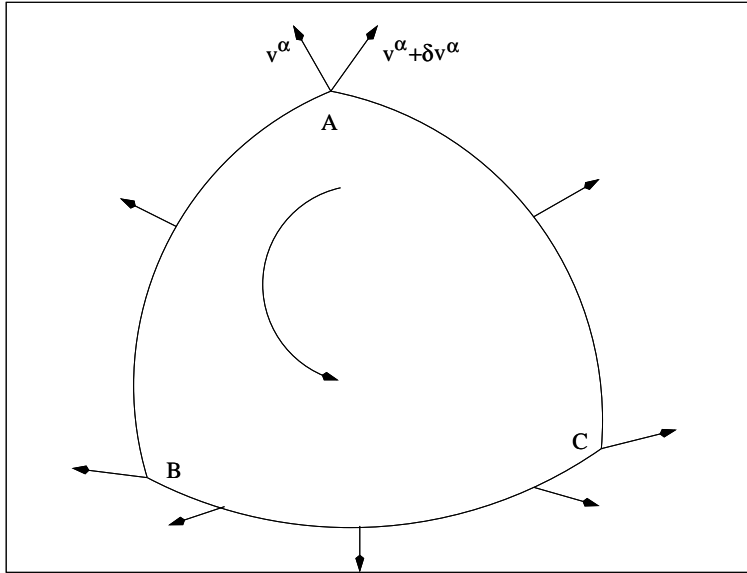


FIG. 4.1 – *Transport parallèle du vecteur v^α le long de la courbe (ABC).*

Il faudra ainsi distinguer les systèmes de référence en chute libre de ceux construits à partir de catalogues d'étoiles ou de sources extra-galactiques. Les premiers, adaptés à la formulation des lois dynamiques auxquelles obéit le système physique étudié, ne coïncideront pas avec les deuxièmes, dont les vecteurs de base ne sont soumis à aucune condition de transport parallèle le long de géodésiques. Cette distinction fondamentale, produit de la théorie de la relativité en tant que théorie non-euclidienne de la gravitation, se retrouve dans les notions de *système de référence dynamiquement et cinématiquement non-tournant*. On admet pour définition d'un système de référence cinématiquement non-tournant par rapport à un système S , un système de référence dont les axes gardent une orientation fixée par rapport à S . En raison de la "mollesse" des grilles de coordonnées en relativité, cette condition de non-rotation ne peut être que locale et en fait, elle revient à une condition de non-rotation en un point d'une base vectorielle orthonormée vis à vis d'un système de coordonnées en ce point.

Enfin, la notion d'échelle de temps, d'importance fondamentale dans les applications astronomiques, se trouve être complètement bouleversée en relativité puisque dans cette théorie de la gravitation, l'espace et le temps ne sont plus dissociés et du coup, le temps uniforme de la mécanique newtonienne n'existe plus.

le problème des deux corps.

On lui substitue les notions de *temps propre* et de *temps coordonnée*. Le premier est le temps qui s'écoule à la montre d'un observateur³ et le second sert à étiqueter les événements (les points de Σ), il s'agit donc de la coordonnée t reliée à x^0 par la formule⁴ $x^0 = ct$.

Il y aura donc autant de temps coordonnée que de systèmes de coordonnées utilisés pour représenter l'espace-temps. On peut ainsi distinguer le temps coordonnée barycentrique (attaché au système de référence barycentrique), les temps coordonnés géocentrique, topocentrique, planétocentrique, etc...

4.1.2 Systèmes de référence

Actuellement, la hiérarchie des systèmes de référence décrite dans [BK89], [Bru91b], [BBF91] et [KV93] constitue une approche rigoureuse à ce problème. Elle est schématisée par le diagramme (4.2) tiré de [Kli93]:

Dans ce diagramme, on distingue trois niveaux pour la construction des systèmes de référence. Les paramètres q , \hat{q} et \tilde{q} permettent de condenser les expressions des métriques associées à ces systèmes de référence. Au niveau barycentrique, on construit le système de référence barycentrique (BRS) qui par définition est cinématiquement et dynamiquement non-tournant.

Au niveau géocentrique, on construit deux systèmes de référence qui seront respectivement cinématiquement et dynamiquement non-tournant vis-à-vis de (BRS), soit (KGRS) et (DGRS). Le paramètre q prendra la valeur 0 ou 1 suivant que l'on se situe dans (KGRS) ou (DGRS). Le système (DGRS), par définition en chute libre dans (BRS), sera par conséquent adapté à la formulation des équations de la dynamique des corps dans le voisinage de la Terre, lesquelles, dans ce système ne comprendront pas d'accélération complémentaire. Quant au système (KGRS), dont les axes ne tournent pas par rapport à (BRS), il permet la réduction aisée de données astronomiques puisqu'une observation astrométrique de position ramenée à (KGRS) sera aisément transformée en une position barycentrique au moyen d'une translation alors qu'une transformation plus complexe est impliquée dans le lien (DGRS)-(BRS). On considère aussi un système de référence tournant avec la Terre si bien que dans ce système tous les points de la Terre ont des composantes fixes. Il s'agit du système GRS⁺ qui coïncide avec le système ITRS.

Enfin, au niveau topocentrique, on reproduit la distinction exposée au niveau géocentrique. Cela nous amène naturellement à considérer quatre systèmes de référence, respectivement cinématiquement non tournant ($\hat{q} = 0$)

3. Il y a donc autant de temps propres que d'observateurs potentiels.

4. On utilise ct et non t afin que x^0 soit de la dimension d'une longueur.

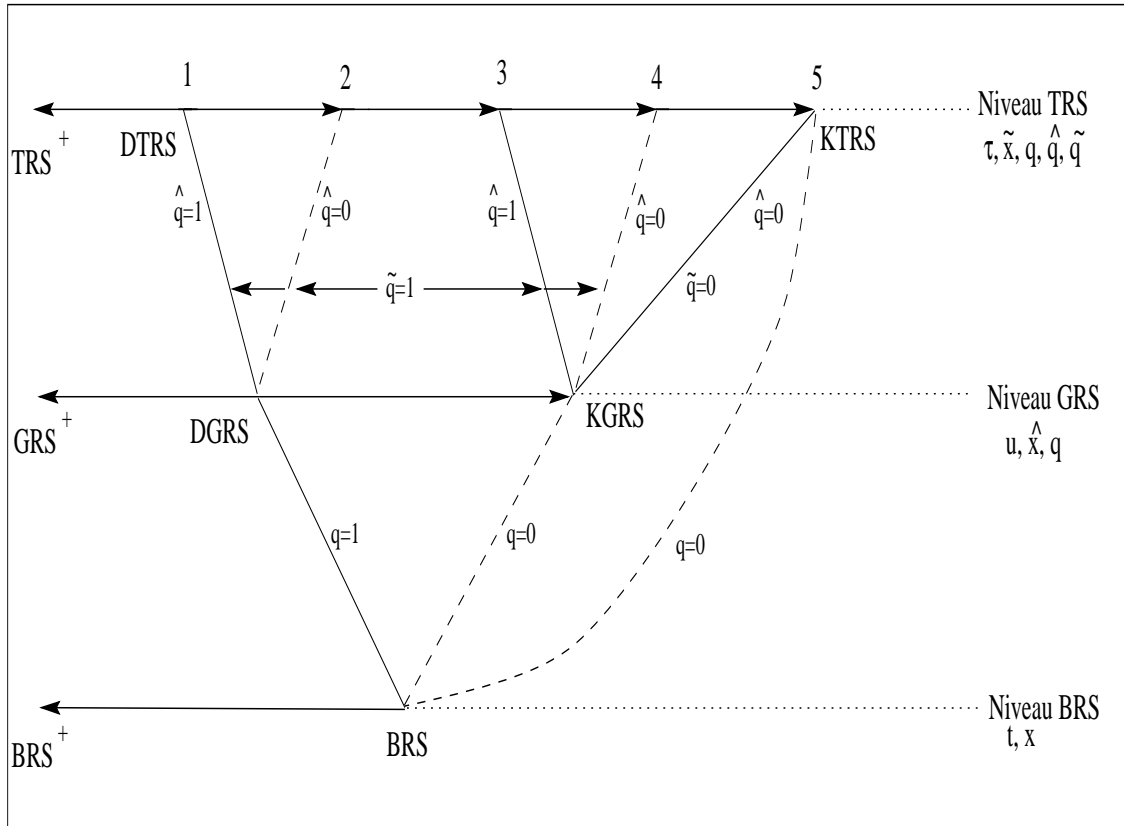


FIG. 4.2 – Hiérarchie des systèmes de référence aux niveaux barycentrique, géocentrique et topocentrique. Les liens en traits pleins indiquent des systèmes dynamiquement non tournants l'un par rapport à l'autre et les traits pointillés des systèmes cinématiquement non tournants.

et dynamiquement non tournant ($\hat{q} = 1$) par rapport à (KGRS) et (DGRS). Cependant, la relation (S est cinématiquement non tournant par rapport à S') n'est pas transitive. En d'autres termes, si un système S est cinématiquement non tournant par rapport à un autre système S' , ce dernier étant lui même cinématiquement non tournant par rapport à un système S'' , cela ne signifie pas que S sera cinématiquement non tournant par rapport à S'' . Par exemple, (TRS1)=(DTRS) est par construction dynamiquement non-tournant par rapport à (DGRS). Donc ce repère tourne par rapport à (DGRS). (TRS2) par contre, en tant que repère cinématiquement non-tournant par rapport à (DGRS) garde une orientation fixée vis-à-vis de ce dernier.

Il faut donc, pour compléter cette théorie des systèmes de référence ajouter au tableau précédent un système de référence cinématiquement non tour-

nant par rapport à (BRS) : (KTRS). Le paramètre \tilde{q} permet cette distinction, celui-ci valant 0 pour le système de référence cinématiquement non tournant par rapport à (BRS) et 1 pour les autres [Kli93]. Puisque (TRS5)=(KTRS) a été construit avec la contrainte d'être cinématiquement non-tournant par rapport à BRS, (KTRS) tourne vis-à-vis de (KGRS). Deux matrices R^{ij} et K^{ij} décrivent cette rotation entre (KTRS) et (KGRS) (cf. paragraphes suivants).

Le terme séculaire principal de la matrice de rotation R^{ij} , est appelé précession topocentrique (précession de Schiff) et K^{ij} ne possède que des termes périodiques dont l'amplitude maximale (0.016 mas) ne peut pas être toujours négligée [Kli93].

Ce qui a été vu pour GRS et TRS se transpose sans difficulté pour un corps quelconque du système solaire. Les métriques ainsi construites devront faire intervenir des matrices antisymétriques de précession géodésique et topocentrique. Il n'existe pas encore d'évaluation analytique de ces matrices. Par contre, les liens entre les échelles de temps coordonnée associées aux systèmes de référence planétocentrique de Mercure, Vénus, Mars, la Lune et le temps coordonnée barycentrique ont été calculés dans le cadre de ce travail. Les résultats de ces calculs sont présentés dans l'annexe 4.

On peut noter enfin que la notion de système de référence topocentrique en chute libre est ambiguë dans la mesure où un observateur terrestre n'est pas en chute libre dans le champ gravitationnel terrestre. Cependant, l'utilité de ce type de système de référence est plus évidente dans le cas où l'on étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre.

Nous présentons les métriques associées aux divers systèmes de référence décrits ci-dessus ainsi que quelques liens entre eux.

Dans les expressions des métriques suivantes, le point désignera la dérivation par rapport au temps coordonnée du système de référence sous-jacent.

Système de Référence Barycentrique (BRS)

Le système solaire étant considéré comme isolé, on décrit le mouvement des planètes dans le système de référence barycentrique (BRS) qui par définition est à la fois dynamiquement et cinématiquement non-tournant. Ceci se traduit par l'absence de terme de rotation (Coriolis) dans la métrique et donc dans les équations du mouvement. Ce système peut être réalisé physiquement par trois gyroscopes en chute libre⁵.

On utilise le système de coordonnées rectangulaires ($x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$), t désignant le temps coordonnée barycentrique (TCB) compté depuis

5. Ou en transport de Fermi-Walker le long de la ligne d'univers de leur origine commune.

J2000(TCB).

Les corrections jusqu'au quatrième ordre inclus en $1/c$ à la métrique de Minkowski $\eta_{00} = 1$, $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$, $\eta_{0i} = 0$, donnant la métrique barycentrique en coordonnées rectangulaires harmoniques $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ sont :

$$\begin{cases} h_{00}(t, \mathbf{x}) &= -2 \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} + 2 \left(\sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \right)^2 + 2 \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \sum_{j \neq i} \frac{GM_j}{r_j c^2} \\ &\quad - 3c^{-2} \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - c^{-2} \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \left(\dot{\mathbf{x}}_i^2 - \mathbf{r}_i \ddot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_i^2} (\mathbf{r}_i \dot{\mathbf{x}}_i)^2 \right) \\ h_{0k}(t, \mathbf{x}) &= 4c^{-1} \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} (\dot{x}_i^k) \\ h_{jk}(t, \mathbf{x}) &= 2 \sum_i \frac{GM_i}{r_i c^2} \eta_{jk} \end{cases} \quad (4.1)$$

les sommations étant étendues à tous les corps du système solaire. Dans cette expression, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, \mathbf{x}_i est le vecteur position barycentrique du corps i , $r_i = |\mathbf{r}_i|$ et $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ et $\dot{\mathbf{x}}_i = d\mathbf{x}_i/dt$. M_i est la masse du corps i .

On peut considérer ensuite les systèmes BRSV, BRSC, BRSQ et BRS⁺. Les repères de référence associés [KMK89] admettent pour origine le barycentre du système solaire et pour plan principal l'écliptique J2000 (C) ou bien l'équateur moyen J2000 (V) ou encore l'équateur de la date (Q et +). Le système BRS⁺ est construit sur le modèle de GRS⁺ (voir ci-après).

