

UNIVERSITÉ DE RECHERCHE PARIS SCIENCES & LETTRES  
**OBSERVATOIRE DE PARIS**  
INSTITUT DE MÉCANIQUE CÉLESTE ET DE CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES  
*Astronomie et Systèmes Dynamiques*

THÈSE DE DOCTORAT  
*de l'école doctorale d'astronomie & d'astrophysique d'Île-de-France*  
*spécialité "dynamique des systèmes gravitationnels"*

*par*

Alexandre POUSSE

**Les quasi-satellites et autres configurations  
remarquables en résonance co-orbitale**

*sous la direction de*  
Philippe ROBUTEL et Alain VIENNE

Thèse soutenue le 30 septembre 2016 devant un jury composé de :

Jacques FÉJOZ	Professeur de l'Université Paris-Dauphine & Obs.Paris
Antonio GIORGILLI	Professeur de l'Università degli Studi di Milano
Anne LEMAÎTRE	Professeur de l'Université de Namur
Philippe ROBUTEL	Chargé de recherche de l'Observatoire de Paris
Andrea VENTURELLI	Maître de conférence de l'Université d'Avignon
Alain VIENNE	Professeur de l'Université Lille-I & Obs.Paris

et d'après les rapports des professeurs  
Antonio GIORGILLI et Anne LEMAÎTRE



*À mes grand-parents, “pépères” et “mémères”,  
Gaston, Jean Claude, Guylaine et Mauricette*



## Merci

*Quelques mois se sont écoulés depuis la soutenance et il vient donc le moment d'achever ce manuscrit commencé il y a plus de neuf mois, non seulement pour des raisons "administratives" (l'ED127 s'y reconnaîtra) mais également pour mettre enfin un point final à ce travail et clôturer une "tranche de vie" parisienne.*

*C'est donc avec un petit peu plus de lucidité que lors de ma soutenance que je voudrais remercier une ribambelle de personnes qui, lors de ces quatre années, ont été présents, m'ont soutenu et même supporté, aussi bien dans l'acception "aider activement, donner son soutien moral" que "admettre, tolérer la présence, le comportement d'une personne en dépit des inconvénients que cela peut comporter" (merci d'avance au site du CNRTL); chacun s'y reconnaîtra.*

*Tout d'abord, je remercie du fond du coeur mes directeurs de thèse, Alain Vienne, qui m'accompagne depuis le début, et Philippe Robutel, qui m'a rattrapé au vol il y a trois ans.*

*Merci Alain pour ta confiance. Même lorsque la situation était compliquée à la fin de ma "première thèse", tu m'as toujours soutenu. Je pense que cette thèse sur les quasi-satellites est assez loin de ce que tu avais en tête, en particulier sur l'étude des transitions dans le cas spatial. Pour préciser ma pensée et ainsi répondre à Jacques Le Bourlot : "il y a encore et toujours des choses à faire dans le problème à 3 corps...restreint...plan...et avec la planète sur orbite circulaire!". J'ajouterais que l'on ne peut comprendre fondamentalement quelque chose que si l'on part du cas le plus simple. Et parfois cette étude dure...trois ans!*

*Un grand merci Philippe! Je savais déjà que tu étais un très bon encadrant de stage, maintenant je peux dire que tu es aussi un excellent directeur de thèse! Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans nos heures de réflexion passées dans ton bureau pour tenter de comprendre la notion de moyennisation, de ce que représente une trajectoire du problème moyen réduit et finalement de ce que sont ces fameux "quasi-satellites". Ça a été un véritable plaisir de collaborer ensemble pour essayer d'y voir plus clair sur toutes ces choses là! Que ce soit dans la thèse comme à travers les péripéties assez "rock'n'roll" de l'IMCCE, je pense que l'on s'est bien amusé. De toute façon : "if you're too old to rock'n'roll, then you are!" (ciao Lemmy!).*

*Un grand merci e un grande grazie à Anne Lemaître et Antonio Giorgilli qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse et d'être présent lors de la soutenance. Après des années à rabâcher que "je ne fais rien" et "je n'avance pas", c'est à la lecture de vos rapports respectifs que j'ai (enfin) pu réaliser l'étendu du travail accompli.*

*Merci au président et “grand” mathématicien du jury, Jacques Féjóz, qui a toujours été intéressé par mes histoires de résonance co-orbitale depuis mon stage jusqu’à ma soutenance, et ce jour-là, de la première à la dernière heure (!).*

*Grazie à Andrea Venturelli, avec qui j’ai longuement parlé de quasi-satellites, d’avoir pris part à ce jury. Nos travaux respectifs, je pense, se complètent merveilleusement. J’ai hâte de reprendre nos discussions afin de nous rapprocher de cette fameuse famille d’orbites de Broucke-Hénon.*

*Cette thèse n’aurait pas pu se conclure d’une aussi belle manière dans un autre milieu que celui de l’équipe “ASD”. Je remercie très sincèrement Jacques Laskar et Alain Chenciner d’avoir pu et su créer une équipe – et je dirais même plus, une famille – aussi vivante, ouverte et polyédrique, composées aussi bien de mathématiciens que d’astronomes. Pour quelqu’un qui n’a jamais voulu choisir entre les deux, je ne pouvais trouver mieux.*

*Monter jusqu’au 5<sup>e</sup> en partant du 2<sup>e</sup> n’a pas été facile...mais comme le dit si bien Jacques L. : “le 5<sup>e</sup>, ça se mérite!”. J’espère que ce travail en est une juste rétribution. Aussi, je tiens à en remercier chaleureusement tous les membres, tant permanents que doctorants ou étudiants de Master.*

*Plus particulièrement, je remercie Laurent Niederman. Merci Laurent! Tout d’abord pour m’avoir fait confiance dans le cours de M1, mais également pour ton soutien, ton intérêt pour pleins de choses (et pas seulement pour les co-orbitaux!) et ta hauteur de vue. C’est toujours un plaisir de “causer” ensemble à l’Observatoire, à la cantinella ou à Fécamp. Le trio RoNiPo ayant encore ~~un peu~~ beaucoup de “pains sur la planche”, trouver des occasions pour bavarder ne devrait pas être trop difficile.*

*Merci à NOTRE super informaticien Mickaël Gastineau qui a toujours une commande TRIP ou un paquet L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sorti de son chapeau!*

*Merci à Hervé Manche. Je plagie un peu mais je ne pense pas que l’on puisse dire mieux que “mon sage et cher copain de bureau”. L’âme du bureau 503! J’espère avoir été un bon substitut de Jessica.*

*Un grand merci à Agnès Patu, la plus amicale des secrétaires jamais rencontrée et, par dessus tout, la meilleure, sur qui ont peu toujours compter. Si Anne L. a trouvé peu de fautes dans ce manuscrit, c’est en très grande partie grâce à elle.*

*Je n’oublie pas de remercier le “clermontois” Thibaut Castan pour son Cantal et son parler “rugby”, mais également Abed Bounemoura, Farida Baidolda, Marcelo Caetano, Alain Albouy, Joe Fayad, Jean-Baptiste Delisle, Anete Soaeres Cavalcanti, Nicolas Rambaux, Alicia Simon, Adrien Leleu, Santiago Barbieri, Pierre Auclair-Desrotour, Gwenaël Boué, Nathan Hara et Thimothée Vaillant pour tous les moments passés ensemble à la cantine, devant un café, à l’angle d’une porte, au hurling pub, voire même au 33 de la rue censier.*

*Avant le 5<sup>e</sup>, il y avait une vie...au 3<sup>e</sup> ! Un grand merci à Maryame, la meilleure des “co-bureaux” et une de mes amies les plus chères. Nos débats/disputes sans fin sur maths-astro, Lindblad-corotation, ASD-GAP resteront dans les mémoires! Malgré le décalage horaire et les milliers de kilomètres qui nous séparent, tu réponds*

*toujours présente pour me remonter le morale au détour d'un skype ou d'une virée sur la pacific coast highway.*

*Merci à Irina Kovalenko et Fatoumata Kebe qui m'ont fait confiance pour essayer de les aider. J'espère avoir pu apporter ma "pierre" pour améliorer vos situations respectives.*

*De retour au 2<sup>e</sup>, je remercie Mirel Birlan pour sa bonne humeur et par dessus tout sa chaleureuse poignée de main matinale.*

*L'Observatoire de Paris n'étant pas seulement peuplé par l'IMCCE, je n'oublie pas le 4<sup>e</sup> et remercie Christophe Leponcin-Lafitte, Jean-Yves Richard, Pierre Teysandier, Adrien Bourguoin et César Gattano pour leur intérêt et leur sympathie au détour d'un café ou d'un repas à la cantine.*

*Merci à Jean-Pierre Marco d'être venu assister à ma soutenance. Pas seulement présent pour le pot et le Cocteaux, j'ai beaucoup apprécié notre échange sur mon travail après la présentation.*

*Grazie à Gabriella Pinzari qui s'est tout de suite intéressée à mon travail, était à "deux doigts" d'assister à ma soutenance et me permet aujourd'hui de poursuivre mes recherches.*

*Enfin, merci à Gilles Métris et Pierre Exertier, avec qui je garde un attachement sincère depuis mes passages à l'Observatoire de Grasse.*

*Ces onze années – quand même! – d'études universitaires n'auraient jamais été possibles sans le soutien indéfectible de mes parents, Pascale et Martine : "mais tu vas y arriver!", "de toute façon tu te plains tout le temps mais tu y arrives toujours!"...et ma réponse d'un air désespéré "pas cette fois...vous verrez, ce coup-là ça ne passera pas...". Et encore une fois...ça a marché! Je suis désolé d'être aussi "chiant" et vous remercie très grandement de votre patience. Merci! D'autant que, sans forcément voir vers quoi je me dirigeais, vous m'avez toujours fait confiance. J'espère que vous êtes fier de mes "études courtes".*

*Un grand merci à mes grand-parents à qui je dédie ce travail. Ces "travailleurs de la terre", partis beaucoup trop tôt pour certains, tout récemment pour d'autres, m'ont toujours inspiré simplicité, justesse et rigueur dans le travail. J'adresse une forte pensée à "pépère" Gaston, "pépère" Jean-Claude et "mémère" Guylaine.*

*Merci "mémère" Mauricette, "tonton" Ghislain et "tata" Jeannick d'avoir cheminé de Beauregard ou Montrichau jusqu'à l'Observatoire de Paris.*

*Un grande grazie alla mia famiglia italiana, Alessandra, Giorgio, Frenky e tutto "San Colombano" che mi ha fatto scoprire "il Nord" e sempre sentire come loro figlio, dal primo giorno a oggi.*

*Trois pages de remerciements commencent à faire beaucoup et je pourrais en écrire au moins autant pour ceux que je n'ai pas encore nommés, certains faisant partie de ma "tranche de vie" parisienne, d'autres de presque tout une vie. J'espère que vous me pardonneriez de faire aussi court.*

*Tout d'abord, le barycentre d'une bonne partie de ma vie parisienne où beaucoup parmi cette ribambelle sont venus : le hurling pub du 8 de la rue Descartes. Merci*

*Young pour tous ces instants passés et toutes ces bières bues dans ton bar ! Je ne pouvais pas fêter ce doctorat dans un autre lieu.*

*Merci aux escrimeurs des “Duellistes” et plus particulièrement à Éric et Nilu qui ont toujours été super intéressés par nos intrigues de maths, de planètes et d’Italie.*

*Merci Jérôme, Gio et les “apparitions-du-jour-de-soutenance” Karelle et Thomas. Après toutes ces années depuis “DSG”, c’est toujours autant un plaisir de vous retrouver.*

*Merci à mon barbu caennais “édouédouédoué”, aujourd’hui gardien du 33 de la rue censier et avec qui une discussion sur l’éducation, la société, la science, la musique, les films...ne peut prendre fin !*

*Merci Kevin 20602727, mon cher binôme mathématique tourangeau.*

*Un grand merci à mes amis d’enfance de l’école de Fossé, les “kough”, et en particulier à ceux qui ont fait le déplacement, Benoît, Clément, Laura et mon chasseur “D”. Toujours présents dans les moments importants, à mes côtés depuis presque 27 ans !*

*Malgré l’écart qui s’est créé ces dernières années, je n’oublie pas le lien et les instants passés ensemble depuis le master et jusqu’aux premières années de la thèse. Merci Andy, Élo, Baptiste et Chloé.*

*Merci George, mon roumain américain préféré qui me permet encore de maintenir ma (fausse) réputation de Toulousain ! On se voit très rarement, tous les deux ans je pense, mais c’est toujours comme si il ne s’était passé que quelques jours.*

*Enfin, je terminerai par remercier un fabuleux quintette qui a mis en musique mon “Paris”, m’a supporté et “maintenu à flot” quand l’inspiration et la motivation étaient au plus bas.*

*Merci “croc” alias “Jeannot” le solide. Que tu sois à Oxford ou à Cambridge, tu réponds toujours présent pour venir s’encanailler (ou plus simplement venir manger). On t’attend à Rome !*

*Merci Élise ! Les footing du lundi à Montsouris et tous les moments passés ensemble – malgré ton agenda bien rempli –, toujours ponctués par de belles discussions, d’ouverture, de culture et d’esprit. Une bouffée d’air me rappelant qu’il existe un Monde en dehors de la thèse.*

*Merci Claire Line, mon “astro-brodeuse” préférée ! Par tout ce qu’on a pu partager, soirées, discussions, restos, expos, ciné, pc-à-réparer, soupes de légumes et surtout...Louvre, tu es devenue plus qu’une amie, une soeur.*

*Merci Romain, mon frère qui s’est aussi transformé en ami (en plus d’être un coloc !). Inlassablement danseur et de bonne humeur...parfois à ma grande consternation...maintenant, c’est à toi de jouer “coco” !*

*Et...soprattutto, un infinito grazie alla mia Jee. Sei sempre stata con me tanto nei momenti peggiori quanto nei piu belli. Non avrei mai potuto realizzare questo lavoro senza il tuo sostegno, ogni giorni di fianco a me. Sei una parte di me, il mio cuore.*

*Ora è il momento di un pezzo di vita Italiana. Roma, 11 gennaio 2017.*



## Introduction

L'ensemble des travaux menés au cours de cette thèse concerne l'étude de la résonance co-orbitale.

Ce domaine de trajectoires particulières, où un astéroïde et une planète gravitent autour du Soleil avec la même période de révolution, possède une dynamique très riche liée aux célèbres configurations équilatérales de Lagrange,  $L_4$  et  $L_5$ , ainsi qu'aux configurations alignées de Euler,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ .

Un exemple majeur dans le système solaire est donné par les astéroïdes "troyens", découverts par Wolf au début du vingtième siècle. Ces astéroïdes accompagnent Jupiter au voisinage des équilibres  $L_4$  et  $L_5$  : leur dynamique particulière est généralement connue sous le nom de "tadpole".

Une deuxième configuration étonnante est donnée par les satellites Janus et Épiméthée qui gravitent autour de la planète Saturne ; suite à la forme décrite par la trajectoire d'un des satellites dans un repère tournant avec l'autre, la dynamique résultante est appelée "fer-à-cheval".

Un nouveau type de dynamique a été récemment mis en évidence dans le contexte de la résonance co-orbitale : les "quasi-satellites". Il s'agit de configurations remarquables où, dans un repère tournant avec la planète, la trajectoire de l'astéroïde correspond à celle d'un satellite rétrograde. Des astéroïdes accompagnant les planètes Venus, Jupiter et la Terre ont notamment été observés dans ces configurations. Namouni (1999) a également montré l'existence de transitions entre les configurations tadpoles, fers-à-cheval et quasi-satellites. La dynamique des quasi-satellites possède alors un grand intérêt, pas seulement parce qu'elle relie les différents domaines de la résonance co-orbitale mais aussi parce qu'elle semble faire le pont entre les notions de satellisation et celles de trajectoires héliocentriques ; ce dernier point représente d'ailleurs une des difficultés pour les appréhender.

Bien que le terme "quasi-satellite" soit devenu dominant dans la communauté de mécanique céleste, certains auteurs utilisent plutôt la terminologie "satellite rétrograde" révélant ainsi une ambiguïté sur la définition de ces trajectoires. Pour ces raisons, j'ai souhaité dans un premier temps clarifier la définition de ces orbites. Ce travail correspond à la première partie de ce manuscrit, développée sur deux chapitres. Dans le premier chapitre, je présenterai une introduction à la résonance co-orbitale dans le cadre du problème restreint des trois corps. En particulier, je

revisiterai le cas circulaire-plan<sup>1</sup> dans le cadre du problème moyen, qui a la particularité de fournir une description complète de l'espace des phases de la résonance. Dans le second chapitre, je focaliserai mon étude sur les quasi-satellites afin d'établir une définition rigoureuse de ces trajectoires.

Dans la deuxième partie de cette thèse, je développerai une méthode analytique apte à explorer le domaine des quasi-satellites ; les travaux déjà existant étant tous de nature numérique, j'ai considéré important de proposer une approche analytique au problème. Dans les chapitres 3 et 4, j'exposerai cette méthode analytique et réaliserai une exploration du domaine des quasi-satellites dans le cas circulaire-plan. Finalement dans le chapitre 5, je proposerai une extension de l'étude précédente aux cas excentrique-plan et circulaire-spatial.

Les récentes découvertes autour des exoplanètes ont motivé le développement de travaux concernant la résonance co-orbitale dans le problème planétaire des trois corps. Dans ce contexte Giuppone *et al.* (2010) ont mis en évidence (par une méthode numérique) les quasi-satellites ainsi que de nouvelles familles de configurations remarquables : les orbites "anti-Lagrange".

La troisième partie de thèse présente alors une méthode analytique pour l'étude planétaire, permettant de révéler analytiquement les orbites anti-Lagrange (voir chapitre 6) et une esquisse d'étude des quasi-satellites en adaptant à ce contexte plus général la méthode présentée dans la seconde partie (voir chapitre 7).

La thèse présente la structure suivante : chacune des trois parties est précédée par un avant-propos qui introduit l'argument de l'étude et se termine par un paragraphe de conclusion. Cependant, une conclusion globale portant sur les résultats acquis et les perspectives d'études futures clôturera le manuscrit.

Enfin, de nombreuses notations concernant les configurations remarquables seront introduites, en particulier dans les chapitres 1 et 6. L'ensemble des notations est regroupé dans l'annexe B qui est située à la fin de ce manuscrit.

---

1. Dans le cas circulaire-plan, la trajectoire de l'astéroïde est co-planaire à celle de la planète qui gravite autour de l'étoile sur une orbite circulaire.

## Table des matières

Merci	iii
Introduction	vii
<b>Première partie 1. Une introduction à la résonance co-orbitale et aux configurations quasi-satellites</b>	<b>1</b>
Avant-propos	3
Chapitre 1. Le résonance co-orbitale dans le cas circulaire-plan	5
1. Introduction au problème moyen	5
1.1. Le formalisme hamiltonien du problème restreint des trois corps	5
1.2. La résonance co-orbitale	6
1.3. Le hamiltonien moyen	7
2. Exploration du cas circulaire-plan	10
2.1. Le hamiltonien réduit	10
2.2. Correspondance entre les problèmes moyen, moyen réduit et en repère tournant avec la planète	11
2.3. Portraits de phase dans le problème moyen réduit	12
2.4. Les familles de points fixes du problème moyen réduit	19
3. Les ellipses gelées : une extension au cas excentrique-plan ( $e' \geq 0$ )	22
Chapitre 2. Quasi-satellites ou satellites rétrogrades ?	29
1. Introduction	29
2. Des satellites rétrogrades aux quasi-satellites	29
3. Étude du voisinage de la famille $f$	34
3.1. La famille $f$	35
3.2. Application au système de type “Soleil-Jupiter”	35
3.3. Extension de l’étude pour des masses arbitraires	39
Conclusion	41
<b>Deuxième partie 2. Études analytiques du domaine des quasi-satellites</b>	<b>43</b>
Avant-propos	45
Chapitre 3. Méthode analytique adaptée aux trajectoires quasi-satellites	47
1. Développements analytiques du hamiltonien moyen	47

1.1.	Le développement analytique “classique”	47
1.2.	Un développement analytique adapté aux quasi-satellites	48
2.	Le développement analytique dans le cas circulaire-plan	49
2.1.	L’inverse de la distance mutuelle	50
2.2.	Le domaine de convergence	53
2.3.	Les propriétés de la série de Laurent associée à $\overline{H}_P^o$	56
2.4.	Le développement analytique en pratique	58
Chapitre 4. L’exploration du cas circulaire-plan		61
1.	Introduction	61
2.	Le hamiltonien réduit au voisinage de $\zeta_1 = u = 0$	61
3.	La famille $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$	64
4.	Le voisinage de la famille $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$	68
4.1.	Réorganisation du hamiltonien réduit	68
4.2.	La procédure de normalisation du hamiltonien réduit	70
4.3.	La forme normale $N$	72
4.4.	L’exploration du voisinage de la famille $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$	74
Chapitre 5. Extension aux cas excentrique-plan et circulaire-spatial		81
1.	Introduction	81
2.	Une étude du cas excentrique-plan	81
2.1.	Le développement analytique dans le cas excentrique-plan	82
2.2.	Le hamiltonien moyen au voisinage de $\zeta_1 = u = 0$	84
2.3.	La persistance de la famille $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$	88
3.	Une étude du cas circulaire-spatial	98
3.1.	Le hamiltonien moyen	98
3.2.	Idée de l’étude du domaine des quasi-satellites	100
Conclusion		103
<b>Troisième partie 3. Étude analytique de la résonance co-orbitale dans le problème planétaire</b>		105
Avant-propos		107
Chapitre 6. Les configurations quasi-circulaires		109
1.	La résonance co-orbitale dans le problème moyen	109
1.1.	Le formalisme hamiltonien du problème planétaire co-planétaire	109
1.2.	La résonance co-orbitale	111
1.3.	Le hamiltonien moyen	112
1.4.	Quelques propriétés de $\overline{H}$	113
2.	La dynamique des configurations quasi-circulaires	115
2.1.	Le hamiltonien intégrable $\overline{H}_0$	115
2.2.	Description de la variété $\mathcal{C}_0$	116
3.	Le voisinage des configurations quasi-circulaires	122

3.1. Les équations variationnelles	123
3.2. Le voisinage de $\mathcal{C}_0$	123
4. Une extension aux configurations excentriques	128
4.1. $\bar{H}$ au voisinage de $L_3, L_4$	129
4.2. La normalisation de $\check{\mathcal{K}}$	131
4.3. Discussion	132
Chapitre 7. Les configurations quasi-satellites	139
Conclusion	141
<b>Conclusions et perspectives</b>	143
Conclusions et perspectives	145
Le problème restreint circulaire-plan.	145
Le problème planétaire.	145
<b>Références bibliographiques</b>	147
Bibliographie	149
<b>Annexes</b>	155
Annexe A. Annexes du cas excentrique-plan	157
1. L'approximation du carré de la distance mutuelle	157
2. Propriétés de la série de Laurent associée à $\tilde{H}'_P$	158
Annexe B. Nomenclature des configurations remarquables	161



Première partie

Une introduction à la résonance  
co-orbitale et aux configurations  
quasi-satellites





## Avant-propos

Cette partie constitue une introduction à la résonance co-orbitale (chapitre 1) ainsi qu’aux orbites quasi-satellites (chapitre 2) dans le cadre du problème restreint des trois corps. Elle aborde l’ensemble des travaux et résultats de l’article Pousse *et al.* (2016).

Après une présentation du formalisme hamiltonien adapté aux trajectoires en résonance co-orbitale, nous introduirons le problème moyen afin de limiter notre étude aux seules composantes “semi-rapide” et séculaire de la dynamique. Nous verrons alors que dans le cas circulaire-plan, il existe une symétrie fournissant un hamiltonien intégrable qui nous permettra de caractériser de manière complète la topologie de l’espace des phases (types de dynamique, points fixes, familles de Lyapounov, fréquences, etc... ). En particulier, nous mettrons en évidence le domaine des trajectoires quasi-satellites.

Ces configurations remarquables constituent le sujet central de cette thèse. Dans le chapitre 1, nous en présenterons quelques propriétés, notamment l’existence d’une valeur minimale en excentricité afin de pouvoir les étudier dans le problème moyen. Ces orbites étant liées à la famille  $f$  de Henon (1969) et au domaine des satellites rétrogrades exhibé dans le problème complet en repère tournant avec la planète (voir Benest, 1975), nous verrons qu’il existe une ambiguïté dans la terminologie à employer entre “quasi-satellite” et “satellite rétrograde”. Par conséquent, nous dédions le chapitre 2 à créer un pont entre le problèmes moyen et complet en repère tournant afin de bien définir ces trajectoires.



## Le résonance co-orbitale dans le cas circulaire-plan

### 1. Introduction au problème moyen

#### 1.1. Le formalisme hamiltonien du problème restreint des trois corps.

Nous considérons un corps primaire de masse  $1 - \varepsilon$  (le Soleil ou une étoile), un corps secondaire (une planète) de masse  $\varepsilon$  négligeable<sup>1</sup> devant 1 et un troisième corps (une particule ou un astéroïde) sans masse. Ces trois corps étant uniquement soumis à leurs interactions gravitationnelles mutuelles, nous admettrons que la trajectoire de la planète est keplerienne, c'est-à-dire elliptique d'excentricité  $e'$ . Sans perte de généralité, nous fixons  $(a', I', \varpi', \Omega') = (1, 0, 0, 0)$  (respectivement le demi-grand axe, l'inclinaison, la longitude du périastre et la longitude du noeud ascendant de la planète) et fixons la période de révolution de la planète à  $2\pi$  (et donc son moyen mouvement égale à 1) ce qui impose à la constante gravitationnelle d'être égale à 1.

Dans le cadre de trajectoires co-orbitales, la particule ne peut se trouver de manière permanente à une plus grande distance de l'étoile que la planète. Par conséquent, le système de coordonnées héliocentriques semble le plus adapté à cette situation. Ainsi, dans un référentiel héliocentrique, le hamiltonien du problème s'écrit<sup>2</sup> :

$$(1.1) \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) := \mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}_P(\mathbf{r}, t)$$

avec

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) := \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$$

et

$$\mathcal{H}_P(\mathbf{r}, t) := -\varepsilon \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \right),$$

où  $\mathbf{r}$  est la position héliocentrique de la particule,  $\dot{\mathbf{r}}$ , sa variable conjuguée associée à la vitesse dans le référentiel et  $\mathbf{r}'(t)$ , la position de la planète au temps  $t$ .

Ce hamiltonien est décomposé en deux parties. La première,  $\mathcal{H}_K$ , représente le mouvement keplerien de la particule autour de l'étoile. Plus précisément, c'est un mouvement keplerien autour d'un corps de masse 1 afin que la particule ait le même problème de Kepler que la planète et donc que leurs éléments orbitaux soient comparables. La seconde,  $\mathcal{H}_P$ , correspond à la perturbation de ce mouvement keplerien par l'interaction gravitationnelle avec la planète, un terme issu de notre choix de problème de Kepler et un terme d'inertie dû au référentiel héliocentrique.

En considérant  $\varepsilon$  comme un petit paramètre, nous observons que  $\mathcal{H}_K$  est de l'ordre

1. autrement dit,  $\varepsilon \ll 1$ .

2. voir Morbidelli (2002) pour plus de détails.

de 1 tandis que  $\mathcal{H}_P$  est d'ordre  $\varepsilon$  ce qui justifie la représentation perturbative. Cependant, il est important de souligner que cette hiérarchie n'est valable que si et seulement si la particule et la planète sont suffisamment éloignées l'une de l'autre. Or dans le contexte de trajectoires en résonance co-orbitale, les demi-grands axes étant égaux ou voisins, des passages proches sont possibles. La condition justifiant la représentation perturbative n'est donc pas garantie ; nous garderons alors à l'esprit que cette représentation peut se révéler inadaptée pour certaines trajectoires de la résonance.

Comme  $\mathcal{H}_K$  est la composante dominante de la dynamique, nous choisissons d'introduire un jeu de variables canoniques proches des éléments elliptiques  $(a, e, I, \lambda, \varpi, \Omega)$ <sup>3</sup> comme les variables de Poincaré. Ainsi, sous la forme complexe, ces variables s'écrivent  $(\lambda, \Lambda, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y)$  telles que

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{a}, & \Gamma &= \Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2}), & Z &= \Lambda\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos I), \\ x &= \sqrt{\Gamma} \exp(i\varpi), & y &= \sqrt{Z} \exp(i\Omega), & \tilde{x} &= -i\bar{x} \quad \text{et} \quad \tilde{y} = -i\bar{y}, \end{aligned}$$

et présentent l'avantage d'être régulières lorsque les excentricités ou les inclinaisons tendent vers zéro.

Afin de rendre autonome le hamiltonien, nous avons choisi d'étendre l'espace des phases en introduisant  $\Lambda'$ , la variable conjuguée de  $\lambda' := t$ , i.e. l'angle associé à la longitude moyenne de la planète. Par conséquent, en définissant la transformation

$$(1.2) \quad \Phi : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{T} & \longrightarrow \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \\ (\lambda, \Lambda, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \lambda') & \longmapsto (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \end{cases}$$

le hamiltonien dans l'espace des phases étendu est égal à

$$(1.3) \quad \Lambda' + \tilde{H},$$

où

$$\tilde{H} := \tilde{H}_K + \tilde{H}_P$$

avec

$$\tilde{H}_K(\Lambda) := -\frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda^2} \quad \text{et} \quad \tilde{H}_P := \mathcal{H}_P \circ \Phi.$$

**1.2. La résonance co-orbitale.** La particule et la planète sont considérées en résonance de moyen mouvement si il existe un angle dit "résonant", combinaison linéaire entre les longitudes moyennes, qui oscille autour de certaines valeurs. Dans le cas de la résonance co-orbitale, cet angle résonant est  $\zeta_1 := \lambda - \lambda'$ . Il existe donc un rapport 1/1 entre les moyen mouvement respectifs ( $\dot{\lambda} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Lambda}$  pour la particule et 1 pour la planète) ce qui implique que ces corps vont orbiter autour de l'étoile sur des ellipses instantanées dont les demi-grands axes sont voisins. Ainsi, en définissant la transformation symplectique

$$(1.4) \quad \Phi_{1/1} : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \\ (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2, \tilde{\Lambda}') & \longmapsto (\lambda, \Lambda, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \lambda', \Lambda') \end{cases}$$

3.  $(a, e, I, \lambda, \varpi, \Omega)$  : respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude moyenne, la longitude du périastre et la longitude du nœud ascendant de la particule.

où

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\Lambda}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(et donc  $u = \sqrt{a} - 1$  qui est associée à la différence des demi-grands axes), nous obtenons

$$H := (\Lambda' + \tilde{H}) \circ \Phi_{1/1} - \tilde{\Lambda}',$$

le hamiltonien du problème restreint des trois corps exprimé dans des variables adaptées à la résonance co-orbitale et tel que

$$(1.5) \quad H(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2) = H_K(u) - u + H_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2),$$

où

$$H_K(u) := -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+u)^2} \quad \text{et} \quad H_P := \tilde{H}_P \circ \Phi_{1/1}.$$

Ce hamiltonien possède 4 degrés de liberté, chacun associé à un régime spécifique de la dynamique en résonance co-orbitale. Par exemple, l'angle  $\zeta_2$ , dont la fréquence est le moyen mouvement de la planète, représente le régime "rapide" alors que l'angle  $\zeta_1$  est associé aux variations dites "semi-rapides". De même, les variables  $(x, \tilde{x})$  et  $(y, \tilde{y})$  sont associées au régime dit "séculaire". Ainsi, comme  $\zeta_1$  et les variables  $(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$  évoluent lentement par rapport à l'angle  $\zeta_2$ , la moyennisation du hamiltonien  $H$  sur  $\zeta_2$  permet d'accéder aux composantes semi-rapides et séculaires de la dynamique par l'intermédiaire d'un hamiltonien réduit à 3 degrés de liberté : le hamiltonien moyen  $\overline{H}$ .

**1.3. Le hamiltonien moyen.** En accord avec la théorie des perturbations, il existe une transformation canonique

$$(1.6) \quad \mathcal{C} : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \\ (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2, \tilde{\Lambda}') & \longmapsto (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2, \tilde{\Lambda}') \end{cases}$$

telle que dans les variables moyennes  $(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2, \tilde{\Lambda}')$ , nous avons

$$\tilde{\Lambda}' + \mathbf{H} = (\tilde{\Lambda}' + H) \circ \mathcal{C} \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} := \overline{H} + H_*,$$

où

$$(1.7) \quad \overline{H} := H_K - u + \overline{H}_P$$

et

$$(1.8) \quad \overline{H}_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \tau) d\tau.$$

La transformation étant limitée au premier ordre en  $\varepsilon$ , le reste  $H_*$  est en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  tant que la particule reste suffisamment éloignée de la planète.

$\mathcal{C}$  est une transformation proche de l'identité qui peut être définie comme le transport du flot hamiltonien engendré par une fonction génératrice  $\chi$ . Autrement dit :

$$\mathcal{C} = \exp(L_\chi),$$

où  $L$  est la dérivée de Lie.

Avant de définir  $\chi$ , introduisons le crochet de Poisson ; pour  $f$  une fonction générique, nous avons

$$L_\chi(f) = \{\chi, f\} = \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_1} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_2} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\Lambda}} \\ - \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\Lambda}} \frac{\partial f}{\partial \zeta_2}.$$

Dans les variables moyennes,  $\mathbf{H}$  s'écrit

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= \exp L_\chi(H) \\ &= H_K - u + H_P + \{\chi, H_K - u\} + \{\chi, H_P\} + \mathbf{H} - H - \{\chi, H\}. \end{aligned}$$

Ainsi, en supposant la fonction génératrice du même ordre que la partie perturbatrice de  $H$ , les termes d'ordre  $\varepsilon$  dans l'équation précédente sont donnés par

$$\begin{aligned} \left[ H_P + \{\chi, H_K - u\} \right] (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2) &= H_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2) \\ &+ \left( \frac{\partial H_K}{\partial u}(u) - 1 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_1} (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2). \end{aligned}$$

Or en restreignant  $u$  à un voisinage de la résonance tel que

$$(1.10) \quad \frac{\partial H_K}{\partial u}(u) - 1 = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

le terme

$$\left( \frac{\partial H_K}{\partial u} - 1 \right) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_1}$$

est en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  et peut donc être envoyé dans le reste  $H_*$ . De ce fait, dans ce voisinage, il suffit de choisir  $\chi$  comme solution de l'équation

$$(1.11) \quad \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_2} (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2) = \overline{H}_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y) - H_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2).$$

En posant

$$(1.12) \quad \chi(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2) = \int_0^{\zeta_2} \left[ \overline{H}_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y) - H_P(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \tau) \right] d\tau,$$

l'équation (1.11) est satisfaite et nous avons

$$\mathbf{H}(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2) = \overline{H}(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y) + H_*(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2)$$

avec un reste

$$(1.13) \quad H_* = \left( \frac{\partial H_K}{\partial u} - u \right) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_1} + \{\chi, H_P\} + \mathbf{H} - H - \{\chi, H\}$$

de taille  $\varepsilon^2$  en dehors des passages proches avec la planète<sup>4</sup>. Par conséquent, en restreignant la perturbation aux seuls termes d'ordre  $\varepsilon$ , nous obtenons le hamiltonien  $\overline{H}$  du "problème moyen", i.e. du problème restreint des trois corps, adapté à l'étude de la résonance co-orbitale et moyenné sur la longitude moyenne de la planète.