En définitive, la projection de BRSV sur la sous-variété $x^0 = cste$ coïncide avec le système ICRS.

Systèmes de Référence Géocentriques (GRS)

On utilise le système de coordonnées $(\hat{x}^0 = cu, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$, u désignant le temps coordonnée géocentrique (TCG).

L'expression de la métrique suivante n'est développée que jusqu'au deuxième ordre en $1/c$ ce qui ne permet pas de formuler les équations du mouvement des satellites artificiels de la Terre avec suffisamment de précision. Pour cela, les équations seront écrites dans le repère barycentrique puis converties en équations géocentriques (voir [Bru91a]). Comme exposé précédemment, la présence du paramètre q dans l'expression de la métrique permettra de distinguer entre les systèmes de référence cinématiquement ($q = 0$) et dynamiquement ($q = 1$) non-tournant.

En notant $\hat{h}_{\alpha\beta}$ les corrections à la métrique de Minkowski, on a :

$$\begin{cases} \hat{h}_{00}(u, \hat{\mathbf{x}}) &= -2c^{-2} [\hat{U}_E + Q_j \hat{x}^j + T(\hat{\mathbf{x}})] \\ \hat{h}_{0i}(u, \hat{\mathbf{x}}) &= c^{-3} [(q-1) \hat{F}^{ij} \hat{x}^j + 4(\hat{U}_E^i + T^i(\hat{\mathbf{x}}) - v_E^i T(\hat{\mathbf{x}})) \\ &\quad + \frac{2}{5} (3\hat{a}_E^i \hat{x}^j \hat{x}^i - \hat{a}_E^i \hat{x}^j \hat{x}^j)] \\ \hat{h}_{ij}(u, \hat{\mathbf{x}}) &= \hat{h}_{00} \delta_{ij} \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$\hat{U}_E = \frac{GM_E}{\rho} + \frac{1}{2\rho^3} G \hat{I}_E^{km} \left(-\delta_{km} + \frac{3}{\rho^2} \hat{x}^k \hat{x}^m \right) + \dots$$

est le géopotential calculé dans GRS ($\rho = (\hat{x}^k \hat{x}^k)^{1/2}$),

$$\hat{U}_E^i = G \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_E^j \hat{I}_E^{km} \frac{\hat{x}^m}{\rho^3}$$

est le géopotential vecteur calculé dans GRS, $\hat{\omega}_E^j$ et \hat{I}_E^{km} étant respectivement les composantes de la vitesse angulaire et les moments quadripolaires de la Terre calculés dans GRS tandis que v_E^i et a_E^i sont les composantes de la vitesse et de l'accélération barycentrique du géocentre. $T(\hat{\mathbf{x}})$ et $T^i(\hat{\mathbf{x}})$ représentent les potentiels de marée et le potentiel vecteur de marée. Leurs expressions sont :

$$T(\hat{\mathbf{x}}) = \bar{U}_E(\mathbf{x}_E + \mathbf{x}) - \bar{U}_E(\mathbf{x}_E) - \bar{U}_{E,j}(\mathbf{x}_E) \hat{x}^j \quad (4.3)$$

et

$$T^i(\hat{\mathbf{x}}) = \bar{U}_E^i(\mathbf{x}_E + \mathbf{x}) - \bar{U}_E^i(\mathbf{x}_E) - \bar{U}_{E,j}^i(\mathbf{x}_E) \hat{x}^j \quad (4.4)$$

\bar{U}_E et \bar{U}_E^i désignant les potentiels et potentiels vecteurs gravitationnels induits par les autres masses que la Terre⁶ et

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial \hat{x}^i}$$

Q_i désigne la partie non géodésique de l'accélération barycentrique de la Terre⁷ résultant de l'interaction entre les moments quadripolaires et les masses extérieures :

$$Q_i = -\frac{1}{2M_E} \hat{I}_E^{km} \bar{U}_{E,ikm}(\mathbf{x}_E)$$

Enfin, en posant $F^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikm} F^{km}$, $F^{ik} = \epsilon_{ikm} F^m$, ϵ_{ijk} étant le symbole de Levi-Civita complètement antisymétrique ($\epsilon_{123} = +1$), et en négligeant Q_i , on a :

$$\dot{F}^i = \sum_{A \neq E} \frac{GM_A}{r_{EA}^3} \left[-\frac{3}{2} (\mathbf{v}_E \times \mathbf{r}_{EA})^i + 2(\mathbf{v}_A \times \mathbf{r}_{EA})^i \right]$$

où \mathbf{v}_E et \mathbf{v}_A sont les vitesses barycentriques du géocentre et du corps A .

Le terme séculaire principal de cette fonction vectorielle (décrit aussi par la matrice antisymétrique F^{ij}) est la précession géodésique (de de Sitter)

6. C'est-à-dire $\bar{U}_E(\mathbf{x}_E) = \sum_{A \neq E} \frac{GM_A}{r_{EA}}$ et $\bar{U}_E^i(\mathbf{x}_E) = \sum_{A \neq E} \frac{GM_A}{r_{EA}} v_E^i$.

7. C'est-à-dire que l'on a : $a_E^i = \bar{U}_{E,i}(\mathbf{x}_E) - Q_i$.

dont une approximation dans le cadre d'une Terre sans masse⁸ en orbite képlérienne autour du Soleil est :

$$\dot{F}^i = \frac{3n^3 a^5}{2r^3} \sqrt{1-e^2} k^i$$

n , a et e étant les éléments elliptiques usuels et k^i un vecteur unitaire orthogonal au plan de l'orbite. Ce terme séculaire principal est aussi celui de la rotation de DGRS par rapport à BRS (ou KGRS). Il vaut $1.91''$ par siècle. Une expression analytique des F^i peut être trouvée dans [BBF91]. Enfin, les termes périodiques (nutation géodésique) se trouvent dans [BBF91] et [Fuk91]. Nous avons recalculé cette fonction vectorielle pour les planètes intérieures.

Les repères de référence associés à KGRS et DGRS admettent tous deux pour origine le géocentre. Les axes de KGRS gardent avec les axes du BRS une orientation fixe et donc KGRS admet l'écliptique J2000 pour plan principal⁹.

Tableau récapitulatif

Les abréviations suivantes sont utilisées :

- S.S. : Système solaire
- Ec. : Ecliptique
- Eq. : Equateur
- cin. : cinématique
- dyn. : dynamique
- TCB : Temps coordonnée barycentrique
- TCG : Temps coordonnée géocentrique
- TCT : Temps coordonnée topocentrique
- D.N. : Dynamiquement non-tournant
- C.N. : Cinématiquement non-tournant
- S.R. : Système de référence

8. Au sens que le champ gravitationnel terrestre n'est pas pris en compte dans la résolution des équations d'Einstein.

9. Une fois de plus, on peut faire la distinction entre les repères V, C et Q.

REPERE	ECHELLE DE TEMPS	ORIGINE	PLAN PRINCIPAL	NATURE	EQUIVALENT IERS
BRSV	TCB	Barycentre S.S.	Eq. J2000	D.N.	ICRS
BRSQ	TCB	Barycentre S.S.	Eq. J2000	D.N.	
BRSC	TCB	Barycentre S.S.	Ec. J2000	D.N.	
BRS+	TCB	Barycentre S.S.	Ec. J2000	C.N.	
DGRSV	TCG	Géocentre	Eq. J2000 dyn.	D.N.	ITRS
KGRSV	TCG	Géocentre	Eq. J2000 cin.	C.N.	
DGRSQ	TCG	Géocentre	Eq. J2000 dyn.	D.N.	
KGRSQ	TCG	Géocentre	Eq. J2000 cin.	C.N.	
DGRSC	TCG	Géocentre	Ec. J2000 dyn.	D.N.	
KGRSC	TCG	Géocentre	Ec. J2000 cin.	C.N.	
GRS+	TCG	Géocentre	Eq. de la date	C.N.	

4.2 Relations analytiques entre les systèmes de référence

4.2.1 Liens spatiaux

Différence entre les angles d'Euler de DGRS et KGRS

On peut rendre compte de la position de l'équateur terrestre dans ces deux systèmes de référence au travers des angles d'Euler ψ , θ , φ pour DGRS et ψ_K , θ_K , φ_K pour KGRS. Les angles dynamiques (dans DGRS) sont calculés à partir d'une théorie de la rotation de la Terre alors que leurs correspondants cinématiques sont déduits de l'observation.

La distinction entre (KGRS) et (DGRS) amène tout naturellement à envisager le lien entre les angles d'Euler ψ , θ , φ d'un côté et ψ_K , θ_K , φ_K d'un autre côté, lien nécessaire pour décrire la rotation de la Terre dans ces deux systèmes de référence [Bru95]. Nous adopterons la convention d'orientation de ces angles qui les rend positifs pour des temps positifs.

Notons $\hat{P}(u)$ et $\hat{P}_K(u)$ les matrices de rotation entre les repères GRS⁺, KGRS et DGRS :

$$\begin{aligned} [GRS^+] &= \hat{P}(u)[DGRS] \\ [GRS^+] &= \hat{P}_K(u)[KGRS] \end{aligned} \quad (4.5)$$

On a, $R_i(\alpha)$ désignant la matrice de rotation d'angle α autour du i -ème axe du repère :

$$\begin{aligned} \hat{P}(u) &= R_3(\varphi)R_1(-\theta)R_3(-\psi) \\ \hat{P}_K(u) &= R_3(\varphi_K)R_1(-\theta_K)R_3(-\psi_K) \end{aligned} \quad (4.6)$$

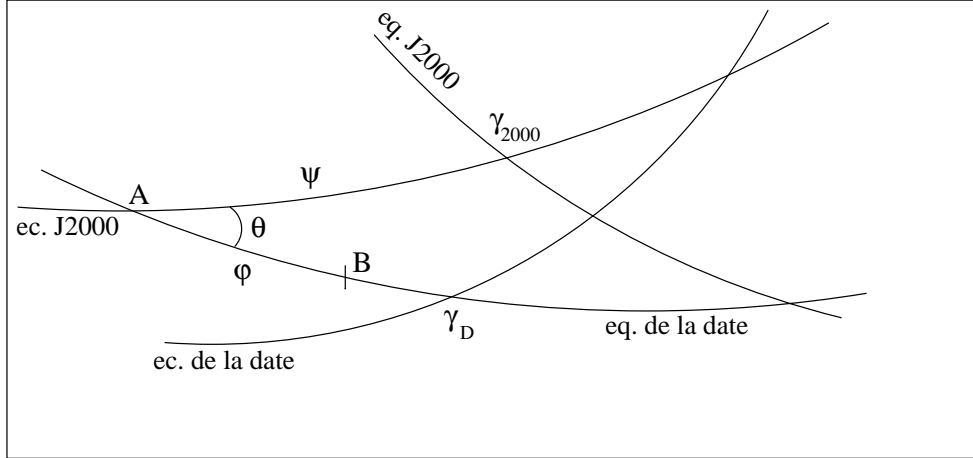


FIG. 4.3 – Angles d’Euler ψ , θ et φ . B désigne l’intersection du méridien d’origine et de l’équateur de la date.

Le lien entre les matrices $\hat{P}(u)$ et $\hat{P}_K(u)$ fait intervenir la matrice de précession géodésique F_C :

$$\hat{P}(u) = \hat{P}_K(u)(E - c^{-2}F_C) \quad (4.7)$$

où E est la matrice unité. On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_K &= -\frac{c^{-2}}{\sin \theta} (F_C^1 \sin \psi + F_C^2 \cos \psi) \\ \theta - \theta_K &= c^{-2} (F_C^1 \cos \psi - F_C^2 \sin \psi) \\ \psi - \psi_K &= c^{-2} \left[F_C^3 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (F_C^1 \sin \psi + F_C^2 \cos \psi) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les expressions analytiques de ψ , θ et φ se trouvent dans [BRS97]¹⁰. A l’aide de ces expressions analytiques des angles d’Euler, on trouve en μas :

$$\begin{aligned} \psi - \psi_K &= 19\,198\,826.96t - 50387.81t^2 - 754.11t^3 \\ &\quad - 34.28 \sin(\lambda_3) - 149.22 \cos(\lambda_3) + 3.01 \sin(\lambda_3 + D - F) \\ &\quad - 1.73 \sin(2\lambda_3) + 0.84 \cos(2\lambda_3) + \dots \\ &\quad + t [-7.36 \sin(\lambda_3) + 6.47 \cos(\lambda_3) + \dots] \\ &\quad + t^2 [-0.47 \sin(\lambda_3 + D - F) - 6.15 \cos(\lambda_3 + D - F) + \dots] \\ &\quad + t^3 [2.18 \sin(\lambda_3 + D - F) - 0.20 \cos(\lambda_3 + D - F) + \dots] \end{aligned}$$

10. Dans cet article, les angles sont notés ψ , ω et φ avec la correspondance : $\omega \rightarrow -\theta$, $\psi \rightarrow -\psi$, et ils ont été calculés dans le cadre d’une Terre rigide.

$$\begin{aligned}
\theta - \theta_K &= 9.56t + 1\,953.95t^2 - 4\,721.90t^3 \\
&\quad - 1.30 \cos(\lambda_3 + D - F) \\
&\quad + 0.17 \sin(2\lambda_5 - 5\lambda_6) - 0.09 \cos(2\lambda_5 - 5\lambda_6) + \dots \\
&\quad + t [0.32 \sin(\lambda_3 + D - F) + \dots] \\
&\quad + t^2 [-1.82 \sin(\lambda_3 + D - F) + 0.04 \cos(\lambda_3 + D - F) + \dots]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_K &= -3.52t - 54\,772.66t^2 - 802.14t^3 \\
&\quad + 3.28 \sin(\lambda_3 + D - F) + \dots \\
&\quad + t [0.20 \sin(\lambda_3) + 0.85 \cos(\lambda_3) + \dots] \\
&\quad + t^2 [-0.51 \sin(\lambda_3 + D - F) - 5.64 \cos(\lambda_3 + D - F) + \dots] \\
&\quad + t^3 [2.37 \sin(\lambda_3 + D - F) - 0.20 \cos(\lambda_3 + D - F) + \dots]
\end{aligned}$$

t étant exprimé en milliers d'années de TDB depuis J2000 et [SBC⁺94] :

$$\begin{aligned}
D &= 5.19846674103 + 77713.7714681205 t \\
F &= 1.62790523337 + 84334.6615813083 t
\end{aligned}$$

les longitudes moyennes λ_3 , λ_5 et λ_6 provenant quant à elles du tableau (2.8).

Différences induites sur la vitesse de rotation de la Terre.

A cette différence entre les angles d'Euler est associée une modification des composantes de la vitesse de rotation de la Terre. Si Ω^i et Ω_K^i désignent les composantes du vecteur rotation de GRS^+ par rapport à $DGRS$ et $KGRS$ respectivement, on a :

$$\Omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{P}_{mj} \cdot \dot{P}_{mk} \quad \text{et} \quad \Omega_K^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{P}_{Kmj} \cdot \dot{P}_{Kmk} \quad (4.9)$$

où $(\dot{}) = d()/du$, $u = TCG$. En calculant Ω^i et Ω_K^i à l'aide de (4.6) et (4.9), et en notant Ω la norme de $\mathbf{\Omega}$, on trouve (par millier d'années de TDB) :

$$\begin{aligned}
\Omega_K - \Omega &= -17''.6143 - 0''.8251 \sin(\lambda_3) + 0''.1832 \cos(\lambda_3) \\
&\quad - 0''.0128 \sin(3\lambda_3) + 0''.0102 \cos(3\lambda_3) \\
&\quad + t \left[0''.0453 \sin(\lambda_3) + 0''.1020 \cos(\lambda_3) \right. \\
&\quad \quad \left. - 0''.0094 \sin(3\lambda_3) - 0''.0117 \cos(3\lambda_3) \right]
\end{aligned}$$

t étant exprimé en milliers d'années de TDB depuis J2000. Le terme constant de cette différence, d'amplitude $-2,706 \cdot 10^{-15}$ radian par seconde, est induit par la précession géodésique entre les systèmes *KGRS* et *DGRS*. Il entraîne une modification de la valeur de la vitesse de rotation de la Terre Ω d'environ $4 \cdot 10^{-11}$ en valeur relative.

Ainsi, la détermination de la vitesse de rotation de la Terre à partir d'observations effectuées dans le système *KGRS* est à corriger de cette valeur pour la comparaison à une théorie dynamique exprimée dans le repère *DGRS*.

4.2.2 Liens temporels

Comme il a été vu dans l'introduction de ce chapitre, en relativité générale, les notions de temps coordonnée et de temps propre se substituent au temps absolu de Newton. Le temps coordonnée est (multiplié par c) la première des quatre coordonnées utilisées pour représenter l'espace-temps relativiste. Il est par exemple mathématiquement équivalent à l'une des coordonnées r , θ ou encore φ dans un système de coordonnées sphériques. En d'autres termes, il a pour unique "fonction" d'étiqueter les événements et n'a par conséquent aucune signification physique intrinsèque¹¹.

Le temps propre d'un observateur est doté lui d'une signification physique en soi. Il s'agit du temps qui s'écoule à la montre de cet observateur. L'intervalle $d\tau$ est donc le même (en tant que quantité scalaire) dans tout repère. En relativité restreinte, ce temps propre s'identifie au temps coordonnée dans le repère où l'observateur est au repos. Ainsi, en vertu du principe d'équivalence, il en sera localement de même en relativité générale (en considérant le repère inertiel tangent à la ligne d'univers de l'observateur dans lequel la métrique se réduit à celle de Minkowski).

Liens entre les échelles de temps coordonnée

Si on considère un observateur situé au centre de masse d'un corps du système solaire, on peut, en vertu du principe d'équivalence, trouver un système de coordonnées $(w^0 = cu, w^1, w^2, w^3)$ en co-mouvement avec l'observateur dans lequel on ait :

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = c^2 du^2$$

11. Pour s'en convaincre, il suffit de se souvenir que les équations du champ étant covariantes, elles sont invariantes sous une transformation arbitraire du système de coordonnées utilisé, laquelle peut être quadri-dimensionnelle .

où u désigne le temps coordonnée du système de référence de l'observateur et τ le temps propre de cet observateur. Si cet observateur est placé dans un système de coordonnées $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, on a :

$$ds^2 = c^2 g_{00} dt^2 + 2c g_{0i} dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j$$

On aboutit à la relation différentielle reliant les temps coordonnés associés à un repère planétocentrique et à un repère quelconque :

$$du = dt(g_{00} + 2g_{0i}v^i/c + g_{ij}v^i v^j/c^2)^{1/2}$$

où v^i sont les composantes de la vitesse de l'observateur dans le repère S .

En utilisant le développement de la métrique au voisinage de la métrique de Minkowski $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, on trouve au quatrième ordre en $1/c$:

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{1}{2}h_{00}^{(2)} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{3}{4}h_{00}^{(2)}\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{2}h_{00}^{(4)} - \frac{1}{8}(h_{00}^{(2)})^2 + h_{0i}^{(3)}\frac{v^i}{c} \quad (4.10)$$

Cette relation différentielle (donc locale) a été intégrée pour les corps suivants : Mercure, Vénus, la Terre, Mars et la Lune, en prenant BRS pour système de coordonnées $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$. Les résultats sont présentés en annexe sous la forme de séries de Fourier-Poisson du temps coordonnée barycentrique TCB.

Chapitre 5

Intégrateur géodésique

5.1 Introduction

Les moyens de mesure actuels, qu'il s'agisse des tirs laser sur satellites artificiels de la Terre et sur la Lune (SLR et LLR), des données d'interférométrie à très longue base (VLBI) ou des données radar, ont atteint un niveau de précision tel que les effets prédits par la théorie de la relativité générale sur la dynamique des corps ne peuvent pas être négligés. Cela implique de considérer la relativité générale comme le cadre sous-tendant la modélisation des trajectoires des corps dans le système solaire, voisinage de la Terre compris. On obtient ainsi des modèles correctifs aux prévisions newtoniennes, à la fois pour ce qui est de la prédiction des orbites et pour la réduction des données collectées depuis la Terre (par exemple, correction de précession géodésique et correction de Lense - Thirring pour un satellite artificiel de la Terre).

D'après le principe des géodésiques, un corps test soumis à l'action d'un champ de gravitation suit une trajectoire géodésique. L'équation différentielle d'une géodésique (1.17) s'écrit explicitement en fonction des dérivées partielles des coefficients de la métrique. La métrique, elle, est solution des équations du champ d'Einstein pour la distribution de masse et d'énergie source du champ de gravitation. Ainsi, la connaissance de la métrique associée à la distribution d'énergie et d'impulsion du système physique permet de connaître les équations du mouvement d'un corps test. On les écrit explicitement¹:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (5.1)$$

1. On utilise la convention de sommation d'Einstein et le système de coordonnées (x^α) pour $\alpha = 0..3$.

où λ représente le paramètre affine du problème. Le paramètre affine λ est choisi en fonction du type de particule test choisi (photon ou particule massive) pour l'intégration. Dans le cas d'une particule de matière, nous pourrions choisir le temps propre. Dans le cas du photon, ce choix est impossible puisque pour celui-ci $ds^2 = 0$, mais le choix de λ n'est pas fondamental en ce sens que la trajectoire du photon nous intéresse plus que son équation horaire.

5.2 Méthode

Le système à intégrer est le système (5.1) transformé en un système d'ordre 8 en posant :

$$\begin{cases} u^\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \\ \frac{du^\alpha}{d\lambda} &= -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu \end{cases} \quad (5.2)$$

Les symboles de Christoffel apparaissant dans (5.2) s'expriment en fonction des dérivées partielles de la métrique² :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} (g_{\mu\kappa, \nu} + g_{\kappa\nu, \mu} - g_{\mu\nu, \kappa}) \quad (5.3)$$

où $g^{\mu\nu}$ désigne la métrique inverse reliée à $g_{\mu\nu}$ par :

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (5.4)$$

Dans les applications que nous envisageons, la métrique $g_{\mu\nu}$ est soit la métrique barycentrique en coordonnées cartésiennes (3.4), soit la métrique géocentrique, soit une métrique solution des équations du champ (Schwarzschild (6.1), Kerr (6.3), Levi-Civita).

Dans le cadre de l'approximation champs faibles et vitesses faibles, on développe la métrique $g_{\mu\nu}$ au voisinage de la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

avec

$$\eta_{00} = 1 \quad , \quad \eta_{0i} = 0 \quad , \quad \eta_{ij} = -\delta_{ij} \quad (5.6)$$

On développe les coefficients $h_{\mu\nu}$ selon les puissances de $1/c$:

$$\begin{cases} h_{00}(t, \mathbf{r}) &= c^{-2} h_{00}^{(2)}(t, \mathbf{r}) + c^{-4} h_{00}^{(4)}(t, \mathbf{r}) + c^{-5} h_{00}^{(5)}(t, \mathbf{r}) + \dots \\ h_{0k}(t, \mathbf{r}) &= c^{-3} h_{0k}^{(3)}(t, \mathbf{r}) + c^{-5} h_{0k}^{(5)}(t, \mathbf{r}) + c^{-6} h_{0k}^{(6)}(t, \mathbf{r}) + \dots \\ h_{jk}(t, \mathbf{r}) &= c^{-2} h_{jk}^{(2)}(t, \mathbf{r}) + c^{-4} h_{jk}^{(4)}(t, \mathbf{r}) + c^{-5} h_{00}^{(5)}(t, \mathbf{r}) + \dots \end{cases} \quad (5.7)$$

2. Avec la notation usuelle $()_{,\kappa} = \frac{\partial ()}{\partial x^\kappa}$.

où les $h_{\mu\nu}^{(k)}$ dépendent des potentiels et potentiels vecteurs au point (t, \mathbf{r}) .

Pour le calcul de $g^{\mu\nu}$, on utilise un développement analogue à (5.5) :

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \quad (5.8)$$

avec :

$$\eta^{00} = 1 \quad , \quad \eta^{0i} = 0 \quad , \quad \eta^{ij} = -\delta^{ij} \quad (5.9)$$

Les coefficients $h^{\mu\nu}$ s'écrivent alors au moyen des coefficients $h_{\mu\nu}$ selon :

$$\begin{cases} h^{00} &= -h_{00} + (h_{00})^2 + \dots \\ h^{0i} &= h_{0i} - h_{00}h_{0i} + h_{0s}h_{is} + \dots \\ h^{ij} &= -h_{ij} - h_{is}h_{js} + \dots \end{cases} \quad (5.10)$$

Les symboles de Christoffel (5.3), se réduisent à :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\kappa} (h_{\mu\kappa, \nu} + h_{\kappa\nu, \mu} - h_{\mu\nu, \kappa}) \quad (5.11)$$

et sont calculés à l'aide d'une formule de dérivation numérique à l'ordre 4 :

$$f'(x) = \frac{1}{12} (f(x - 2h) + 8f(x - h) - 8f(x + h) - f(x + 2h)) + O(h^5) \quad (5.12)$$

Le choix de la valeur de h dépend du type de problème à traiter (photon dans le système solaire, satellite artificiel de la Terre, satellite naturel des planètes, planètes, ...). Une étude des divergences entre dérivation numérique et dérivation exacte pour une fonction générique $f(x) = \frac{1}{x}$ donne les valeurs admissibles pour le paramètre h . Le choix a été fait, par soucis d'économie de temps de calcul, de calculer toutes les dérivées partielles de la métrique ainsi que la métrique inverse au point courant, avant d'entreprendre le calcul des seconds membres du système (5.2).

L'intégration est effectuée à l'aide d'un intégrateur numérique du type DOPRI8³. Cet intégrateur donne la trajectoire paramétrique d'une particule test dans la métrique choisie. Cette trajectoire est une géodésique du champ extérieur. Ainsi nous obtenons en sortie quatre fonctions discrètes du paramètre affine λ , $x^0(\lambda) = ct(\lambda)$ et $x^i(\lambda)$ pour $i = 1..3$.

3. Schéma explicite de Runge-Kunta d'ordre élevé, fondé sur les formules de Prince et Dormet avec pas d'intégration variable [HNW87].

5.3 Calcul des coefficients $h_{\mu\nu}$

La donnée des coefficients $h_{\mu\nu}$ par le choix d'une métrique (3.4 ou 6.1 ou 6.3 ou autre...) permet de calculer la métrique $g_{\mu\nu}$ à l'aide de (5.5), ainsi que leurs dérivées partielles en utilisant la formule (5.12), puis la métrique inverse d'après le formulaire (5.10) donc les seconds membres de (5.2) après évaluation des symboles de Christoffel (5.3).

Dans le cas de la métrique barycentrique (3.4), on utilise une solution planétaire pour substituer les valeurs numériques des coordonnées dans (3.4). Au voisinage d'un corps massif, il peut être utile de remplacer l'approximation masse ponctuelle par un développement plus complet du potentiel gravitationnel de la forme :

$$U(r, \varphi, \theta) = \frac{GM}{r} \left[\sum_l \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{r} \right)^l \bar{P}_{lm}(\sin(\varphi)) (\bar{C}_{lm} \cos m\theta + \bar{S}_{lm} \sin m\theta) \right] \quad (5.13)$$

5.4 Tests et résultats

5.4.1 Géodésique isotrope - le cas du photon

Les trajectoires des rayons lumineux sont des géodésiques isotropes le long desquelles on a $ds^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$. Dans ce cas, seule la trajectoire nous intéresse et le choix du paramètre λ est arbitraire. La condition $ds^2 = 0$ sert à normaliser la quadrivitesse u^μ au cours de l'intégration.