Comme la variable  $\tilde{\Lambda}'$  est constante dans cette approximation et que  $\overline{H}$  est

4. voir Robutel *et al.* (2016) pour plus de détails sur l'estimation de la taille du reste dans le cas du problème planétaire.

indépendant de  $(\zeta_2, \tilde{\Lambda}')$ , dans la suite de notre étude nous “oublions” ce degré de liberté. De même, dans un souci de clarté, la notation “sous-point” utilisée pour distinguer les variables moyennes sera supprimée.

En pratique, il existe au moins deux méthodes classiques de moyennisation pour obtenir  $\bar{H}$  : une analytique basée sur un développement en puissance des excentricités et des inclinaisons (voir Morais, 2001; Robutel et Pousse, 2013, ainsi que les parties 2 et 3 de ce manuscrit) et une autre qui consiste en une évaluation numérique de  $\bar{H}$  et de ses dérivées (voir Nesvorný *et al.*, 2002; Giuppone *et al.*, 2010; Beaugé et Roig, 2001; Mikkola *et al.*, 2006; Sidorenko *et al.*, 2014). Bien que pour de faibles excentricités et d’inclinaisons la méthode analytique soit très efficace, pour atteindre des valeurs élevées il est nécessaire de développer  $\bar{H}$  à un très haut degré ce qui engendre des expressions très lourdes à manipuler. Dans ce cas précis, c’est donc la méthode numérique qui est la plus commode. Toutefois, nous verrons dans la partie 2 qu’il est possible d’atteindre de hautes valeurs d’excentricités par l’intermédiaire d’une méthode analytique adaptée aux trajectoires quasi-satellites.

Dans ce chapitre, afin d’explorer l’espace des phases de la résonance co-orbitale sans restrictions en excentricité ou en inclinaison, nous choisissons d’utiliser la méthode numérique développée par Nesvorný *et al.* (2002).

Cette méthode consiste en une évaluation numérique de l’intégrale (1.8). De manière générale, nous considérons une fonction  $F$  dépendante de  $(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, E, E')$  où  $E$  et  $E'$  sont les anomalies excentriques de la particule et de la planète. La moyenne sur  $\zeta_2$  étant calculée pour  $(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y)$  fixés, l’équation de Kepler implique que

$$d\zeta_2 = d\lambda = dE(1 - e(x) \cos E).$$

De plus, nous avons

$$\zeta_1 = \lambda - \lambda' = E + \varpi(x) - E' - e(x) \sin E + e' \sin E',$$

qui dénote que l’anomalie excentrique  $E'$  peut être vue comme une fonction de  $(\zeta_1, E, x, e')$ . Finalement, l’intégrale s’écrit :

$$\bar{F}(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, E, E'(\zeta_1, E, x, e'))(1 - e(x) \cos E) dE$$

et peut être évaluée numériquement en discrétisant la variable  $E$  telle que  $E_k = \frac{k2\pi}{N}$  avec  $100 \leq N \leq 300$  (voir Nesvorný *et al.*, 2002, pour plus de détails).

Le problème moyen possède 3 degrés de liberté et dépend de 2 paramètres : la masse de la planète,  $\varepsilon$ , ainsi que son excentricité,  $e'$ . De plus, il est invariant par symétrie par rapport au plan orbital de la planète. Par conséquent, en se focalisant sur les trajectoires co-planaires, i.e. telles que  $\{y = \tilde{y} = 0\}$ , la dimension de l’espace des phases est réduite à 4.

Lorsque la planète est sur une orbite circulaire ( $e' = 0$ ), les problèmes moyen et complet – i.e. non-moyen – sont invariants<sup>5</sup> par l’action du groupe de symétrie

---

5. Dans le problème complet, c’est cette invariance qui engendre les règles de d’Alembert, voir le chapitre 3 pour plus de précisions.

$SO(2)$  associé aux rotations autour de l'axe vertical. De ce fait, au voisinage des orbites quasi-circulaires (i.e  $|x| \ll 1$ ), le développement du hamiltonien moyen du cas circulaire-plan, noté

$$(1.14) \quad \overline{H}^o := \overline{H}|_{\{y=\tilde{y}=0\}} \quad \text{avec} \quad e' = 0,$$

s'écrit

$$\sum_{\overline{\mathcal{D}}} f_{p,\tilde{p}}^k(u) x^p \tilde{x}^{\tilde{p}} e^{ik\zeta_1},$$

où  $f_{p,\tilde{p}}^k$  est une fonction de  $u$  à valeurs complexes tandis que  $k, p$  et  $\tilde{p}$  sont des entiers satisfaisant la relation suivante issue des règles de d'Alembert :

$$(1.15) \quad \overline{\mathcal{D}} := \left\{ (k, p, \tilde{p}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2 \text{ tels que } p - \tilde{p} = 0 \right\}.$$

Ainsi, nous avons

$$(1.16) \quad \frac{\partial \overline{H}^o}{\partial \varpi} = 0 = i \left( x \frac{\partial \overline{H}^o}{\partial x} - \tilde{x} \frac{\partial \overline{H}^o}{\partial \tilde{x}} \right) = \dot{\Gamma}$$

et donc que  $\Gamma$  est une intégrale première. En outre, les deux degrés de liberté du problème sont séparables et une réduction du problème est possible.

En considérant  $\Gamma = |x|^2$  comme un paramètre de valeur fixée et en éliminant la variable  $\varpi = \arg(x)$ , il résulte un problème à 1 degré de liberté que nous avons dénommé "le problème moyen réduit". L'étude du hamiltonien associé à ce nouveau problème, le "hamiltonien réduit", permet de décrire de manière complète l'espace des phases de la résonance co-orbitale pour toutes valeurs de  $\Gamma$  fixées. Cependant, par commodité, plutôt qu'utiliser  $\Gamma$  comme paramètre, nous choisissons d'introduire la quantité  $e_0$  tel que

$$(1.17) \quad \Gamma = (1+u)(1 - \sqrt{1-e^2}) = 1 - \sqrt{1-e_0^2}.$$

Par conséquent, si  $u \ll 1$ , ce paramètre  $e_0$  – qui est égale à  $e + \mathcal{O}(u)$  – fournit une approximation de la valeur de l'excentricité  $e$  le long de la trajectoire.

Dans la suite, comme l'étude est focalisée sur les trajectoires co-planaires, nous oublierons le degré de liberté associé à  $(y, \tilde{y})$ .

## 2. Exploration du cas circulaire-plan

**2.1. Le hamiltonien réduit.** Pour une valeur de  $e_0 = a$  telle que  $0 \leq a < 1$ , nous définissons  $\overline{\mathcal{M}}_{e_0} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$  comme l'intersection de l'espace des phases du problème moyen (noté  $\overline{\mathcal{M}} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ ) avec l'hyperplan  $\{e_0 = a\}$ , et  $\overline{\mathcal{M}}_{e_0}/SO(2)$ , l'espace quotient de cette intersection par le groupe de symétrie  $SO(2)$ . Ainsi, en appliquant la transformation

$$(1.18) \quad \psi_{e_0} : \begin{cases} \overline{\mathcal{M}}_{e_0} & \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{e_0}/SO(2) \\ (\zeta_1, u, \tilde{x}, x) & \longmapsto (\zeta_1, u) \end{cases}$$

le problème est réduit à 1 degré de liberté dont la dynamique est fournie par le hamiltonien réduit :

$$(1.19) \quad \overline{H}_{e_0}^o := \overline{H}^o(\cdot, \cdot, \tilde{x}(e_0), x(e_0)).$$



Ce hamiltonien est intégrable : pour  $e_0$  fixé, une trajectoire du problème moyen réduit est une orbite périodique ou un point fixe. En outre, la dynamique de la résonance co-orbitale dans le cas circulaire-plan peut être révélée par la réalisation de portraits de phase pour différentes valeurs de  $e_0$ . Par conséquent, le problème moyen réduit semble l'approche la plus adaptée pour comprendre la résonance co-orbitale dans le cas circulaire-plan.

Toutefois, le problème moyen est plus habituel pour illustrer les variations des éléments orbitaux tandis que le problème complet – i.e. non-moyen – en repère tournant avec la planète est un “classique” dans l'étude du problème restreint circulaire-plan. De ce fait, afin que notre étude soit exhaustive, nous dédions la section suivante à l'interprétation d'une trajectoire du problème moyen réduit dans ces deux autres approches.

**2.2. Correspondance entre les problèmes moyen, moyen réduit et en repère tournant avec la planète.** Dans le problème moyen réduit, nous considérons une solution périodique de fréquence  $\nu$  notée  $(\zeta_1(t), u(t))$ .

Cette trajectoire de l'espace quotient  $\overline{\mathcal{M}}_{e_0}/SO(2)$  est envoyée dans le problème moyen par la transformation  $\psi_{e_0}^{-1}$ . Celle-ci n'étant pas injective, puisque dans le problème moyen réduit l'angle  $\varpi = \arg(x)$  est ignoré,  $\psi_{e_0}$  fait donc correspondre un ensemble d'orbites paramétrée par  $\varpi_0 = \varpi(t=0) \in \mathbb{T}$  à la trajectoire initiale. Comme

$$\dot{\varpi}(t) = -\frac{\partial}{\partial \Gamma} \overline{H}_{e_0}^o((\zeta_1(t), u(t)))$$

est une fonction  $2\pi/\nu$ -périodique, elle peut être décomposée telle que

$$\dot{\varpi}(t) = g - \left[ \frac{\partial}{\partial \Gamma} \overline{H}_{e_0}^o((\zeta_1(t), u(t))) + g \right],$$

où

$$(1.20) \quad g := \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\nu} -\frac{\partial \overline{H}_{e_0}^o}{\partial \Gamma}((\zeta_1(t), u(t))) dt$$

est la fréquence “séculaire” de précession de  $\varpi$ . De ce fait, le long de ces trajectoires, l'évolution temporelle de la longitude du périastre est donnée par

$$(1.21) \quad \varpi(t) = \varpi_0 + gt - \int_0^t \left[ \frac{\partial \overline{H}_{e_0}^o}{\partial \Gamma}(\zeta_1(t), u(t)) + g \right] dt$$

Dans le problème moyen, la trajectoire initiale correspond à un ensemble d'orbites quasi-périodiques de fréquences  $\nu$  et  $g$ . Par le même raisonnement, un point fixe du problème moyen réduit est associé à un ensemble d'orbites périodiques de fréquence  $g$ . Néanmoins,  $\varpi$  n'étant pas défini pour des orbites quasi-circulaires<sup>6</sup> ( $e_0 = 0$ ), les trajectoires sont des points fixes ou des orbites périodiques dans les problèmes moyen et moyen réduit. En outre, lorsque  $e_0 > 0$  et  $g = 0$ , une trajectoire périodique du problème moyen réduit correspond à un ensemble d'orbites périodiques tandis qu'un point fixe est associé à un ensemble de points fixes dégénérés. Pour ce dernier cas,

6. Nous définissons les orbites quasi-circulaires comme celles où l'ellipse osculatrice de la particule reste circulaire tout le long de sa trajectoire.

les points fixes dégénérés étant répartis sous forme circulaire dans l'espace des phases représenté dans les variables  $(x, \tilde{x})$ , nous parlerons de “cercles de points fixes”.

Afin d'envoyer une trajectoire du problème moyen dans le problème complet en repère tournant avec la planète, nous devons tout d'abord appliquer  $\mathcal{C}$  afin d'ajouter la composante rapide associée au moyen mouvement.

Dans le cas circulaire-plan, les règles de d'Alembert issues des invariances du problème impliquent que  $H$  dépend uniquement des angles  $\zeta_1$  et  $\zeta_2 - \varpi$  (voir le chapitre 3). Ainsi, en définissant la transformation canonique

$$(1.22) \quad \hat{\psi} : \begin{cases} \mathcal{M} & \longrightarrow & \hat{\psi}(\mathcal{M}) \\ (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \zeta_2, \tilde{\Lambda}') & \longmapsto & (\zeta_1, u, \tilde{\xi}, \xi, \zeta_2, \tilde{\Lambda}' - \Gamma) \end{cases}$$

avec  $\mathcal{M}$  qui représente l'espace des phase du problème complet<sup>7</sup>,

$$\xi = \sqrt{\Gamma} \exp(i\varphi), \quad \tilde{\xi} = -i\bar{\xi} \quad \text{et} \quad \varphi = \lambda' - \varpi,$$

nous obtenons le hamiltonien

$$(1.23) \quad (\tilde{\Lambda}' + H) \circ \hat{\psi}^{-1}$$

qui est autonome avec 2 degrés de liberté associés aux fréquences  $\nu$  et  $1 - g$ . De plus, par l'intermédiaire d'une transformation canonique en variables cartésiennes, ce dernier est relié au hamiltonien du problème complet en repère tournant avec la planète. Dans cette approche plus “classique” pour appréhender le problème restreint, une trajectoire est en général quasi-périodique à 2 fréquences,  $\nu$  et  $1 - g$ . Par conséquent, dans le repère tournant avec la planète, une trajectoire du problème moyen réduit est en général associée à un ensemble d'orbites paramétrée par  $\varphi_0 = \varphi(t = 0) \in \mathbb{T}$  et avec une fréquence additionnelle  $(1 - g)$ .

Dans un souci de clarté, nous résumons tous les cas remarquables de correspondances entre les problèmes moyen, moyen réduit et en repère tournant dans la table 1.1 .

**2.3. Portraits de phase dans le problème moyen réduit.** Sur la figure 1.1, nous présentons des portraits de phase associés à 6 valeurs de  $e_0$  pour un système de type “Soleil-Jupiter” ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ).

Dans la figure 1.1a, le paramètre  $e_0$  est égal à zéro : les orbites sont donc quasi-circulaires. Ce cas étant bien connu dans le repère tournant, nous avons esquissé les trajectoires associées aux différentes configurations dans la figure 1.2. Le point singulier situé en  $\zeta_1 = u = 0$  correspond à la collision entre la particule et la planète, où  $\bar{H}$  n'est pas défini puisque l'intégrale (1.8) est divergente. Les deux points fixes elliptiques en  $(\zeta_1, u) = (\pm 60^\circ, 0)$  correspondent aux configurations de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  où les trois corps forment les sommets d'un triangle équilatéral. Le point fixe hyperbolique à proximité de  $(\zeta_1, u) = (180^\circ, 0)$  est associé à la configuration d'Euler  $L_3$  où les trois corps sont alignés avec l'étoile pour corps central.

Sur les portraits de phase présentés dans Nesvorný *et al.* (2002), deux autres équilibres

7. En tenant compte du degré de liberté associé à  $(\zeta_2, \tilde{\Lambda}')$ , nous avons  $\mathcal{M} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .

	$e_0 = 0$		$e_0 > 0$			
			$g \neq 0$		$g = 0$	
	PF	OP ( $\nu$ )	PF	OP ( $\nu$ )	PF	OP ( $\nu$ )
<b>PMR</b>	PF	OP ( $\nu$ )	PF	OP ( $\nu$ )	PF	OP ( $\nu$ )
↓ <b>PM</b>	PF	OP ( $\nu$ )	$S_{\varpi_0}$ OP ( $g$ )	$S_{\varpi_0}$ OQP ( $\nu, g$ )	$S_{\varpi_0}$ PF	$S_{\varpi_0}$ OP ( $\nu$ )
↓ <b>RT</b>	PF	OP ( $\nu$ )	$S_{\varphi_0}$ OP ( $1 - g$ )	$S_{\varphi_0}$ OQP ( $\nu, 1 - g$ )	$S_{\varphi_0}$ OP (1)	$S_{\varphi_0}$ OQP ( $\nu, 1$ )

TABLE 1.1. Correspondances dans les problèmes moyen (**PM**) et complet en repère tournant (**RT**) d'une trajectoire donnée dans le problème moyen réduit (**PMR**).  $S_{\varpi_0}, S_{\varphi_0}$  : ensemble paramétrées par  $\varpi(0)$  et  $\varphi(0) \in \mathbb{T}$ . PF : point fixe. OP : orbite périodique. OQP : orbite quasi-périodique. Entre parenthèses : fréquences associées.

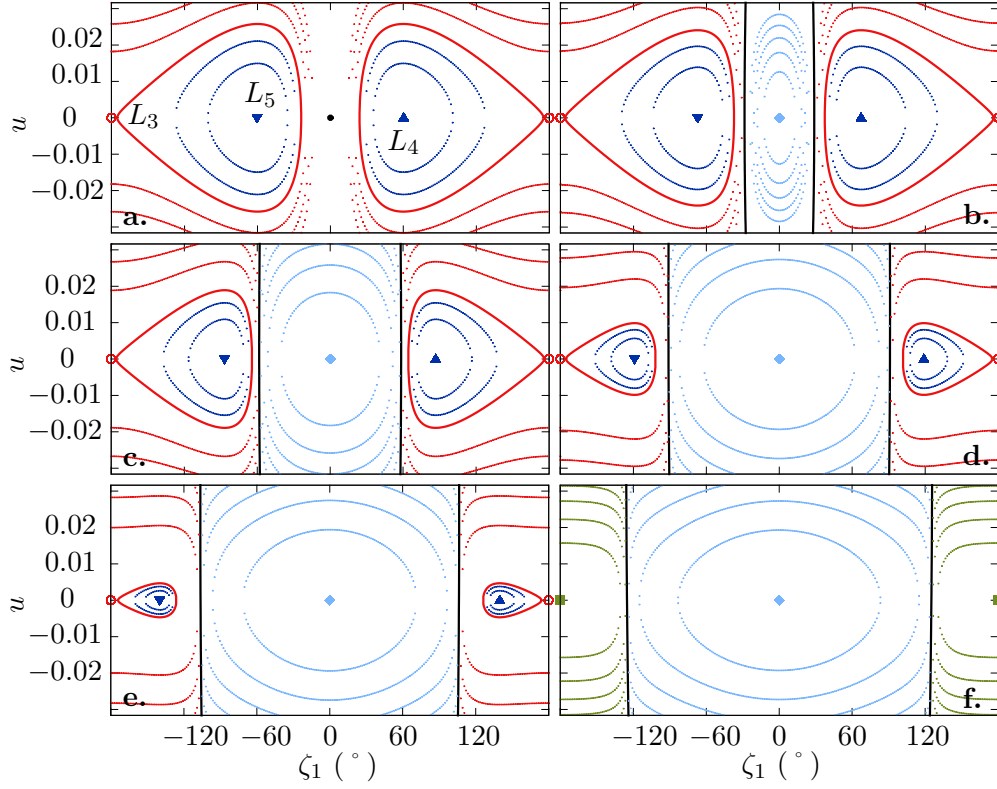


FIGURE 1.1. Portraits de phase du problème moyen réduit pour un système de type “Soleil-Jupiter” ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Pour **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, et **f**, le paramètre  $e_0$  est égal à 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.85 et 0.95. Le point noir (**a**) et les courbes noires représentent la collision avec la planète. Les points bleu marine, bleu ciel et rouges sont respectivement les courbes de niveau des trajectoires tadpoles, quasi-satellites et fers-à-cheval. Pour  $e_0 = 0$ , les deux triangles bleu marine et les cercles rouges représentent  $L_4$ ,  $L_5$  et  $L_3$  alors que pour  $e_0 > 0$ , ils forment les familles de points fixes  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ . Les courbes rouges représentent les séparatrices qui émergent de  $L_3$  ainsi que de la partie instable de  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ . Les losanges bleu ciel forment la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Enfin, les carrés verts représentent la partie stable de  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  autour duquel les trajectoires représentées en vert librent.

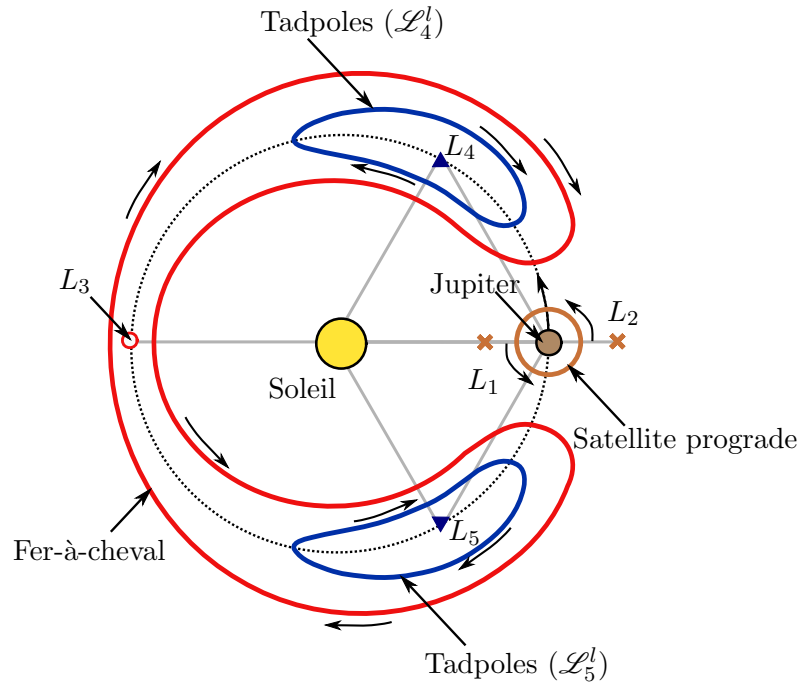


FIGURE 1.2. Représentation des trajectoires quasi-circulaires ( $e_0 = 0$ ) dans le repère tournant avec la planète. Les deux triangles bleu marine, le cercle rouge et les 2 croix brunes représentent respectivement les équilibres  $L_4$ ,  $L_5$ ,  $L_3$ ,  $L_1$  et  $L_2$ . Les trajectoires périodiques bleu marine autour de  $L_4$  et  $L_5$  sont des orbites tadpoles appartenant aux familles d'orbites à longue période. La trajectoire rouge est une orbite périodique en fer-à-cheval. Enfin la trajectoire brune est une orbite de type "satellite prograde".

hyperboliques apparaissent le long de l'axe  $\{\zeta_1 = 0\}$  : ce sont les configurations d'Euler  $L_1$  et  $L_2$  où les trois corps sont alignés de telle façon que l'étoile est l'un des corps extérieurs. Cependant, il a été montré dans Robutel et Pousse (2013) – et nous le reverrons également dans le chapitre 6 – qu'il existe un voisinage autour de la singularité à l'intérieur duquel le hamiltonien moyen ne représente pas précisément le problème initial. En effet, bien que dans la majeure partie de l'espace des phases le reste  $H_*$  engendré par le processus de moyennisation est de taille négligeable par rapport à  $\overline{H}$ , lorsque la distance à la collision est de l'ordre de  $\varepsilon^{1/3}$  ou inférieure,  $H_*$  est au moins du même ordre que la partie perturbatrice  $\overline{H}_P$  (Robutel *et al.*, 2016). Par conséquent, au voisinage de la singularité associée à la collision entre la planète et la particule, il existe une “zone d'exclusion” du problème moyen auxquels  $L_1$  et  $L_2$  appartiennent ainsi que le domaine des satellites progrades qui n'a pas été tracé mais entoure la singularité.

Les domaines délimités par la séparatrice qui émerge de  $L_3$  correspondent aux trajectoires de type “tadpoles” qui librent autour de  $L_4$  et  $L_5$ . Pour  $e_0 = 0$ , ces deux domaines forment 2 familles d'orbites périodiques qui ont pour origine  $L_4$  et  $L_5$  et sont paramétrées par  $u \geq 0$ . Dans le problème moyen réduit, nous les notons  $\mathcal{N}_{L_4}^u$  et  $\mathcal{N}_{L_5}^u$ . Plus précisément, ce sont des familles de Lyapounov qui émergent des configurations équilatérales de Lagrange dans la direction associée à la fréquence de libration  $\nu$  (voir par exemple Meyer et Hall, 1992). Dans le repère tournant, elles sont plus connues sous le nom de familles d'orbites à longue période, notées  $\mathcal{L}_4^l$  et  $\mathcal{L}_5^l$ .

Enfin, à l'extérieur de la séparatrice se trouve le domaine des trajectoires en fer-à-cheval : ce sont les orbites qui entourent les équilibres  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ .

À mesure que  $e_0$  augmente, la position de la singularité associée à la collision évolue. En effet, dès que  $e_0 > 0$ , l'origine devient un point régulier et un ensemble de points singuliers décrit une courbe qui l'entoure. L'espace des phases est alors divisé en deux régions différentes.

Pour de faibles valeurs de  $e_0$  (par exemple  $e_0 = 0.25$  dans la figure 1.1b), la région à l'extérieur de la courbe de collision a la même topologie que pour  $e_0 = 0$  : 2 points fixes elliptiques à proximité de la position de  $L_4$  et  $L_5$  et une séparatrice qui émerge d'un point fixe hyperbolique proche de  $L_3$  et délimite les domaines des tadpoles et des fers-à-cheval. Cependant, contrairement à  $e_0 = 0$ , ces points fixes ne sont pas des équilibres des problèmes moyen ou complet en repère tournant mais correspondent à des orbites périodiques. Par conséquent, leur voisinage est composé d'orbites quasi-périodiques.

En faisant varier  $e_0$ , ces points fixes forment 3 familles à un paramètre que nous dénotons  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$ . Dans le repère tournant, elles sont plus connues sous le nom de familles d'orbites à courte période, notées  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$ , et forment les familles de Lyapounov qui émergent de  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  dans la direction associée à la fréquence de précession (voir Meyer et Hall, 1992).

À l'intérieur de la courbe de collision apparaît un nouveau domaine contenant des

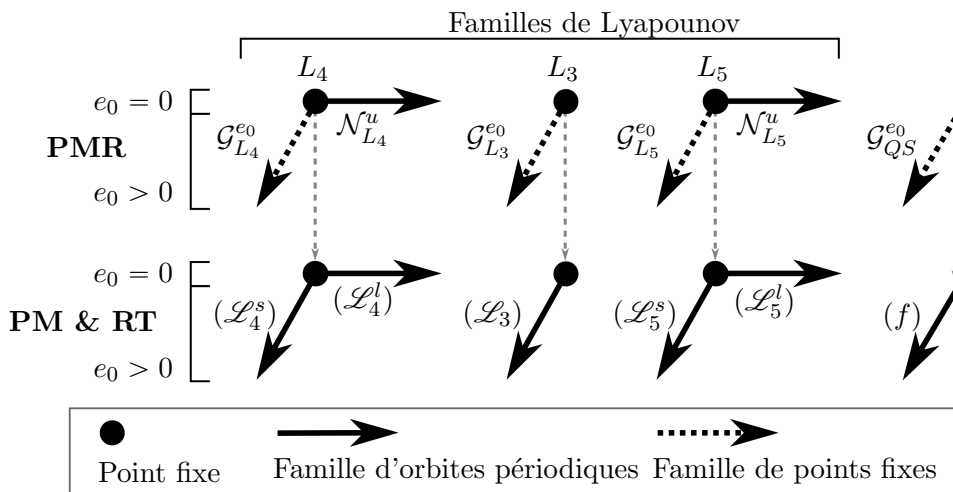


FIGURE 1.3. Représentation des familles d'orbites périodiques dans les problèmes moyen (PM), moyen réduit (PMR) et complet en repère tournant avec la planète (RT). Dans le problème moyen réduit, chaque équilibre équilatéral de Lagrange engendre 2 familles de Lyapounov qui correspondent à une famille d'orbites périodiques et une famille de points fixes. Dans les problèmes moyen et en repère tournant, elles sont associées aux familles d'orbites à longue et courte période.  $L_3$  étant un point-selle dans le problème moyen, une seule famille de Lyapounov en émerge. Plus précisément, c'est une famille de points fixes du problème moyen réduit et une famille d'orbites périodiques dans les problèmes moyen et en repère tournant. Enfin, pour  $e_0 > 0$ , il existe une famille de points fixes du problème moyen réduit qui n'est pas une famille de Lyapounov issue d'un point fixe connu :  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Dans le repère tournant,  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  correspond à une famille d'orbites périodiques : la famille  $f$  de Henon (1969).

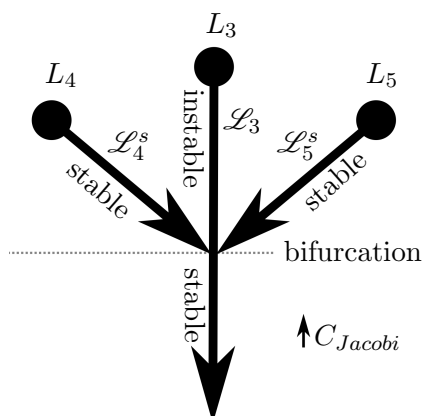


FIGURE 1.4. Représentation du résultat de ? dans le repère tournant : la rencontre des familles d'orbites à courte période  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$  avec  $\mathcal{L}_3$  et bifurcation de la dernière qui devient stable.

orbites qui librent autour d'un point fixe situé à proximité de  $\zeta_1 = u = 0$  : c'est le domaine des quasi-satellites. Nous y reviendrons plus précisément dans le chapitre 2. Toutefois, nous mentionnons que ce sont des orbites nécessairement excentriques dans le cas circulaire-plan qui librent autour  $\zeta_1 = 0^\circ$ . Dans le repère tournant avec la planète, elles sont associées aux trajectoires de type "satellite rétrograde" qui sont liées à la famille d'orbites périodiques  $f$  de Henon (1969).

En faisant varier  $e_0$ , les points fixes du domaine des quasi-satellites forment une famille à un paramètre qui émerge de la singularité en  $e_0 = 0$ . Nous la notons  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Dans le repère tournant, ces points fixes correspondent à une famille d'orbites périodiques de fréquence  $1 - g$  et telles que  $\zeta_1 = 0^\circ$ . Plus précisément  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  est associée<sup>8</sup> à la famille  $f$ . Pour de faibles valeurs d'excentricité, les domaines des tadpoles, des fers-à-cheval et des quasi-satellites sont donc structurés autour de deux familles d'orbites périodiques et de quatre familles de points fixes. Afin de clarifier leur représentation dans les différentes approches, nous les schématisons dans la figure 1.3.

Pour de plus grandes valeurs de  $e_0$  (voir les figures 1.1**c**, **d**, **e**, et **f**), la topologie des portraits de phase ne change pas à l'intérieur de la courbe de collision : le domaine des quasi-satellites est toujours présent mais sa taille augmente jusqu'à dominer le portrait de phase à haute excentricité.

À l'extérieur de la courbe de collision, la situation est différente. En augmentant  $e_0$ , les équilibres stables se rapprochent du point fixe hyperbolique, ce qui implique que le domaine des tadpoles rétrécit et disparaît lorsque les trois points fixes se rencontrent. Cette bifurcation engendre un nouveau domaine à l'intérieur duquel les orbites librent autour d'un point fixe situé à proximité de  $(\zeta_1, u) = (180^\circ, 0)$  (voir la figure 1.1**f**). Un résultat similaire a été trouvé par Deprit *et al.* (1967) pour un système Terre-Lune dans le cas circulaire-plan ( $\varepsilon = 1/81$ ). Dans le repère tournant, ces auteurs ont montré que les familles  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$  se terminent par une orbite périodique de  $\mathcal{L}_3$  qui bifurque, les orbites consécutives étant stables (voir le schéma de la figure 1.4).

Maintenant, intéressons-nous plus particulièrement au domaine des quasi-satellites. Comme nous l'avons mentionné précédemment, au voisinage de la collision, il existe un ensemble de trajectoires appartenant à la zone d'exclusion du problème moyen et ne représentant donc pas précisément des solutions du problème initial. Comme à très haute excentricité, les quasi-satellites dominent le portrait de phase, la taille de l'intersection entre ce domaine et la zone d'exclusion est faible relativement à la taille du domaine lui-même. Cependant, quand  $e_0$  diminue, la courbe de collision rétrécit et conséquemment la taille du domaine des quasi-satellites se réduit. De ce fait, la taille de l'intersection relativement à tout le domaine augmente jusqu'à atteindre une valeur critique de  $e_0$  où la zone d'exclusion contient l'intégralité des trajectoires quasi-satellites. Dans ce cas, les problèmes moyen et moyen réduit ne sont pas des approches pertinentes pour étudier les trajectoires quasi-satellites.

8. voir la figure 1.6 ainsi que le chapitre 2 pour plus de précisions sur cette famille.



Une manière simple d'estimer la limite de validité des problèmes moyen et moyen réduit pour ce type de trajectoires est de considérer que le domaine des quasi-satellites se situe à l'intérieur de la zone d'exclusion si et seulement si le point fixe de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  est exclu. Ainsi, l'étude de la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  nous permet de déterminer la valeur d'excentricité minimale pour que le processus de moyennisation soit adapté à l'étude des quasi-satellites. Dans la section suivante, nous présentons donc les résultats de l'étude de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  ainsi que des autres familles de points fixes du problème moyen réduit.