Pour ce cas, nous avons choisi pour l'intégration la métrique de Schwarzschild (6.1) avec pour corps central le Soleil. La relativité générale prédit, dans ce cadre, une déflexion des rayons lumineux passant au voisinage du Soleil.⁴

La valeur classique dans ce cas ($\Delta\phi = 1.75''$) a été obtenue avec une excellente précision par l'intégrateur ($\Delta\phi_{RMI} = 1,749''$).

5.4.2 Les particules test - Orbite de Lageos

On désigne par particule test une particule dont le champ propre n'a pas d'in-

4. La vérification expérimentale par Eddington en 1919 de cet effet confirma pour la première fois la nature relativiste du champ de gravitation.

fluence sur le champ extérieur. C'est le cas des planètes dans l'approximation masse ponctuelle et a fortiori des satellites artificiels de la Terre.

La condition de constance de la quadrivitesse le long de la géodésique devient alors :

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2 \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right) \quad (5.14)$$

où τ est le temps propre de la particule. On choisira $\lambda = \tau$ ce qui conduit à la condition de normalisation $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2$.

Nous avons intégré l'orbite du satellite Lageos sur une durée d'un jour, dans le cadre relativiste d'un corps central sphérique en rotation dont la métrique Kerr (6.3) est la solution des équations du champ correspondantes. Dans ce cadre, où la distribution de matière est en mouvement, la théorie de la relativité générale prédit un entraînement des repères inertiels locaux⁵ en plus de l'effet relativiste Schwarzschild lié à la courbure de l'espace-temps.

Les effets d'avance du périhélie de l'orbite c'est-à-dire l'effet de Schwarzschild donné par :

$$\Delta\omega = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (5.15)$$

où M est la masse du corps central, a et e désignant respectivement le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite et la précession de Lense-Thirring ont été retrouvés à la précision machine (figure 5.1).

5.5 Conclusion

Nous avons réalisé un logiciel d'intégration qui permet de calculer les trajectoires des particules massives ou non (ondes électromagnétiques) fondé sur la détermination des géodésiques suivies par ces particules. L'avantage de cette méthode est de traiter directement les équations du mouvement relativiste. Une telle approche est applicable à la réduction des données observationnelles (observations radar, optiques, laser) ainsi qu'au calcul des trajectoires des corps massifs (astéroïdes, planètes, satellites naturels ou artificiels). Afin de compléter cet intégrateur, il faudra y inclure la modélisation des changements de systèmes de référence relativistes dont nous avons obtenu les expressions ainsi que les développements des champs de gravité au voisinage des planètes [Sa96].

5. l'effet Lense-Thirring

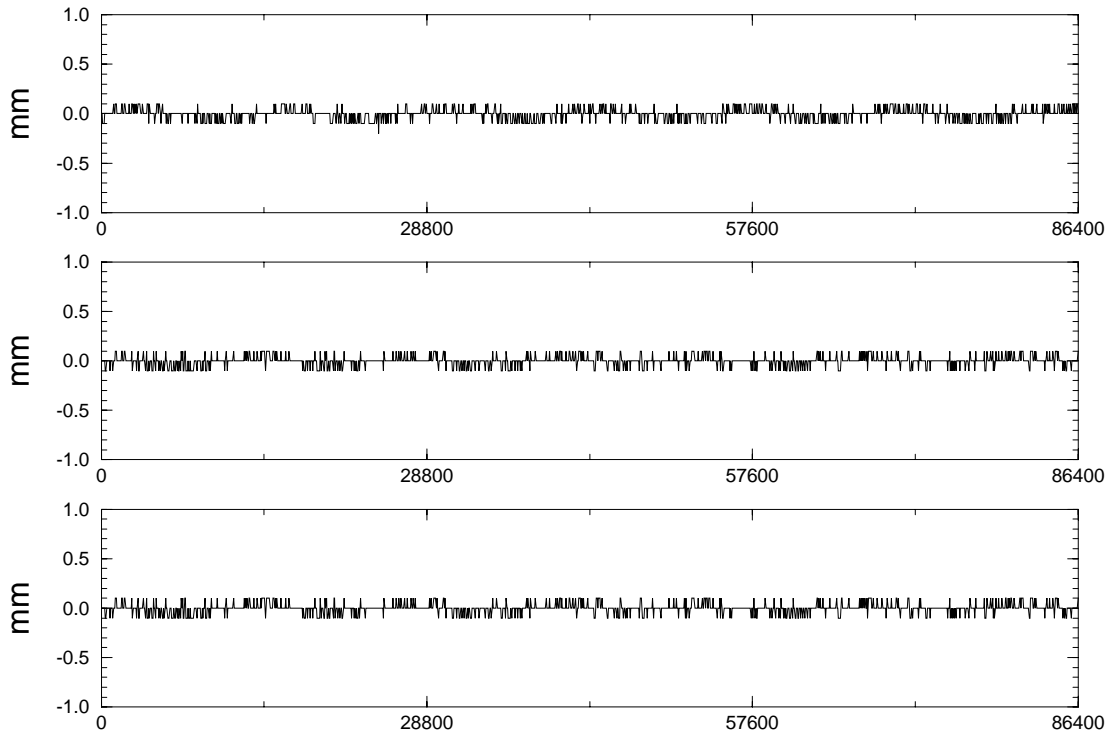


FIG. 5.1 – Différences entre une orbite de Lageos calculé par le CNES et par RMI. Le temps en abscisse est exprimé en secondes. Les trois graphiques correspondent aux différences en radial, along track et cross track (de haut en bas).

Conclusion générale

Ce travail a permis l'obtention d'une nouvelle solution analytique de grande précision pour le mouvement des planètes du système solaire, baptisée VSOP2000, et de solutions dérivées (A, B, C et D). Ces solutions, outre le fait qu'elle utilisent un jeu de masses récemment déterminé (IERS 92), ont été calculées à des précisions très importantes qui permettront leurs utilisations dans de nombreux travaux astronomiques (réduction de données observationnelles, calcul des liens analytiques entre système de référence astronomiques, théorie de la rotation de la Terre,...).

Les solutions ont été obtenues dans le cadre des recommandations de l'Union astronomique internationale de 1991, qui préconisent l'introduction de la théorie de la relativité générale dans les calculs de mécanique céleste présents ou à venir. Il ne s'agit pas tant là d'une contraignante vision de la dynamique dans le système solaire, s'appuyant sur des notions complexes et mathématiquement lourdes de physique gravitationnelle, que d'un souci, justifié, de donner un cadre unique et cohérent à la communauté astronomique dans son ensemble, cadre sous-tendu par une théorie dont aucune preuve observationnelle n'est venu ébranler les fondations (pour le moment peut-être...).

Ces théories analytiques VSOP2000x ont servi de base à la construction des liens spatio-temporels entre les systèmes de référence relativistes barycentrique et géocentrique, liens indispensables si l'on souhaite pouvoir comparer théorie et observations. Nous avons étendu ce travail aux planètes intérieures pour les liens entre les échelles de temps, et le travail entrepris invite à envisager le calcul des liens entre les coordonnées spatiales dans un proche avenir (l'équivalent de la précession géodésique du système GRS pour les planètes intérieures par exemple).

Un étude a été menée sur le problème relativiste planétaire en coordonnées rectangulaires, modélisé par les équations d'Einstein, Infeld et Hoffman (EIH). Linéarisées au voisinage d'une orbite circulaire, les équations EIH forment un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, avec second membre. Les difficultés techniques que nous avons

rencontrées lors du calcul itératif d'une solution à ce système d'équations ont été analysées et une forme différente de la solution est envisagée.

Linéarisées au voisinage d'une orbite képlérienne, les équations EIH forment un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables avec second membre. Nous avons décrit et développé les outils permettant de calculer la solution générale d'un tel système. Ces outils généraux pourront servir pour résoudre d'autres problèmes différentiels du même type, et notamment tout système différentiel linéarisé au voisinage d'une solution particulière, pas nécessairement constante dans le temps.

Enfin, nous avons développé un outil d'intégration des trajectoires géodésiques dans le système solaire, voisinage de la Terre y compris, présenté en fin de mémoire. Cet outil, dont les théories planétaires VSOP2000x ainsi que les liens analytiques entre systèmes de référence deviendront des composantes, a été testé dans quelques cas classiques de gravitation relativiste. Les résultats s'accordent aux prédictions au niveau de précision des ordinateurs utilisés et laissent envisager un développement fiable de telles méthodes pour calculer les trajectoires des photons ou des particules de matière dans le système solaire.

Chapitre 6

ANNEXES

6.1 Annexe 1 - Résolution A4 de l'Union astronomique internationale

Au cours de la XXI^e assemblée générale de l'Union Astronomique Internationale [IAU91], les recommandations suivantes ont été adoptées (entre autres) :

RECOMMANDATION I

considérant

qu'il convient de définir, dans le cadre de la théorie de la relativité générale, plusieurs systèmes de coordonnées spatio-temporelles,

recommande

que les coordonnées spatio-temporelles ($x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$) soient choisies de telle façon que dans chaque système de coordonnées, centré au barycentre de tout ensemble de masses, le carré ds^2 de l'intervalle soit exprimé au plus faible niveau d'approximation sous la forme :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) (dx^0)^2 + \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] \end{aligned}$$

où c est la vitesse de la lumière, τ le temps propre et U la somme des potentiels de gravitation de l'ensemble de masses considéré et d'un potentiel de marée engendré par les corps extérieurs à cet ensemble, ce potentiel étant écrit de façon à s'annuler au barycentre.

Notes pour la recommandation I

1. Cette recommandation introduit explicitement la théorie de la Relativité générale comme base pour la définition du repère de référence spatio-temporel céleste.

2. Cette recommandation reconnaît que l'espace-temps ne peut pas être décrit par un système de coordonnées unique parce qu'un choix judicieux d'un système de coordonnées peut faciliter de façon significative la résolution des problèmes et clarifier la signification physique des phénomènes qui s'y rapportent. Lorsqu'on se trouve loin de l'origine spatiale, le potentiel de l'ensemble de masses auquel appartient le système de coordonnées devient négligeable alors que le potentiel des corps se manifeste seulement par des termes de marée qui disparaissent à l'origine.

3. Le ds^2 proposé ne comprend que les termes nécessaires au niveau actuel de la précision des observations. Des termes d'ordre plus élevé peuvent être ajoutés si les utilisateurs le jugent utile. si l'UAI l'estime nécessaire de façon générale, on ajoutera d'autres termes. Cette addition pourra être faite sans changer le reste de la recommandation.

4. Le potentiel dans la formule donnant le ds^2 doit être défini avec le signe plus.

5. Au niveau de l'approximation qu'implique cette recommandation, le potentiel de marée comprend tous les termes du deuxième degré au moins par rapport aux coordonnées spatiales locales dans le développement du potentiel newtonien créé par les corps extérieurs.

RECOMMANDATION II

considérant

- la nécessité de définir un système de coordonnées barycentriques ayant pour origine spatiale le centre de masse du système solaire et un système de coordonnées géocentriques ayant pour origine spatiale le centre de masse de la Terre, ainsi que l'avantage qu'il y aurait à définir les systèmes de coordonnées analogues pour d'autres planètes et la Lune,

- que les systèmes de coordonnées devraient correspondre aux meilleures réalisations des systèmes de référence spatiaux et temporels,
- que les mêmes unités physiques devraient être utilisées dans tous les systèmes de coordonnées,

recommande que

- les réseaux de coordonnées spatiales ayant pour origine le barycentre du système solaire et le centre de masse de la Terre ne présentent pas de rotation globale par rapport à un ensemble d'objets extragalactiques éloignés,
- les coordonnées temporelles dérivent d'une échelle de temps construite en utilisant des horloges atomiques en fonctionnement sur la Terre,
- les unités physiques de base pour l'espace-temps dans tous les systèmes de coordonnées soient la seconde du système international d'unités (SI) pour le temps propre et le mètre SI pour les longueurs propres, lié à la seconde SI par la valeur de la vitesse de la lumière $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$.

Notes pour la recommandation II

1. Cette recommandation indique les structures et les quantités physiques qui seront utilisées pour construire les repères de référence et les échelles de temps basés sur la définition idéale du système donnée par la recommandation I.

2. La contrainte cinématique relative à la rotation des systèmes de référence géocentrique et barycentrique ne peut être réalisée de façon parfaite. On fait l'hypothèse que la rotation moyenne d'un grand nombre d'objets extragalactiques peut être considérée comme représentant la rotation de l'Univers que l'on admet être nulle.

3. Si le système de référence barycentrique, tel qu'il est défini par cette recommandation, est utilisé dans des études de dynamique dans le système solaire, les effets de la précession géodésique d'origine galactique peuvent devoir être pris en compte.

4. De plus, la contrainte cinématique relative à l'état de rotation du système de référence géocentrique, tel qu'il est défini dans cette

recommandation, implique que si on effectue des études de dynamique dans ce système (par exemple les mouvements de la Lune ou des satellites de la Terre), les effets variables avec le temps de la précession géodésique du repère géocentrique par rapport au repère barycentrique doivent être pris en compte en introduisant les termes d'inertie correspondant dans les équations du mouvement.

5. Les constantes et grandeurs astronomiques seront exprimées en unité du Système international (SI) sans facteur de conversion qui dépendraient des systèmes de coordonnées dans lesquels elles sont mesurées.

RECOMMANDATION III

considérant

- qu'il est souhaitable de normaliser les unités et les origines des temps coordonnées utilisés en astronomie,

recommande que

- les unités d'échelle de temps-coordonnées de tous les systèmes de coordonnées centrés au barycentre d'un ensemble de masses soient choisies de sorte qu'elles soient toutes compatibles avec l'unité de temps propre, la seconde SI,
- les lectures de ces temps-coordonnées soient 1977 janvier 1, $0^h 0^m 32.184^s$ exactement pour 1977 janvier 1, $0^h 0^m 0^s$ TAI exactement (JD=2443144.5 TAI), au géocentre.
- les temps-coordonnées dans les systèmes de coordonnées qui ont leur origine spatiale respectivement au centre de masse de la Terre et au barycentre du système solaire et qui sont établis conformément aux sections 1. et 2. ci-dessus soient désignés par les Temps-coordonnée géocentrique (TCG) et Temps-coordonnée barycentrique (TCB).