**2.4. Les familles de points fixes du problème moyen réduit.** Pour une valeur de  $e_0$  donnée, la stabilité linéaire d'un point fixe du problème moyen réduit, noté  $(\zeta_{1,0}, u_0)$ , se déduit des valeurs propres de la matrice

$$\mathcal{M} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \overline{H}_{e_0}^o}{\partial \zeta_1 \partial u} & \frac{\partial^2 \overline{H}_{e_0}^o}{\partial u^2} \\ -\frac{\partial^2 \overline{H}_{e_0}^o}{\partial \zeta_1^2} & -\frac{\partial^2 \overline{H}_{e_0}^o}{\partial \zeta_1 \partial u} \end{pmatrix}$$

issue des équations variationnelles

$$(1.24) \quad \begin{pmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\zeta_{1,0}, u_0) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ u \end{pmatrix}$$

associées au système différentiel linéarisé au voisinage du point fixe. Lorsque le point fixe est elliptique, ses valeurs propres sont égales à  $\pm i\nu$  où le réel  $\nu$  est la fréquence de rotation ou de libration des orbites autour de l'équilibre. De même, la fréquence de précession de l'orbite est fournie par

$$g = -\frac{\partial \overline{H}_{e_0}^o}{\partial \Gamma}(\zeta_{1,0}, u_0).$$

Les évolutions de la position et des fréquences le long des familles  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  en fonction du paramètre  $e_0$  sont représentées dans la figure 1.5 pour  $\varepsilon = 10^{-3}$ . La courbe rouge à proximité de  $(\zeta_1, u) = (180^\circ, 0)$  représente la famille  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  tandis que les deux courbes bleu marine qui émergent en  $L_4$  et  $L_5$  correspondent à  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$ . En augmentant  $e_0$ , ces deux dernières fusionnent avec  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  pour  $e_0 \simeq 0.917$  (tirets verticaux sur la figure 1.5). En outre, pour des valeurs de  $e_0$  supérieures, les orbites de  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  sont stables (courbes vertes).

La courbe bleu ciel à proximité de  $\zeta_1 = u = 0$  représente la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Le long de cette famille, pour  $0.4 \leq e_0 < 1$ , les fréquences  $|\nu|$  et  $|g|$  sont du même ordre que celles des tadpoles représentées par  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  ou  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  mais avec  $g$  de signe différent. En diminuant  $e_0$ , les modules des fréquences augmentent et tendent vers l'infini. Par conséquent, lorsque les fréquences atteignent des valeurs du même ordre ou supérieures à la fréquence de moyennisation,  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  entre dans la zone d'exclusion et le problème moyen ne décrit plus les trajectoires quasi-satellites avec précision.

Afin d'estimer un domaine d'excentricité où le problème moyen est adapté à l'étude des orbites quasi-satellites, nous considérons que  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  se situe en dehors de la zone

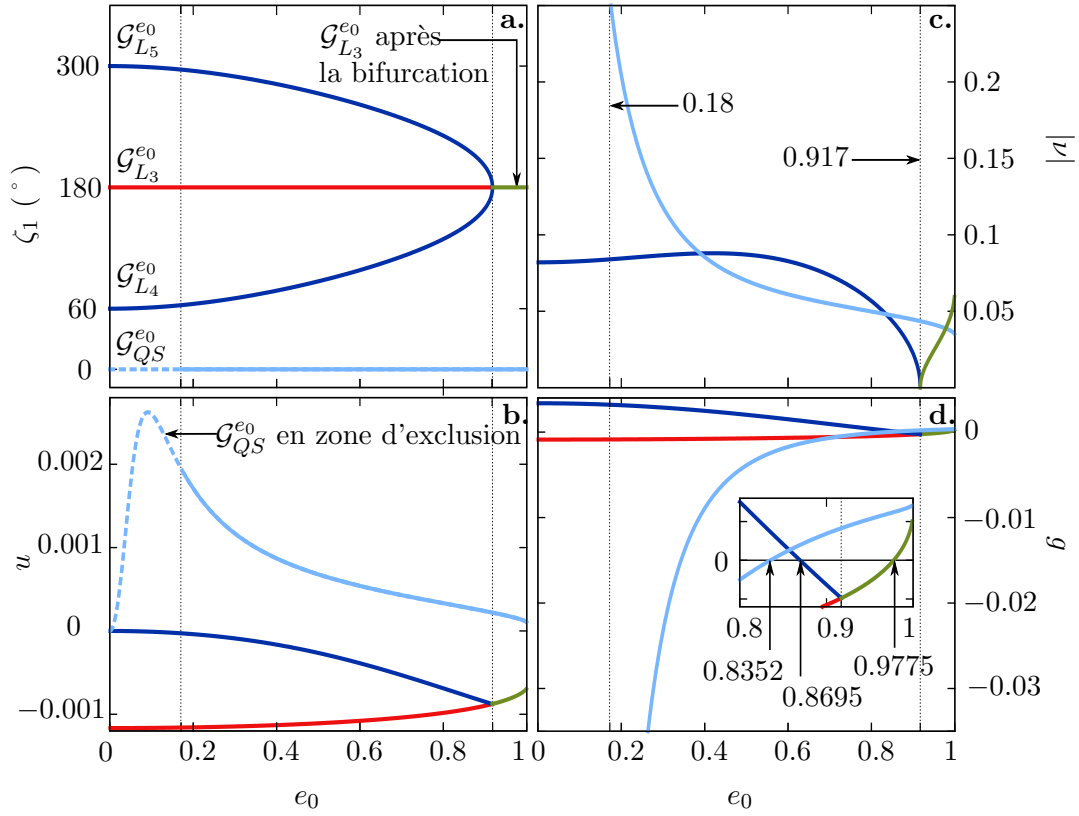


FIGURE 1.5. Position  $\zeta_1$  (a) et  $u$  (b) et fréquences  $|\nu|$  (c) et  $g$  (d) des familles de points fixes pour un système de type “Soleil-Jupiter” ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Les familles  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  (courbes bleu marine) fusionnent avec  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  (courbes rouges) et engendrent une famille de points fixes stables (courbes vertes). Le problème moyen est une approche pertinente pour l’étude des quasi-satellites lorsque les courbes bleu ciel associées à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  sont continues, c’est-à-dire pour  $e_0 \geq 0.18$ . Le long de chaque famille, il existe une orbite particulière où la fréquence de précession  $g$  est nulle. Ces orbites correspondent à des cercles de points fixes du problème moyen.

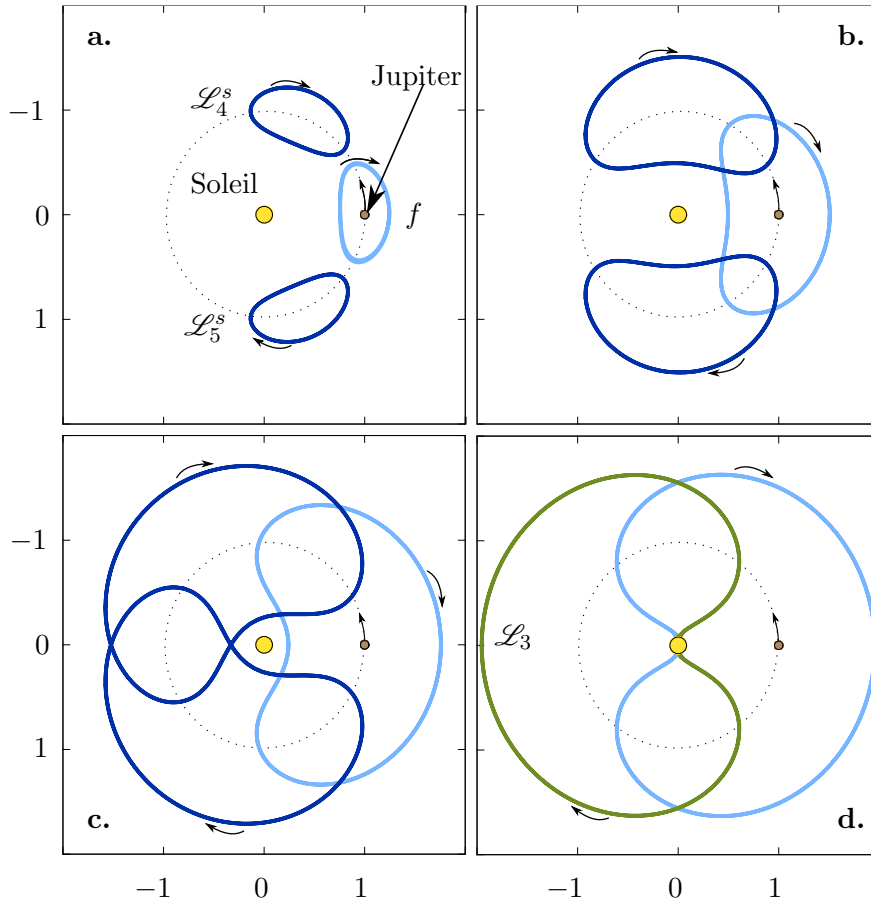


FIGURE 1.6. Orbites périodiques dans le repère tournant correspondant aux points fixes stables de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  pour  $e_0 = 0.25$  (a), 0.5 (b), 0.75 (c) et 0.95 (d) (voir la figure 1.1b, c, d, et f). Les trajectoires bleu marine, bleu ciel et vertes, sont associées respectivement à  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$ ,  $f$  et  $\mathcal{L}_3$  après la bifurcation. Elles sont obtenues par intégration numérique des conditions initiales issues des familles  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$ .

d'exclusion lorsque  $|\nu|$  et  $|g|$  sont inférieurs à  $1/4$ , i.e.

$$(1.25) \quad \max(|\nu|, |g|) < 1/4.$$

La figure 1.5 montre que la valeur d'excentricité minimale est  $e_0 = 0.18$ . Par conséquent, dans un système de type "Soleil-Jupiter", les problèmes moyen et moyen réduit sont des approches pertinentes pour étudier  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  et les quasi-satellites lorsque  $e_0 \geq 0.18$ .

Maintenant intéressons-nous aux variations de la fréquence  $g$  le long de chaque famille. Pour chacune d'elles, la fréquence est monotone et croise zéro pour une valeur critique d'excentricité :  $e_0 \simeq 0.8352$  pour  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ ,  $e_0 \simeq 0.8695$  pour  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  et  $e_0 \simeq 0.9775$  pour  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ . Ces orbites particulières du problème moyen réduit correspondent à des "cercles de points fixes" dans le problème moyen et des orbites périodiques de fréquences 1 dans le repère tournant. Autrement dit, ce sont des ellipses gelées dans le référentiel héliocentrique. Nous les dénotons  $G_{QS}$ ,  $G_{L_4}$ ,  $G_{L_5}$  et  $G_{L_3}$ .

Pour conclure cette section, nous avons relié ces familles de points fixes du problème moyen réduit à leurs trajectoires correspondantes dans le repère tournant. En dehors de la zone d'exclusion, en appliquant  $\hat{\psi} \circ \mathcal{C} \circ \psi_{e_0}^{-1}$  à ces familles ainsi qu'une transformation dans les variables cartésiennes, nous obtenons une approximation au premier ordre en  $\varepsilon$  des conditions initiales de ces orbites dans le repère tournant. À l'aide d'un algorithme itératif qui enlève la fréquence  $\nu$  (Couetdic *et al.*, 2010), nous avons raffiné ces conditions initiales et intégré les trajectoires correspondantes dans le repère tournant. Un exemple de trajectoires stables est représenté dans la figure 1.6 pour différentes valeurs de  $e_0$  ( $e_0 = 0.25$  en a,  $0.5$  en b,  $0.75$  en c et  $0.95$  en d). Dans un système de type "Soleil-Jupiter", la totalité des familles  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$  sont obtenues à partir des conditions initiales de  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  et de la partie stable de  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ , de leurs équilibres respectifs jusqu'à la fusion avec la famille  $\mathcal{L}_3$  et l'orbite de collision avec le Soleil. Au contraire,  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  fournit seulement une partie de la famille  $f$  de Hénon (1969), de l'orbite de collision avec le Soleil jusqu'à l'orbite telle que  $e_0 = 0.18$ . La figure 1.6 montre qu'en augmentant  $e_0$ , la taille des trajectoires dans le repère tournant augmente. Comme nous pouvions le supposer, le centre de libration de la famille  $f$  se situe à proximité de la planète tandis que ceux de  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$  se décalent de  $L_4$  et  $L_5$  jusqu'à atteindre  $L_3$  où ils rencontrent celui de  $\mathcal{L}_3$ . Après la bifurcation, seules les trajectoires de la famille  $f$  et de  $\mathcal{L}_3$  sont présentes.

### 3. Les ellipses gelées : une extension au cas excentrique-plan ( $e' \geq 0$ )

Un important résultat obtenu de l'exploration numérique du cas circulaire-plan a été de mettre en évidence les orbites  $G_{QS}$ ,  $G_{L_3}$ ,  $G_{L_4}$  et  $G_{L_5}$  qui forment des cercles de points fixes dans le problème moyen et correspondent à des ellipses gelées ou figées, i.e. avec une fréquence de précession nulle, dans le référentiel héliocentrique. Une question naturelle est de savoir si ces structures sont préservées lorsqu'une petite excentricité est donnée à l'orbite de la planète. Cette question peut donc être posée

de manière perturbative.

Pour  $e'$  suffisamment faible, le hamiltonien moyen du cas excentrique-plan s'écrit  $\overline{H}^o + R'$  avec  $R' = \mathcal{O}(e')$ , c'est-à-dire la perturbation du hamiltonien moyen associé au cas circulaire-plan par l'effet de l'excentricité de la planète. Cependant, comme dans le cas excentrique-plan, la variable  $\varpi = \arg(x)$  n'est plus ignorable, la réduction de la dimension du problème n'est donc pas possible et la persistance des points fixes ne peut être garantie par un argument de type théorème de Poincaré-Birkhoff valable en dimension 2. Dans cette section, nous limiterons donc notre étude à une exploration numérique de l'espace des phases du cas excentrique-plan.

Pour de très faibles valeurs de  $e'$  dans un système de type "Soleil-Jupiter", les simulations numériques ont permis d'établir que chaque cercle de points fixes est détruit, mais que 2 points fixes survivent à la perturbation : un stable et un autre instable. Nous notons ces points fixes  $G_{X,1}^{e'}$  et  $G_{X,2}^{e'}$  avec  $X$  qui correspond à  $QS$ ,  $L_4$ ,  $L_5$  et  $L_3$ . En faisant varier  $e'$ , nous les avons suivis dans l'espace des phases et ainsi mis en évidence 8 familles de points fixes. La dynamique linéaire au voisinage d'un point fixe du problème moyen est donnée par 2 couples de valeurs propres :  $\pm\mu$  ou  $\pm i\nu$  et  $\pm f$  ou  $\pm ig$ , où  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $f$  et  $g$  sont des réels. Si ces valeurs propres sont imaginaires, alors le point fixe est elliptique avec pour fréquences  $\nu$  et  $g$ . Sinon, le point fixe est instable. Ainsi, nous caractérisons également la stabilité de chaque famille en faisant varier  $e'$ . Les conditions initiales et les modules des parties réelles et imaginaires des valeurs propres sont tracés en fonction de  $e'$  dans les figures 1.7, 1.8 et 1.9.

Parmi les huit familles de points fixes du problème moyen, deux sont les plus intéressantes :  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $G_{L_3,1}^{e'}$ . Les points fixes de la famille  $G_{QS,1}^{e'}$ , qui émerge de  $G_{QS}$ , sont stables jusqu'à  $e' \simeq 0.8$ . Comme nous l'avons représenté dans la figure 1.10a, cette famille correspond à une configuration où les deux ellipses sont anti-alignées<sup>9</sup> avec  $\zeta_1 = 0^\circ$  et une très haute excentricité qui décroît avec une pente proche  $\frac{\partial e}{\partial e'} = -1/2$ .

Au contraire, les points fixes de la famille  $G_{L_3,1}^{e'}$ , qui émerge de  $G_{L_3}$ , sont stables seulement pour  $0 \leq e_0 \leq 0.15$ . Cette famille décrit une configuration avec deux ellipses alignées,  $\zeta_1 = 180^\circ$  et une très haute excentricité qui décroît lorsque  $e'$  augmente (voir les représentations de la configuration dans la figure 1.10b). Remarquons que le long de ces deux familles, il existe une valeur critique de  $e'$  où la planète et la particule ont la même excentricité. Les traits verticaux des figures 1.7 et 1.8 montrent que ces configurations existent pour  $e' = e \simeq 0.565$  en  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $e' = e \simeq 0.73$  en  $G_{L_3,1}^{e'}$ .

Ces deux familles ont été mises en évidence dans le problème planétaire. En effet,  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $G_{L_3,1}^{e'}$  sont certainement reliées aux familles "stable" et "instable" décrites par Hadjidemetriou *et al.* (2009) et Hadjidemetriou et Voyatzis (2011). De même,  $G_{QS}$  peut être associée à la famille de points fixes "QS" de Giuppone *et al.* (2010).

9. Deux ellipses sont anti-alignées si la différence entre leur longitude du périastre est égale à  $180^\circ$ . Au contraire, elles sont considérées alignées si  $\varpi = 0^\circ$ . Voir la figure 1.10.

Les auteurs de Giuppone *et al.* (2010) et Hadjidemetriou et Voyatzis (2011) ont remarqué l'existence d'une configuration à excentricités égales et pour une valeur proche de  $e = e' \simeq 0.565$  pour différents rapports des masses planétaires. D'après Hadjidemetriou *et al.* (2009), la configuration  $G_{L_3,1}^{e'}$  à excentricités égales semble aussi exister dans le problème planétaire pour une valeur d'excentricité proche de 0.73. Par conséquent, ces observations suggèrent que les deux configurations à excentricités égales sont faiblement dépendantes du rapport de masse des planètes. En outre, nous signalons que les configurations associées à  $G_{QS,1}^{e'}$  sont très similaires à celles de la famille "A.1/1" qui a été décrite par Broucke (1975) dans le problème général des 3 corps. Cela suggère donc l'existence d'un lien entre les problèmes restreint, planétaire et général pour les configurations quasi-satellites.

Finalement, nous notons que certaines configurations des huit familles de points fixes ont déjà été remarquées. En effet, pour  $0.01 \leq e' \leq 0.5$ , Nesvorný *et al.* (2002) exhibent dans le problème moyen des points fixes quasi-satellites stables et instables. Ces auteurs ont également montré des points fixes très excentriques qui correspondent à la configurations des familles  $G_{L_4,1}^{e'}$  et  $G_{L_5,1}^{e'}$ . De même, Bien (1978) et Edelman (1985) ont montré l'existence d'ellipses gelées en résonance co-orbitale dans le système Soleil-Jupiter avec  $e' = 0.48$ . Le premier auteur a mis en évidence 6 points fixes à très haute excentricité qu'il a notés  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3$  et  $Q_3$  correspondant respectivement à  $G_{L_4,1}^{e'}$ ,  $G_{L_4,2}^{e'}$ ,  $G_{L_5,1}^{e'}$ ,  $G_{L_5,2}^{e'}$ ,  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $G_{QS,2}^{e'}$ . Le second a trouvé une ellipse gelée, stable, en résonance co-orbitale pour  $e = 0.975$  et  $\zeta_1 = 180^\circ$  ce qui semble correspondre à  $G_{L_3,1}^{e'}$ .

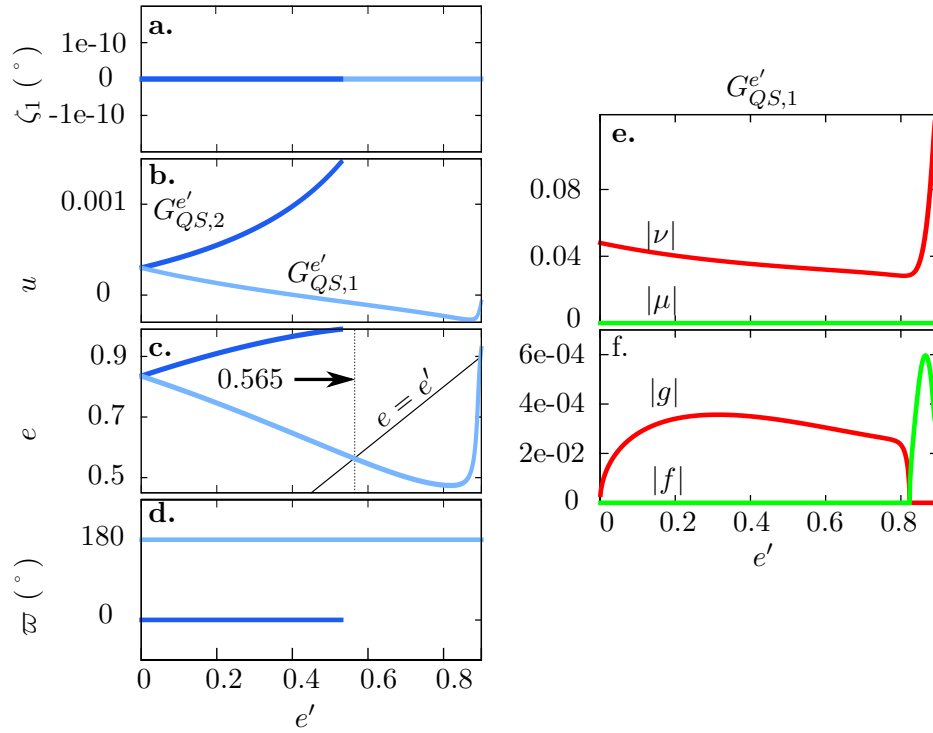


FIGURE 1.7. **a, b, c, et d** : éléments orbitaux des familles  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $G_{QS,2}^{e'}$  en fonction du paramètre  $e'$ . **f et g** : variations des modules des parties réelles et imaginaires des valeurs propres de la matrice issue du système différentiel linéaire le long de  $G_{QS,1}^{e'}$ .  $G_{QS,1}^{e'}$  est une famille de points fixes stables pour  $e' < 0.8$  et représente une configuration d'ellipses anti-alignées et telle que  $\zeta_1 = 0^\circ$ . De plus, la famille possède une orbite particulière où  $e' = e \simeq 0.565$ . Au contraire,  $G_{QS,2}^{e'}$  est une famille instable représentant une configuration d'ellipses alignées avec  $\zeta_1 = 0$ .

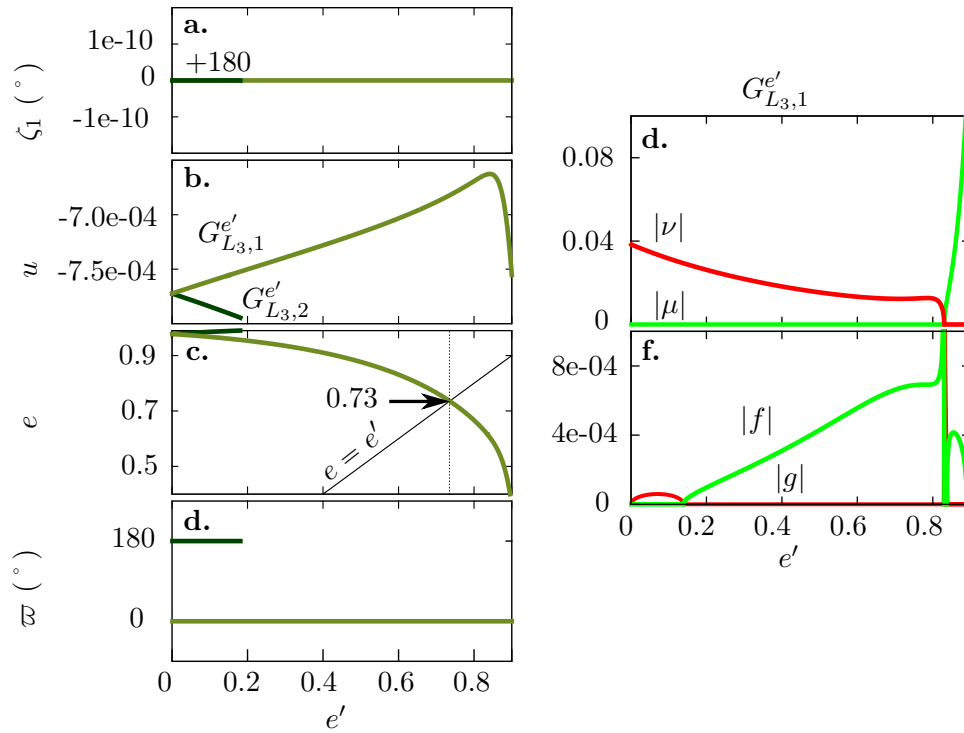


FIGURE 1.8. **a, b, c,** et **d** : éléments orbitaux des familles  $G_{L3,1}^{e'}$  et  $G_{L3,2}^{e'}$  en fonction du paramètre  $e'$ . **f** et **g** : variations des modules des parties réelles et imaginaires des valeurs propres de la matrice issue du système différentiel linéaire le long de  $G_{L3,1}^{e'}$ . Les points fixes de  $G_{L3,1}^{e'}$  sont stables pour  $e' \leq 0.15$  et représente une configuration d'ellipses alignées avec  $\zeta_1 = 180^\circ$ . De plus cette famille possède une orbite particulière avec  $e' = e \simeq 0.73$  où la planète et la particule partagent la même ellipse. Au contraire, la famille  $G_{L3,2}^{e'}$  est instable est représentée une configuration d'ellipses anti-alignées avec  $\zeta_1 = 180^\circ$ .



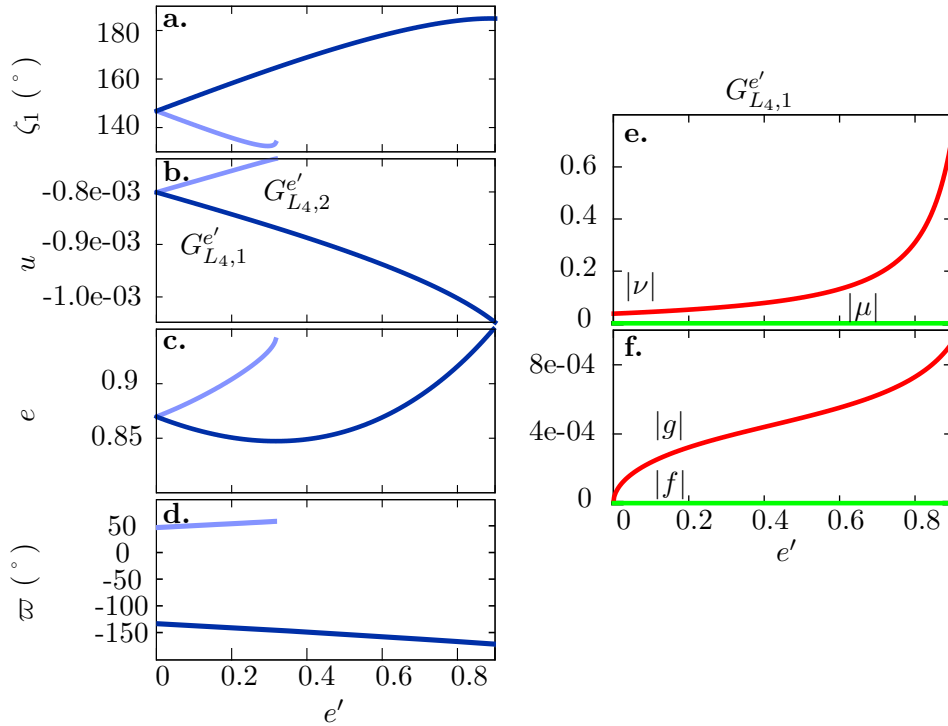


FIGURE 1.9. **a, b, c,** et **d** : éléments orbitaux des familles  $G_{L4,1}^{e'}$  et  $G_{L4,2}^{e'}$  en fonction du paramètre  $e'$ . **f** et **g** : variations des modules des parties réelles et imaginaires des valeurs propres de la matrice issue du système différentiel linéaire le long de  $G_{L4,1}^{e'}$ . L'intégralité de la famille  $G_{L4,1}^{e'}$  est stable tandis que  $G_{L4,2}^{e'}$  est instable.

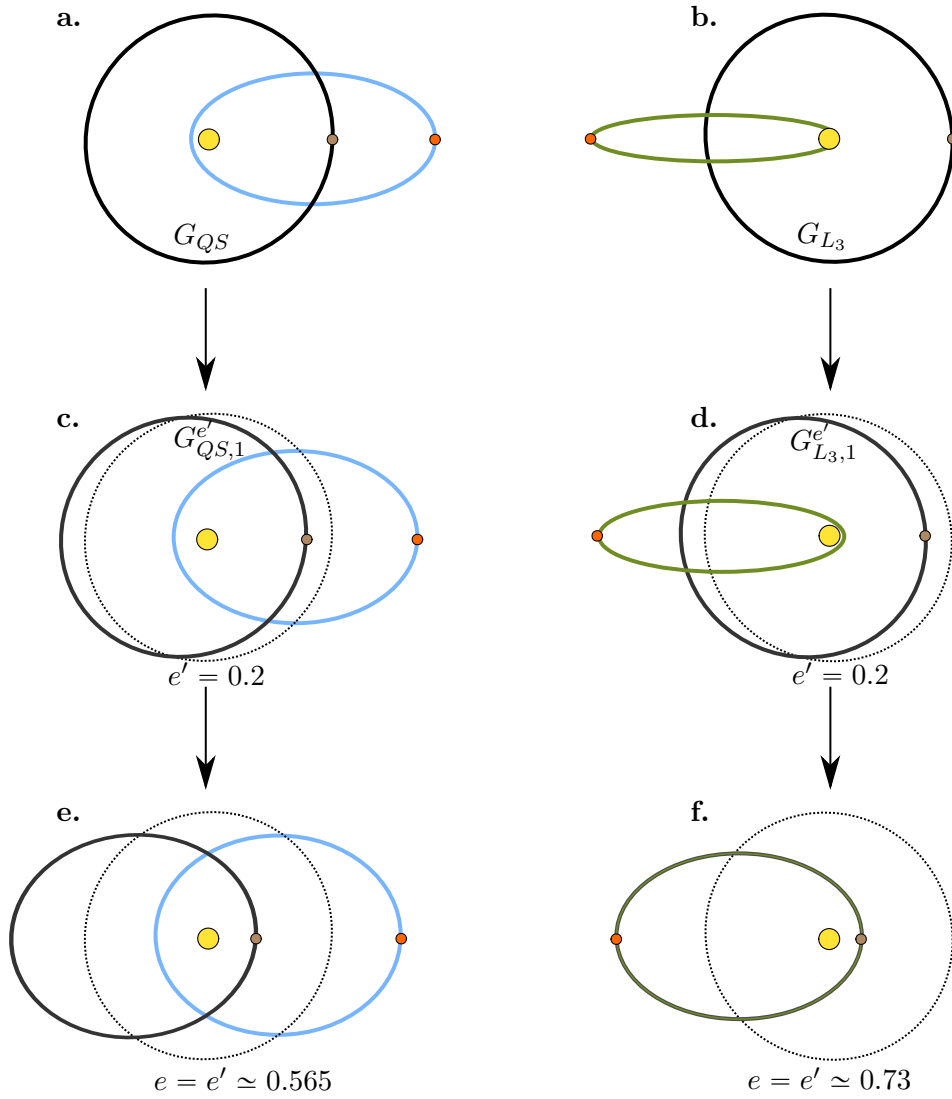


FIGURE 1.10. Illustrations dans le référentiel héliocentrique des orbites associées à  $G_{QS}$  (a) et  $G_{L_3}$  (b) ainsi que  $G_{Q,S,1}^e$  et  $G_{L,3,1}^e$  pour  $e' = 0.2$  (respectivement c et d) et à excentricités égales (respectivement e et f).

## Quasi-satellites ou satellites rétrogrades ?

### 1. Introduction

Ces vingt dernières années, les travaux concernant les trajectoires quasi-satellites se sont multipliés et cette terminologie est devenue dominante pour décrire les trajectoires co-orbitales telles que  $\zeta_1 = \lambda - \lambda'$  oscille autour de zéro. Cependant, certains auteurs emploient plutôt le terme de “satellite rétrograde” (Nesvorný *et al.*, 2002; Namouni, 1999; Christou, 2000) en référence aux trajectoires du repère tournant et plus précisément au voisinage de la famille  $f$  de Henon (1969). Il existe donc une ambiguïté dans la terminologie à employer qui est une conséquence des différents points de vue possibles pour décrire ces trajectoires.

Dans ce chapitre, notre but est de clarifier les notions de “quasi-satellite” et “satellite rétrograde”. Afin de pouvoir comprendre les différences entre ces configurations, nous dédions la section suivante à une revue historique des travaux majeurs les concernant.

### 2. Des satellites rétrogrades aux quasi-satellites

À la suite des découvertes des lunes Phoebe (1898) et Pasiphae (1908) – anciennement désignée J VIII – qui orbitent dans un sens rétrograde et à de grandes distances de leur corps primaire respectif, Saturne et Jupiter, Jackson (1913) publia la première étude dédiée au mouvement des satellites rétrogrades. En cherchant à comprendre comment une lune peut encore être satellisée à une distance proche de la limite de la sphère d’influence de la planète – également dénommée sphère de Hill –, il écrivit :

*“A little further away from Jupiter than J VIII, the solar forces would prohibit direct motion, but the solar and Jovian forces would go hand in hand to maintain a retrograde satellite.”* (Jackson, 1913)

ce qui illustre que contrairement aux satellites progrades dont le mouvement à grande distance est contrecarré par l’influence du Soleil, les satellites rétrogrades sont maintenus par l’association des forces issues de la planète et du Soleil. Ainsi, par cette remarque, l’auteur est le premier à confirmer l’existence et la stabilité de satellites rétrogrades éloignés de leur planète dans le système solaire.

Par la suite, des études ont établi l’existence et la stabilité de ces orbites dans le

problème restreint plan de trois corps à masses égales (Strömberg, 1933; Moeller, 1935; Henon, 1965a,b)<sup>1</sup> et pour un système de type “Terre-Lune” (Broucke, 1968).

Dans le cadre du problème de Hill, Henon (1969) étendit l’étude de Jackson en mettant en évidence l’existence d’une famille à un paramètre d’orbites périodiques symétriques de type “satellite rétrograde”, notée<sup>2</sup>  $f$  dont les trajectoires subsistent au-delà des configurations de Euler  $L_1$  et  $L_2$ . Cela fut confirmé par Henon et Guyot (1970) dans le cadre du problème restreint des trois corps. Dans le repère tournant avec la planète, les auteurs montrèrent que la famille  $f$  s’étend des orbites satellites rétrogrades situées dans un voisinage infinitésimal de la planète jusqu’à une orbite de collision avec l’étoile. De plus, ils soulignèrent que si  $\varepsilon < 0.0477$ , alors l’intégralité de la famille est stable. Benest (1974, 1975, 1976) prolongea ensuite ces résultats en étudiant la stabilité du voisinage de la famille  $f$  dans l’espace des configurations pour  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

À la suite de ces travaux théoriques, l’étude des trajectoires satellites rétrogrades fut menée dans un cadre pratique, notamment dans le but d’envoyer une sonde autour de Phobos. En remarquant que cette lune de Mars est très peu massive (le système Mars-Phobos est représenté par  $\varepsilon = 10^{-8}$ ), sa sphère de Hill se situe à proximité de la surface, ce qui rend les trajectoires satellites rétrogrades à grande distance particulièrement adaptées à la situation. Ainsi, à la fin des années quatre-vingt, la terminologie “quasi-satellite”<sup>3</sup> est introduite par la communauté soviétique d’astrodynamique afin de définir les trajectoires du problème restreint des trois corps qui sont des orbites de type “satellite rétrograde” à l’extérieur de la sphère de Hill du corps secondaire (voir la figure 2.1a). En outre, la mission vers Phobos engendra les travaux de Kogan (1990) et Lidov et Vashkov’yak (1993, 1994a,b).