Notes pour la recommandation III

1. Dans le domaine commun à deux systèmes de coordonnées quelconques, la loi de transformation tensorielle appliquée au tenseur métrique est valable sans modification supplémentaire de l'unité de temps. En conséquence, la différence des temps-coordonnées de ces systèmes présente une variation séculaire. La Recommandation 5 (1976) des commissions de l'UAI 4, 8, et 31, complétée par

la Recommandation 5 (1979) des commissions de l'UAI 4, 19, et 31, spécifie que le temps dynamique terrestre (TDT) et le temps dynamique barycentrique (TDB) ne doivent différer que par des variations périodiques. Il en résulte que TDB et TCB ont une différence de marche. La relation entre ces échelles de temps, en secondes, est donnée par :

$$TCB - TDB = L_B \times (JD - 2443144,5) \times 86400.$$

La valeur actuellement estimée de L_B est $1,550505 \times 10^{-8} (\pm 1 \times 10^{-14})$ (Fukushima et al., *Celestial Mechanics*, 38, 215, 1986).

2. La relation TCB-TCG exige une transformation quadri-dimensionnelle complète :

$$TCB - TCG = c^{-2} \left[\int_{t_0}^t (v_e^2/2 + U_{ext}(x_e)) dt + \mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \right].$$

\mathbf{x}_e et \mathbf{v}_e désignant la position et la vitesse barycentrique du centre de masse de la Terre et \mathbf{x} la position barycentrique de l'observateur. Le potentiel extérieur U_{ext} est le potentiel newtonien de tous les corps du système solaire, sauf la Terre. Dans l'intégrale, $t = TCB$ et t_0 est choisi pour être en accord avec les origines spécifiées par la note 3. Comme approximation de TCB-TCG, exprimé en secondes, on peut utiliser :

$$TCB - TCG = L_C \times (JD - 2443144,5) \times 86400 + c^{-2} \mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + P.$$

La valeur actuellement estimée de L_C est $1,480813 \times 10^{-8} (\pm 1 \times 10^{-14})$ (Fukushima et al., *Celestial Mechanics*, 38, 215, 1986). L_C peut être exprimé par $[3GM/2c^2a] + \epsilon$ où G est la constante de la gravitation, M la masse du Soleil, a est la distance héliocentrique moyenne de la Terre, et où ϵ est un très petit terme (de l'ordre de 2×10^{-12}) provenant du potentiel des planètes au niveau de la Terre. La quantité P représente les termes périodiques qui peuvent être évalués en utilisant la formule analytique de Hirayama et al. ("Analytical expression of $TDB - TDT_0$ ", in *Proceedings of the IAG Symposia, UGGI XIXe Assemblée générale, Vancouver, 10-22 août, 1987*). Pour les observateurs sur la surface de la Terre, les termes dépendant de leurs coordonnées terrestres sont diurnes, avec une amplitude maximale de $2,1 \mu s$.

3. Les origines des temps coordonnées ont été arbitrairement fixées de sorte que ces temps coïncident tous avec le Temps terrestre

(*TT*) de la recommandation IV, au géocentre, pour 1977 janvier 1, $0^h 0^m 0^s$ (Voir note 4 de la recommandation IV).

4. Quand des réalisations de *TCB* et *TCG* sont nécessaires, il est suggéré que ces réalisations soient désignées par des expressions telles que *TCB(xxx)*, où *xxx* indique la source de l'échelle de temps réalisée (par exemple *TAI*) et la théorie utilisée pour la transformation en *TCB* ou *TCG*.

RECOMMANDATION IV

considérant

- que les échelles de temps utilisées pour dater les événements observés depuis la surface de la Terre ainsi que pour la métrologie terrestre doivent avoir comme unité d'échelle la seconde du SI, telle qu'elle est réalisée par des étalons terrestres de temps,
- la définition du temps atomique international (*TAI*), approuvée par la 14^e Conférence générale des poids et mesures (1971) et complétée par une déclaration de la 9^e session du Comité consultatif pour la définition de la seconde (1980)

recommande que

- la référence temporelle pour les éphémérides apparentes géocentriques soit le Temps terrestre (*TT*),
- *TT* soit une échelle de temps différant du *TCG* de la recommandation III par une marche constante, l'échelle de *TT* étant choisie de sorte qu'elle s'accorde avec la seconde du SI sur le géoïde
- à l'instant 1977 janvier 1, $0^h 0^m 0^s$ *TAI* exactement, la lecture de *TT* soit 1977 janvier 1, $0^h 0^m 32.184^s$ exactement.

Notes pour la recommandation IV

1. La base de la mesure du temps sur la Terre est le Temps atomique international (*TAI*) qui est mis à la disposition de ses utilisateurs par la publication de corrections à ajouter aux lectures des échelles de temps et horloges nationales. L'échelle de temps *TAI* a été définie par la 59^e session du Comité international des poids et mesures (1971) comme une échelle de temps réalisée. Comme

les erreurs dans la réalisation du TAI ne sont pas toujours négligeables, on a jugé nécessaire de définir une forme idéale du TAI, mis à part le décalage de 32,184s, qui est maintenant désigné par Temps terrestre, TT.

2. L'échelle de temps TAI est établie et disséminée suivant le principe de la synchronisation coordonnée, dans le système de coordonnées géocentrique, comme cela a été expliqué dans les documents CCDS, 9e session (1980) et Rapports du CCIR, 1990, annexe au volume VII (1990).

3. Afin de définir TT, il est nécessaire de définir précisément le système de coordonnées auquel il appartient en donnant sa métrique relativiste. Compte tenu des incertitudes en fréquence des meilleurs étalons, il suffit à présent (1991) d'employer la métrique donnée dans la recommandation I.

4. Pour assurer une continuité approximative avec l'argument temporel précédemment utilisé pour les éphémérides, le Temps des éphémérides TE, un décalage de temps est introduit de sorte que $TT - TAI = 32,184^s$ exactement pour 1977 janvier 1, 0^h TAI. Cette date correspond à la mise en pratique d'un pilotage de la fréquence du TAI, introduit pour que l'unité d'échelle du TAI reste en accord étroit avec les meilleures réalisations de la seconde du SI sur le géoïde. On peut considérer que TT est équivalent au TDT défini par la Recommandation 5 (1976) des commissions de l'UAI 4, 8, et 31 et par la Recommandation 5 (1979) des commissions de l'UAI 4, 19, et 31

5. La divergence entre TAI et TT est une conséquence des défauts physiques des étalons atomiques de temps. Dans l'intervalle 1977-1990, outre le décalage constant de 32,184^s, l'écart entre TAI et TT est probablement resté entre les limites approximatives de $\pm 10\mu s$. On espère que cet écart s'accroîtra plus lentement à l'avenir, par suite de l'amélioration des étalons de temps. Dans bien des cas, en particulier pour la publication d'éphémérides, cet écart est négligeable. Dans ces cas, on peut déclarer que l'argument des éphémérides est $TAI + 32,184^s$.

6. Le Temps terrestre TT diffère du TCG de la Recommandation III par un facteur d'échelle; on a, en secondes :

$$TCG - TT = L_G \times (JD - 2443144,5) \times 86400.$$

La valeur actuellement estimée de L_G est $6,969291 \times 10^{-10} (\pm 3 \times 10^{-16})$. Cette valeur numérique est déduite de la dernière estimation du potentiel gravitationnel sur le géoïde, $W = 62636860 (\pm 30) \text{m}^2/\text{s}^2$ (Chovitz, *Bulletin Géodésique*, 62, 359, 1988). Les deux échelles de temps sont distinguées par des noms différents afin d'éviter les erreurs de facteur d'échelle. La relation entre les quantités L_B et L_C de la recommandation III, notes 1 et 2, et L_G est $L_B = L_C + L_G$.

7. L'unité d'échelle de TT est la seconde du SI sur le géoïde. Les multiples usuels, tels que le jour de TT de 86400 secondes du SI sur le géoïde et le siècle julien de TT de 36525 jours de TT , peuvent être employés, pourvu que la référence au TT soit clairement indiquée chaque fois qu'il peut y avoir ambiguïté. Les intervalles d'échelles correspondant de TAI et de TT ont des durées qui s'accordent dans la limite des incertitudes des étalons atomiques primaires (par exemple à moins de $\pm 2 \times 10^{-14}$ en valeur relative, en 1990).

8. Les repères de l'échelle TT peuvent suivre n'importe quel système de datation basé sur la seconde, par exemple la date du calendrier habituelle ou la Date julienne, pourvu que la référence au TT soit clairement indiquée chaque fois qu'il peut y avoir ambiguïté.

9. Il est suggéré que les réalisations de TT soient désignées par $TT(\text{xxx})$ où xxx est un identificateur. Dans la plupart des cas une approximation convenable est :

$$TT(TAI) = TAI + 32,184^s.$$

Cependant, dans certaines applications, il peut être avantageux d'utiliser d'autres réalisations. Le BIPM, par exemple, a produit des échelles de temps telles que $TT(\text{BIPM90})$.

RECOMMANDATION V

considérant

- que des travaux importants ont déjà été réalisés en employant le Temps dynamique barycentrique (TDB), défini par la recommandation 5 (1976) des commissions de l'UAI 4, 8, et 31 et la Recommandation 5 (1979) des commissions de l'UAI 4, 19, et 31.

reconnaît

- que lorsqu'une discontinuité avec les travaux antérieurs est jugée indésirable, TDB peut être utilisé.

Note pour la recommandation V

Certaines grandeurs et constantes astronomiques ont des valeurs numériques qui dépendent de l'usage de TDB ou de TCB. Quand on donne ces valeurs, l'échelle de temps employée doit être spécifiée.

6.2 Annexe 2 - Quelques solutions des équations du champ

A part quelques métriques très particulières solutions des équations du champ, correspondant à des distributions d'énergie et d'impulsions tout aussi particulières, (Schwarzschild, Kerr, Robertson-Walker,...), on ne connaît pas de solution exacte aux équations d'Einstein, même dans des cas aussi simples que le problème de Kepler. On ne sait même pas si une telle solution existe compte tenu qu'on ignore si les algorithmes d'approximation proposés donnent des séries asymptotiques à la solution. D'autre part, le problème de Cauchy n'est pas résolu dans le cas général. Autant il est possible d'affirmer l'existence de solution "suffisamment proche" de l'espace-temps plat, autant des données de Cauchy lisses¹ arbitraires ne permettent pas d'affirmer l'existence et l'unicité de solutions globales, dépendant de façon continue des données initiales et causales. Le problème de Cauchy des équations d'Einstein est traité en détail dans [Lic55].

Néanmoins, les métriques suivantes permettent d'effectuer en mécanique céleste relativiste les calculs d'orbitographie et de métrologie à une très bonne approximation.

Métrique de Schwarzschild

Considérons un espace-temps à symétrie sphérique, statique (une étoile sans rotation par exemple). En coordonnées (t, r, θ, ϕ) , la métrique associée à un tel espace-temps s'écrit en dehors du corps massif :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1)$$

où M désigne la masse du corps central.

Lorsque $r \rightarrow \infty$, (6.1) tend vers la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques. (t, r, θ, ϕ) mesurent donc le temps propre et les distances propres des observateurs à l'infini.

La singularité en $r = \frac{2GM}{c^2}$ est une pathologie de la métrique liée au choix du système de coordonnées (l'analogie de l'origine de l'espace euclidien en coordonnées sphériques), à l'inverse de la singularité $r = 0$, singularité vraie de l'espace en laquelle les invariants de courbure divergent².

1. Lisse signifie ici non-analytique. En effet, des données de Cauchy analytiques permettent d'assurer l'existence et l'unicité des solutions.

2. Par exemple, $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ vaut $48(GM/r^3c^2)^2$, régulier en $r = 2GM/c^2$ mais singulier en $r = 0$.

Cette métrique permet de calculer les trajectoires post-newtoniennes des corps et ainsi la correction à l'avance des périhélie planétaires dans le problème des deux corps :

$$\Delta\omega = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (6.2)$$

ainsi que l'effet Shapiro et la déflexion des rayons lumineux au voisinage d'un corps massif.

Métrique de Kerr

La solution de Kerr est la métrique d'un corps sphérique en rotation. Cette métrique prend la forme suivante :

$$ds^2 = p(r, \theta)c^2 dt^2 + 2b(r, \theta)c dt dr + 2d(r, \theta) \sin^2 \theta c dt d\phi - q(r, \theta) dr^2 - a^2(r, \theta) d\theta^2 - f^2(r, \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 - 2g(r, \theta) \sin^2 \theta dr d\phi \quad (6.3)$$

Les fonctions a , b , d , f , g , p et q sont paires en la variable θ et une transformation ad-hoc du système de coordonnées permet d'annuler les fonctions b et g . Usuellement, les trois formes suivantes sont utilisées :

$b(r, \theta)$	$\frac{2mr}{R^2}$	0	$\frac{2mr}{r^2 + A^2}$	(6.4)
$q(r, \theta)$	$1 + \frac{2mr}{R^2}$	$\frac{R^2}{r^2 - 2mr + A^2}$	$\frac{R^2}{r^2 + A^2} \left(1 + \frac{2mr}{r^2 + A^2}\right)$	
$g(r, \theta)$	$A \left(1 + \frac{2mr}{R^2}\right)$	0	$\frac{2mrA}{r^2 + A^2}$	

tandis que les autres fonctions ont pour valeur :

$$p(r, \theta) = 1 - \frac{2mr}{R^2} \quad d(r, \theta) = \frac{2mrA}{R^2} \quad a^2(r, \theta) = R^2$$

$$f^2(r, \theta) = r^2 + A^2 + \frac{2mr}{R^2} A^2 \sin^2 \theta$$

avec $R^2 = r^2 + A^2 \cos^2 \theta$. A et $m = \frac{GM}{c^2}$ sont des constantes de la solution adoptée.

En calculant cette métrique dans le cas des champs faibles, on trouve :

$$A = \frac{2I\omega}{cM}$$

où ω est la vitesse de rotation du corps central et I son moment d'inertie, valant $\frac{ML^2}{5}$ pour une sphère homogène de rayon L . Pour une étude plus détaillée de cette métrique, on consultera à profit [BL67] et [Car66].

6.3 Annexe 3 - Produit intégral sur un espace de Banach

6.3.1 Notations

Soit F un espace de Banach de dimension finie. Nous appellerons $\mathcal{C}^k(I, F)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^k définies sur un compact I de \mathbb{R} que nous supposerons être de la forme $[0, T]$ et à valeur dans F . Nous munirons cet espace vectoriel de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\| \quad (6.5)$$

où $\|f(t)\|$ désigne la norme de $f(t)$ dans F .

On notera $\mathcal{C}^k(I, \text{End}(F))$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeur dans les endomorphismes de F . Pour A élément de $\mathcal{C}^k(I, \text{End}(F))$, nous noterons :

$$\|A\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|A(t)\| \quad (6.6)$$

où cette fois-ci, $\|A(t)\|$ désigne la norme de $A(t)$ déduite de la norme sur F par une relation du type :

$$\|A(t)\| = \sup_{X \in F, \|X\|=1} \|A(t).X\| \quad (6.7)$$

6.3.2 Produit intégral de fonctions en escalier

Soient c et t deux réels tels que $0 \leq c < t \leq T$. Soient $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ n réels tel que $c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Soient A_1, \dots, A_n n endomorphismes de F . On note A l'application :

$$\begin{aligned} A : [c, t] &\rightarrow \text{End}(F) \\ s &\mapsto \begin{cases} A_i & \text{si } s \in [t_{i-1}, t_i[\text{ pour } i \neq n \\ A_n & \text{si } s \in [t_{n-1}, t] \end{cases} \end{aligned} \quad (6.8)$$

A est une fonction en escalier dont, par définition, le produit intégral sur $[c, t]$ est :

$$R(A, c, t) = \exp[(t_n - t_{n-1})A_n] \dots \exp[(t_1 - t_0)A_1] \quad (6.9)$$

Remarque

On a pour $A \equiv \text{cste}$, avec la notation (3.43) :

$$R(A, c, t) = \exp\left(\int_c^t A(s)ds\right) = e^{A(t-c)} \quad (6.10)$$

Lemme 1 Soient A et B deux fonctions en escalier définies sur $[c, t]$ et à valeurs dans $End(F)$. Alors :

$$\|R(A, c, t) - R(B, c, t)\| \leq (t - c)e^{(t-c)M} \|A - B\|_\infty$$

où $M = \max(\|A\|_\infty, \|B\|_\infty)$.

Démonstration

Remarquons que le produit intégral ne change pas si l'on rajoute des subdivisions à l'intervalle $[c, t]$ si bien qu'on peut se donner une subdivision $c = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ telle que $A \equiv cste$ et $b \equiv cste$ sur tout intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

De plus, en notant $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$, $a_i = \exp[\Delta t_i A_i]$ et $b_i = \exp[\Delta t_i B_i]$, on a :

$$\begin{aligned} \|R(A, c, t) - R(B, c, t)\| &= \|a_n \cdot a_{n-1} \dots a_1 - b_n \cdot b_{n-1} \dots b_1\| \\ &\leq \|a_n \dots a_1 - a_n \dots a_2 \cdot b_1\| + \\ &\quad \|a_n \dots a_2 \cdot b_1 - a_n \dots a_3 \cdot b_2 \cdot b_1\| + \dots \\ &\quad + \dots + \|a_n \cdot b_{n-1} \dots b_1 - b_n \dots b_1\| \\ &\leq \|a_1 - b_1\| \cdot \|a_n\| \dots \|a_2\| \\ &\quad + \|a_2 - b_2\| \cdot \|a_n\| \dots \|a_3\| \cdot \|b_1\| + \dots \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \|a_n - b_n\| \cdot \|b_{n-1}\| \dots \|b_1\| \end{aligned}$$

Enfin, l'application exponentielle est continue sur $End(F)$ et vérifie pour A endomorphisme de F , $\|\exp(A)\| \leq \exp\|A\|$, si bien que l'on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} \|R(A, c, t) - R(B, c, t)\| &\leq \Delta t_1 \|A_1 - B_1\| \exp[\Delta t_1 M] \exp[\Delta t_2 M] \dots \exp[\Delta t_n M] \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \Delta t_n \|A_n - B_n\| \exp[\Delta t_n M] \exp[\Delta t_{n-1} M] \dots \exp[\Delta t_1 M] \\ &\leq (t - c) \|A - B\|_\infty e^{(t-c)M} \end{aligned}$$

†

Le lemme précédent permet, pour A fonction réglée, c'est-à-dire limite uniforme d'une suite (A_k) de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ d'affirmer que

$$\|R(A_p, c, t) - R(A_q, c, t)\| \leq (t - c)e^{(t-c)M} \|A_p - A_q\|_\infty \quad (6.11)$$

où M est un majorant des $\|A_k\|$, si bien que la suite $R(A_k, c, t)$ est de Cauchy. F étant un espace de Banach, $End(F)$ est complet donc $R(A_k, c, t)$ est convergente. On définit ainsi pour $A : [c, t] \rightarrow End(F)$ fonction réglée :

$$R(A, c, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} R(A_k, c, t) \quad (6.12)$$

Propriété 2 Soient A un élément de $\mathcal{C}^0(I, End(F))$, c et t deux réels de I . On a les propriétés :

i) $\|R(A, c, t)\| \leq e^{(t-c)\|A\|_\infty}$.

ii) $R(A, c, t)$ est inversible et $R(A, c, c) = Id$. Ceci permet de définir pour $c > t$ $R(A, c, t)$ par $[R(A, t, c)]^{-1}$.

iii) (Relation de Chasles) Avec la convention du ii), si $A : I \rightarrow End(F)$ est une fonction réglée, on a $R(A, c, t) = R(A, u, t)R(A, c, u)$ pour c, t et u dans I .

iv) Si $c < u < t$ et si $A : I \rightarrow End(F)$ est continue alors $f(u) = R(A, c, u)$ est dérivable et $f'(u) = A(u)f(u)$.

Démonstration

i) Etant donnée une suite (A_k) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers A sur $[c, t]$ (une telle suite existe car toute fonction continue est réglée). On a en vertu de la définition de $R(A_k, c, t)$ et de la propriété $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|_\infty)$:

$$\|R(A_k, c, t)\| \leq e^{(t-c)\|A_k\|_\infty} \quad (6.13)$$

La propriété s'en déduit par continuité de la norme.

ii) Pour une fonction en escalier A , nous avons

$$[R(A, c, t)]^{-1} = \exp[-\Delta t_1 A_1] \dots \exp[-\Delta t_n A_n] \quad (6.14)$$

avec les notations du lemme 1. Par continuité de l'application qui à un endomorphisme inversible associe son inverse, nous avons le résultat.

iii) On vérifie aisément le résultat pour une fonction en escalier. Compte tenu du lemme 1, l'application qui, à une fonction en escalier sur $[c, t]$, associe son produit intégral entre c et t est continue pour les topologies définies par $\|\cdot\|_\infty$ sur l'ensemble des fonctions en escalier sur $[c, t]$ et une norme quelconque sur $End(F)$. On prolonge ainsi le résultat aux fonctions réglées par continuité.

iv) Soit (A_k) une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers A sur I . Prenons $|h|$ assez petit pour que A_k soit constant sur $[u, u+h]$. On a

$$R(A_k, u, u+h) = \exp[h.A_k(u)] = Id_E + h.A_k(u) + o(h) \quad (6.15)$$

De plus, d'après la propriété iii), on a

$$\begin{aligned} R(A_k, c, u+h) - R(A_k, c, u) &= (R(A_k, u, u+h) - Id_E)R(A_k, c, u) \\ &= h.A_k(u).R(A_k, c, u) + o(h) \end{aligned}$$

si bien que $f_k(u) = R(A_k, c, u)$ est dérivable. Or, compte tenu du lemme 1, on a

$$\|R(A, c, u) - R(A_k, c, u)\| \leq (u-c)e^{(u-c)M}\|A - A_k\|_\infty \quad (6.16)$$

où $M = \max(\|A\|_\infty, \|A_k\|_\infty)$. Donc, par continuité de A :

$$\sup_{u \in [c, t]} \|R(A, c, u) - R(A_k, c, u)\| \leq (t-c)e^{(t-c)}\|A - A_k\|_\infty \quad (6.17)$$

et la convergence uniforme de la suite (A_k) vers A sur I nous assure que le second membre de cette inégalité tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Ainsi, la suite (f_k) converge uniformément vers f sur $[c, t]$ et les f_k étant dérivable, il en est de même de f .

†

6.4 Annexe 4 - Liens analytiques entre les temps coordonnés

Les tableaux suivants regroupent les coefficients des différences entre les temps coordonnés associés aux repères planétocentriques de Mercure, Vénus, la Terre, Mars et la Lune et TCB, le temps coordonné barycentrique, calculées au centre de masse de ces corps. Ces différences sont écrites sous la forme suivante³ :

$$TCB - TCP = A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots + \sum_{\alpha} t^{\alpha} \sum_i A_{\alpha i} \sin(\omega_{\alpha i} t + \phi_{\alpha i}) \quad (6.18)$$

où $t = TCB$ est compté en milliers d'années juliennes depuis J2000(TDB), les amplitudes A_i et $A_{\alpha i}$ sont en micro-secondes et

$$\omega_{\alpha i} t + \phi_{\alpha i} = \sum_{k=1}^{12} p_{\alpha i k} (\hat{n}_k t + \hat{\varepsilon}_k) = \sum_{k=1}^{12} p_{\alpha i k} \hat{\lambda}_k \quad (6.19)$$

Les amplitudes $A_{\alpha i}$ sont données en colonne 1, les fréquences $\omega_{\alpha i}$ en colonne 2, les phases à l'origine $\phi_{\alpha i}$ en colonne 3. Les entiers $p_{\alpha i k}$ sont donnés dans les colonnes 5 à 16. Les quantités \hat{n}_k désignent les moyens mouvements moyens et $\hat{\varepsilon}_k$ les phases à l'origine J2000(TDB), déduits des constantes d'intégration du tableau (2.8) par les formules (2.29). On trouvera leurs valeurs dans le tableau (2.21).

$\hat{\lambda}_k = \hat{n}_k t + \hat{\varepsilon}_k$ représente donc la longitude moyenne moyenne rapportée à l'équinoxe dynamique J2000(TDB). D , F et l sont les arguments de Delaunay de la Lune.

Enfin, on trouvera en colonne 4 les périodes associées aux fréquences $\omega_{\alpha i}$ en années.

Toutes les séries ont été tronquées au niveau de $0.1 \mu s$ (exceptée la série pour Mars tronquée elle au niveau de $0.5 \mu s$) pour des raisons de place avant tout. Les séries complètes (à la précision de la nanoseconde) sont disponibles sur le serveur de l'Institut de mécanique céleste du *Bureau des longitudes*.

3. Dans le cas de la Terre, nous avons $TCP \equiv TCG$

6.4.1 Mercure

$A_{\alpha i}$ (μs)	$\omega_{\alpha i}$ (rd/ 10^3 ans)	$\phi_{\alpha i}$ (rd)	Period (années)	Argument											
				Me	V	E	M	J	S	U	N	P	D	F	I
— Périodique —															
12618.5976081555036	26087.902736102	3.050744585	.24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1285.9896350681947	52175.805472203	6.101489468	.12	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
196.4116227478963	78263.708208305	2.869048807	.08	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35.5407802378539	104351.610944406	5.919793505	.06	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.0641645784605	130439.513680508	2.687352888	.05	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.9180641734397	25558.211772203	.668709615	.25	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
4.6042373108179	529.690963899	.837242728	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1.9014858006893	213.299076471	5.458338054	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1.7352831592120	25874.603659631	.388217394	.24	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
1.4905430239353	156527.416416610	5.738097597	.04	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.1008611833821	1109.378527071	3.083252804	5.66	2	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.8152791209383	51646.114508304	3.726094971	.12	2	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
.5380238577844	5661.331958049	5.673812473	1.11	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4650352794968	25028.520808304	5.386365632	.25	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
.4477432091610	74.781664531	2.331722428	84.02	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
.4176802272901	27197.281263172	6.168965033	.23	3	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.3277989271670	182615.319152711	2.505656998	.03	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.3138864209979	31749.234694150	2.450249054	.20	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2233725074769	-24978.524209031	.029698324	.25	1	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2042804180853	1059.381927798	1.674120049	5.93	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
.1934279271720	21535.949305124	.592212721	.29	2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1866310768497	26013.121071571	2.061519808	.24	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
.1770678662674	51962.506395732	3.437755701	.12	2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
.1757522669037	26049.769818562	2.234268861	.24	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
.1557320718630	15874.617347075	4.365808048	.40	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1258615873455	77734.017244406	.499759060	.08	3	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
.1151788354557	20426.570778053	.531568747	.31	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1090858063646	51116.423544406	1.655364869	.12	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
.1066332323714	955.599724000	1.054636315	6.58	1	0	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 1 —															
350.0961957729686	26087.902736102	1.515342251	.24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71.3578591556485	52175.805472203	4.565959600	.12	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16.3478928779686	78263.708208305	1.333455110	.08	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.9442067230382	104351.610944406	4.384161304	.06	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.9799461638461	130439.513680508	1.151694946	.05	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2842938442624	529.690963899	6.022487232	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
.2729979327226	213.299076471	3.357079993	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
.2481226219565	156527.416416610	4.202421277	.04	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1088755229919	1109.378527071	4.623890215	5.66	2	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 2 —															
5.0256250298696	26087.902736102	6.224487982	.24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.0137369221743	52175.805472203	3.010788619	.12	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.6880784911921	78263.708208305	6.067881025	.08	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2207193848592	104351.610944406	2.838628115	.06	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Partie polynomiale —															
$1207100806.4134 t - 0.2471 t^2 + 0.0046 t^3 \dots$															