Les quasi-satellites sont apparus dans la communauté de mécanique céleste à la fin des années quatre-vingt-dix, dans le cadre de trajectoires d’astéroïdes dans le système solaire. En effet, si l’on suppose un astéroïde sur une orbite de type “quasi-satellite” suffisamment éloignée de la planète telle que l’influence de l’étoile domine son mouvement et que la planète agisse comme une perturbation, alors sa trajectoire pourra être représentée par des ellipses osculatrices dont les variations sont gouvernées par l’influence de la planète. Dans ce contexte, Mikkola et Innanen (1997) remarquèrent que les moyens mouvement de l’astéroïde et de la planète se trouvent en résonance 1/1, signifiant donc que les configurations quasi-satellites

---

1. Les deux premiers articles sont des travaux du groupe de Copenhague qui explora intensivement les solutions périodiques du problème restreint plan de trois corps à masses égales (voir Szebehely, 1967, pour plus de détails). Les deux derniers travaux constituent les premières explorations numériques des solutions du problème restreint des trois corps dans lesquelles les trajectoires satellites rétrogrades furent redécouvertes et les travaux précédents complétés.

2. Il nota cette famille  $f$  en référence à la catégorie du même nom définie par le groupe de Copenhague (pour plus de précisions sur ces catégories, voir Szebehely, 1967)

3. Mentionnons que la terminologie “quasi-satellite” a également été utilisée dans le papier de Danielsson et Ip (1972) de manière complètement déconnectée du mouvement des satellites rétrogrades et afin de décrire le comportement résonant de l’astéroïde 1685 Toro.

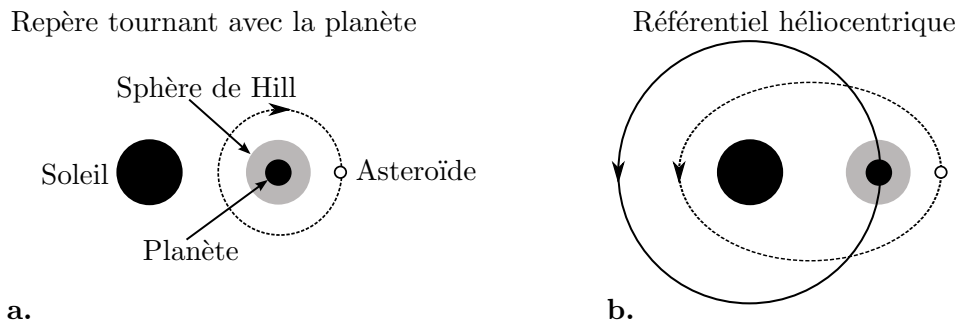


FIGURE 2.1. Astéroïde en orbite quasi-satellite. (a) Dans le repère tournant avec la planète, la trajectoire est celle d'un satellite rétrograde à l'extérieur de la sphère de Hill de la planète. (b) Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire est représentée par des ellipses osculatrices héliocentriques avec une excentricité non nulle dans le cas circulaire et  $\zeta_1 = \lambda - \lambda'$  qui oscille autour de zéro.

forment un domaine particulier de la résonance co-orbitale.

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent, à la différence des trajectoires tadpoles qui librent autour des configurations équilatérales de Lagrange et des fers-à-cheval qui entourent  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ , les orbites quasi-satellites sont caractérisées par une oscillation autour de  $\zeta_1 = 0^\circ$  et une excentricité non nulle si la planète grave sur une trajectoire circulaire (voir la figure 2.1b). Dans leur article, les auteurs décrivent la première étude employant des méthodes perturbatives afin d'estimer la stabilité à long terme de ces configurations. À cette époque, aucun objet naturel sur une trajectoire quasi-satellite n'est connu. Cependant, ils suggérèrent qu'au moins la Terre et Venus peuvent avoir des compagnons de ce type. À la suite de ce travail, Wiegert *et al.* (2000) prédirent via une investigation numérique de la stabilité autour des planètes géantes, qu'Uranus et Neptune peuvent partager leur orbite avec des astéroïdes quasi-satellites, tandis qu'aucune solution stable ne fut trouvée pour Jupiter et Saturne.

Ensuite, Namouni (1999) et Namouni *et al.* (1999) devinrent les références en terme de dynamique co-orbitale comportant des rencontres proches. Dans le problème de Hill, ces auteurs mirent en évidence que dans le cas spatial, des transitions entre quasi-satellites et fers-à-cheval ont lieu. Plus précisément, ils exhibèrent un nouveau type de trajectoires en résonance co-orbitale, notées HS-QS, TP-QS ou TP-QS-TP qui sont des compositions entre trajectoires tadpoles (TP), fers-à cheval (HS) et quasi-satellites (QS). Par exemple, le long d'une orbite composée HS-QS, un astéroïde passera périodiquement de quasi-satellite à fer-à-cheval. Ainsi, dans le cas spatial, il existe des transitions stables entre les trois domaines de la résonance co-orbitale. À la suite de ces travaux, Christou (2000) effectua une investigation numérique afin de prédire l'existence d'astéroïdes géocroiseurs sur ces orbites composées.

Dans le cadre d'une étude globale de l'espace des phases de la résonance, Nesvorný *et al.* (2002) retrouvèrent ces nouvelles structures. En effet, par le développement d'une méthode perturbative utilisant des techniques numériques de moyennisation (voir le chapitre 1), ils montrèrent comment les domaines tadpoles, fers-à-cheval, quasi-satellites et des orbites composées varient en fonction de l'excentricité et de l'inclinaison dans les cas circulaire-plan, excentrique-plan et circulaire-spatial. En particulier, ils ont établi que plus l'excentricité de l'astéroïde est élevée, plus le domaine occupé par les orbites quasi-satellites dans l'espace des phases est large (voir les portraits de phase de la figure 1.1 du chapitre 1). Enfin, la stabilité à long terme des quasi-satellites a été étudiée par Mikkola *et al.* (2006) et Sidorenko *et al.* (2014). Les premiers ont développé un algorithme afin de distinguer les astéroïdes quasi-satellites en régime temporaire (orbite composée) ou perpétuel, tandis que les derniers ont établi des conditions d'existence de trajectoires quasi-satellites et exploré les différents régimes possibles.

Plusieurs astéroïdes susceptibles d'être au moins des quasi-satellites temporaires ont été trouvés dans le système solaire. Le premier objet confirmé est 2002 VE 68

en résonance co-orbitale avec Venus (Mikkola *et al.*, 2004). La Terre (Brasser *et al.*, 2004; Connors *et al.*, 2002, 2004; de la Fuente Marcos et de la Fuente Marcos, 2014; Wajer, 2009, 2010) et Jupiter (Kinoshita et Nakai, 2007; Wajer et Królikowska, 2012) sont les deux planètes avec le plus grand nombre d'astéroïdes quasi-satellites répertoriés. En outre, Saturne (Gallardo, 2006), Uranus (Gallardo, 2006; de la Fuente Marcos et de la Fuente Marcos, 2014) et Neptune (de la Fuente Marcos et de la Fuente Marcos, 2012) possèdent au moins un compagnon de ce type.

Enfin, nous mentionnons que la dynamique quasi-satellite tient également un rôle dans d'autres problèmes de mécanique céleste. En effet d'après Kortenkamp (2005) et Kortenkamp (2013), des planétésimaux peuvent être piégés sur des orbites quasi-satellites autour de la protoplanète ainsi que les particules de poussière autour de la Terre. En outre, bien qu'aucun système d'exoplanètes en résonance co-orbitale n'ait été détecté, des études du problème planétaire des trois corps ont montré l'existence et la stabilité de 2 planètes co-orbitales en configuration quasi-satellite (Hadjidemetriou *et al.*, 2009; Hadjidemetriou et Voyatzis, 2011; Giuppone *et al.*, 2010).

Les configurations de type "quasi-satellite" ou "satellite rétrograde", en fonction de la terminologie choisie, possèdent donc un grand intérêt en mécanique céleste, que ce soit parce qu'elles relient satellites et trajectoires héliocentriques mais également parce qu'elles connectent les différents domaines de la résonance co-orbitale. De plus, en pratique elles peuvent être importantes dans l'étude de trajectoires d'astéroïdes et plus particulièrement de géocroiseurs mais également pour l'envoi de sondes autour d'objets de faible masse ainsi que dans la détection de systèmes d'exoplanètes co-orbitaux. Enfin, comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, un lien entre les problèmes des 3 corps restreint, planétaire et général à masses égales semble exister, en particulier avec la famille "A.1/1" exhibée par Broucke (1975).

Le fait que certains auteurs utilisent le terme "satellite rétrograde" plutôt que "quasi-satellite" montre que la définition discriminant ces deux types de trajectoires n'est pas claire. En effet, en se rappelant que dans le repère tournant, la famille  $f$  est continue jusqu'à la collision avec l'étoile pour de faibles valeurs de  $\varepsilon$  (Henon et Guyot, 1970) et que la notion sphère de Hill comme région d'influence de la planète délimitée par  $L_1$  et  $L_2$  provient des satellites progrades, alors la définition de "quasi-satellite" qui a été établie par les astrodynamiciens soviétiques n'est pas une évidence.

À cause de la zone d'exclusion qui est engendrée par les passages proches avec la planète, le problème moyen n'est pas adapté pour clarifier cette terminologie. Plus généralement, ce sont les méthodes perturbatives qui ne sont pas adaptées puisque dans certaines, l'objet d'étude concerne des trajectoires satellisées autour de la planète et perturbées par le Soleil, on parlera alors de "satellites rétrogrades". Dans d'autres où c'est l'étoile qui domine et la planète qui perturbe, les trajectoires seront des "quasi-satellites". Par conséquent, seule une étude dans le cadre le plus général permet de clarifier la définition de ces configurations.

Ainsi, afin d'accéder à l'ensemble des orbites, nous avons choisi de revisiter le cas circulaire-plan dans le repère tournant avec la planète et en particulier les études classiques (Henon et Guyot, 1970; Benest, 1974) sur la famille d'orbites simple-périodiques, symétriques et de type satellite rétrograde, i.e. la famille  $f$ , en créant un pont avec les résultats du problème moyen sur  $\mathcal{G}_{QS}^{\varepsilon_0}$ . Dans la section suivante, nous présenterons nos résultats et proposerons une définition des différents domaines constituant le voisinage de la famille  $f$ .

### 3. Étude du voisinage de la famille $f$

Afin d'introduire le hamiltonien associé au problème restreint dans le repère tournant avec la planète, revenons à l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  du problème dans les variables cartésiennes héliocentriques<sup>4</sup>. Celui-ci n'étant pas autonome, nous étendons l'espace des phases par l'ajout de  $\Lambda'$ , la variable canonique associée à  $\lambda' = t$ . Dans le cas circulaire-plan, en définissant la transformation canonique

$$(2.1) \quad \Phi_{RT} : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \\ (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \lambda', \Lambda') & \longmapsto & (\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{R}}, \lambda', \tilde{\Lambda}') = (X, Y, p_X, p_Y, \lambda', \tilde{\Lambda}') \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathcal{R}(\lambda')(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \\ \dot{\mathbf{r}} = \mathcal{R}(\lambda')\tilde{\mathbf{R}} \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathcal{R}(\lambda') = \begin{pmatrix} \cos \lambda' & \sin \lambda' \\ -\sin \lambda' & \cos \lambda' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$(2.2) \quad \mathcal{H} := (\Lambda' + \mathcal{H}) \circ \Phi_{RT} - \tilde{\Lambda}',$$

le hamiltonien dans le repère tournant avec la planète et qui s'écrit

$$\mathcal{H}(\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) - (X + 1 - \varepsilon)p_Y + Yp_X - \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{(X + 1)^2 + Y^2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Ce hamiltonien est indépendant de  $(\lambda', \tilde{\Lambda}')$  et possède 2 degrés de liberté représentés par  $(\mathbf{R}, \tilde{\mathbf{R}})$  où  $\tilde{\mathbf{R}}$  est le moment linéaire barycentrique,  $\mathbf{R}$  est le vecteur position dans le référentiel dont l'origine correspond à la position de la planète, l'axe horizontal est associé à l'alignement Soleil-planète et l'axe vertical donné par la direction perpendiculaire. Notons que dans la suite de cette section, nous "oublions" les variables  $(\lambda', \tilde{\Lambda}')$ .

Afin d'obtenir la vitesse tangente à la trajectoire dans le repère tournant, nous introduisons le vecteur (non canonique)  $\dot{\mathbf{R}}$  tel que

$$\dot{\mathbf{R}} := \tilde{\mathbf{R}} + (Y, -(X + 1 - \varepsilon)).$$

Dans ces variables, les équations du mouvement qui régissent la dynamique de la particule s'écrivent :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \ddot{X} = & 2\dot{Y} + X - (1 - \varepsilon)\frac{X+1}{\sqrt{(X+1)^2+Y^2}} - \varepsilon\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \\ \ddot{Y} = & -2\dot{X} + Y - (1 - \varepsilon)\frac{Y}{\sqrt{(X+1)^2+Y^2}} - \varepsilon\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \end{cases}$$

4. voir l'équation (1.1) dans la section 1.1 du chapitre 1.



et admettent une intégrale première appelée constante de Jacobi :

$$(2.4) \quad C_J(\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}) = \frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}{2} - \frac{(X + 1 - \varepsilon)^2 + Y^2}{2} - \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{(X + 1)^2 + Y^2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

Ainsi, les solutions des équations (2.3) sont des trajectoires de l'espace des phases représentées par  $(X, Y, \dot{X}, \dot{Y})$ . Cependant en considérant la valeur de Jacobi fixée, une des quatre variables peut être calculée à partir des trois autres. Ainsi en posant  $\dot{Y} = \dot{Y}(X, Y, \dot{X}, C_J)$  la dimension du problème est réduite à 3.

**3.1. La famille  $f$ .** La figure 2.2 représente dans le repère tournant avec la planète, une orbite de la famille  $f$  (courbe bleu ciel) ainsi qu'un exemple de trajectoire dans son voisinage (courbe rouge). Ces orbites croisent l'axe  $\{X = 0\}$  avec une vitesse  $\dot{Y} < 0$  lorsque  $X > 0$ . Par conséquent, en définissant l'application de Poincaré  $\Pi_T$  associée à la section  $\{Y = 0; \dot{Y} < 0\}$  où  $T$  est le temps entre deux sections consécutives, le problème défini par les équations (2.3) pour  $C_J$  fixé se réduit à l'étude du degré de liberté  $(X, \dot{X})$ . Ainsi, dans cette section de Poincaré, une orbite de la famille  $f$  correspond à un point fixe. Comme ces orbites sont symétriques par rapport à l'axe  $\{Y = 0\}$ , la composante  $\dot{X}$  du vecteur vitesse est nulle, signifiant que le point fixe est de la forme  $(X, 0)$ . La période  $T$  de l'application de Poincaré correspond à la période de l'orbite de la famille  $f$ . En rappelant qu'une solution du repère tournant est en général quasi-périodique de fréquence  $\nu$  et  $1 - g$  et que la famille  $f$ , via la partie associée à  $\mathcal{G}_{QS}^{\varepsilon_0}$ , est périodique de fréquence  $1 - g$ , nous avons donc nécessairement

$$(2.5) \quad T = 2\pi/(1 - g).$$

Enfin, la stabilité du point fixe se déduit de la matrice de monodromie  $d\Pi_T(X, 0)$ . Lorsque celui-ci est stable, la fréquence  $\nu$  qui caractérise l'oscillation de l'angle  $\zeta_1$  est obtenue des deux valeurs propres de  $d\Pi_T(X, 0)$ , notées  $\kappa$  et  $\bar{\kappa}$  telle que

$$(2.6) \quad \kappa = \exp i\nu T.$$

**3.2. Application au système de type "Soleil-Jupiter".** Les figures 2.3 et 2.4a représentent la famille  $f$  dans le plan  $(X, \dot{Y})$  (courbe rouge) ainsi que la partie issue de  $\mathcal{G}_{QS}^{\varepsilon_0}$  dans le problème moyen (courbe bleu ciel).

La figure 2.3 montre que la famille  $f$  s'étend des orbites situées dans un voisinage infinitésimal de la planète jusqu'à une orbite de collision avec l'étoile. Bien que l'intégralité de la famille soit linéairement stable pour  $\varepsilon < 0.0477$  (Henon et Guyot, 1970), nous ne pouvons prédire la taille de la région qui l'entoure. En effet, des résonances entre les fréquences fondamentales peuvent se produire et réduire cette région. C'est ce qu'il se passe pour deux points (croix bleues) où le diamètre de la zone de stabilité tend vers zéro. Par conséquent, ces deux orbites périodiques divisent le voisinage de la famille  $f$  en 3 domaines connexes que nous avons schématisés en gris dans les figures 2.3 et 2.4.

La figure 2.4b trace les variations des fréquences  $\nu$  et  $1 - g$  le long de la famille  $f$ . En comparaison avec la figure 1.5 du chapitre 1, nous remarquons que la fréquence  $\nu$  ne

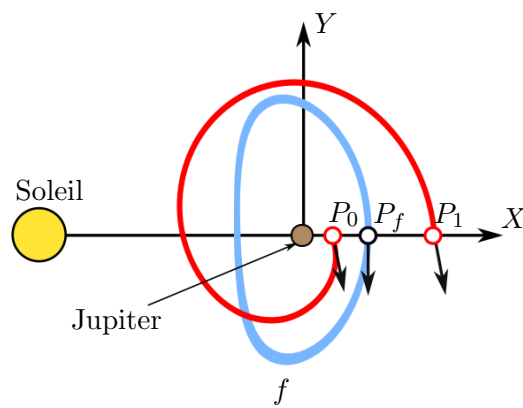


FIGURE 2.2. Courbe bleu ciel : trajectoire de la famille  $f$ . C'est une orbite périodique dans le repère tournant qui croise la section  $\{Y = 0; \dot{Y} < 0\}$  pour  $P_f = (\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) = (X, 0, 0, \dot{Y})$  et avec une période  $T = 2\pi/(1 - g)$ . Courbe rouge : trajectoire au voisinage de la famille  $f$  qui croise la section  $\{Y = 0; \dot{Y} < 0\}$  en  $P_0$  et  $P_1$

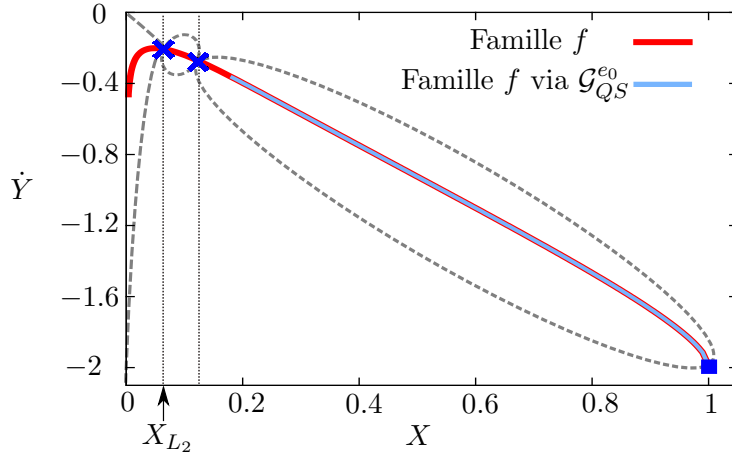


FIGURE 2.3. Famille  $f$  (courbe rouge) dans le plan  $(X, \dot{Y})$  et la partie accessible dans le problème moyen via  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  (courbe bleu ciel). Les deux croix bleues indiquent les orbites dont les fréquences fondamentales sont en résonance  $1/3$  et qui divisent le voisinage de la famille en 3 domaines connexes dont les limites sont schématisés en gris. Le carré bleu illustre l'orbite de collision avec le Soleil

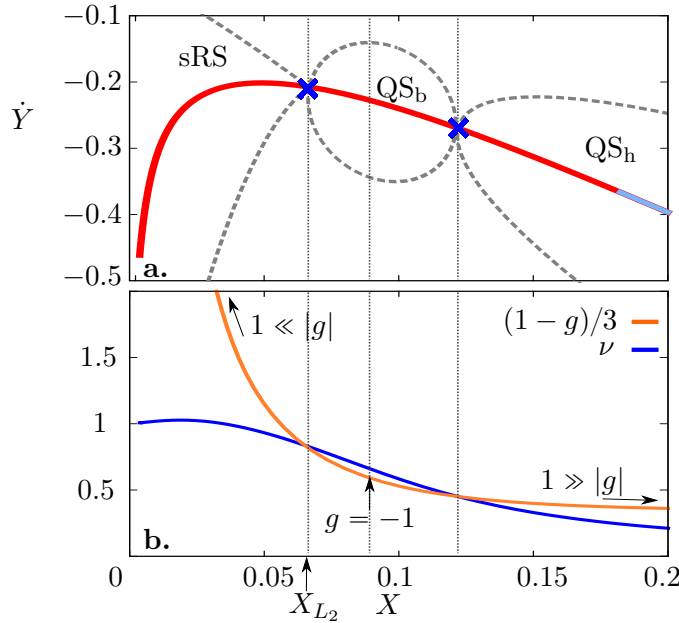


FIGURE 2.4. **a** : Agrandissement de la figure 2.3 autour des deux orbites périodiques dont les fréquences fondamentales sont en résonance  $1/3$ . **b** : Variations des fréquences fondamentales du système le long de la famille  $f$ . En comparaison avec la figure 1.5 du chapitre 1,  $\nu$  ne tend pas vers l'infini lorsque les orbites se rapprochent de l'étoile mais augmente et tend vers 1. La résonance  $1/3$  divise le voisinage de la famille  $f$  en 3 domaines clairement définis en terme de fréquence : les satellites rétrogrades "satellisés" (sRS), les quasi-satellites de type binaire ( $QS_b$ ) et les quasi-satellites de type héliocentrique ( $QS_h$ ).

tend pas vers l'infini lorsque les orbites périodiques se rapprochent de la planète mais augmente et tend vers 1. De plus, la figure 2.4b met en évidence que la résonance entre les fréquences fondamentales est  $\nu/(1-g) = 1/3$  et que les trois domaines qui forment le voisinage de la famille sont clairement définis par leurs fréquences telles que :

$$\text{sRS} : \begin{cases} 3\nu < 1-g \\ |g| > 1 \end{cases}, \quad \text{QS}_b : 3\nu > 1-g \quad \text{et} \quad \text{QS}_h : \begin{cases} 3\nu < 1-g \\ |g| < 1 \end{cases}.$$

La borne supérieure du domaine situé à proximité de la planète correspond à  $L_2$  qui forme la limite de la sphère de Hill. Ce domaine correspond donc aux orbites satellites rétrogrades "satellisés" autour de la planète (notés sRS). Il est constitué de trajectoires dont la dynamique est dominée par l'influence gravitationnelle de la planète tandis que l'étoile agit comme une perturbation. Ainsi, les ellipses osculatrices planétocentriques sont les variables les plus pertinentes pour représenter ces trajectoires et l'utilisation de méthodes perturbatives est possible. Dans cette représentation, le moyen mouvement est égale à  $g$  tandis que la fréquence 1 est associée à la précession de l'ellipse.

En dehors de la sphère de Hill, les trajectoires correspondent aux quasi-satellites. Cependant ce domaine est lui même divisé en deux. Les trajectoires quasi-satellites de type héliocentriques (notés  $\text{QS}_h$ ) correspondent au domaine le plus éloigné de la planète ce qui implique que celle-ci agit comme une perturbation tandis que l'influence de l'étoile domine la dynamique. Ainsi, les éléments orbitaux héliocentriques sont adaptés à ce type de trajectoire et les méthodes perturbatives comme les processus de moyennisation sont possibles. Ce sont donc ces trajectoires qui sont accessibles dans les problèmes moyen et moyen réduit. Dans ce domaine, les orbites de la famille  $f$  sont caractérisées par  $\zeta_1 = 0^\circ$  ce qui signifie qu'elles croisent l'axe  $\{Y = 0\}$ , représentant l'alignement Soleil-Jupiter, au périastre et à l'apoastre. De ce fait, ces trajectoires croisent la section de Poincaré à l'apoastre ce qui implique que  $X$  et le paramètre  $e_0$  peuvent être reliés tels que

$$(2.7) \quad X = e = e_0 + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Le troisième domaine, que nous avons noté  $\text{QS}_b$  pour quasi-satellite de type binaire, se situe entre les domaines sRS et  $\text{QS}_h$ . Dans cette région, ni la planète, ni l'étoile ne domine la dynamique de la trajectoire de la particule. Par conséquent, les fréquences 1 et  $g$  peuvent être du même ordre voire même égales ce qui rend inadaptées toutes méthodes de moyennisation.

Pour conclure, mentionnons que dans le problème planétaire, Hadjidemetriou et Voyatzis (2011) ont mis en évidence une famille d'orbites périodiques – la famille stable – qui correspond à la famille  $f$ . En effet, le long de cette famille qui s'étend de la collision entre les deux planètes et l'étoile jusqu'à la configuration où les deux planètes sont mutuellement satellisées, les trajectoires sont stables et satisfont  $\zeta_1 = 0^\circ$ . En outre, ces auteurs ont décomposé le voisinage de cette famille en 3 domaines

qu'ils ont nommés  $A$ ,  $B$  et planétaire, ce qui semble correspondre à nos domaines sRS, QS<sub>b</sub> et QS<sub>h</sub>.

**3.3. Extension de l'étude pour des masses arbitraires.** En faisant varier le rapport de masse  $\varepsilon$ , nous suivons l'évolution des limites des trois domaines le long de la famille  $f$  ainsi que la limite de validité du problème moyen (i.e.  $\max(|\nu|, |g|) > 1/4$ ). Sur la figure 2.5, le paramètre  $\varepsilon$  se situe entre  $10^{-7}$  et 0.0477, qui est le rapport de masse critique où une partie de la famille  $f$  devient instable.

Pour des systèmes composés du Soleil et d'une planète tellurique, la taille des domaines QS<sub>b</sub> et sRS est négligeable par rapport au domaine QS<sub>h</sub>. Par conséquent, pour ces systèmes, les problèmes moyen et moyen réduit sont complètement adaptés pour décrire la partie principale de la famille  $f$  et son voisinage (à l'exception toutefois des très faibles excentricités). Pour des systèmes composés du Soleil et d'une planète géante mais également de type "Terre-Lune", l'influence gravitationnelle de la planète devient plus importante et la taille du domaine QS<sub>b</sub> augmente jusqu'à être du même ordre que le domaine sRS tandis que la taille du domaine QS<sub>h</sub> diminue. Comme  $e_0 = X + \mathcal{O}(\varepsilon)$ , nous avons établi que pour les systèmes Soleil-Uranus, Soleil-Saturne, Soleil-Jupiter et Terre-Lune, le domaine des quasi-satellites est accessible dans le problème moyen pour  $e_0$  supérieure à 0.08, 0.13, 0.18 et 0.5. Ensuite, en augmentant  $\varepsilon$  les trajectoires QS<sub>b</sub> dominent tandis que le domaine QS<sub>h</sub> est tellement réduit que le problème moyen devient inutile pour toute valeur de  $e_0$  (aux alentours de  $\varepsilon = 0.04$ ). Par conséquent, pour un système de type "Pluton-Charon" ( $\varepsilon \simeq 1/10$ ), aucune trajectoire QS<sub>h</sub> ne peut être décrite via le problème moyen. En outre, d'après la carte de stabilité de la famille  $f$  dans Benest (1975), ce système ne peut pas posséder de compagnons de type "QS<sub>h</sub>" : seules les trajectoires sRS et QS<sub>b</sub> existent pour cette valeur de  $\varepsilon$ .

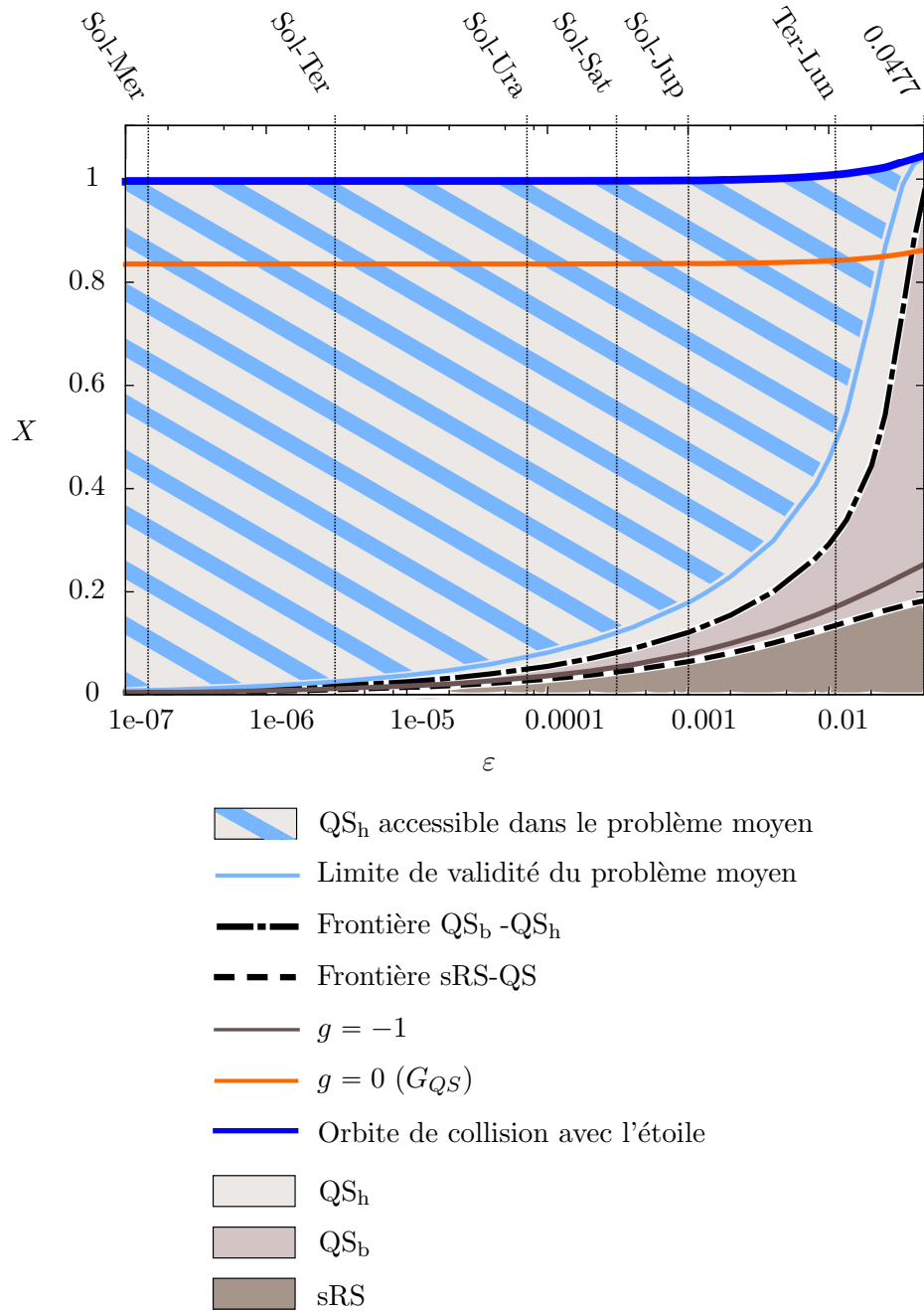


FIGURE 2.5. Évolution des limites des domaines  $sRS$ ,  $QS_b$  et  $QS_h$  le long de la famille  $f$  en faisant varier le rapport des masses  $\varepsilon$ . Pour de petites valeurs de  $\varepsilon$ , le domaine  $QS_h$  domine la famille  $f$  ce qui implique que les problème moyen et moyen réduit sont complètement adaptés pour étudier la dynamique quasi-satellite. En augmentant  $\varepsilon$ , la taille de la partie associée aux trajectoires  $sRS$  et  $QS_b$  augmente ce qui implique que dans le problème moyen, les orbites à faibles excentricité ne sont pas accessibles. Finalement, pour  $\varepsilon > 0.01$ , les domaines  $sRS$  et  $QS_b$  deviennent dominants, tandis que le domaine  $QS_h$  est tellement réduit que le problème moyen devient inutile pour toute valeur de  $e_0$ .

## Conclusion

Dans le chapitre 2, nous avons clarifié la différence entre “quasi-satellite” et “satellite rétrograde”. Dans le repère tournant, l’étude de la famille  $f$ , qui s’étend des trajectoires satellisées autour de la planète jusqu’à une trajectoire de collision avec l’étoile, a permis de montrer l’existence de deux orbites particulières qui divisent le voisinage de la famille en trois domaines connexes clairement définis par leur fréquences. À l’intérieur de ce que nous pouvons associer à la sphère de Hill – la limite correspondant à la position de  $L_2$  dans la section de Poincaré – nous trouvons les satellites rétrogrades “satellisés” autour de la planète. À l’extérieur, ce sont les trajectoires du domaine des quasi-satellites qui est lui-même divisé en deux domaines : les quasi-satellites de type binaire et héliocentrique. Dans le problème moyen, c’est ce dernier qui est accessible en dehors de la zone d’exclusion.

Le problème moyen est une approche privilégiée pour étudier la résonance co-orbitale et appréhender les quasi-satellites de type héliocentrique. En effet, dans le chapitre 1, par une réduction du problème nous avons montré que le hamiltonien associé au cas circulaire-plan est intégrable ce qui nous a permis de comprendre la dynamique globale de la résonance : les différents types de dynamique, la topologie de l’espace des phases, les familles d’orbites périodiques et l’existence d’une bifurcation. En outre, par l’étude des fréquences des familles d’orbites périodiques, nous avons mis en évidence une limite de validité du problème moyen pour l’étude du domaine des quasi-satellites ( $e_0 > 0.18$  pour un système de type “Soleil-Jupiter”), mais également l’existence de “cercles de points fixes” correspondant à des orbites gelées dans le référentiel héliocentrique.

Parmi eux,  $G_{QS}$  est le plus intéressant puisque dans le problème excentrique-plan il engendre la famille de points fixes  $G_{QS,1}^{e'}$  paramétrée par  $e'$  qui est associée à une configuration quasi-satellite ( $\zeta_1 = 0^\circ$ ), avec deux ellipses anti-alignées. Celle-ci est stable pour  $e' < 0.8$  et semble reliée à la famille stable de Hadjidemetriou *et al.* (2009) dans le problème planétaire. En outre, dans le problème planétaire comme celui du restreint, le long de ces deux familles, il existe une configuration où les deuxième et troisième corps ont la même excentricité pour une valeur proche de 0.565. Cela suggère donc que cette configuration remarquable est très faiblement dépendante du rapport entre les masses planétaires.

Notons enfin que dans l’étude de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ , les modules des fréquences de libration  $\nu$  et de précession  $g$  sont du même ordre que celles des familles d’orbites périodiques associées aux trajectoires de type “tadpole” pour  $e_0 > 0.4$ . Ainsi, nous pouvons présumer qu’une étude de la dynamique globale à long terme d’astéroïdes

quasi-satellites de Jupiter par des méthodes d'analyse en fréquence révélera des structures résonantes proches de celles des astéroïdes troyens identifiées dans Robutel et Gabern (2006). Cependant, en remarquant que le sens de précession de la longitude du périastre est l'opposé de celui des planètes du système solaire, les résonances avec ces fréquences séculaires devraient être d'ordre plus élevé comparées à avec celles des orbites tadpoles. Au contraire, les résonances avec leur fréquence de précession du nœud devraient être d'un ordre plus faible.

Ces questions forment donc un ensemble de perspectives intéressantes dans l'étude de ces configurations quasi-satellites.



Deuxième partie

Études analytiques du domaine des  
quasi-satellites



## Avant-propos

La première partie de ce manuscrit a consisté à décrire la résonance co-orbitale par l'intermédiaire d'une exploration numérique du problème moyen afin d'exhiber le domaine des trajectoires quasi-satellites. Ensuite, en mentionnant l'existence d'une ambiguïté entre les notions de "satellite rétrograde" et de "quasi-satellite", nous avons clarifié la définition de ces trajectoires et établi rigoureusement que le domaine accessible dans le problème moyen est celui des quasi-satellites de type héliocentrique.

Un prolongement naturel de ces études consiste à explorer ce domaine des quasi-satellites via le problème moyen. Pour cela, nous avons développé une méthode analytique afin d'accéder à ces trajectoires.

Notre motivation provient d'un constat : aucune exploration analytique du domaine des quasi-satellites n'a été menée. En effet, les travaux de Mikkola et Innanen (1997) et Mikkola *et al.* (2006), focalisés sur les différents régimes des trajectoires quasi-satellites, ont été réalisés à l'aide d'une moyennisation numérique sur une approximation du potentiel du problème restreint des trois corps. Dans le cadre du problème de Hill, Namouni (1999) a développé une méthode analytique afin d'exhiber des caractéristiques de trajectoires co-orbitales comportant des passages très proches entre la particule et la planète. Cependant, afin d'établir une théorie séculaire, la méthode a également recours à une moyennisation numérique du potentiel du problème restreint. De même, c'est par le développement d'une méthode perturbative utilisant la moyennisation numérique que Nesvorný *et al.* (2002) ont pu décrire l'évolution des différents domaines de la dynamique en résonance en fonction de l'excentricité et l'inclinaison de la particule. En outre, l'évolution séculaire des quasi-satellites a été calculée par l'intermédiaire d'une seconde moyennisation numérique. Enfin, c'est également par une double moyennisation numérique du potentiel que Sidorenko *et al.* (2014) explorent la dynamique quasi-satellite et ses différents régimes.

La raison majeure de l'utilisation de méthodes numériques provient de la difficulté à accéder à ces configurations nécessairement excentriques par un développement analytique "classique" du hamiltonien moyen. Cependant, dans le chapitre suivant nous verrons qu'il est tout de même possible de construire un développement adapté à ces trajectoires.

Dans le cas circulaire-plan, nous présenterons une nouvelle méthode de développement analytique du hamiltonien moyen (chapitre 3) et étudierons le domaine des quasi-satellites (chapitre 4). En particulier, nous retrouverons la famille

$\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  (voir la section 2.3 du chapitre 1 ou la nomenclature en annexe). De plus, par une procédure de normalisation du hamiltonien moyen en une forme normale de Birkhoff, nous explorerons une partie du domaine des quasi-satellites. Nous adapterons également cette méthode au cas excentrique-plan et étudierons la persistance de la variété invariante associée à la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  sous l'effet de la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète (chapitre 5). Enfin, nous esquisserons l'idée d'une étude similaire dans le cas circulaire-spatial.

## Méthode analytique adaptée aux trajectoires quasi-satellites

### 1. Développements analytiques du hamiltonien moyen

Avant de mettre en évidence un développement adapté aux trajectoires quasi-satellites, expliquons plus précisément la notion de développement analytique “classique”.

**1.1. Le développement analytique “classique”.** Tout d’abord, par analogie avec les variables  $x$  et  $\tilde{x}$ , nous définissons les paramètres associés à l’excentricité planétaire :

$$\Gamma' = 1 - \sqrt{1 - e'^2}, \quad x' = \sqrt{\Gamma'} \quad \text{et} \quad \tilde{x}' = -i\overline{x'}.$$

Le hamiltonien du problème complet,  $H$ , étant analytique en dehors des singularités associées aux collisions avec la planète ou l’étoile, il peut donc être développé en une série entière en puissance des excentricités et de l’inclinaison. Ainsi, la série associée à  $H$  est égale à

$$(3.1) \quad \sum_{\mathcal{D}} f_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}}^{(k_1, k_2)}(u) x^p \tilde{x}^{\tilde{p}} x'^{p'} \tilde{x}'^{\tilde{p}'} y^q \tilde{y}^{\tilde{q}} e^{ik_1 \zeta_1} e^{i(k_1 + k_2) \zeta_2},$$

où  $f_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}}^{\mathbf{k}}$  est une fonction de  $u = \sqrt{a} - 1$  à valeurs complexes,  $\mathbf{p} = (p, \tilde{p}) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{p}' = (p', \tilde{p}') \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{q} = (q, \tilde{q}) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  et

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^6 \text{ tels que } q - \tilde{q} = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{et } k_1 + k_2 + p - \tilde{p} + p' - \tilde{p}' + q - \tilde{q} = 0 \end{array} \right\}$$

qui sont les relations associées aux règles de d’Alembert. Ces relations sont issues de la conservation du moment cinétique du système ou, de manière équivalente, de l’existence d’invariances de  $H$  sous l’action de groupes de symétries. Par exemple la première équation provient de l’action de la symétrie orthogonale par rapport au plan orbital de la planète tandis que la seconde représente l’action du groupe de symétries  $SO(2)$  associé à l’ensemble des rotations agissant dans le plan orbital.

C’est en ignorant les termes tels que  $k_1 + k_2 \neq 0$  afin de supprimer la dépendance en  $\zeta_2$  dans (3.1) que nous obtenons la série entière associée à  $\overline{H}$ ,

$$\sum_{\overline{\mathcal{D}}} f_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}}^{(k_1, -k_1)}(u) x^p \tilde{x}^{\tilde{p}} x'^{p'} \tilde{x}'^{\tilde{p}'} y^q \tilde{y}^{\tilde{q}} e^{ik_1 \zeta_1},$$

avec les règles de d’Alembert dans le problème moyen :

$$\overline{\mathcal{D}} := \left\{ \begin{array}{l} (k_1, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^6 \text{ tels que } q - \tilde{q} = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{et } p - \tilde{p} + p' - \tilde{p}' + q - \tilde{q} = 0 \end{array} \right\}.$$

Ce type de développement est très efficace pour étudier le voisinage des trajectoires quasi-circulaires et co-planaires. En effet, et comme cela est exposé dans la section 1.4 du chapitre 6, les règles de d’Alembert permettent d’établir que l’ensemble

$$\mathcal{C}_0 := \{x = \tilde{x} = x' = \tilde{x}' = y = \tilde{y}' = 0\}$$

est une variété invariante par le flot de  $\overline{H}$  et que le hamiltonien  $\overline{H}|_{\mathcal{C}_0}$  est intégrable. Une description complète de la dynamique sur  $\mathcal{C}_0$  peut donc être réalisée : portrait de phase, existence de points fixes, stabilité, fréquences. En outre, en dehors d’éventuelles résonances il est possible de caractériser la dynamique au voisinage des points fixes stables à partir d’une transformation en forme normale de Birkhoff. Cependant, en pratique, la construction d’une forme normale valide dans un grand voisinage nécessite de développer  $\overline{H}$  à un degré suffisamment élevé dans les différentes variables ce qui engendre souvent des expressions très lourdes à manipuler. C’est donc pour cette raison que les méthodes numériques sont généralement privilégiées pour atteindre de grandes valeurs d’excentricité ou d’inclinaison.

Dans le cas circulaire-plan, la dynamique de type “quasi-satellite” étant absente de la variété invariante associée aux trajectoires quasi-circulaires et co-planaires<sup>1</sup>, la méthode présentée précédemment ne fournira aucun résultat pour ces configurations. Pour aller plus loin, il est en fait nécessaire de tenir compte des caractéristiques du domaine quasi-satellite afin de construire une méthode analytique adaptée.

**1.2. Un développement analytique adapté aux quasi-satellites.** Dans le problème moyen excentrique-plan, un processus de normalisation au voisinage de la famille de points fixes  $G_{QS,1}^{e'}$ , stable pour  $e' < 0.8$ , pourrait être envisagé afin d’accéder aux trajectoires quasi-satellites dans son voisinage. Cependant, la forte excentricité de ces configurations ( $e \simeq 0.8$  pour  $e' \simeq 0$ ) impose un développement à très haut degré qui est impossible à réaliser si l’on tient compte de la limite de convergence de l’équation de Kepler – dont le développement est un élément clé pour obtenir la série associée à  $H$  – pour  $e \simeq 0.67$ .

Toutefois, les méthodes analytiques adaptées aux orbites fortement excentriques comme celles développées dans Brumberg (1995) pourraient peut-être fonctionner. Cette possibilité n’a pas été explorée dans cette étude.

Dans le cas circulaire-plan, le problème moyen réduit nous a permis de montrer que le domaine des quasi-satellites se trouve à l’intérieur de la région délimitée par la courbe de collision pour  $e_0 > 0$ . Plus précisément, ces trajectoires librent<sup>2</sup> autour de la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  qui est située à proximité de l’origine pour  $e_0 > 0$ . En outre, la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  émerge de la singularité en  $\zeta_1 = u = e_0 = 0$  ce qui signifie que dans tout voisinage de celle-ci, il doit exister un ensemble de points fixes appartenant à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . De ce fait, une méthode qui semble adaptée pour accéder aux points fixes

---

1. Les trajectoires quasi-circulaires et co-planaires correspondent au cas  $e_0 = 0$  étudié dans la section 3.3 du chapitre 1.

2. voir la section 2.3 du chapitre 1.

$\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  consiste en un développement de  $\overline{H}$  en une série de Laurent au voisinage de la singularité en  $\zeta_1 = u = e_0 = 0$ .

1.2.1. *L'idée du développement de  $\overline{H}$  en série de Laurent.* Au voisinage de la singularité en  $\zeta_1 = u = e_0 = 0$ , c'est l'inverse de la distance mutuelle qui domine la valeur du hamiltonien moyen tandis que les autres composantes ne sont pas singulières. Ces dernières peuvent donc être obtenues à l'aide d'une série de Taylor au voisinage de  $\zeta_1 = u = e_0 = 0$ . Pour que l'inverse de la distance mutuelle soit développé en une série de Laurent, il est nécessaire de considérer une approximation du carré de la distance mutuelle, notée  $\mathcal{Y}$  et que l'on ne précise pas pour le moment, telle que

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 = \mathcal{Y} + \mathcal{X} = \mathcal{Y} \left(1 + \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}}\right),$$

où  $\mathcal{X} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y}$  et

$$(3.2) \quad \mathcal{Y} \geq 0 \quad , \quad \mathcal{Y}|_{\{\zeta_1=u=e_0=0\}} = 0.$$

Ainsi, l'inverse de la distance mutuelle se développe en la série

$$(3.3) \quad \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Y}}} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{2m!}{(2^m m!)^2} \left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}}\right)^m$$

qui converge si et seulement si

$$\left|\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}}\right| < 1$$

ou, de manière équivalente,

$$(3.4) \quad |\mathcal{X}| = \left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y} \right| < \mathcal{Y}.$$

Pour réaliser ce développement, il est donc nécessaire de mettre en évidence une composante  $\mathcal{Y}$  telle que le domaine de convergence associé à l'équation (3.4) soit suffisamment grand pour accéder au domaine des quasi-satellites. Idéalement, ce domaine de convergence doit permettre d'accéder à des points fixes de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  situés à l'extérieur de la zone d'exclusion. En outre, la moyennisation fournissant  $\overline{H}$  doit être simple à réaliser et si possible sans intégrations numériques.

Dans la section suivante, nous allons donc examiner le développement du carré de la distance mutuelle afin de mettre en évidence une approximation  $\mathcal{Y}$  satisfaisant ces conditions.

## 2. Le développement analytique dans le cas circulaire-plan

Avant de procéder au développement, nous précisons les notations et le formalisme qui seront utilisés.

Les trajectoires quasi-satellites étant nécessairement excentriques, nous remplaçons les variables de Poincaré complexes  $(x, \tilde{x})$  par les variables action-angle  $(\Gamma, \varpi)$ . Pour cela, nous introduisons la transformation

$$(3.5) \quad \Psi : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{T} & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{T} \\ (\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \tilde{y}, y, \zeta_2) & \longmapsto (\zeta_1, u, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y, \zeta_2), \end{cases}$$

où

$$\varpi = \arg(x) \quad \text{et} \quad \Gamma = ix\tilde{x} = (1+u)(1-\sqrt{1-e^2}).$$

Dans ces variables, nous définissons les hamiltoniens complet<sup>3</sup> et moyen<sup>4</sup>, respectivement notés  $H^o$  et  $\overline{H}^o$ , tels que

$$(3.6) \quad H^o := H_K - u + H_P^o,$$

où  $H_P^o(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \zeta_2) := H_P \circ \Psi(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, 0, 0, \zeta_2)$  avec  $e' = 0$ , et

$$(3.7) \quad \overline{H}^o := H_K - u + \overline{H}_P^o,$$

où  $\overline{H}_P^o(\zeta_1, u, \Gamma) := \overline{H}_P \circ \Psi(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, 0, 0)$  avec  $e' = 0$ .

Nous mentionnons également que dans ces variables la série entière associée à  $H^o$  est égale à

$$\sum_{\mathcal{D}} f_n^{(k_1, k_2)}(u) \sqrt{\Gamma}^n e^{ik_1\zeta_1} e^{i(k_1+k_2)(\zeta_2-\varpi)},$$

où  $f_n^{\mathbf{k}}$  est une fonction de  $u$  à valeurs complexes,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  et les règles de d'Alembert

$$(3.8) \quad \mathcal{D} = \left\{ (n, \mathbf{k}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } n + k_1 + k_2 = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}.$$

En outre, la série entière associée à  $\overline{H}^o$  s'écrit

$$(3.9) \quad \sum_{\overline{\mathcal{D}}} f_n^{(k_1, -k_1)}(u) \sqrt{\Gamma}^n e^{ik_1\zeta_1},$$

où

$$(3.10) \quad \overline{\mathcal{D}} = \left\{ (n, k_1) \in 2\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \right\}.$$

Enfin, nous définissons la forme symplectique associée au hamiltonien moyen :

$$\sigma := d\zeta_1 \wedge du + d\Gamma \wedge d\varpi.$$

**2.1. L'inverse de la distance mutuelle.** L'inverse de la distance mutuelle étant singulier en  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$ , c'est cette composante qui nécessite le plus d'attention dans le développement du hamiltonien. Afin de construire un développement analytique adapté aux trajectoires quasi-satellites, nous cherchons à mettre en évidence une approximation  $\mathcal{Y}$  du carré de la distance mutuelle telle que les conditions des équations (3.2) et (3.4) soient satisfaites et que le processus de moyennisation soit réalisé sans contrainte technique.

Tout d'abord, nous définissons la distance mutuelle entre la planète et la particule,

$$(3.11) \quad \Delta(\zeta_1, u, \Gamma, \zeta_2 - \varpi) := \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|,$$

ainsi que la distance mutuelle pour  $\zeta_1 = u = 0$ ,

$$(3.12) \quad \Delta_0(\Gamma, \zeta_2 - \varpi) := \Delta(0, 0, \Gamma, \zeta_2 - \varpi).$$

3. Voir l'équation (1.5) pour les définitions de  $H_K$  et  $H_P$  dans la section 1.2 du chapitre 1.

4. Voir l'équation (1.8) pour la définition  $\overline{H}_P$  dans la section 1.3 du chapitre 1.



Comme

$$(\Delta)^2 - (\Delta_0)^2 = \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|),$$

alors pour  $0 \leq \Gamma \leq 1$ , il existe une fonction de  $\Gamma$  à valeurs réelles positives, notée  $C_0(\Gamma)$ , telle que

$$\left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - (\Delta_0)^2 \right| = \left| (\Delta)^2 - (\Delta_0)^2 \right| \leq C_0(\Gamma) \|(\zeta_1, u)\|.$$

Ainsi dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$  tel que pour tout  $\Gamma \in [0, 1]$

$$C_0(\Gamma) \|(\zeta_1, u)\| < \min_{\zeta_2 \in \mathbb{T}} (\Delta_0)^2,$$

$\Delta_0$  domine la distance mutuelle tout en satisfaisant les conditions des équations (3.2) et (3.4). En particulier,  $\Delta_0$  possède l'avantage de maximiser la vitesse de convergence de la série (3.3) en  $\zeta_1 = u = 0$ . Cependant, comme  $\Delta_0$  dépend des variables  $\Gamma$  et  $\zeta_2 - \varpi$ , poser  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \Delta_0$  fournit un développement de  $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$  qui est difficilement manipulable. En effet, cela impose de fixer  $\Gamma$  au préalable afin d'effectuer le processus de moyennisation par une intégration numérique. Il sera donc nécessaire de réitérer les calculs d'intégrales à chaque changement de valeur de  $\Gamma$  ce qui impose de fortes contraintes techniques dans la réalisation de la méthode.

Pour aller plus loin dans notre investigation, nous définissons

$$(3.13) \quad \Delta_0^{(1)}(\zeta_2 - \varpi) := \left( \frac{\partial \Delta_0}{\partial \sqrt{\Gamma}} \right)_{(0, \zeta_2 - \varpi)}$$

tel que  $\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)}$  est l'approximation au premier ordre en  $\sqrt{\Gamma}$  de la distance mutuelle en  $\zeta_1 = u = 0$ . Dans ce cas, nous avons la majoration suivante :

$$\left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - (\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)})^2 \right| \leq \underbrace{\left| (\Delta_0)^2 - (\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)})^2 \right|}_{\mathcal{O}(\sqrt{\Gamma}^3)} + \underbrace{\left| (\Delta)^2 - (\Delta_0)^2 \right|}_{\mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|)},$$

où la première composante contient des termes d'ordre supérieur ou égal à  $\sqrt{\Gamma}^3$  tandis que la seconde est en  $\mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|)$ .

En supposant que

$$\|(\zeta_1, u)\| = \mathcal{O}(\sqrt{\Gamma}^3),$$

il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$\left| (\Delta_0)^2 - (\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)})^2 \right| + \left| (\Delta)^2 - (\Delta_0)^2 \right| \leq C_1 \sqrt{\Gamma}^3.$$

De ce fait, dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$  tel que

$$C_1 \sqrt{\Gamma}^3 < \min_{\zeta_2 \in \mathbb{T}} (\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)})^2,$$

la composante  $\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)}$  domine la distance mutuelle en satisfaisant les conditions des équations (3.2) et (3.4). En outre, un rapide calcul de  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2$  au premier ordre en excentricité permet de montrer que

$$(3.14) \quad \Delta_0^{(1)}(\zeta_2 - \varpi) = \sqrt{8 - 6 \cos^2(\zeta_2 - \varpi)}.$$

$\Delta_0^{(1)}$  dépendant uniquement de la variable  $\zeta_2 - \varpi$ , le processus de moyennisation impose le calcul des intégrales elliptiques

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\zeta_2}{\sqrt{8 - 6 \cos^2(\zeta_2 - \varpi)}} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{e^{imk(\zeta_2 - \varpi)} d\zeta_2}{\sqrt{8 - 6 \cos^2(\zeta_2 - \varpi)}^m},$$

où  $k \in \mathbb{Z}$  et  $m \in \mathbb{N}$ . L'évaluation de ces intégrales peut être obtenue à l'aide de tables ou d'une intégration numérique. Par conséquent, l'approximation  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)}$  fournit une méthode de développement du hamiltonien moyen qui est réalisable. Toutefois, comme nous allons le voir dans la suite de la section, il existe une approximation  $\mathcal{Y}$  beaucoup plus judicieuse.

Tout d'abord, nous remarquons que la fonction  $\Delta_0^{(1)}$  est bornée telle que

$$0 \leq \Delta_{0 \min}^{(1)} \leq \Delta_0^{(1)} \leq \Delta_{0 \max}^{(1)}$$

où le minimum

$$(3.15) \quad \Delta_{0 \min}^{(1)} = \sqrt{2}$$

est atteint lorsque  $\zeta_2 - \varpi = k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ), c'est-à-dire au périastre et à l'apoastre, et le maximum

$$(3.16) \quad \Delta_{0 \max}^{(1)} = \sqrt{8},$$

lorsque  $\zeta_2 - \varpi = \pi/2 + k\pi$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ). En particulier, cette propriété nous permet de déduire la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left| (\Delta_0^{(1)})^2 - (\Delta_{0 \max}^{(1)})^2 \right| &\leq \left| (\Delta_{0 \min}^{(1)})^2 - (\Delta_{0 \max}^{(1)})^2 \right| = 6 \\ &< (\Delta_{0 \max}^{(1)})^2. \end{aligned}$$

De ce fait, dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$  tel que

$$\|(\zeta_1, u)\| = \mathcal{O}(\sqrt{\Gamma}^3) \quad \text{et} \quad C_1 \sqrt{\Gamma} < 2,$$

la composante  $\sqrt{\Gamma} \Delta_{0 \max}^{(1)}$  domine la valeur de la distance mutuelle telle que la majoration

$$\begin{aligned} &\left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - (\sqrt{\Gamma} \Delta_{0 \max}^{(1)})^2 \right| \\ &\leq \Gamma \left| (\Delta_{0 \min}^{(1)})^2 - (\Delta_{0 \max}^{(1)})^2 \right| + \left| (\Delta_0)^2 - (\sqrt{\Gamma} \Delta_0^{(1)})^2 \right| + \left| (\Delta)^2 - (\Delta_0)^2 \right| \\ &< (\sqrt{\Gamma} \Delta_{0 \max}^{(1)})^2 \end{aligned}$$

satisfait la condition de l'équation (3.4).

En posant

$$\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{\Gamma} \Delta_{0 \max}^{(1)} = \sqrt{8\Gamma},$$

nous obtenons donc une autre méthode de développement du hamiltonien en une série de Laurent. Cependant, dans cette méthode, le processus de moyennisation n'engendre aucune complication technique : il suffit simplement de calculer les puissances de  $\mathcal{X}/8\Gamma$  dans la série de Laurent (3.3), puis d'ignorer les termes dépendant de  $\zeta_2$ . Par conséquent, si le domaine de convergence associé à la condition de l'équation

(3.4) contient au moins une partie de la famille  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  à l'extérieur de la zone d'exclusion, cette méthode est clairement la plus simple à réaliser.

Un indice concernant la présence de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  dans le domaine de convergence nous est fourni par la figure 3.1. Celle-ci représente dans le repère tournant, quatre orbites de la famille  $f$  associées à  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  en dehors de la zone d'exclusion. Plus précisément, elles ont été obtenues par intégration numérique pour respectivement  $e_0 = 0.25$  (a),  $e_0 = 0.5$  (b),  $e_0 = 0.75$  (c) et  $e_0 = 95$  en (d) dans le cas d'un système de type "Soleil-Jupiter" ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Sur la figure 3.1, les trajectoires sont intégralement contenues entre le cercle vert associé à  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = e_0$  et le cercle rouge correspondant à  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = 2e_0$ . Par conséquent, nous avons

$$e_0 \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|_{\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}} \leq 2e_0$$

et donc la majoration suivante

$$\left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|_{\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}}^2 - 8\Gamma \right| \leq 8\Gamma - e_0^2 < 8\Gamma$$

qui indique que la majeure partie de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  appartient au domaine de convergence du développement en série de Laurent pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$ .

Pour aller plus loin et différencier les trois méthodes présentées pour réaliser le développement de  $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ , nous évaluons leur domaine de convergence.

**2.2. Le domaine de convergence.** Le domaine de convergence du développement en série de Laurent est associé à la condition de l'équation (3.4). Or, cette propriété est également satisfaite si

$$(3.17) \quad \max_{\zeta_2 \in \mathbb{T}} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| < \sqrt{2\mathcal{Y}}.$$

À l'aide d'une transformation des éléments orbitaux dans les variables cartésiennes, le domaine de convergence de la série de Laurent peut donc être obtenu numériquement en cherchant les valeurs de  $(\zeta_1, u, e)$  dans  $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times ]0, 1[$  qui satisfont l'équation (3.17) pour les méthodes définies par  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \Delta_0$ ,  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{\Gamma}\Delta_0^{(1)}$  et  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$ .

La figure 3.2 représente la section des domaines de convergence pour  $\{u = 0\}$  dans les variables  $\zeta_1$  et  $e$ . Nous avons choisi de ne présenter que les résultats pour cette valeur de  $u$  car les différences avec les sections pour  $u$  quelconque dans la résonance co-orbitale – c'est-à-dire  $|u| \leq \varepsilon^{1/3}$  – sont négligeables. Les domaines bleus et verts, associés respectivement aux méthodes  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \Delta_0$  et  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{\Gamma}\Delta_0^{(1)}$ , s'étalent autour de  $|\zeta_1| \leq 15^\circ$  pour  $0 < e_0 < 0.85$ . Leur taille étant comparable, le gain est donc négligeable entre ces deux méthodes. Le domaine rouge associé à la méthode  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$  est beaucoup plus grand : la limite du domaine dépasse  $\zeta_1 = 30^\circ$  pour  $e_0 \simeq 0.5$ . De ce fait, en plus d'être la plus simple à réaliser, la méthode  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$  est la plus avantageuse en terme de domaine de convergence.

Afin d'estimer la portion du domaine quasi-satellite accessible pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$ , nous comparons le domaine de convergence avec la position de la courbe de collision.

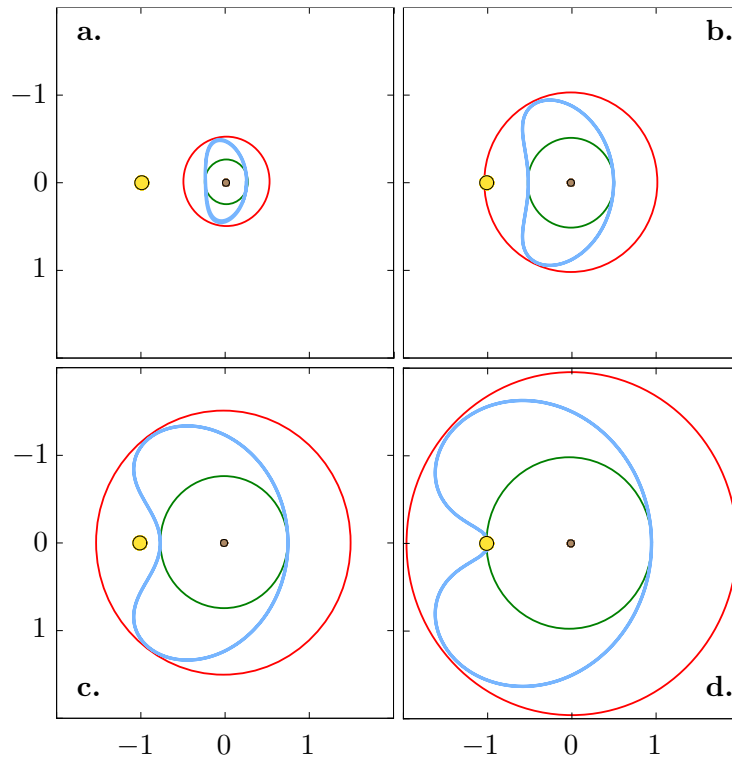


FIGURE 3.1. Trajectoires bleu ciel dans le repère tournant : orbites de la famille  $f$  associées à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  en dehors de la zone d'exclusion pour  $e_0 = 0.25$  (a), 0.5 (b), 0.75 (c), 0.95 (d) et cercles centrés sur la planète de rayon  $e_0$  (cercle vert) et  $2e_0$  (cercle rouge). Les trajectoires de la famille  $f$  sont contenues entre les cercles verts et rouges.

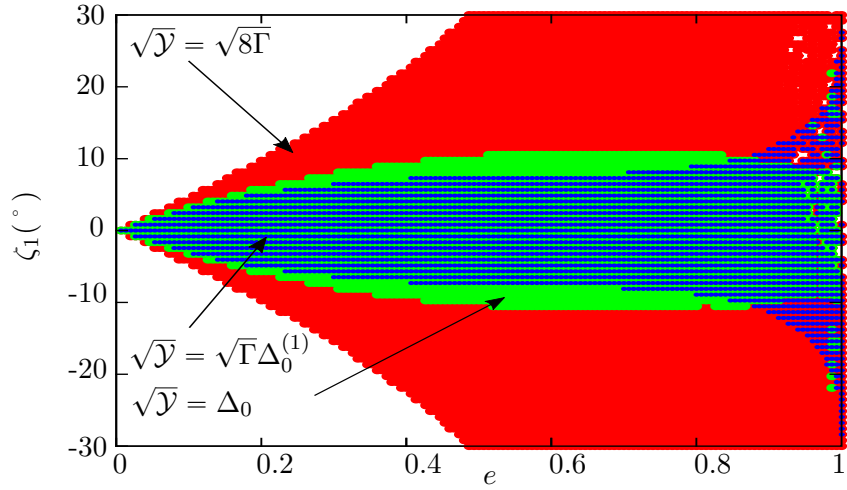


FIGURE 3.2. Section en  $\{u = 0\}$  du domaine de convergence du développement analytique en fonction de la composante dominante de  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2$ . Les domaines rouges, bleus et verts sont associés respectivement à  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$ ,  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \Delta_0^{(1)}$  et  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \Delta_0$ .

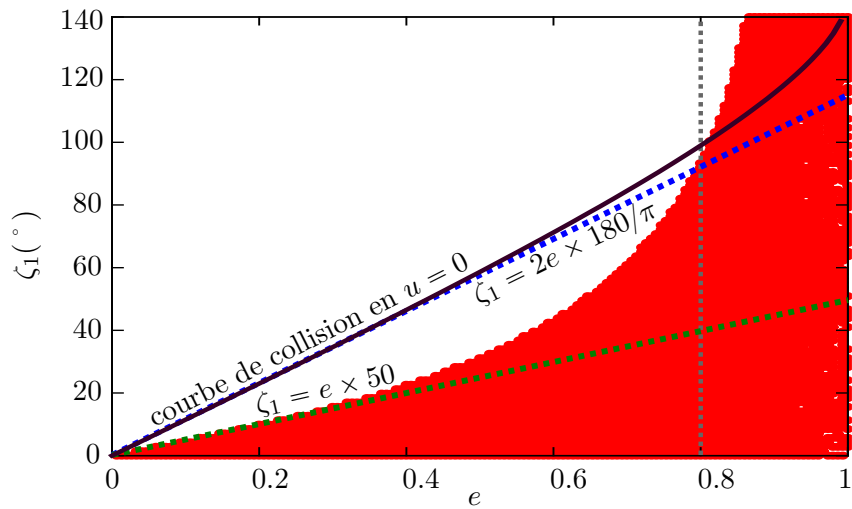


FIGURE 3.3. Section du domaine de convergence en  $\{u = 0\}$  du développement analytique pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$  en comparaison avec la courbe de collision.

Celle-ci est calculée en cherchant les valeurs de  $\zeta_1$  et  $e$  telles que  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = 0$  en  $\{u = 0\}$ . Sur la figure 3.3, nous constatons que la limite du domaine de convergence se situe au-dessus de la droite  $\{\zeta_1 = e \times 50^\circ\}$  pour  $e < 0.8$ . Or, dans ce domaine, la courbe de collision évolue comme  $\{\zeta_1 = 2e \times (180/\pi)^\circ\}$  : c'est donc au minimum 40% du domaine des quasi-satellites qui est accessible par ce développement du hamiltonien en série de Laurent. En outre, pour  $0.8 < e < 1$ , le domaine de convergence comprend même l'intégralité des trajectoires quasi-satellites. Par conséquent, la méthode de développement en série de Laurent pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$  est très bien adaptée à l'étude d'un vaste domaine des trajectoires quasi-satellites.

**2.3. Les propriétés de la série de Laurent associée à  $\overline{H}_P^o$ .** Dans cette section, nous construisons la série de Laurent de l'équation (3.3) pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\Gamma}$ .

En développant le carré de la distance mutuelle au voisinage de  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$ , nous obtenons une série entière telle que  $\mathcal{X} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - 8\Gamma$  est égal à

$$\mathcal{X} = \sum_{d \geq 0} \mathcal{X}^d,$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{X}^0 = \left( \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathbf{0},n,k}^* \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) - 8\Gamma \\ \mathcal{X}^d = \sum_{|\mathbf{d}|=d} \left( \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,k}^* \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2} \end{cases}$$

avec  $\mathcal{A}_{\mathbf{d},n,k}^* \in \mathbb{C}$ ,  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $|\mathbf{d}| = d_1 + d_2$  et les règles de d'Alembert

$$\mathcal{D} = \left\{ (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \text{ tels que } n + k = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}.$$

De ce fait,

$$A = \frac{1}{\sqrt{8\Gamma}} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{2m!}{(2^m m!)^2} \left( \frac{\mathcal{X}}{8\Gamma} \right)^m$$

est une série de Laurent en  $\sqrt{\Gamma}$  qui se développe telle que

$$A = \sum_{d \geq 0} A^d,$$

où

$$(3.18) \quad A^d = \sum_{|\mathbf{d}|=d} \left( \sum_{\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,k} \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

avec  $\mathcal{A}_{\mathbf{d},n,k} \in \mathbb{C}$ ,  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2$  et

$$\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|} = \left\{ (n, k) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } n + k = 1 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } n \geq -(|\mathbf{d}| + 1) \right\}.$$

Les relations notées  $\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}$  se vérifient simplement. En effet, la première,

$$(3.19) \quad k + n = 1 \quad \text{sur} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

découle de la conservation des relations de d'Alembert pour toute puissance de  $\mathcal{X}/8\Gamma$  et de la division par  $\sqrt{8\Gamma}$ .