6.4.2 Vénus

$A_{\alpha i}$ (μs)	$\omega_{\alpha i}$ (rd/10 ³ ans)	$\phi_{\alpha i}$ (rd)	Period (années)	Argument											
				Me	V	E	M	J	S	U	N	P	D	F	I
— Periodique —															
571.0593342097112	10213.285389026	.879904669	.62	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15.5794719443231	9683.594425128	5.718803427	.65	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
5.0660183410531	529.690963899	.374656541	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3.3491969744929	9999.986312555	5.444637722	.63	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
2.3700093345832	213.299076471	5.543338724	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2.2459053084610	7860.419272002	5.987076175	.80	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.9330929232127	20426.570778053	1.760375836	.31	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.4834033588531	11790.628908003	4.270264167	.53	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0563413188973	3930.209636001	4.564536795	1.60	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.8052943023724	9153.903461229	5.298278161	.69	0	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
.6843319566866	1577.343518977	5.818262631	3.98	0	2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.5555041053339	26.298322882	.474058606	238.92	0	8	-13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4344824417755	74.781664531	2.457189362	84.02	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
.3578004776933	10138.503724495	.836468792	.62	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
.3368234717175	10175.152471487	1.006596932	.62	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
.3226418123232	9437.762790979	2.386582445	.67	0	4	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2996980984330	-775.522598047	.508726854	8.10	0	3	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2453873525113	191.448240265	5.568707922	32.82	0	1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
.2260117918973	19367.188850255	5.164867130	.32	0	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
.2237745465385	15720.838544004	5.693542197	.40	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1824618592681	9786.687236084	6.196350951	.64	0	1	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
.1378972402375	10404.733629291	6.161297059	.60	0	2	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
.1337508476442	5507.553154978	.962506296	1.14	0	3	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1253867669062	38.132917540	4.498027597	164.77	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
.1217888301870	1059.381927798	.761725353	5.93	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 1 —															
40.2832946165081	10213.285389026	4.033553421	.62	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2801248813204	213.299076471	3.407804228	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
.2564074731942	529.690963899	5.755206074	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
.2729659658374	20426.570778053	4.913679890	.31	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 2 —															
1.6387451796141	10213.285389026	1.923114223	.62	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Partie polynomiale —															
$646023757.8488 t + 0.1300 t^2 + 0.0005 t^3 + \dots$															

6.4.3 Terre

$A_{\alpha i}$ (μs)	$\omega_{\alpha i}$ (rd/10 ³ ans)	$\phi_{\alpha i}$ (rd)	Period (années)	Argument											
				Me	V	T	M	J	S	U	N	P	D	F	I
— Periodique —															
1656.6758812621201	6283.075753025	6.240053719	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22.4175627399204	5753.384789127	4.296979229	1.09	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
13.8398098607404	12566.151506051	6.196903066	.50	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.7701044230676	529.690963899	.444403595	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4.6776013480124	6069.776676554	4.021191356	1.04	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
2.2571366541493	213.299076471	5.543120183	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1.6657536111613	-3.523159567	5.025255007	1783.36	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	0	0	0
1.5549074174825	77713.770263153	5.198466746	.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1.2767862568057	7860.419272002	5.988799437	.80	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.1934432817298	5223.693825228	3.649835094	1.20	0	0	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
1.1155366558655	3930.209636001	1.422732862	1.60	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.7942299259194	11506.769578253	2.322302042	.55	0	0	2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
.6003866261895	1577.343518977	2.678262439	3.98	0	2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4960714427244	6208.294088494	5.696718510	1.01	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
.4864413988316	5884.926740209	.519982011	1.07	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
.4662263343373	6244.942835485	5.866390705	1.01	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
.4473137698229	26.298322882	3.615697210	238.92	0	8	-13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4351693063166	-398.149012816	4.349255169	15.78	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
.4318450758742	74.781664531	2.435989711	84.02	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
.3756646271062	5507.553154978	4.103471357	1.14	0	3	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2430782530193	-775.522598047	3.651819193	8.10	0	3	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2307222306104	5856.477600083	4.773717384	1.07	0	0	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
.2037527375286	12036.460542152	4.333897056	.52	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
.1734232202509	18849.227259076	6.153723073	.33	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1591126915457	10977.078614354	1.890064397	.57	0	0	2	0	-3	0	0	0	0	0	0	0
.1439257564916	-796.298025632	5.957398064	7.89	0	0	2	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
.1379774956032	11790.628908003	1.135973964	.53	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1192573073966	38.132917540	4.550714076	164.77	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
.1189883127390	5486.777727394	1.914505340	1.15	0	0	3	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
.1161161752974	1059.381927798	.873365571	5.93	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
.1018529564998	-5573.142715020	5.984503437	1.13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
— Serie de Poisson de degre 1 —															
102.1577914410662	6283.075753025	4.249034617	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.7068335307796	12566.151506051	4.205908558	.50	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2696092119348	213.299076471	3.400262450	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
.2657484698556	529.690963899	5.836272465	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
.2061499824901	-3.523159567	6.262832297	1783.36	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 2 —															
4.3146630888942	6283.075753025	2.641159049	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1224879017748	12566.151506051	2.436710517	.50	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 3 —															
.1427353863538	6283.075850446	1.128085013	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Partie polynomiale —															
$467313414.9638 t - 0.4090 t^2 + 0.0020 t^3 + \dots$															

6.4.4 Mars

$A_{\alpha i}$ (μs)	$\omega_{\alpha i}$ (rd/ 10^3 ans)	$\phi_{\alpha i}$ (rd)	Period (années)	Argument											
				Me	V	E	M	J	S	U	N	P	D	F	I
— Periodique —															
11419.4399181179961	3340.612382921	.338146194	1.88	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
532.3398105367456	6681.224765841	.676292447	.94	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
37.2169517811428	10021.837148762	1.014437485	.63	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
38.7496666200085	2810.921419022	2.454525909	2.24	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
16.7055314136225	-3.523159567	1.883546176	1783.36	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	0	0	0
7.3395746661991	3127.313306450	2.181514747	2.01	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0
5.2587104952429	5621.842838044	4.904520826	1.12	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0
5.1622517455562	2281.230455123	4.308891532	2.75	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0
4.0848644867063	-398.149012816	1.207757947	15.78	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
3.0835166332216	13362.449531683	1.352582549	.47	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
2.7958057418863	213.299076471	5.245464620	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2.4732025609723	2942.463370105	1.796128207	2.14	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
2.4508636981090	529.690963899	5.837493132	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2.2617659388530	6151.533801942	2.766880954	1.02	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	0
2.2263284747317	2544.314357289	3.231856561	2.47	0	0	2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
1.8825864212889	191.448240265	2.427160227	32.82	0	1	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
1.5837170352141	3337.089223353	2.219005886	1.88	0	0	4	-7	3	0	0	0	0	0	0	0
1.5531268792406	-3344.135542488	1.540669629	1.88	0	0	4	-9	3	0	0	0	0	0	0	0
1.4693671129464	-796.298025632	2.817398096	7.89	0	0	2	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
.8425208179386	5092.151874145	5.185277402	1.23	0	0	0	2	-3	0	0	0	0	0	0	0
.8125979907534	1751.539491224	4.456973574	3.59	0	0	0	1	-3	0	0	0	0	0	0	0
.7952671528864	2146.165344473	4.637610998	2.93	0	0	3	-5	0	0	0	0	0	0	0	0
.7897015982704	2914.014229979	3.543886056	2.16	0	0	0	1	0	-2	0	0	0	0	0	0
.7585028894421	3265.830718390	3.865001703	1.92	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0
.7093012751974	3302.479465381	4.033325654	1.90	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0
.6182012771748	1059.381927798	5.216118388	5.93	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
.5401292159497	-3340.595032948	5.153890157	1.88	0	2	0	-8	8	-6	0	0	0	0	0	0
.5400498637871	3340.629732893	5.830173468	1.88	0	2	0	-6	8	-6	0	0	0	0	0	0
.5318995763813	74.781664531	2.519127168	84.02	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
.5053109510371	8962.455220964	5.266706132	.70	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 1 —															
891.6041945251751	3340.612382921	5.174654807	1.88	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
83.1267594914266	6681.224765841	5.512713990	.94	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
8.7172944589374	10021.837148762	5.850814355	.63	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
2.0765207141943	-3.523159567	3.122713823	1783.36	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	0	0	0
.9629966403709	13362.449531683	6.188932707	.47	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 2 —															
35.5970089972271	3340.612382921	3.621631800	1.88	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6.5546691378261	6681.224765841	4.012174791	.94	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0273479985894	10021.837148762	4.368036505	.63	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 3 —															
.8912042061794	3340.612382921	2.009669458	1.88	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
— Partie polynomiale —															
$306720349.4720 t + 0.2743 t^2 - 0.0028 t^3 + \dots$															

6.4.5 Lune

$A_{\alpha i}$ (μs)	$\omega_{\alpha i}$ (rd/10 ³ ans)	$\phi_{\alpha i}$ (rd)	Period (années)	Argument											
				Me	V	E	M	J	S	U	N	P	D	F	L
— Periodique —															
1656.6584808373127	6283.075753025	6.240053719	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
126.4187764869731	77713.770263153	2.056874093	.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
22.4175037862437	5753.384789127	4.296979226	1.09	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
13.8396105035882	12566.151506051	6.196903056	.50	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8.2814998111493	-5573.142715020	2.842910782	1.13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4.7701060326367	529.690963899	.444403029	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4.6775953363088	6069.776676554	4.021191351	1.04	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
3.4611417215861	161000.683241327	4.412429988	.04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
2.37781292281098	-71430.694510128	1.041586128	.09	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
2.2571359493149	213.299076471	5.543119995	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1.66571603885107	-3.523159567	5.025307240	1783.36	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	0	0	0
1.2767821478804	7860.419272002	5.988799367	.80	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.1934421980438	5223.693825228	3.649834768	1.20	0	0	1	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
1.1155284520139	3930.209636001	1.422732853	1.60	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.7942257530544	11506.769578253	2.322301974	.55	0	0	2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
.7615206020671	149854.397811286	3.815066652	.04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
.6003799118042	1577.343518977	2.678263004	3.98	0	2	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4960706155071	6208.294088494	5.696717886	1.01	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
.4864335727586	5884.926740209	.519981421	1.07	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
.4662258279802	6244.942835485	5.866390744	1.01	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
.4639273271417	83286.912978174	2.355555898	.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
.4473470090845	26.298322882	3.615745253	238.92	0	8	-13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4351731818811	-398.149012816	4.349254839	15.78	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
.4318458527985	74.781664531	2.435992744	84.02	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
.3756835858608	5507.553154978	4.103470359	1.14	0	3	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2726804264472	-90955.550284212	5.084248951	.07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2
.2480860012400	233141.310789459	6.170622547	.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
.2430778876522	-775.522598047	3.651814535	8.10	0	3	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2307227664694	5856.477600083	4.773717637	1.07	0	0	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
.2037522854369	12036.460542152	4.333896777	.52	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
.1877879731079	83996.846016178	5.155277295	.07	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
.1734208958845	18849.227259076	6.153722944	.33	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1591116446840	10977.078614354	1.890064575	.57	0	0	2	0	-3	0	0	0	0	0	0	0
.1471972812609	-88860.055693194	3.628947780	.07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
.1439257126099	-796.298025632	5.957384756	7.89	0	0	2	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
.1416926786622	244287.596219500	.484800577	.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
.1379789309344	11790.628908003	1.135973982	.53	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.1192527406981	38.132917540	4.550758964	164.77	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
.1189918037525	5486.777727394	1.914505069	1.15	0	0	3	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
.1161158860242	1059.381927798	.873362390	5.93	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 1 —															
102.1567183752614	6283.075753025	4.249034615	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.7068089649170	12566.151506051	4.205908517	.50	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.2696124195452	213.299076471	3.400255658	29.46	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
.2657498238845	529.690963899	5.836269244	11.86	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
.2059542484124	-3.523159567	6.262372992	1783.36	0	0	4	-8	3	0	0	0	0	0	0	0
.1466170158599	-71430.694510128	5.333893172	.09	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
— Serie de Poisson de degre 2 —															
4.3146186674225	6283.075753025	2.641159015	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
.4141321957565	77713.770263153	.486123071	.08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
.1535496822499	-5573.142715020	1.272119990	1.13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
.1224859565953	12566.151506051	2.436709971	.50	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Serie de Poisson de degre 3 —															
.1427350040802	6283.075753025	1.128087634	1.00	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— Partie polynomiale —															
$467852844.1081 t - 0.4274 t^2 + 0.0021 t^3 + \dots$															

6.5 Glossaire, Abréviations

\mathcal{M}	Variété topologique
Σ	L'espace-temps de la relativité générale
c	Vitesse de la lumière dans le vide
G	Constante de la gravitation universelle (constante de couplage du champ gravifique)
ds^2	Elément de longueur sur une variété
$\eta_{\alpha\beta}$	Métrique de Minkowski
$g_{\alpha\beta}$	Métrique riemannienne
$h_{\alpha\beta}$	Corrections à la métrique de Minkowski dans l'approximation vitesses faibles, champs faibles
$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$	Symboles de Christoffel
$R_{\alpha\beta}$	Tenseur de Ricci
R	Courbure riemannienne scalaire
$T_{\alpha\beta}$	Tenseur énergie-impulsion
∂_{α} ou $_{,\alpha}$	Dérivation partielle par rapport à x^{α}
∇_{α} ou $_{;\alpha}$	Dérivation covariante par rapport à x^{α}
v^i	Composantes de la vitesse ($i = 1..3$)

<i>UAI</i>	Union Astronomique Internationale
<i>JPL</i>	<i>Jet Propulsion Laboratory</i>
<i>Bdl</i>	<i>Bureau des longitudes</i>
<i>IERS</i>	<i>International Earth Rotation Service</i>
<i>IMCCE</i>	<i>Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides</i>
<i>DExxx</i>	Solutions numériques du <i>JPL</i> ($xxx = 200, 403, 405, 406$)
<i>VSOP82</i>	Solution analytique du <i>Bdl</i>
<i>VSOP87</i>	Solutions analytiques du <i>Bdl</i> dérivées de <i>VSOP82</i>
<i>VSOP2000</i>	Solution analytique obtenue au cours de cette thèse
<i>VSOP2000x</i>	Solutions analytiques dérivées de <i>VSOP2000</i> ($x=A, B, C$ ou D)

a	Demi-grand axe d'une ellipse
e	Excentricité d'une ellipse
i	Inclinaison d'une orbite sur l'écliptique
n	Moyen mouvement
n_0	Moyen mouvement moyen (noté n dans le chapitre 3)
N	Moyen mouvement en longitude moyenne
λ	Longitude moyenne
$\lambda^0 + Nt$	Longitude moyenne moyenne
λ^0	Longitude à l'origine
ω	Argument du périhélie
ϖ	Longitude du périhélie
Ω	Longitude du noeud ascendant
k, h, q, p	Variables sans dimension déduites de e, i, ω et Ω
I_n	Itération numéro n
$\varepsilon_{xxx}, \varphi_{xxx}$	Angles entre les plans fondamentaux de la solution DE_{xxx} du <i>JPL</i> et <i>VSOP2000</i> ($xxx = 403$ ou 405)

τ	Temps propre
TCB	Temps Coordonnée Barycentrique
TDB	Temps Dynamique Barycentrique
TCG	Temps Coordonnée Géocentrique
TAI	Temps Atomique International
TT (autrefois TDT)	Temps Terrestre
TCP	Temps Coordonnée Planétocentrique
J2000(TAI)	Événement $TAI = 2451545.0$ au géocentre
J2000(TT)	Événement $TT = 2451545.0$ au géocentre
J2000(TCB)	Événement $TCB = 2451545.0$ au géocentre
J2000(TDB)	Événement $TDB = 2451545.0$ au géocentre.
	Epoque origine des solutions VSOP2000
L_B	Valeur moyenne du rapport $d(\text{TCB})/d(\text{TT})-1$
L_C	Valeur moyenne du rapport $d(\text{TCB})/d(\text{TCG})-1$
L_G	Valeur moyenne du rapport $d(\text{TCG})/d(\text{TT})-1$
W_0	Potentiel au niveau du géoïde
BRS	Système de référence barycentrique
GRS	Système de référence géocentrique
KGRS	Système de référence géocentrique cinématiquement non tournant
DGRS	Système de référence géocentrique dynamiquement non tournant

GRS ⁺	Système de référence géocentrique tournant avec la Terre
TRS	Système de référence topocentrique
ITRS	International Terrestrial Reference System
<i>EIH</i>	Equations d'Einstein, Infeld et Hoffman
<i>i</i>	$\sqrt{-1}$
\mathbb{Z}	Ensemble des entiers relatifs
\mathbb{R}	Ensemble des réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
$\bar{z}, z $	Complexe conjugué de z et norme de z
$k.n = k_1n_1 + k_2n_2 + \dots + k_mn_m$	Produit scalaire des m -uplets k et n
$\mathbb{C}^{\alpha_{max}}[t]$	Espace vectoriel des polynômes en t à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à α_{max}
$M_n(\mathbb{R})$	Algèbre des matrices carrés d'ordre n à coefficients réels
$\ u\ $	Norme de l'endomorphisme u
$\text{tr}(A), \det(A)$	Trace et déterminant de la matrice A
Id	Élément neutre de $M_n(\mathbb{R})$
$\exp(A)$	Exponentielle de la matrice A
(x, y, z)	Coordonnées rectangulaires d'une planète
$(p, w) = (p_x + ip_y, w)$	Orbite intermédiaire
$\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y$ et \mathcal{P}_Z	Composantes des perturbations newtoniennes et relativistes
$X(s)$	Vecteur de composantes $(p_x(s), p_y(s), dp_x/ds, dp_y/ds)$
$I = [0, T]$	Intervalle d'étude de la solution de l'équation différentielle en X
F	Espace de Banach de dimension finie
$End(F)$	Espace vectoriel des endomorphismes de F
$GL(F)$	Espace vectoriel des automorphismes de F
$\mathcal{C}^k(I, F)$	Espace vectoriel des fonctions de classe C^k définies sur I et à valeur dans F
$\mathcal{C}^k(I, End(F))$	Ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeur dans les endomorphismes de F
$\ \cdot\ _\infty$	Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}^k(I, End(F))$
$R(A, c, t)$	Noyau résolvant de l'équation différentielle $DX(s)/ds = A(s)X(s)$

ψ, θ, φ	Angles d'Euler du système DGRS
$\psi_K, \theta_K, \varphi_K$	Angles d'Euler du système KGRS
F_C	Matrice de précession géodésique
$\hat{P}(u)$	Matrice de rotation entre l'écliptique et l'équateur du système DGRS : $[\text{GRS}^+] = \hat{P}(u)[\text{DGRS}]$
$\hat{P}_K(u)$	Matrice de rotation entre l'écliptique et l'équateur du système KGRS : $[\text{GRS}^+] = \hat{P}_K(u)[\text{KGRS}]$

RMI	Relativistic motion integrator
-----	--------------------------------

Bibliographie

- [ABS] R. Adler, M. Bazin, and M. Schiffer. *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- [Ave91] A. Avez. *Calcul différentiel*. Masson, 1991.
- [BBF91] V.A. Brumberg, P. Bretagnon, and G. Francou. Analytical algorithms of relativistic reduction of astronomical observations. In N. Capitaine, editor, *Journées Systèmes de Références*. Observatoire de Paris, 1991.
- [Bdl94] Bdl. Les systèmes de référence utilisés en astronomie. Notes scientifiques et techniques du bureau des longitudes, IMCCE, 1994.
- [BF88] P. Bretagnon and G. Francou. Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions. *Astron. Astrophys.*, **202**:309, 1988.
- [BFRS98] P. Bretagnon, G. Francou, P. Rocher, and J.-L. Simon. Smart97: a new solution for the rotation of the rigid Earth. *Astron. Astrophys.*, **329**:329–338, 1998.
- [BK89] V. A. Brumberg and S.M. Kopejkin. Relativistic theory of celestial reference frames. In B. Kolaczek J. Kovalevsky, I.I. Mueller, editor, *Reference Frames*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [BL67] R. H. Boyer and R.W. Lindquist. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, **8**:265, 1967.
- [Bre78] P. Bretagnon. Sur une solution globale du mouvement des planètes. Master's thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1978.
- [Bre81] P. Bretagnon. Construction d'une théorie des grosses planètes par une méthode itérative. *Astron. Astrophys.*, **101**:342, 1981.

- [Bre82a] P. Bretagnon. Constantes d'intégration et éléments moyens pour l'ensemble des planètes. *Astron. Astrophys.*, **108**:69, 1982.
- [Bre82b] P. Bretagnon. Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. solution VSOP82. *Astron. Astrophys.*, **114**:278, 1982.
- [BRS97] P. Bretagnon, P. Rocher, and J.-L. Simon. Theory of the rotation of the rigid Earth. *Astron. Astrophys.*, **319**:305–317, 1997.
- [Bru72] V.A. Brumberg. *Mécanique céleste relativiste*. Nauka, Moscou, 1972.
- [Bru91a] V.A. Brumberg. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. IOP Publishing Ltd, 1991.
- [Bru91b] V.A. Brumberg. Relativistic hierarchy of reference systems and time scales. In C.A. Smith J.A. Hughes and G.H. Kaplan, editors, *Proc 127th Colloq. IAU*. USNO, Washington, 1991.
- [Bru95] V.A. Brumberg. General relativistic description of Earth's rotation in different reference systems. *J. Geodynamics*, **20**:181–197, 1995.
- [Bur95] M. Bursa. Fundamental constants. In XXI, I.A.G. General Assembly, editor, *Report of the I.A.G. Special commission SC3*. I.A.G., 1995.
- [Car22] E. Cartan. Sur les équations de la gravitation de einstein. *J. Math pures et appliquées*, **1**:141, 1922.
- [Car66] B. Carter. Complete analytic extension of the symmetry axis of kerr's solution of einstein's equations. *Physical Review*, **141**:1242, 1966.
- [CBM75] J. Chapront, P. Bretagnon, and M Mehl. Un formulaire pour le calcul des perturbations d'ordres élevés dans les problèmes planétaires. *Celes. Mech.*, **11**:379, 1975.
- [Cha84] J. Chapront. Approximation methods in celestial mechanics. applications to pluto's motion. *Celes. Mech.*, **34**:165–184, 1984.
- [CTC83] M. Chapront-Touzé and J. Chapront. The lunar ephemeris ELP 2000. *Astron. Astrophys.*, **124**:50, 1983.

- [CTS86] G. Cohen-Tannoudji and M. Spiro. *La matière espace-temps*. Folio essais, 1986.
- [Dam88] T. Damour. Sur le concept de système de référence en relativité générale. In N. Capitaine, editor, *Journées Systèmes de Références*. Observatoire de Paris, 1988.
- [EIH16] A. Einstein, L. Infeld, and B. Hoffman. The gravitational equations and the problem of motion. *Annales de Mathématiques*, **39**:65, 1916.
- [Ein52] A. Einstein. *Conceptions scientifiques, morales et sociales*. Flammarion, 1952.
- [FFKA86] T. Fukushima, M.K. Fujimoto, H. Kinoshita, and S. Aoki. Constants in the relativistic framework. *Celes. Mech.*, **38**:215, 1986.
- [Foc55] V.A. Fock. *The theory of space, time and gravitation*. Moscou:State Technical Publication, 1955.
- [Fuk91] T. Fukushima. Geodetic nutation. *Astron. Astrophys.*, **244**:L11–L12, 1991.
- [Fuk94] T. Fukushima. Time ephemeris. *Astron. Astrophys.*, **294**:895–906, 1994.
- [GMPF⁺98] G.F. Gilmore, L. Lindegren M.A. Perryman, F. Favata, E. Hoeg, M. Lattanzi, X. Luri, F. Mignard, S. Roeser, and P.T. Zeeuw. Gaia: origin and evolution of the milky way. In R.D. Reasenberg, editor, *Proceedings of the International Society for Optical Engineering*. SPIE, 1998.
- [GS88] B. Guinot and P.K. Seidelmann. Time scales: their history, definition and interpretation. *Astron. Astrophys.*, **194**:304, 1988.
- [Guy93] C. Le Guyader. Solution of the n-body problem expanded into taylor series of high order. applications to the solar system over large time range. *Astron. Astrophys.*, **272**:687, 1993.
- [Hel86] R.W. Hellings. Relativistic effects in astronomical timing measurements. *Astron. Journal.*, **91**:650, 1986.
- [HNW87] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer Verlag, 1987.

- [IAU91] IAU. Resolution a4: Recommendations from the working group on reference systems. In *Proceedings of the 21st general assembly - Transactions of the IAU*, volume XXIB. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [IAU94] IAU. Resolution c7: On the definition of j2000.0 and time scales. In *Proceedings of the 22nd general assembly - Transactions of the IAU*, volume XXIIB. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [Kli93] S.A. Klioner. On the hierarchy of relativistic kinematically non-rotating reference systems. *Astron. Astrophys.*, **279**:273–277, 1993.
- [KMK89] J. Kovalevsky, I.I. Mueller, and B. Kolaczek. *Reference frames in astronomy and geophysics*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [Kov90] J. Kovalevsky. *Astrométrie moderne*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [KV93] S.A. Klioner and A.V. Voinov. Relativistic theory of astronomical reference systems in closed. *Physical Review D*, **48**:1451–1461, 1993.
- [Lic55] A. Lichnerowicz. *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme*. Masson & Cie, 1955.
- [McC92] D.D McCarthy. IERS standards (1992). IERS *technical note* **13**, Observatoire de Paris, 1992.
- [McC96] D.D McCarthy. IERS conventions (1996). IERS *technical note* **21**, Observatoire de Paris, 1996.
- [Mig98] F. Mignard. Ephemeris requirements for gaia. SAG_FM_004, technical report, OCA/CERGA, 1998.
- [New87] Isaac Newton. *Principia, traduction de la marquise du Châtelet, Paris 1759*. Londres, 1687.
- [Pou94] G. Pourcin. Rapport de jurys de concours, agrégation de mathématiques. Technical report, Ministère de l'Education Nationale, 1994.
- [Sa96] P. Schwintzer and al. Long-wavelength global gravity field models: Grim4-s4, grim4-c4. *J. Geodynamics*, **71**, 1996.

- [SBC⁺94] J.-L. Simon, P. Bretagnon, J. Chapront, M. Chapront-Touzé, G. Francou, and J. Laskar. Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the moon and the planets. *Astron. Astrophys.*, **282**:663, 1994.
- [SF92] P.K. Seidelmann and T. Fukushima. Why new time scales. *Astron. Astrophys.*, **265**:833–838, 1992.
- [Sim83] J.-L. Simon. Théorie du mouvement des quatre grosses planètes. solution top82. *Astron. Astrophys.*, **120**:197–202, 1983.
- [Sim99] J.-L. Simon. *communication privée*, 1999.
- [SNWF95] E.M. Standish, X.X. Newhall, J.G. Williams, and W.F. Folkner. JPL planetary and lunar ephemerides, DE403/LE403. *JPL IOM*, **314**:10–127, 1995.
- [Sta98] E.M. Standish. JPL planetary and lunar ephemerides, DE405. *JPL IOM*, 1998.
- [Sta99] E.M. Standish. *communication privée*, 1999.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley, 1972.