La relation qui relie la puissance minimale en  $\sqrt{\Gamma}$  à l'ordre  $\|(\zeta_1, u)\|^d$  nécessite un peu plus d'arguments. En considérant un ordre  $d \in \mathbb{N}$  en  $\|(\zeta_1, u)\|$ , le terme dominant dans  $A^d$  est donné par  $(\mathcal{X}^{d/m}/8\Gamma)^m$  où  $m$  est un diviseur de  $d$ . Bien que de manière générale, on ait  $\mathcal{X}^d = \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|^d)$ , comme

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial Q} \Big|_{\{\zeta_1=u=\Gamma=0\}} = \frac{\partial \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - 8\Gamma}{\partial Q} \Big|_{\{\zeta_1=u=\Gamma=0\}} = \left[ 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q} - 8 \frac{\partial \Gamma}{\partial Q} \right]_{\{\zeta_1=u=\Gamma=0\}} = 0$$

pour  $Q = \zeta_1, u$  ou  $\sqrt{\Gamma}$ , alors

$$\mathcal{X}^0 = \mathcal{O}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}^1 = \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|\sqrt{\Gamma}).$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\frac{1}{\sqrt{8\Gamma}} \left( \frac{\mathcal{X}^0}{8\Gamma} \right)^m = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{8\Gamma}} \left( \frac{\mathcal{X}^1}{8\Gamma} \right)^d = \mathcal{O} \left( \frac{\|(\zeta_1, u)\|^d}{\sqrt{\Gamma}^{d+1}} \right)$$

et pour tout  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $d/m \in \{2, 3, \dots\}$

$$\frac{1}{\sqrt{8\Gamma}} \left( \frac{\mathcal{X}^{d/m}}{8\Gamma} \right)^m = \mathcal{O} \left( \frac{\|(\zeta_1, u)\|^d}{\sqrt{\Gamma}^{2m+1}} \right) \quad \text{avec} \quad 2m \leq d.$$

Par conséquent, la puissance minimale de la série de Laurent à l'ordre  $\|(\zeta_1, u)\|^d$  est donnée par la relation

$$(3.20) \quad n \geq -(d+1).$$

En dehors de la collision avec l'étoile, les autres composantes de  $H_P^o$ , c'est-à-dire

$$- \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} + \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle^3}{\|\mathbf{r}'\|} \right),$$

ne présentent pas de singularités à l'intérieur de la résonance co-orbitale. En supposant les excentricités strictement inférieures à 1, celles-ci se développent au voisinage de  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$  en une série entière en puissance de  $\sqrt{\Gamma}$  :

$$B = \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},n,k} \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

avec  $\mathcal{B}_{\mathbf{d},n,k} \in \mathbb{C}$ ,  $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^2$ .

La série de Laurent associée à  $H_P^o$  est donc égale à :

$$-\varepsilon(A + B) = -\varepsilon \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,k} \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} + \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},n,k} \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}.$$

À partir de cette série, le processus de moyennisation s'effectue en ignorant les termes tels que  $k \neq 0$ . Par conséquent, la série de Laurent associée à  $\overline{H}_P^o$  est égale à

$$(3.21) \quad -\varepsilon \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\overline{\mathcal{S}}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,0} \sqrt{\Gamma}^n + \sum_{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},n,0} \sqrt{\Gamma}^n \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2},$$

où

$$(3.22) \quad \overline{\mathcal{S}}_{|\mathbf{d}|} = \left\{ n \in (2\mathbb{Z} + 1) \text{ tel que } n \geq -(|\mathbf{d}| + 1) \right\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{D}} = \left\{ n \in 2\mathbb{N} \right\}$$

sont les relations qui s'appliquent dans le problème moyen. Au voisinage de la singularité nous pouvons donc constater que  $\overline{H}_P^o$  possède des puissances impaires en  $\sqrt{\Gamma}$  qui proviennent de l'inverse de la distance mutuelle et des puissances paires qui sont issus des autres composantes de la partie perturbatrice.

**2.4. Le développement analytique en pratique.** En pratique, nous avons construit la série de l'équation (3.21) à partir de la méthode présentée dans Laskar et Robutel (1995) et qui a été adaptée au contexte de la résonance co-orbitale dans le problème restreint. Cette construction a été effectuée à l'aide du manipulateur algébrique TRIP développé par Jacques Laskar et Mickael Gastineau (Gastineau et Laskar, 2011; Laskar, 1990) et qui est particulièrement adapté aux calculs de perturbations en mécanique céleste.

La série  $B$  associée aux composantes non singulières du hamiltonien ne présente pas d'ambiguïtés dans son développement puisque celui-ci reste classique : nous nous sommes fixés deux troncatures de degré  $\mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{N}$  respectivement en  $\|(\zeta_1, u)\|$  et  $\sqrt{\Gamma}$ . Ainsi,  $B$  est égale à la série finie

$$(3.23) \quad \sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq \mathfrak{D}} \left( \sum_{\mathcal{D} \cap \{n \leq \mathfrak{N}\}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},n,k} \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta^{d_1} u^{d_2}.$$

Le calcul de la série  $A$  est issue du carré de la distance mutuelle que nous avons tronqué au degré  $\mathfrak{D}$  en  $\|(\zeta_1, u)\|$  et  $\mathfrak{P}$  en  $\sqrt{\Gamma}$ . Par conséquent,  $\mathcal{X}$  est représenté par la série finie

$$\sum_{0 \leq |\mathbf{d}| \leq \mathfrak{D}} \left( \sum_{\mathcal{A}_{|\mathbf{d}|} \cap \{n \leq \mathfrak{P}\}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,k}^* \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta^{d_1} u^{d_2} - 8\Gamma$$

et  $\mathcal{X}/8\Gamma$  est une série de Laurent limitée à l'ordre  $\sqrt{\Gamma}^{\mathfrak{P}-3}$ . Remarquons que dans le calcul de  $(\mathcal{X}/8\Gamma)^m$ , il manquera des termes issus des combinaisons entre les puissances négatives en  $\sqrt{\Gamma}$  et les puissances supérieures à  $\mathfrak{P} - 3$  pour obtenir la série exacte de  $1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$  tronquée au degré  $\mathfrak{P} - 3$ . En outre, comme pour tout  $m \in \mathbb{N}$   $(\mathcal{X}/8\Gamma)^m$  possède des termes d'ordre inférieur à  $\|(\zeta_1, u)\|^{\mathfrak{D}}$  et  $\sqrt{\Gamma}^{\mathfrak{P}-3}$ , la somme de la série (3.3) doit nécessairement être évaluée pour tout  $m \geq 0$ . En pratique, il est donc nécessaire de définir une itération maximale, notée  $\mathfrak{M}_\eta$  pour obtenir la somme de l'équation (3.18). Pour cela nous avons choisi de contrôler la convergence des coefficients  $\mathcal{A}_{\mathbf{d},n,0}$  – ceux pertinents pour la série moyenne – après chaque itération  $m$ . Ainsi, en définissant  $\eta$  comme une précision relative sur ces coefficients, nous avons fixé l'itération maximale  $\mathfrak{M}_\eta$  telle que

$$\max_{\mathcal{P}(\mathfrak{D}, \mathfrak{P})} \left| \frac{\mathcal{A}_{\mathbf{d},n,0}^{(\mathfrak{M}_\eta)} - \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,0}^{(\mathfrak{M}_\eta - 1)}}{\mathcal{A}_{\mathbf{d},n,0}^{(\mathfrak{M}_\eta)}} \right| < \eta$$

où  $\mathcal{P}(\mathfrak{D}, \mathfrak{P}) = \overline{\mathcal{P}}^{|\mathbf{d}|} \cap \{|\mathbf{d}| \leq \mathfrak{D}\} \cap \{n \leq \mathfrak{P}\}$  et  $\eta$  est la précision à atteindre sur les coefficients. La série de Laurent associée à  $A$  que nous construisons sous TRIP est



donc égale à :

$$\sum_{|\mathbf{d}| \leq \mathfrak{D}} \left( \sum_{\overline{\mathcal{F}}_{|\mathbf{d}|} \cap \{n \leq \mathfrak{P}-3\}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},n,0}^{(\mathfrak{M}_\eta)} \sqrt{\Gamma}^n e^{ik(\zeta_2 - \varpi)} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}.$$

Enfin pour que les degrés maximaux en  $\sqrt{\Gamma}$  dans les séries (3.23) et (3.24) coïncident, nous avons posé  $\mathfrak{P} = \mathfrak{N} + 3$ .

Un exemple limité aux premiers termes de la série associée à  $\overline{H}_P^o$  pour  $\mathfrak{D} = 2$ ,  $\mathfrak{N} = 10$  et  $\eta = 10^{-6}$  est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \varepsilon( \quad \quad \quad - \quad 0.6864402 \quad \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\Gamma}^{-1} + \quad 2 \quad ) \\ + & \varepsilon( \quad \quad \quad 1.075505 \quad \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\Gamma}^{-1} \quad \quad \quad ) u \\ + & \varepsilon( -0.2851747 \quad \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\Gamma}^{-3} - \quad 1.577563 \quad \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\Gamma}^{-1} + \quad 4 \quad ) u^2 \\ + & \varepsilon( -0.02507909 \quad \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\Gamma}^{-3} - \quad 0.008310058 \quad \sqrt{2}^{-1} \sqrt{\Gamma}^{-1} - \quad 0.5 \quad ) \zeta_1^2 \end{aligned}$$



## L'exploration du cas circulaire-plan

### 1. Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons mis en évidence un développement analytique de  $\overline{H}^o$  en une série de Laurent qui converge dans un vaste<sup>1</sup> voisinage de  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$ . Afin d'exploiter cette nouvelle méthode, nous dédions ce chapitre à l'exploration du domaine des quasi-satellites dans le cas circulaire-plan. Tout d'abord, rappelons quelques propriétés énoncées dans le chapitre 1.

Dans le chapitre 1, nous avons vu que le hamiltonien moyen du problème circulaire-plan est invariant par les rotations d'axe perpendiculaire au plan orbital. Ainsi,  $\overline{H}^o$  est indépendant de  $\varpi$  tandis que  $\Gamma$  est une intégrale première du problème moyen<sup>2</sup>. De ce fait, en considérant  $\Gamma$  ou, de manière équivalente, l'excentricité  $e_0$  telle que

$$\Gamma = (1 + u)(1 - \sqrt{1 - e^2}) = 1 - \sqrt{1 - e_0^2}$$

comme un paramètre, l'exploration du cas circulaire-plan s'effectue dans le cadre du problème moyen réduit par l'étude du hamiltonien "réduit" noté  $\overline{H}_{e_0}^o$  dans le chapitre 1.

En pratique, il n'y a pas de différence entre l'expression du hamiltonien moyen et celle du hamiltonien réduit. Dans le hamiltonien moyen,  $\Gamma$  est considérée comme une variable dont l'angle conjugué est  $\varpi$ . Dans le problème moyen réduit,  $\Gamma$  est un paramètre tandis que  $\varpi$  est ignorée. Afin de ne pas accumuler différentes notations, nous préférons conserver la notation  $\overline{H}^o$  et définissons le hamiltonien réduit comme l'application

$$(\zeta_1, u) \mapsto \overline{H}^o(\zeta_1, u, \Gamma),$$

pour  $\Gamma$ , un paramètre arbitrairement fixé. Enfin, bien que l'exploration du domaine soit réalisé dans le problème moyen réduit, les changements de variables s'effectueront dans le cadre du problème moyen.

### 2. Le hamiltonien réduit au voisinage de $\zeta_1 = u = 0$

L'étude numérique du problème moyen réduit nous a permis de mettre en évidence la famille de points fixes quasi-satellites  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  qui se situent dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$  pour tout  $\Gamma > 0$ . De ce fait, le développement du hamiltonien réduit en une série de Taylor au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$  doit nous permettre d'exhiber ces points fixes.

---

1. voir le domaine de convergence dans la figure 3.3.

2. voir la section 2.1 du chapitre 1.

Pour  $\Gamma > 0$  arbitrairement fixé, le hamiltonien réduit au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$  se développe en une série entière en puissance de  $\|(\zeta_1, u)\|$  telle que :

$$(4.1) \quad \overline{H}^o(\zeta_1, u, \Gamma) = \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \alpha^{\mathbf{d}}(\Gamma) \zeta_1^{d_1} u^{d_2},$$

où

$$(4.2) \quad \alpha^{\mathbf{d}}(\Gamma) := \frac{1}{|\mathbf{d}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{d}|} \overline{H}^o}{\partial \zeta_1^{d_1} \partial u^{d_2}}(0, 0, \Gamma)$$

et  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^2$  tel que  $|\mathbf{d}| = d_1 + d_2$ .

Comme  $\overline{H}^o$  se décompose<sup>3</sup> en une partie en  $\mathcal{O}(1)$  et une autre en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , nous introduisons les coefficients  $\alpha_0^{\mathbf{d}}$  et  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  tels que

$$\alpha^{\mathbf{d}} := \alpha_0^{\mathbf{d}} + \varepsilon \alpha_1^{\mathbf{d}},$$

où

$$(4.3) \quad \alpha_0^{\mathbf{d}}(\Gamma) := \frac{1}{|\mathbf{d}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{d}|} (H_K - u)}{\partial \zeta_1^{d_1} \partial u^{d_2}}(0, 0, \Gamma)$$

et

$$(4.4) \quad \varepsilon \alpha_1^{\mathbf{d}}(\Gamma) := \frac{1}{|\mathbf{d}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{d}|} \overline{H}_P^o}{\partial \zeta_1^{d_1} \partial u^{d_2}}(0, 0, \Gamma).$$

$H_K$  ne dépendant que de  $u$ , les coefficients  $\alpha_0^{\mathbf{d}}$  sont des constantes telles que :

$$(4.5) \quad \begin{cases} \alpha_0^{\mathbf{d}} = 0 & \text{si } \mathbf{d} \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \\ \alpha_0^{(0, d_2)} = \frac{d_2 + 1}{2} (-1)^{d_2 + 1} & \text{pour } d_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ \alpha_0^{(1, 0)} = 0 \end{cases}$$

Les coefficients  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  sont issus de la partie perturbatrice  $\overline{H}_P^o$ . Or, dans le chapitre 3, nous avons montré que cette composante du hamiltonien se développe en la série de Laurent de l'équation (3.21) qui converge dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$ . Dans ce voisinage, les coefficients  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  sont donc eux-mêmes des séries de Laurent qui découlent de la série de l'équation (3.21) telles que

$$(4.6) \quad \alpha_1^{\mathbf{d}}(\Gamma) = - \sum_{\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d}, n, k} \sqrt{\Gamma}^n - \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{B}_{\mathbf{d}, n, k} \sqrt{\Gamma}^n.$$

De ce fait, ce sont des fonctions de  $\Gamma$  dont la dépendance en cette variable sera considérée comme implicite afin de ne pas alourdir les notations.

Un autre résultat sur la forme de  $\overline{H}^o$  au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$  peut être établi par une simple propriété de symétrie. En effet, dans le cas plan, le hamiltonien dans le référentiel héliocentrique<sup>4</sup>,  $\mathcal{H}$ , est invariant par la symétrie

$$\mathcal{S}_{21} : (r_x, r_y, 0, \dot{r}_x, \dot{r}_y, 0) \longmapsto (r_x, -r_y, 0, -\dot{r}_x, \dot{r}_y, 0),$$

3. voir l'équation (3.7) de la section 2 du chapitre 3.

4. voir l'équation (1.1) de la section 1.1 du chapitre 1.

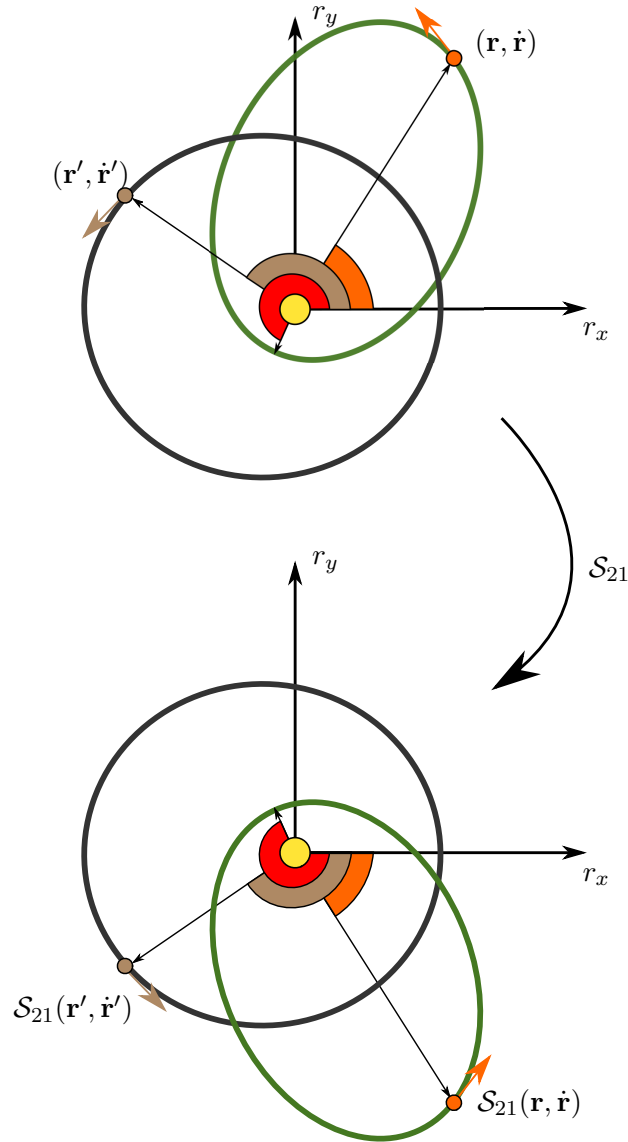


FIGURE 4.1. Illustration de la symétrie  $\mathcal{S}_{21}$  par rapport à l'axe  $\{r_x = 0\}$  pour les positions et l'axe  $\{\dot{r}_y = 0\}$  pour les vitesses. Les portions de disque orange, marron et rouges représentent respectivement l'anomalie vraie de la planète et de la planète et la longitude du périastre de la planète. La symétrie  $\mathcal{S}_{21}$  induit un changement de signe des angles des éléments orbitaux de la planète et de la planète.

où  $\mathbf{r} = (r_x, r_y, 0)$  et  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}_x, \dot{r}_y, 0)$ .

En termes d'éléments orbitaux, cette symétrie se traduit par

$$(4.7) \quad (\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \zeta_2) \longmapsto (-\zeta_1, u, \Gamma, -\varpi, -\zeta_2),$$

c'est-à-dire un changement d'orientation des angles (voir l'illustration de la figure 4.1). Par conséquent, l'invariance de  $\overline{H}^o$  sous l'action de cette symétrie impose que

$$\overline{H}^o(-\zeta_1, u, \Gamma) = \overline{H}^o(\zeta_1, u, \Gamma),$$

ce qui permet d'établir que  $\zeta_1 \mapsto \overline{H}^o(\zeta_1, u)$  est une fonction paire. Ainsi, ce raisonnement justifie la symétrie axiale par rapport à  $\{\zeta_1 = 0\}$  des portraits de phase de la figure 1.1. En outre, il met en évidence que

$$(4.8) \quad \alpha_1^{(d_1, d_2)} = 0 \quad \text{pour } d_1 \text{ impair et } d_2 \in \mathbb{N}.$$

En tenant compte de toutes ces propriétés, le hamiltonien réduit du cas circulaire-plan est égal à

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \overline{H}^o(\zeta_1, u, \Gamma) &= \alpha_0^{(0,0)} + \alpha_0^{(0,2)} u^2 + \sum_{d_2 \geq 3} \alpha_0^{(0, d_2)} u^{d_2} \\ &+ \varepsilon \alpha_1^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,1)} u + \varepsilon \alpha_1^{(2,0)} \zeta_1^2 + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} u^2 + \sum_{\substack{\mathbf{d} \in 2\mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ |\mathbf{d}| \geq 3}} \varepsilon \alpha_1^{\mathbf{d}} \zeta_1^{d_1} u^{d_2} \end{aligned}$$

dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$ . Le hamiltonien  $\overline{H}^o$  comprend donc un terme linéaire en  $u$  et d'ordre  $\varepsilon$ , aucun terme linéaire en  $\zeta_1$  et aucun terme croisé en  $\zeta_1 u$ . Il suffit donc d'une translation de taille  $\varepsilon$  en  $u$ , pour faire coïncider l'origine des nouvelles variables avec la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ .

### 3. La famille $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$

Soit  $(0, \mathcal{U}^o)$ , la position de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  le long de  $\Gamma$  dans le problème moyen réduit.  $\mathcal{U}^o$  est une fonction dépendant implicitement de  $\Gamma$  et que nous supposons d'ordre  $\varepsilon$ . Ainsi la transformation

$$(4.10) \quad \widehat{\Psi} : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \\ (\zeta_1, \widehat{u}, \Gamma, \widehat{\varpi}) & \longmapsto & (\zeta_1, u, \Gamma, \varpi), \end{cases}$$

où

$$u = \widehat{u} + \mathcal{U}^o, \quad \varpi = \widehat{\varpi} + \frac{\partial \mathcal{U}^o}{\partial \Gamma} \zeta_1$$

et

$$\widehat{\sigma} := \widehat{\Psi}^* \sigma = d\zeta_1 \wedge d\widehat{u} + d\Gamma \wedge \widehat{\varpi},$$

fait correspondre l'origine  $\zeta_1 = \widehat{u} = 0$  avec la position de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  par l'intermédiaire d'une translation dans le problème moyen réduit. De manière équivalente, cette transformation fournit le hamiltonien

$$\overline{H}^o \circ \widehat{\Psi} = \widehat{\mathcal{K}} + \widehat{\mathcal{K}}_*,$$

où

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}(\zeta_1, \widehat{u}, \Gamma) &= \alpha_0^{(0,0)} + \alpha_0^{(0,2)} \widehat{u}^2 \\ &+ \varepsilon \alpha_1^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(2,0)} \zeta_1^2 + (\varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\alpha^{(3,0)} \mathcal{U}^o) \widehat{u}^2 \\ &+ \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|^3) \end{aligned}$$

est l'approximation à l'ordre  $\varepsilon$  du hamiltonien réduit au voisinage de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  tandis que  $\widehat{\mathcal{K}}_*$  est un reste d'ordre  $\varepsilon^2$ .

La translation nécessaire pour obtenir  $\widehat{\mathcal{K}}$  est égale à :

$$(4.12) \quad \mathcal{U}^o = -\frac{\varepsilon \alpha_1^{(0,1)}}{2 \alpha^{(0,2)}}.$$

La fréquence de libration des orbites situées dans un voisinage infinitésimal des points fixes de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  est issue des termes quadratiques de  $\widehat{\mathcal{K}}$  telle que :

$$(4.13) \quad \nu^o := \sqrt{4\varepsilon \alpha_1^{(2,0)} (\alpha^{(0,2)} + 3\alpha^{(3,0)} \mathcal{U}^o)} = \sqrt{4\varepsilon \alpha_1^{(2,0)} \alpha_0^{(0,2)} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))}.$$

La fréquence de précession des orbites de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  est fournie par la composante  $\mathbf{d} = (0, 0)$  du hamiltonien telle que :

$$(4.14) \quad g^o := -\frac{\partial \alpha^{(0,0)}}{\partial \Gamma} = -\varepsilon \frac{\partial \alpha_1^{(0,0)}}{\partial \Gamma}.$$

Les relations  $\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}$  impliquent que  $\alpha_1^{(2,0)} = \mathcal{O}(\sqrt{\Gamma}^{-3})$  tandis que  $\alpha_1^{(0,0)} = \mathcal{O}(\sqrt{\Gamma}^{-1})$ . Par conséquent, les ordres des fréquences de libration et de précession sont respectivement

$$(4.15) \quad \nu^o = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}/e_0^{3/2}) \quad \text{et} \quad g^o = \mathcal{O}(\varepsilon/e_0^3).$$

Une application directe de ce résultat concerne l'ordre de grandeur de la valeur d'excentricité minimale,  $e_{0 \min}$  pour que les orbites de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  se situent à l'extérieur de la zone d'exclusion. En effet, dans le chapitre 1, nous avons supposé que  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  se trouve à l'extérieur de la zone d'exclusion pour

$$\max(|g^o|, |\nu^o|) < 1/4.$$

À partir de cette condition et des ordres de grandeur des fréquences, nous déduisons que  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  sort de la zone d'exclusion pour

$$(4.16) \quad e_{0 \min} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}).$$

Par conséquent, ceci permet de retrouver l'ordre de grandeur de la taille de la sphère de Hill, domaine où l'influence de la planète domine la dynamique tandis que l'étoile joue le rôle d'une perturbation.

Comparons les résultats provenant des séries analytiques avec les résultats numériques du chapitre 1. Les figures 4.2a, b et c représentent l'évolution des fréquences  $\nu^o$  et  $g^o$  et de la translation  $\mathcal{U}^o$  le long de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  dans un système de type "Soleil-Jupiter" ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ). La courbe bleu ciel est issue de l'étude numérique tandis que la courbe rouge provient du développement analytique pour  $\mathfrak{N} = 2$ . Bien que le degré de troncature en  $\sqrt{\Gamma}$  soit peu élevé, nous constatons que la méthode

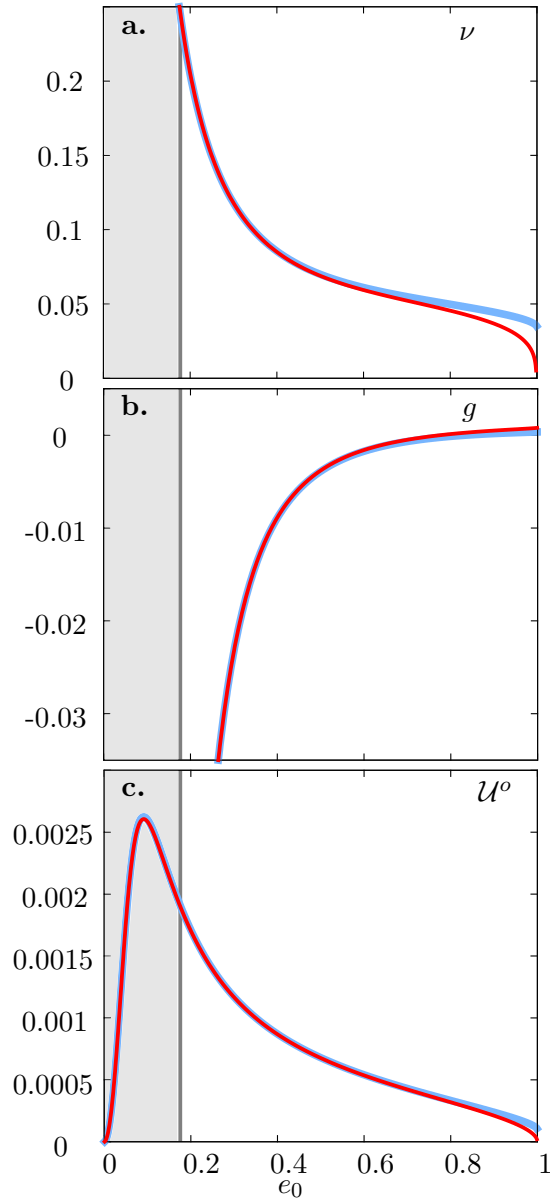


FIGURE 4.2. Le long de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  pour  $\varepsilon = 10^{-3}$ , comparaison des fréquences  $\nu$  (a) et  $g$  (b) et la position  $U^o$  (c) entre le développement analytique pour  $\mathfrak{N} = 2$  (courbe rouge) et l'étude numérique (courbe bleu ciel). Le domaine gris représente les orbites de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{e_0}$  dans la zone d'exclusion.



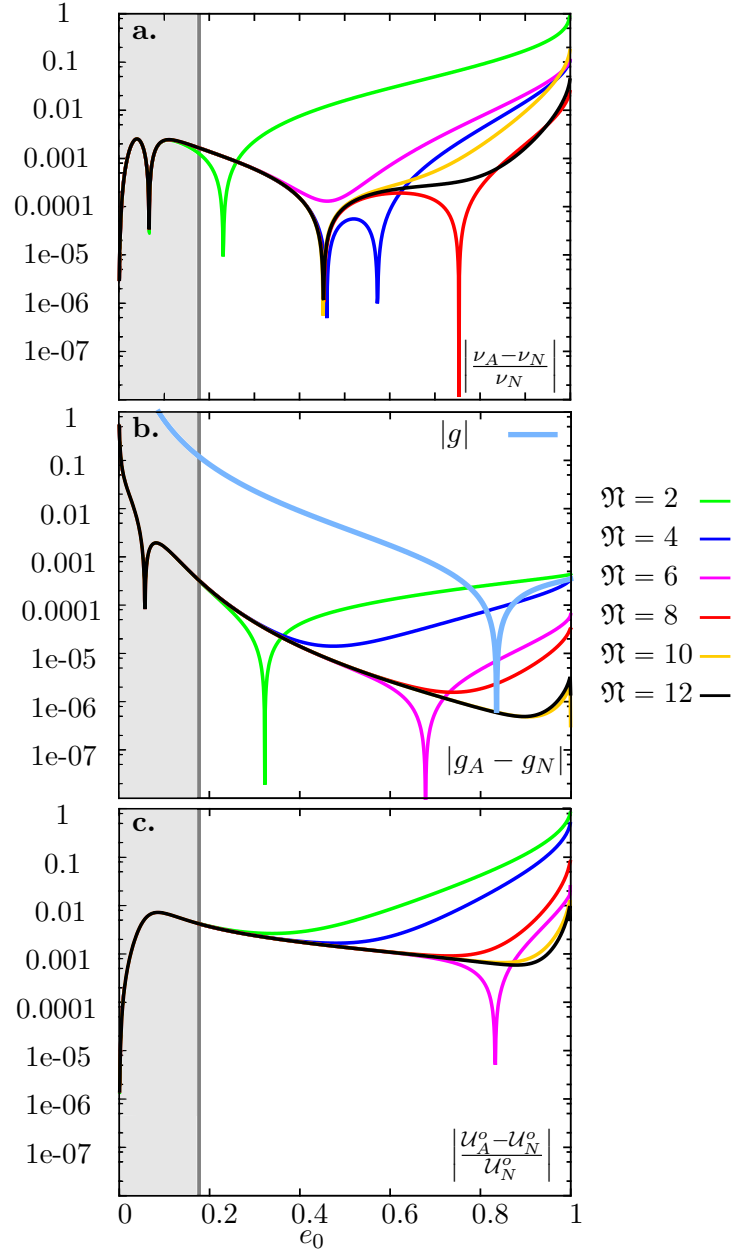


FIGURE 4.3. Le long de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{\epsilon_0}$ , comparaison de la différence des fréquences  $\nu$  (a),  $g$  (b) et de la translation  $\mathcal{U}^\circ$  (c) entre les résultats de l'étude numérique ( $N$ ) et ceux du développement analytique ( $A$ ) en fonction du degré de troncature  $\mathfrak{N}$  en  $\sqrt{\Gamma}$ . Le domaine gris représente les orbites de  $\mathcal{G}_{Q_S}^{\epsilon_0}$  dans la zone d'exclusion.

analytique fournit une bonne approximation de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  jusqu'à une haute excentricité ( $e_0 \simeq 0.7$ ). Sur les figures 4.3a et c, nous évaluons l'erreur relative sur  $\nu^o$  et  $\mathcal{U}^o$  entre le calcul numérique et analytique au degré de troncature  $\mathfrak{N}$ . Nous évaluons également l'erreur absolue de la fréquence  $g^o$  entre les deux méthodes (Fig.4.3b). Nous constatons que l'augmentation de  $\mathfrak{N}$  permet d'atteindre une bonne précision même à très haute excentricité. Par exemple, pour  $\mathfrak{N} = 12$ , l'erreur relative maximale pour  $0 < e_0 < 0.9$  sur  $\nu^o$  et  $\mathcal{U}^o$  est de  $10^{-2}$ . À l'exception du voisinage de l'orbite gelée, l'erreur absolue de  $g^o$  se situe toujours un à deux ordres de grandeur en dessous de la valeur de  $|g|$ . La méthode analytique développée est donc très satisfaisante pour accéder à la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  dans le problème moyen.

En utilisant la série à l'ordre  $\mathfrak{N} = 12$ , nous pouvons facilement calculer la valeur de  $e_{0\min}$ , l'excentricité minimale pour que  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  soit en dehors de la zone d'exclusion. La fréquence  $1/4$  ayant été fixée arbitrairement, il est également possible d'évaluer quelle serait la différence sur  $e_{0\min}$  pour une fréquence limite différente. Ces résultats sont indiqués dans le tableau 4.1 pour  $1/6$ ,  $1/4$  et  $1/3$ . Pour les systèmes formés par le Soleil et une planète du système solaire, nous constatons que les résultats sont du même ordre pour les trois valeurs de fréquence limite. La fréquence  $1/4$  est donc un bon indicateur. Dans le cas du système Terre-Lune, les variations sont beaucoup plus importantes ( $e_{0\min} \simeq 0.5$  pour  $1/4$  alors que  $e_{0\min} \simeq 0.8$  et  $0.4$  pour respectivement  $1/6$  et  $1/3$ ). Par conséquent, pour des systèmes tels que  $\varepsilon \gg 10^{-3}$ , la limite de la zone d'exclusion est difficile à estimer par l'intermédiaire des fréquences. Il sera plutôt préférable de contrôler la taille du reste  $H_*$  issu du processus de moyennisation (Robutel *et al.*, 2016).

Enfin, à partir de la série analytique, il est possible de déduire l'excentricité  $e_0$  de l'orbite gelée  $G_{QS}$ . Pour cela nous devons déterminer la valeur de  $\Gamma$  telle que  $g^o(\Gamma) = 0$ . Dans la limite de notre approximation du hamiltonien au premier ordre en  $\varepsilon$ , nous constatons que la valeur d'excentricité de l'ellipse figée est indépendante de  $\varepsilon$ . Par la recherche de racines dans le polynôme en  $\sqrt{\Gamma}$  formé par cette équation, on déduit également la valeur d'excentricité de l'orbite gelée. Celle-ci est donnée par le tableau 4.2 en fonction du degré  $\mathfrak{N}$ . Ainsi, nous montrons que l'orbite gelée se situe à une valeur de  $e_0 = 0.8355 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

#### 4. Le voisinage de la famille $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$

Pour aller plus loin dans notre exploration du domaine des quasi-satellites, nous nous intéressons aux trajectoires se situant dans un voisinage de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  par l'intermédiaire d'un processus de normalisation.

**4.1. Réorganisation du hamiltonien réduit.** Tout d'abord, nous introduisons la transformation :

$$(4.17) \quad \check{\Psi} : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} \\ (\check{z}, z, \Gamma, \check{\omega}) & \longmapsto (\zeta_1, \hat{u}, \Gamma, \hat{\omega}), \end{cases}$$

Système	$\varepsilon$	$e_{0 \min}$		
		1/6	1/4	1/3
S-Mercure	$1.66003 \times 10^{-7}$	0.012297	0.009502	0.007967
S-Venus	$2.44757 \times 10^{-6}$	0.030155	0.023302	0.019537
S-Terre	$3.00314 \times 10^{-6}$	0.032283	0.024947	0.020915
S-Mars	$3.22681 \times 10^{-7}$	0.015346	0.011859	0.009943
S-Jupiter	$9.53587 \times 10^{-4}$	0.227437	0.172632	0.143887
S-Saturne	$2.85704 \times 10^{-4}$	0.148723	0.114358	0.095723
S-Uranus	$4.36517 \times 10^{-5}$	0.078883	0.060918	0.051064
S-Neptune	$5.14927 \times 10^{-5}$	0.083369	0.064374	0.053958
Terre-Lune	1/82	0.836849	0.494732	0.373649

TABLE 4.1. Excentricité  $e_{0 \min}$  pour différents systèmes de type “Soleil-planète” et “Terre-Lune” en fonction de la fréquence maximale pour être à l’extérieur de la zone d’exclusion.

$\mathfrak{N}$	$e_0$
2	0.775601
4	0.874164
6	0.833222
8	0.836094
10	0.835538
12	0.835535

TABLE 4.2. Excentricité  $e_0$  de l’orbite gelée en fonction de  $\mathfrak{N}$ .

où

$$\begin{cases} z = \sqrt{2}^{-1} (\kappa \zeta_1 + i \kappa^{-1} \hat{u}) \\ \tilde{z} = -i \bar{z}, \end{cases}$$

$$\kappa = \left( \frac{\varepsilon \alpha_1^{(2,0)}}{\alpha^{(0,2)} + 3\alpha^{(0,3)} \mathcal{U}^o} \right)^{1/4}$$

et

$$\check{\sigma} := \check{\Psi}^* \hat{\sigma} = d\tilde{z} \wedge dz + d\Gamma \wedge d\check{\omega}.$$

Ainsi, la composition  $\check{\Psi}$  avec  $\hat{\mathcal{K}}$  fournit le hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$  dont la partie quadratique est normalisée. En effet, en décomposant  $\check{\mathcal{K}}$  tel que

$$\check{\mathcal{K}} = \check{\mathcal{K}}_0 + \check{\mathcal{K}}_2 + \sum_{d \geq 3} \check{\mathcal{K}}_d,$$

nous obtenons

$$\check{\mathcal{K}}_2(\tilde{z}, z, \Gamma) = \operatorname{sgn}(\alpha_1^{(2,0)}) \frac{i \mathcal{V}^o}{2} z \tilde{z} + \operatorname{sgn}(\alpha^{(0,2)} + 3\alpha^{(0,3)} \mathcal{U}^o) \frac{i \mathcal{V}^o}{2} z \tilde{z} = -i \mathcal{V}^o z \tilde{z},$$

où  $\operatorname{sgn}(x)$  est la fonction qui extrait le signe du nombre réel  $x$ ,

$$\check{\mathcal{K}}_0(\Gamma) = \alpha^{(0,0)},$$

et

$$\check{\mathcal{K}}_d(\tilde{z}, z, \Gamma) = \sum_{|\mathbf{p}|=d} v^{\mathbf{p}} z^p \tilde{z}^{\tilde{p}},$$

où  $\mathbf{p} = (p, \tilde{p}) \in \mathbb{N}^2$  et les coefficients  $v^{\mathbf{p}}$  sont des combinaisons de  $\alpha^{\mathbf{d}}$  et donc des fonctions de  $\Gamma$ . Le facteur d'échelle  $\kappa$  étant une fonction de  $\Gamma$ , la variable d'angle conjuguée à  $\Gamma$  est égale à

$$\check{\omega} = \hat{\omega} + \frac{i}{2\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \Gamma} (z^2 + \tilde{z}^2).$$

De ce fait, elle est reliée à la longitude du noeud de la manière par l'équation :

$$\varpi = \check{\omega} - \frac{i}{2\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \Gamma} (z^2 + \tilde{z}^2) + \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} \frac{\partial \mathcal{U}^o}{\partial \Gamma} (z - i\tilde{z}).$$

**4.2. La procédure de normalisation du hamiltonien réduit.** Pour accéder aux trajectoires qui sont situées dans le voisinage de la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e0}$ , nous normalisons le hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$  aux ordres supérieurs à  $\|(z, \tilde{z})\|^2$ . Plus précisément, cela revient à la construction d'une transformation canonique

$$(4.18) \quad \Psi^\dagger : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} \\ (\tilde{\xi}, \xi, \Gamma, \varpi^\dagger) & \longmapsto & (\tilde{z}, z, \Gamma, \check{\omega}), \end{cases}$$

où

$$\sigma^\dagger := (\Psi^\dagger)^* \check{\sigma} = d\tilde{\xi} \wedge d\xi + d\Gamma \wedge d\check{\omega}$$

telle que

$$\check{\mathcal{K}} \circ \Psi^\dagger = \mathcal{N} + \mathcal{N}_*,$$

où  $\mathcal{N}$  est le hamiltonien réduit normalisé à l'ordre  $\varepsilon$ . Ainsi, la forme normale  $\mathcal{N}$  est égale à

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_2 + \sum_{d>2} \mathcal{N}_{2d}$$

avec

$$\mathcal{N}_0(\Gamma) = \alpha^{(0,0)}, \quad \mathcal{N}_2(\tilde{\xi}, \xi, \Gamma) = -i\nu^0 \xi \tilde{\xi}$$

et pour  $d > 2$ ,

$$\mathcal{N}_{2d}(\tilde{\xi}, \xi, \Gamma) = \gamma^{(d,d)}(\xi \tilde{\xi})^d,$$

où  $\gamma^{(d,d)}$  sont des fonctions de  $\Gamma$ .

Dans ce développement,  $\mathcal{N}_*$  est un reste d'ordre  $\varepsilon^2$ . Afin de simplifier la procédure de normalisation, nous définissons un entier  $d_{\max}$  tel que

$$\|(\xi, \tilde{\xi})\|^{d_{\max}+1} = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

De ce fait, tous les termes de  $\tilde{\mathcal{K}}$  dont l'ordre est supérieur à  $\|(\xi, \tilde{\xi})\|^{d_{\max}}$  sont envoyés dans le reste  $\mathcal{N}_*$ .

$\Psi^\dagger$  est une transformation proche de l'identité qui agit sur chaque degré d'un polynôme en les variables  $(\xi, \tilde{\xi})$  afin d'en éliminer les monômes non-résonants, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas de la forme  $(\xi \tilde{\xi})^d$ . Plus précisément,  $\Psi^\dagger$  peut être vue comme une composition de transformations  $\Psi_d^\dagger$  telle que

$$\Psi^\dagger = \Psi_1^\dagger \circ \Psi_2^\dagger \circ \dots \circ \Psi_{d_{\max}-2}^\dagger$$

où chaque transformation  $\Psi_{d-2}^\dagger$  permet de supprimer les termes non-résonants d'ordre  $\|(\xi, \tilde{\xi})\|^d$ . Une transformation élémentaire  $\Psi_{d-2}^\dagger$  étant proche de l'identité, elle peut donc être définie comme le transport au temps 1 du flot hamiltonien engendré par une fonction génératrice  $\mathcal{W}_{d-2}$ . Par conséquent, la construction de  $\Psi^\dagger$  se réduit au calcul des fonctions génératrices  $(\mathcal{W}_d)_{d \in \{1, \dots, d_{\max}-2\}}$  telles que

$$(4.19) \quad \mathcal{N} = \exp L_{\mathcal{W}_{d_{\max}-2}} \circ \dots \circ \exp L_{\mathcal{W}_1} \hat{\mathcal{K}}.$$

Pour ce faire, nous définissons

$$\mathcal{K} := \exp L_{\mathcal{W}_{d_{\max}}} \circ \dots \circ \exp L_{\mathcal{W}_1} \tilde{\mathcal{K}} - \sum_{d=1}^{d_{\max}} \{\mathcal{W}_d, \tilde{\mathcal{K}}_2\}$$

tel que

$$\mathcal{K} = \sum_{d \geq 0} \mathcal{K}_d$$

avec

$$\mathcal{K}_0 = \tilde{\mathcal{K}}_0, \quad \mathcal{K}_1 = 0, \quad \mathcal{K}_2 = \tilde{\mathcal{K}}_2,$$

et pour tout  $d > 3$

$$\mathcal{K}_d(\tilde{\xi}, \xi, \Gamma) = \sum_{|\mathbf{p}|=d} \gamma^{\mathbf{p}} \xi^{\mathbf{p}} \tilde{\xi}^{\tilde{\mathbf{p}}}$$

où  $\mathbf{p} = (p, \tilde{p}) \in \mathbb{N}^2$  et les coefficients  $\gamma^{\mathbf{p}}$  sont des fonctions de  $\Gamma$  issues des crochets de Poisson entre les composantes  $(\check{\mathcal{K}}_l)_{l \leq d}$  et les fonctions génératrices  $(\mathcal{W}_l)_{l \leq d-3}$ . Ainsi, l'équation (4.19) devient

$$\mathcal{N} = \mathcal{K} + \sum_{d=1}^{d_{\max}} \{\mathcal{W}_d, \check{\mathcal{K}}_2\}$$

ce qui met en évidence l'équation cohomologique

$$(4.20) \quad \mathcal{N}_d = \mathcal{K}_d + \{\mathcal{W}_{d-2}, \check{\mathcal{K}}_2\}$$

qui est à résoudre pour tout  $d \in \{3, \dots, d_{\max}\}$ . À un degré  $d$  donné, la résolution de l'équation (4.20) revient à calculer  $\mathcal{W}_{d-2}$  tel que

$$(4.21) \quad \Xi_d = -i\nu^o \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{d-2}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{\xi} - \frac{\partial \mathcal{W}_{d-2}}{\partial \xi} \xi \right)$$

où  $\Xi_d = \mathcal{N}_d - \mathcal{K}_d$  est égal à l'ensemble des monômes non-résonants de  $\mathcal{K}_d$ . C'est une équation linéaire qui peut donc se résoudre monôme par monôme. Ainsi, en supposant que  $\Xi_d = \xi^p \tilde{\xi}^{\tilde{p}}$  avec  $|\mathbf{p}| = d$ , nous obtenons que

$$\mathcal{W}_{d-2} = i \frac{\Xi_d}{\nu^o(\tilde{p} - p)}$$

satisfait l'équation (4.21). Cette solution introduit le petit diviseur  $\nu^o(\tilde{p} - p)$  qui ne peut être nul puisque la fréquence  $\nu^o$  est strictement positive le long de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  et que le monôme est nécessairement non-résonant. Par conséquent, la forme normale  $\mathcal{N}$  est calculable à l'ordre  $\|(\xi, \tilde{\xi})\|^d$ . Ensuite pour itérer la procédure à l'ordre suivant et jusqu'à  $d_{\max}$ , il suffit d'introduire le calcul de  $\mathcal{W}_{d-2}$  dans  $\mathcal{K}$  et de passer à la résolution de l'équation cohomologique à l'ordre  $d + 1$ .

Une dernière remarque concerne l'influence des variables  $\Gamma$  et  $\tilde{\omega}$  sur la procédure de moyennisation. Comme  $\hat{\mathcal{K}}$  est indépendant de  $\tilde{\omega}$ ,  $\Gamma$  n'intervient pas dans la résolution de l'équation cohomologique et peut donc être considérée comme un paramètre. Cependant, comme les génératrices  $\mathcal{W}_d$  dépendent de  $\Gamma$ ,  $\tilde{\omega}$ , l'angle associé à  $\Gamma$ , est remplacé par  $\varpi^\dagger$  tel que

$$\tilde{\omega} = \varpi^\dagger + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \Gamma} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial^2 \mathcal{W}_1}{\partial \Gamma \partial \xi} - \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathcal{W}_1}{\partial \Gamma \partial \tilde{\xi}} \right) + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial \Gamma} + \mathcal{O}(\|(\xi, \tilde{\xi})\|^3).$$

**4.3. La forme normale  $N$ .** Dans les coordonnées  $(\tilde{\xi}, \xi, \Gamma, \varpi^\dagger)$ , la forme normale au voisinage de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  permet de décrire l'espace des phases du problème moyen comme un feuilletage en tores invariants de dimension 2. Autrement dit, par la transformation

$$(4.22) \quad \Psi_{aa} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \times ]0, 1[ \times \mathbb{T} \\ (J, \varphi, \Gamma, \varpi^\dagger) & \longmapsto & (\tilde{\xi}, \xi, \Gamma, \varpi^\dagger) \end{cases}$$

avec

$$\xi = \sqrt{J} e^{i\varphi}$$

et

$$(\Psi_{aa})^*(\sigma^\dagger) = dJ \wedge d\varphi + d\Gamma \wedge d\varpi^\dagger,$$

qui introduit le jeu de variables action-angle, nous obtenons qu'une trajectoire associée à la forme normale

$$(4.23) \quad N(J, \Gamma) := \mathcal{N} \circ \Psi_{aa}(J, \Gamma) = \alpha^{(0,0)} - \nu^o J + \sum_{d \geq 2} (-i)^d \gamma^{(d,d)} J^d$$

est quasi-périodique de fréquences fondamentales :

$$\nu_{(J,\Gamma)} = \dot{\varphi} = -\frac{\partial N}{\partial J}(J, \Gamma) \quad \text{et} \quad g_{(J,\Gamma)} = \dot{\omega}^\dagger = -\frac{\partial N}{\partial \Gamma}(J, \Gamma)$$

avec

$$\nu_{(0,\Gamma)} = \nu^o \quad \text{et} \quad g_{(0,\Gamma)} = g^o.$$

En limitant la forme normale à l'ordre  $J^2$ , nous avons

$$N(J, \Gamma) = \alpha^{(0,0)} - \nu^o J - \gamma^{(2,2)} J^2 + \mathcal{O}(J^3),$$

où

$$\gamma^{(2,2)} = \nu^{(2,2)} - \frac{3i}{\nu^o} (\nu^{(2,1)} \nu^{(1,2)} + \nu^{(3,0)} \nu^{(0,3)})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu^{(2,2)} = -\frac{1}{2} \varepsilon \alpha_1^{(2,2)} - \frac{3}{2} \left( \alpha^{(0,4)} + 5\alpha_0^{(0,5)} \mathcal{U}^o \right) \kappa^4 - \frac{3}{2} \varepsilon \alpha_1^{(4,0)} \kappa^{-4} \\ \nu^{(2,1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \varepsilon \frac{\partial \alpha_1^{(2,1)}}{\partial \Gamma} \kappa^{-1} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \left( \alpha^{(0,3)} + 4\alpha_0^{(0,4)} \mathcal{U}^o \right) \kappa^3 \\ \nu^{(0,3)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \varepsilon \frac{\partial \alpha_1^{(2,1)}}{\partial \Gamma} \kappa^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \alpha^{(0,3)} + 4\alpha_0^{(0,4)} \mathcal{U}^o \right) \kappa^3 \\ \nu^{(1,2)} = -i \overline{\nu^{(2,1)}} \\ \nu^{(3,0)} = -i \overline{\nu^{(0,3)}}. \end{array} \right.$$

Dans ce voisinage, les fréquences sont égales à

$$(4.24) \quad \nu_{(J,\Gamma)} = \nu^o(\Gamma) + 2\gamma^{(2,2)} J + \mathcal{O}(J^2)$$

et

$$(4.25) \quad g_{(J,\Gamma)} = g^o(\Gamma) + \frac{\partial \nu^o(\Gamma)}{\partial \Gamma} J + \frac{\partial \gamma^{(2,2)}}{\partial \Gamma} J^2 + \mathcal{O}(J^3)$$

tandis que l'action  $J$  s'exprime comme :

$$J = i\xi\tilde{\xi} = iz\tilde{z} - \frac{1}{\nu^o} \left( \nu^{(3,0)} z^3 + \nu^{(2,1)} z^2 \tilde{z} + \nu^{(1,2)} z \tilde{z}^2 + \nu^{(0,3)} \tilde{z}^3 \right) + \mathcal{O}(\|z, \tilde{z}\|^4).$$

Les fréquences  $\nu^o$  et  $g^o$  étant respectivement d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\Gamma}^{-3/2}$  et  $\varepsilon\sqrt{\Gamma}^{-3}$ , nous déduisons que

$$\frac{\partial g_{(J,\Gamma)}}{\partial J} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\Gamma}^{-7/2}).$$

En outre, comme  $\kappa^4$  est d'ordre  $\varepsilon\sqrt{\Gamma}^{-3}$ , le terme dominant dans  $\gamma^{(2,2)}$  est  $-\frac{3}{2}\varepsilon\alpha_1^{(0,4)}\kappa^{-1/4}$  ce qui nous permet d'établir que :

$$\frac{\partial \nu_{(J,\Gamma)}}{\partial J} = \mathcal{O}(1/\Gamma).$$

Par conséquent, à  $e_0$  fixé, lorsque  $J$  augmente, les fréquences  $\nu_{(J,\Gamma)}$  et  $g_{(J,\Gamma)}$  évoluent respectivement comme  $J/e_0^{7/2}$  et  $\sqrt{\varepsilon}J/e_0^2$ . Dans un voisinage du point fixe et le long de  $\zeta_1$  pour  $u = 0$ , nous avons donc :

$$(4.26) \quad \frac{\nu^o - (\nu_{(J,\Gamma)})_{(\zeta_1,0)}}{\nu^o} = \mathcal{O}(\zeta_1^2/e_0^2) \quad \text{et} \quad \frac{g^o - (g_{(J,\Gamma)})_{(\zeta_1,0)}}{g^o} = \mathcal{O}(\zeta_1^2/e_0^2).$$

En rappelant que dans la section  $\{u = 0\}$  du problème moyen réduit, la courbe de collision s'éloigne de l'origine comme  $\{\zeta_1^{col} = 2e_0\}$ , nous établissons que la différence relative entre les fréquences de la trajectoire et celles de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  évolue comme  $(\zeta_1/\zeta_1^{col})^2$ .

**4.4. L'exploration du voisinage de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ .** Afin d'explorer de manière plus complète le voisinage de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ , il est nécessaire de normaliser le hamiltonien à un degré plus élevé. Les expressions devenant lourdes, nous ne présenterons que des résultats établis à partir de TRIP au degré  $\mathfrak{D} = 4$  et  $\mathfrak{N} = 10$  dans le cas d'un système de type "Soleil-Jupiter" ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Pour estimer le domaine de validité de la forme normale, nous avons fixé le critère suivant :

$$\rho = \left| \frac{\hat{\mathcal{K}}(\tilde{z}, z, \Gamma) - \mathcal{N}(\tilde{\xi}, \xi, \Gamma)}{\hat{\mathcal{K}}(\tilde{z}, z, \Gamma)} \right| < \varepsilon^2.$$

Les figures 4.4 à 4.9 représentent dix trajectoires dans le problème moyen réduit (**a.**) ainsi que l'évolution des fréquences  $\nu$  (**b.**) et  $g$  (**a.**) dans la section  $\{u = 0; e_0 \text{ fixé}\}$  paramétrée par  $\zeta_1 \geq 0$  pour  $e_0 = 0.2$  (Fig.4.4), 0.25 (Fig.4.5), 0.35 (Fig.4.6), 0.5 (Fig.4.7), 0.75 (Fig.4.8) et 0.85 (Fig.4.9). Pour  $e_0 = 0.2$  jusqu'à  $e_0 = 0.85$ , nous constatons que  $g$  décroît comme  $\zeta_1^2$ . Dans le cas de la fréquence de libration, nous observons que  $\nu$  croît comme  $\zeta_1^2$  pour  $e_0 = 0.2, 0.25, 0.35$  et 0.5. Lorsque  $e_0 = 0.75$  et 0.85, la fréquence décroît jusqu'à atteindre un minimum et augmente ensuite. Ainsi dans presque tous les cas, nous obtenons qu'au voisinage de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ , la valeur absolue des fréquences augmente en s'éloignant de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . L'augmentation de la valeur absolue de ces fréquences devrait continuer jusqu'à atteindre la valeur critique associée à la limite de la zone d'exclusion puis tendre vers l'infini pour  $\zeta_1$  qui tend vers  $\zeta_1^{col}$ . Dans le voisinage où nous avons construit la forme normale, les fréquences s'éloignent peu de celles de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  à  $e_0$  fixé. En effet, pour  $e_0 = 0.2, 0.25$  et 0.5, les variations relatives des fréquences n'excèdent pas 25%. Pour  $e_0 = 0.75$  et 0.85, les variations relatives sur  $\nu$  sont encore plus faibles : de l'ordre de 7%. Par contre, elles sont beaucoup plus importantes dans le cas de  $g$  : respectivement 75% et de l'ordre de 200%. Cela est dû à la proximité des trajectoires avec  $g = 0$ .

La figure 4.10 représente la section  $\{u = 0\}$  dans les variables  $\zeta_1$  et  $e_0$ . La courbe de collision (courbe noire) correspond à la limite du domaine tandis que le région grise est la zone d'exclusion. Celle-ci est délimitée par la courbe bleue calculée à partir de la forme normale. Nous constatons qu'en s'éloignant de la famille de points fixes le long de  $\zeta_1$ , la valeur de l'excentricité minimale augmente mais reste proche de celle de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Cette zone d'exclusion étant issue de la proximité avec la collision, nous avons esquissé sa limite en dehors du domaine de validité de la forme normale (tirets bleus). La courbe verte est associée aux orbites de fréquence de précession



nulle dans le domaine de validité de la forme normale. Plus précisément, ce sont les orbites de Lyapounov qui émergent de  $G_{QS}$  dans la direction transverse à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . En s'éloignant de  $G_{QS}$ , l'excentricité augmente le long de cette famille. Enfin, les courbes rouges représentent les structures de résonance du problème complet telles que

$$(4.27) \quad q\nu - p(1 - g) = 0 \quad \text{avec} \quad p/q \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad 2p + q \leq 20.$$

qui sont obtenues dans le domaine de validité de la forme normale et en dehors de la zone d'exclusion. Dans un premier temps, décrivons les résonances qui apparaissent le long de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Entre la limite de la zone d'exclusion et  $e_0 = 0.3$ ,  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  possède des résonances d'ordre inférieur ou égal à 10 : au-delà, ce ne sont plus que des résonances d'ordre supérieur à 10. Ces structures de résonances se déploient également au voisinage de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . En suivant chacune d'elles en augmentant  $\zeta_1$ , nous constatons que leur excentricité augmente. Cependant, cette évolution est faible : la région contenant les résonances d'ordre inférieur ou égal à 10 – et donc la plus instable –, se situe dans le segment  $0.18 \leq e_0 \leq 0.3$ . Par conséquent, ce résultat met en évidence une accumulation de résonances d'ordre faible pour de faibles valeurs de  $e_0$ , ce qui implique très probablement une augmentation de l'instabilité par des recouvrements de résonances (surtout si  $e' > 0$ , cf Robutel et Gabern, 2006).

Les évolutions des fréquences ainsi que leurs structures de résonances montrent donc que les orbites se trouvant dans le domaine de validité de la forme normale ont des propriétés très proches de celles appartenant à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Ainsi,  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  peut être vue comme la “colonne vertébrale” du domaine quasi-satellite : les fréquences de cette famille d'orbites périodiques du problème moyen fournissent l'essentiel des informations pour caractériser ce domaine.

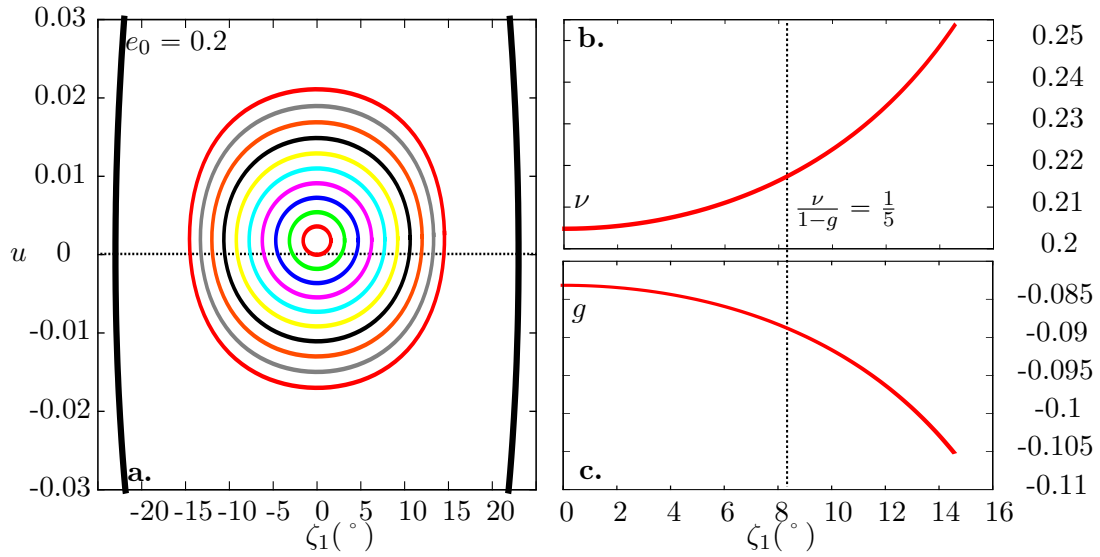


FIGURE 4.4. **a** : Orbites quasi-satellites dans le problème moyen réduit pour  $e_0 = 0.2$  dans le domaine de validité de la forme normale. **b** et **c** : Évolution des fréquences  $\nu$  et  $g$  le long de la section  $\{u = 0\}$ .

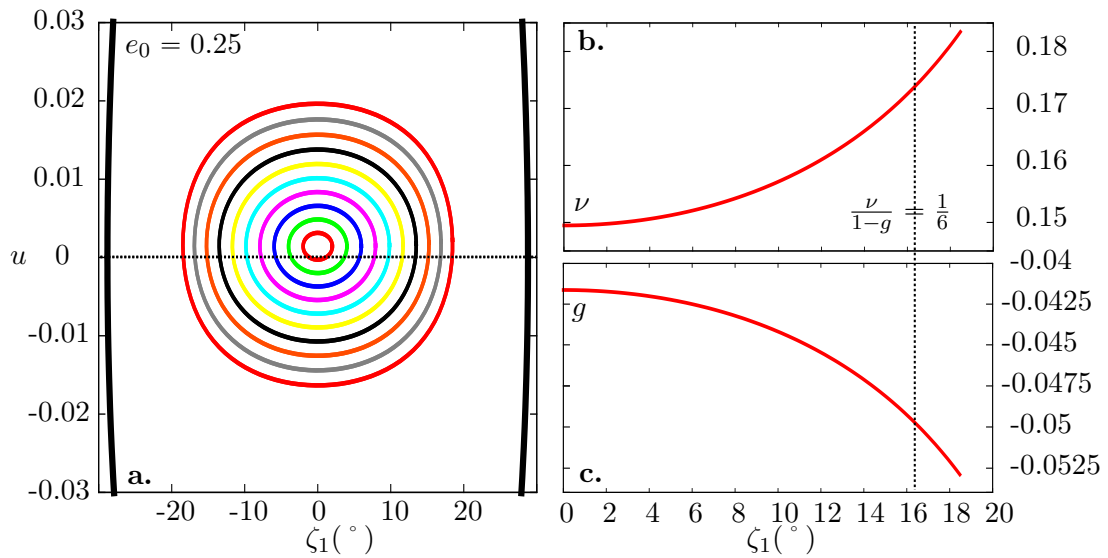


FIGURE 4.5. **a** : Orbites quasi-satellites dans le problème moyen réduit pour  $e_0 = 0.25$  dans le domaine de validité de la forme normale. **b** et **c** : Évolution des fréquences  $\nu$  et  $g$  le long de la section  $\{u = 0\}$ .

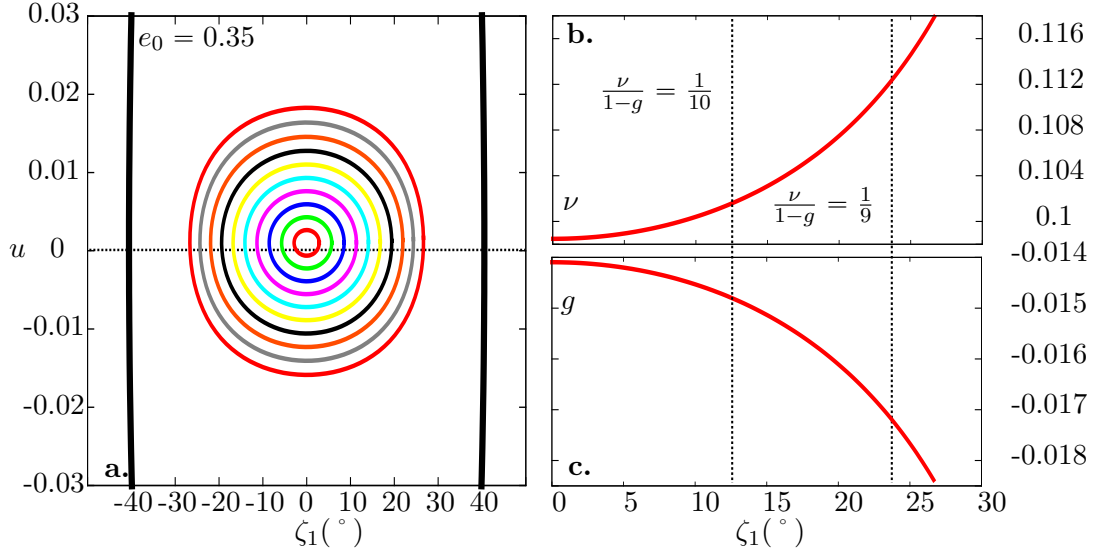


FIGURE 4.6. **a** : Orbites quasi-satellites dans le problème moyen réduit pour  $e_0 = 0.35$  dans le domaine de validité de la forme normale. **b** et **c** : Évolution des fréquences  $\nu$  et  $g$  le long de la section  $\{u = 0\}$ .

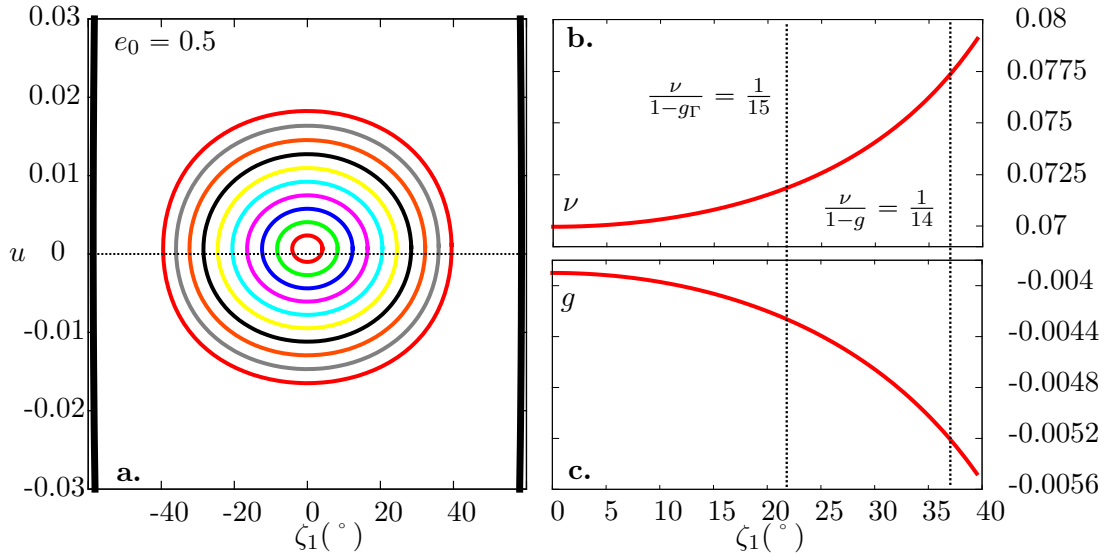


FIGURE 4.7. **a** : Orbites quasi-satellites dans le problème moyen réduit pour  $e_0 = 0.5$  dans le domaine de validité de la forme normale. **b** et **c** : Évolution des fréquences  $\nu$  et  $g$  le long de la section  $\{u = 0\}$ .

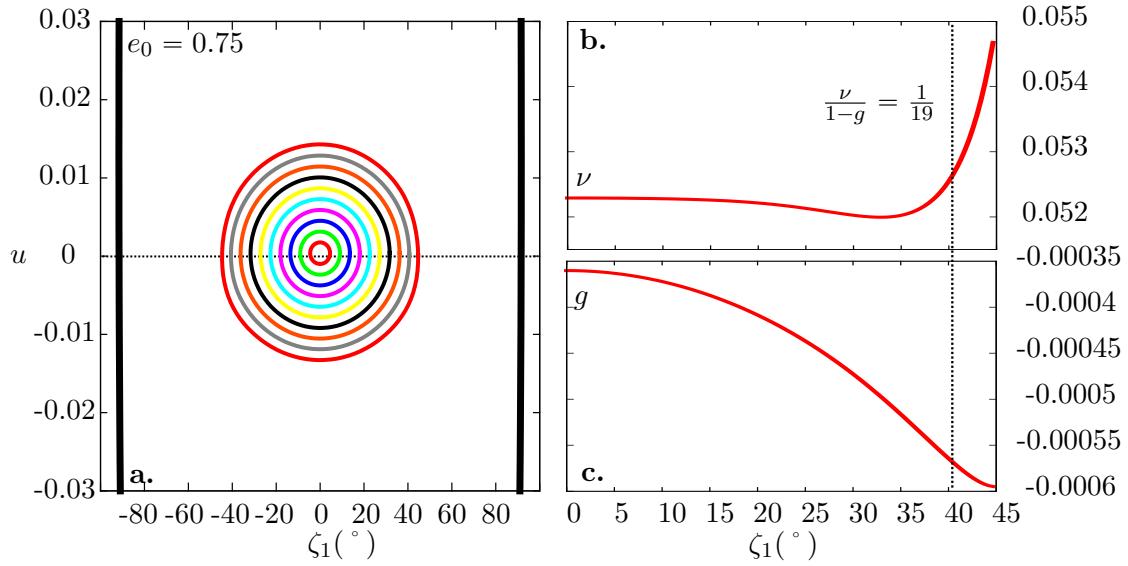


FIGURE 4.8. **a** : Orbites quasi-satellites dans le problème moyen réduit pour  $e_0 = 0.75$  dans le domaine de validité de la forme normale. **b** et **c** : Évolution des fréquences  $\nu$  et  $g$  le long de la section  $\{u = 0\}$ .

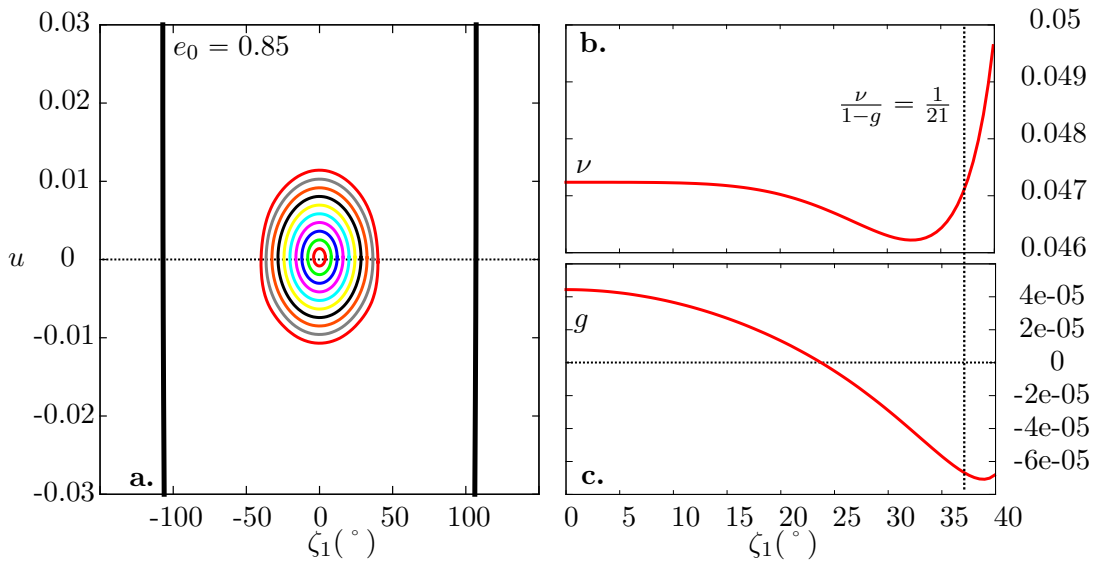


FIGURE 4.9. **a** : Orbites quasi-satellites dans le problème moyen réduit pour  $e_0 = 0.85$  dans le domaine de validité de la forme normale. **b** et **c** : Évolution des fréquences  $\nu$  et  $g$  le long de la section  $\{u = 0\}$ .

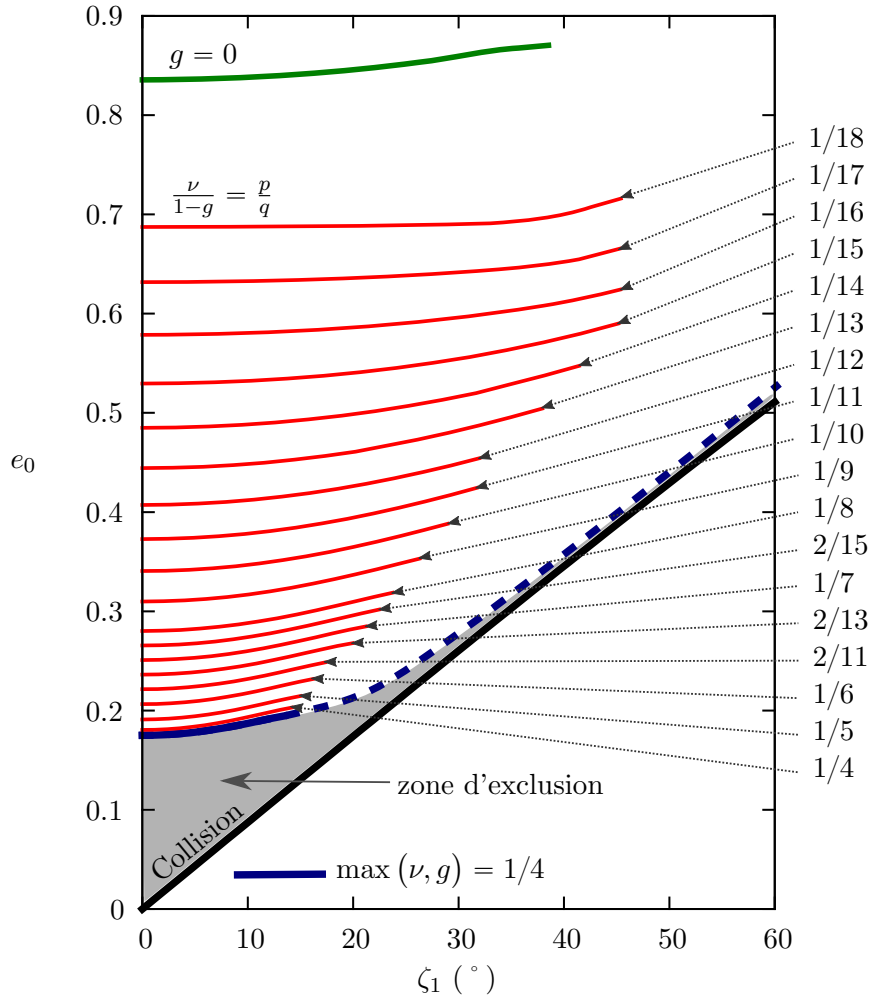


FIGURE 4.10. Section  $\{u=0\}$  du domaine des quasi-satellites représenté dans les variables  $(\zeta_1, e_0)$ . La collision délimitant le domaine dans le problème moyen est représentée par la courbe noire. La zone d'exclusion correspond à la région grise délimitée par la courbe bleue qui est calculée par la forme normale et les tirets bleus qui donnent une estimation. Les courbes rouges représentent les structures de résonances dans le domaine de validité de la forme normale. La courbe verte représente la famille d'orbites périodiques avec  $g=0$  qui émerge de  $G_{QS}$  dans la direction transverse à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ .



## Extension aux cas excentrique-plan et circulaire-spatial

### 1. Introduction

Le hamiltonien moyen du cas excentrique-plan, noté

$$\overline{H}' := \overline{H}|_{\{y=\tilde{y}=0\}} \quad \text{avec} \quad e' \geq 0,$$

ainsi que celui du cas circulaire-spatial,

$$\overline{H}^s := \overline{H} \quad \text{avec} \quad e' = 0,$$

possèdent respectivement 2 et 3 degrés de liberté. À la différence du cas circulaire-plan, ces deux hamiltoniens ne peuvent être réduits à un hamiltonien intégrable par un simple argument de symétrie. Il n'est donc pas aussi facile de réaliser une exploration du domaine des quasi-satellites.

Toutefois, en considérant que l'excentricité de la planète,  $e'$ , et l'inclinaison de la particule,  $I$ , sont suffisamment faibles, l'étude des quasi-satellites peut être ramenée à un problème de perturbation du cas circulaire-plan.

Dans ce chapitre, et après une rapide présentation de la méthode de développement en série de Laurent adaptée au cas excentrique-plan, nous étudierons la persistance de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  sous l'effet de la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète. Ensuite, nous esquisserons l'idée d'une étude équivalente dans le cas circulaire-spatial.

### 2. Une étude du cas excentrique-plan

À l'instar du problème circulaire-plan, nous utilisons les variables action-angle  $(\Gamma, \varpi)$ , plutôt que  $(x, \tilde{x})$ . Dans ces variables, le hamiltonien moyen  $\overline{H}'$  est égal à

$$(5.1) \quad \overline{H}' = H_K - u + \overline{H}_P,'$$

où  $\overline{H}_P'(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi) := \overline{H}_P \circ \Psi(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, 0, 0)$  avec  $e' \geq 0$ , et  $\Psi$  est la transformation définie dans l'équation (3.5). En outre, nous rappelons les notations

$$\Gamma' = 1 - \sqrt{1 - e'^2} = \frac{e'^2}{2} + \mathcal{O}(e'^4), \quad x' = \sqrt{\Gamma'} \quad \text{et} \quad \tilde{x}' = -ix'$$

associées à l'excentricité de la planète.

Les hamiltoniens moyens des cas excentrique-plan et circulaire-plan sont reliés par l'équation

$$(5.2) \quad \overline{H}' = \overline{H}^o + R',$$

où  $R' = \overline{H}'_P - \overline{H}^o_P = \mathcal{O}(\varepsilon e')$ .

En considérant que  $e'$  est négligeable devant 1, l'exploration du cas excentrique-plan se ramène donc à une étude de perturbation du cas circulaire-plan par l'effet de l'excentricité de la planète.

Afin de procéder de manière analytique, nous présentons dans la section suivante une adaptation de la méthode de développement du hamiltonien en série de Laurent.

**2.1. Le développement analytique dans le cas excentrique-plan.** La méthode analytique présentée dans le chapitre 3 s'appuie sur un développement du hamiltonien moyen au voisinage de la singularité en  $\zeta_1 = u = \Gamma = 0$ . Or dans le cas excentrique-plan, ce point devient régulier lorsque  $e' > 0$  car la collision en  $\zeta_1 = u = 0$  se produit lorsque les ellipses de la planète et de la particule sont confondues, c'est-à-dire pour  $\Gamma - \Gamma' = \varpi = 0$ . Autrement dit, cela signifie que pour tout  $e' \geq 0$ , nous avons

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|_{\{\zeta_1=u=\Gamma-\Gamma'=\varpi=0\}} = 0.$$

En revenant temporairement aux variables complexes, nous constatons que la collision en  $\zeta_1 = u = 0$  se situe en  $x = \sqrt{\Gamma'}$ . Ainsi, en définissant le changement de variables

$$\mathcal{T}' : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \\ (\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varpi}, \zeta_2) & \longmapsto & (\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \zeta_2) \end{cases}$$

avec

$$\tilde{\sigma} := \mathcal{T}'^* \sigma = d\zeta_1 \wedge du + d\tilde{\Gamma} \wedge d\tilde{\varpi}$$

tel que

$$\tilde{\Gamma} := \Gamma - 2\sqrt{\Gamma\Gamma'} \cos \varpi + \Gamma' \quad \text{et} \quad \tilde{\varpi} := \arg(\sqrt{\Gamma}e^{i\varpi} - \sqrt{\Gamma'}),$$

alors pour tout  $e' \geq 0$ , nous avons

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|_{\{\zeta_1=u=\tilde{\Gamma}=0\}} = 0,$$

ce qui permet de se retrouver dans la même situation que dans le cas circulaire-plan, d'autant que la transformation  $\mathcal{T}'$  préserve les relations de d'Alembert. Enfin,  $\mathcal{T}'$  est une transformation proche de l'identité telle que

$$\mathcal{T}' = I_d + \mathcal{O}(\sqrt{\Gamma'}).$$

Dans ces nouvelles variables, nous devons mettre en évidence une approximation du carré de la distance, notée  $\mathcal{Y}$ , avec les propriétés suivantes

$$(5.3) \quad \mathcal{Y} \geq 0, \quad \mathcal{Y}|_{\{\zeta_1=u=\tilde{\Gamma}=\varpi=0\}} = 0 \quad \text{et} \quad \left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y} \right| < \mathcal{Y},$$

afin que la série de Laurent

$$(5.4) \quad \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Y}}} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{2m!}{(2^m m!)^2} \left( \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} \right)^m,$$



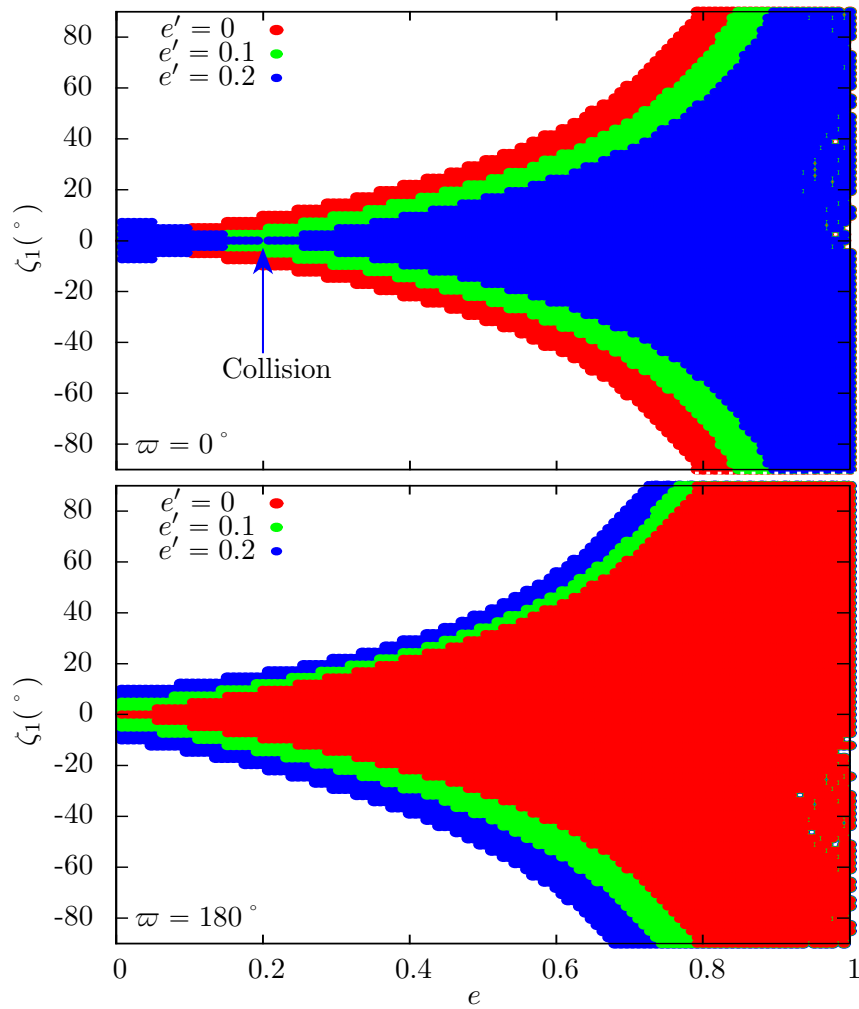


FIGURE 5.1. Sections  $\{u = 0, \varpi = 0^{\circ}\}$  et  $\{u = 0, \varpi = 180^{\circ}\}$  du domaine de convergence pour  $e' = 0$  (domaine rouge),  $e' = 0.1$  (domaine vert) et  $e' = 0.2$  (domaine bleu). La flèche bleue indique la collision entre la planète et l'étoile pour  $e' = 0.2$ .

où  $\mathcal{X} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y}$ , soit convergente dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$ . De manière presque similaire au cas circulaire-plan, nous montrons que la composante

$$(5.5) \quad \sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{\tilde{\Gamma}} \Delta_{0\max}^{(1)} = \sqrt{8\tilde{\Gamma}}$$

satisfait les conditions (5.3). Nous renvoyons le lecteur à la section 1 de l'annexe A pour une démonstration plus détaillée.

La figure 5.1 représente les sections  $\{u = 0, \varpi = 0^\circ\}$  et  $\{u = 0, \varpi = 180^\circ\}$  du domaine de convergence de la série de l'équation (5.8). Pour donner plus de précisions, le domaine de convergence a été évalué numériquement en cherchant les valeurs de  $(\zeta_1, u, e, \varpi)$  dans  $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times [0, 1[ \times \mathbb{T}$  telles que

$$(5.6) \quad \max_{\zeta_2 \in \mathbb{T}} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| < \sqrt{2 \times 8\tilde{\Gamma}}$$

pour  $e' = 0$  (domaine rouge),  $e' = 0.1$  (domaine vert) et  $e' = 0.2$  (domaine bleu). Nous constatons que le domaine de convergence s'élargit en s'éloignant de la singularité en  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$ . En outre, sa taille est comparable à celle du cas circulaire-plan. Par conséquent, la méthode de développement en série de Laurent pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\tilde{\Gamma}}$  est adaptée à l'étude des quasi-satellites dans le cas excentrique-plan.

Pour les mêmes raisons que dans le cas circulaire-plan, la partie perturbatrice

$$(5.7) \quad \tilde{H}'_P := \overline{H}'_P \circ \mathcal{T}'$$

est égale à la série de Laurent

$$(5.8) \quad -\varepsilon \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\overline{\mathcal{S}}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\tilde{\Gamma}'}^{n'} e^{ik'\tilde{\varpi}} + \sum_{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{B}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\tilde{\Gamma}'}^{n'} e^{ik'\tilde{\varpi}} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

où  $\mathcal{A}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{n} = (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $k' \in \mathbb{Z}$ ,

$$(5.9) \quad \overline{\mathcal{D}} = \left\{ (\mathbf{n}, k') \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z} \text{ tels que } n + n' = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } |k'| \leq n' \right\}$$

qui correspond aux règles de d'Alembert dans le problème moyen excentrique-plan et

$$(5.10) \quad \overline{\mathcal{S}}_{|\mathbf{d}|} = \left\{ (\mathbf{n}, k') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } n + n' + k = 1 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \right. \\ \left. |k'| \leq n' \text{ et } n \geq -(|\mathbf{d}| + 1) \right\}$$

qui est associé aux relations issues du développement en série de Laurent. Plus de détails sont donnés dans la section 2 de l'annexe A.

**2.2. Le hamiltonien moyen au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$ .** Dans les variables adaptées au développement en série de Laurent, le hamiltonien moyen du cas excentrique-plan, noté

$$(5.11) \quad \tilde{H}' := \overline{H}' \circ \mathcal{T}' = H_K - u + \tilde{H}'_P,$$

est relié au hamiltonien moyen du cas circulaire-plan tel que

$$\tilde{H}' = \overline{H}^o + \tilde{R}',$$

où

$$\tilde{R}' = \underbrace{\overline{H}_P^o \circ \mathcal{T}' - \overline{H}_P^o + R' \circ \mathcal{T}'}_{\mathcal{O}(\varepsilon\sqrt{\Gamma'})}$$

est la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète. Pour  $e' = 0$ ,  $\tilde{R}'$  s'annule et donc le hamiltonien  $\tilde{H}'$  est égal à  $\overline{H}^o$ . Dans ce contexte,  $\tilde{\Gamma}$  est une intégrale première du problème moyen ou, de manière équivalente, un paramètre du problème moyen réduit dont le hamiltonien associé est

$$(\zeta_1, u) \mapsto \tilde{H}'(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}).$$

Dans ce cas, un développement en une série de Taylor en  $\zeta_1 = u = 0$  nous permet de retrouver les points fixes de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  (chapitre 4).

Pour  $e' > 0$ , le hamiltonien  $\tilde{H}'$  dépend de  $\tilde{\omega}$ .  $\tilde{\Gamma}$  n'est donc plus une intégrale première de la dynamique et il n'est pas possible de passer dans le problème moyen réduit.

Toutefois, pour  $e'$  suffisamment faible,  $\tilde{R}'$  diffère peu de  $\overline{H}^o$ . Afin de mettre en évidence ces différences, nous effectuons un développement identique au cas circulaire-plan. Plus précisément, nous "oublions" les variables  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\omega}$ , et procédons à un développement du hamiltonien  $\tilde{H}'$  en une série de Taylor au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$ . Ainsi, nous obtenons :

$$(5.12) \quad \tilde{H}'(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) = \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \alpha_0^{\mathbf{d}} + \varepsilon \alpha_1^{\mathbf{d}}(\tilde{\Gamma}) + \varepsilon \sqrt{\Gamma'} \beta^{\mathbf{d}}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

où  $\alpha_0^{\mathbf{d}}$  et  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  sont les coefficients associés respectivement à la partie keplerienne, la partie perturbatrice du cas circulaire-plan tandis  $\beta^{\mathbf{d}}$  correspondent à la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète.

Les coefficients  $\alpha_0^{\mathbf{d}}$  sont des constantes avec les propriétés définies dans l'équation (4.5). De même, les coefficients  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  sont des fonctions de  $\tilde{\Gamma}$  définies par l'équation (4.2). Dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$ , elles se développent en séries de Laurent telles que

$$\alpha_1^{\mathbf{d}}(\tilde{\Gamma}) = - \sum_{\overline{\mathcal{J}}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},(n,0),0} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n - \sum_{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},(n,0),0} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n,$$

ce qui correspond aux termes d'ordre zéro en  $\sqrt{\Gamma'}$  de la série de Laurent (5.8). Notons qu'en remplaçant  $\tilde{\Gamma}$  par  $\Gamma$ , cette série est identique à celle de l'équation (4.6). En outre, la propriété (4.8) est toujours valide. Enfin, les coefficients  $\beta^{\mathbf{d}}$  sont des fonctions de  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\omega}$  telles que

$$\beta^{\mathbf{d}}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) := \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\Gamma'}} \frac{1}{|\mathbf{d}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{d}|} \tilde{R}'}{\partial \zeta_1^{d_1} \partial u^{d_2}}(0, 0, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}).$$

Dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$ , elles se développent en séries de Laurent telles que

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \beta^{\mathbf{d}}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) = & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Gamma}'}} \sum_{\overline{\mathcal{F}}_{|\mathbf{d}|} \cap \{n' > 0\}} \mathcal{A}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}^n} \sqrt{\tilde{\Gamma}'^{n'}} e^{ik' \tilde{\omega}} \\ & -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\Gamma}'}} \sum_{\overline{\mathcal{D}} \cap \{n' > 0\}} \mathcal{B}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}^n} \sqrt{\tilde{\Gamma}'^{n'}} e^{ik' \tilde{\omega}}, \end{aligned}$$

ce qui correspond aux termes d'ordre supérieur à zéro en  $\sqrt{\tilde{\Gamma}'}$  de la série de Laurent (5.8).

À la différence de  $\alpha_0^{\mathbf{d}}$  et  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$ , les coefficients  $\beta^{\mathbf{d}}$  ne possèdent pas de symétrie particulière permettant de garantir qu'ils s'annulent pour certains couples  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^2$ . Toutefois, la symétrie  $\mathcal{S}_{21}$  qui s'applique dans le plan<sup>1</sup> impose que

$$\tilde{R}'(-\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, -\tilde{\omega}) = \tilde{R}'(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega})$$

et donc que les fonctions

$$\tilde{\omega} \mapsto \beta^{(d_1, d_2)}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega})$$

soient paires si  $d_1 \in 2\mathbb{N}$  et impaires si  $d_1 \in (2\mathbb{N} + 1)$ . Cette propriété sera utile dans la section suivante.

Dans un souci de clarté, nous considérons implicite la dépendance des fonctions  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  et  $\beta^{\mathbf{d}}$  aux variables  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\omega}$ .

La perturbation du hamiltonien moyen circulaire-plan par l'effet de l'excentricité de la planète implique que pour tout couple  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^2$ , les coefficients  $\beta^{\mathbf{d}}$  ne s'annulent pas dans la série de Taylor de l'équation (5.12). Ainsi, au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$ , le hamiltonien  $\tilde{H}'$  s'écrit :

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \tilde{H}'(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) = & \alpha_0^{(0,0)} + \alpha_0^{(0,2)} u^2 \\ & + \varepsilon \left( \alpha_1^{(0,0)} + \alpha_1^{(0,1)} u + \alpha_1^{(2,0)} \zeta_1^2 + \alpha_1^{(0,2)} u^2 \right) \\ & + \varepsilon \sqrt{\tilde{\Gamma}'} \left( \beta^{(0,0)} + \beta^{(1,0)} \zeta_1 + \beta^{(0,1)} u + \beta^{(1,1)} \zeta_1 u + \beta^{(2,0)} \zeta_1^2 + \beta^{(0,2)} u^2 \right) \\ & + \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|^3), \end{aligned}$$

où les termes des deux premières lignes représentent respectivement les parties keplerienne et perturbatrice du cas circulaire-plan tandis que la troisième concerne la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète.

À l'ordre  $\varepsilon$ , le hamiltonien moyen ne comporte aucun terme linéaire en  $\zeta_1$ , aucun terme croisé mais un terme linéaire en  $u$ . Pour faire disparaître ce terme, nous effectuons une translation en  $u = \mathcal{U}_0$  où

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{\varepsilon \alpha_1^{(0,1)}}{2 \alpha^{(0,2)}},$$

1. voir la section 3.1 du chapitre 4

comme nous l'avons montré dans la section 3 du chapitre 4. Ainsi, en introduisant la transformation canonique

$$(5.15) \quad \widehat{\Psi} : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \\ (\zeta_1, \widehat{u}, \widetilde{\Gamma}, \widehat{\omega}) & \longmapsto & (\zeta_1, u, \widetilde{\Gamma}, \widetilde{\omega}), \end{cases}$$

où

$$u = \widehat{u} + \mathcal{U}^o, \quad \widetilde{\omega} = \widehat{\omega} + \frac{\partial \mathcal{U}^o}{\partial \widetilde{\Gamma}} \zeta_1$$

et

$$\widehat{\sigma} := \widehat{\Psi}^* \widetilde{\sigma} = d\zeta_1 \wedge d\widehat{u} + d\widetilde{\Gamma} \wedge \widehat{\omega},$$

nous obtenons

$$\widetilde{H}' \circ \widehat{\Psi} = \widehat{\mathcal{K}} + \widehat{\mathcal{K}}_*$$

avec

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \widehat{\mathcal{K}}(\zeta_1, \widehat{u}, \widetilde{\Gamma}, \widehat{\omega}) &= \alpha_0^{(0,0)} + \alpha_0^{(0,2)} \widehat{u}^2 \\ &+ \varepsilon \alpha_1^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(2,0)} \zeta_1^2 + (\varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o \alpha_0^{(0,3)}) \widehat{u}^2 \\ &+ \varepsilon \sqrt{\Gamma'} \left( \beta^{(0,0)} + \beta^{(1,0)} \zeta_1 + \beta^{(0,1)} \widehat{u} + \beta^{(1,1)} \zeta_1 \widehat{u} + \beta^{(2,0)} \zeta_1^2 + \beta^{(0,2)} \widehat{u}^2 \right) \\ &+ \mathcal{O}(\|(\zeta_1, \widehat{u})\|^3) \end{aligned}$$

et  $\widehat{\mathcal{K}}_*$  qui est un reste d'ordre  $\varepsilon^2$ .

Pour  $e' = 0$ ,  $\widehat{\mathcal{K}}$  ne possède aucun terme linéaire en  $\zeta_1$  ou  $u$ . Ainsi, cela impose à l'ensemble

$$\mathcal{C}^o := \{\zeta_1 = \widehat{u} = 0\}$$

d'être une variété invariante par le flot du hamiltonien  $\widehat{\mathcal{K}}$  et donc au hamiltonien

$$\widehat{\mathcal{K}}|_{\mathcal{C}^o}(\widetilde{\Gamma}, \widetilde{\omega}) = \alpha_0^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,0)}(\widetilde{\Gamma})$$

d'être intégrable. En outre, ce hamiltonien étant indépendant de  $\widetilde{\omega}$ , la variété invariante  $\mathcal{C}^o$  décrit un feuilletage de tores de dimension 1 dans le problème moyen et donc, de manière équivalente, une famille de points fixes du problème moyen réduit. Par conséquent, et comme cela était attendu, la variété  $\mathcal{C}^o$  représente la famille d'orbites périodiques  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ .

Lorsque l'on considère la planète sur une orbite excentrique ( $e' > 0$ ), le hamiltonien  $\widehat{\mathcal{K}}$  possède des termes linéaires en  $\zeta_1$  et  $u$  dont les coefficients sont d'ordre  $\varepsilon \sqrt{\Gamma'}$ . L'ensemble  $\mathcal{C}^o$  n'est plus une variété invariante par le flot du hamiltonien  $\widehat{\mathcal{K}}$ . Il est bien connu que sous certaines conditions, la variété invariante se déforme et persiste sous l'effet d'une perturbation. Dans notre contexte, cela signifie qu'il existe une transformation symplectique, notée  $\check{\Psi}$ , qui supprime les termes linéaires d'ordre  $\varepsilon \sqrt{\Gamma'}$  par l'intermédiaire de translations dans les variables  $\zeta_1$  et  $\widehat{u}$ . Cependant, à la différence du cas circulaire-plan où les coefficients  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  étaient des constantes une fois  $\Gamma$  fixée, dans le cas excentrique-plan  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  et  $\beta^{\mathbf{d}}$  dépendent des variables  $\widetilde{\Gamma}$  et  $\widetilde{\omega}$ . La construction de la transformation  $\check{\Psi}$  demande plus de technique.

Dans la section suivante, nous présenterons la méthode pour construire  $\tilde{\Psi}$  et montrerons la persistance de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{\varepsilon_0}$  sous l'effet de la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète.

### 2.3. La persistance de la famille $\mathcal{G}_{QS}^{\varepsilon_0}$ .

2.3.1. *La transformation  $\tilde{\Psi}$ .* Nous définissons la transformation

$$\tilde{\Psi} : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \\ (\check{\zeta}_1, \check{u}, \check{\Gamma}, \check{\varpi}) & \longmapsto (\zeta_1, \hat{u}, \tilde{\Gamma}, \hat{\varpi}), \end{cases}$$

où

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \hat{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}' \\ \mathcal{U}' \end{pmatrix} + \mathcal{R}(\phi') \begin{pmatrix} \check{\zeta}_1 \\ \check{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}(\eta) \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire une translation en  $(\zeta_1, \hat{u}) = (\mathcal{Z}', \mathcal{U}')$  ainsi qu'une rotation d'angle  $\phi'$ , de façon à obtenir le hamiltonien

$$\hat{\mathcal{K}} \circ \tilde{\Psi} = \check{\mathcal{K}} + \check{\mathcal{K}}_*$$

avec

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \check{\mathcal{K}}(\check{\zeta}_1, \check{u}, \check{\Gamma}, \check{\varpi}) &= \alpha_0^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(2,0)} \check{\zeta}_1^2 + (\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o \alpha_0^{(0,3)}) \check{u}^2 \\ &+ \varepsilon \sqrt{\Gamma'} \left( \gamma^{(0,0)} + \gamma^{(2,0)} \check{\zeta}_1^2 + \gamma^{(0,2)} \check{u}^2 \right) \\ &+ \mathcal{O}(\|(\check{\zeta}_1, \check{u})\|^3), \end{aligned}$$

où les coefficients  $\gamma^{\mathbf{d}}$  sont issus de  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  et  $\beta^{\mathbf{d}}$  et donc nécessairement des fonctions de  $\check{\Gamma}$  et  $\check{\varpi}$ . En outre,  $\check{\mathcal{K}}_*$  est un reste d'ordre  $\varepsilon^2$ .

Si l'on "oublie" la dépendance des coefficients  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  et  $\beta^{\mathbf{d}}$  aux variables  $\check{\Gamma}$  et  $\check{\varpi}$ , alors il suffit de poser

$$(5.18) \quad \begin{cases} \mathcal{Z}' = -\sqrt{\Gamma'} \frac{\beta^{(1,0)}}{2\alpha_1^{(2,0)}} \\ \mathcal{U}' = -\varepsilon \sqrt{\Gamma'} \frac{\beta_1^{(0,1)}}{2(\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o \alpha_0^{(0,3)})} \\ \phi' = -\varepsilon \sqrt{\Gamma'} \frac{\beta_1^{(1,1)}}{4(\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o)} \end{cases}$$

pour supprimer les termes linéaires et croisé dans le hamiltonien  $\hat{\mathcal{K}}$ . Ainsi, nous constatons que les translations nécessaires sont d'ordre  $\varepsilon \sqrt{\Gamma'}$  en  $\hat{u}$  et  $\sqrt{\Gamma'}$  en  $\zeta_1$  tandis que la rotation est d'ordre  $\varepsilon \sqrt{\Gamma'}$ .

Maintenant, si l'on considère la dépendance en  $\tilde{\Gamma}$  et  $\hat{\varpi}$ , le changement de variables associé aux équations (5.18) implique que

$$\tilde{\Gamma} = \check{\Gamma} - \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial \check{\varpi}} \check{\zeta}_1 + \frac{\partial \mathcal{Z}'}{\partial \check{\varpi}} \check{u} - \frac{\partial \phi'}{\partial \check{\varpi}} \check{\zeta}_1^2 \quad \text{et} \quad \hat{\varpi} = \check{\varpi} + \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial \check{\Gamma}} \check{\zeta}_1 - \frac{\partial \mathcal{Z}'}{\partial \check{\Gamma}} \check{u} + \frac{\partial \phi'}{\partial \check{\Gamma}} \check{\zeta}_1^2,$$

ce qui engendre nécessairement l'apparition de termes linéaires et croisé d'ordre  $\varepsilon \sqrt{\Gamma'}$ . Il est donc nécessaire de construire  $\tilde{\Psi}$  en considérant toutes les variables

en même temps. Pour cela, nous avons procédé par itérations successives afin de repousser les termes linéaires et croisé dans un reste d'ordre de plus en plus petit.

Tout d'abord, nous décomposons les coefficients  $\beta^{\mathbf{d}}$  en fonction de l'ordre en  $\sqrt{\Gamma'}$  tel que

$$\beta^{\mathbf{d}} = \sum_{l>0} \beta_l \sqrt{\Gamma'}^{l-1},$$

où

$$\beta_l^{\mathbf{d}} = - \sum_{\overline{\mathcal{T}}_{|\mathbf{d}|} \cap \{n'=l\}} \mathcal{A}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \sqrt{\Gamma'}^n e^{ik' \tilde{\omega}} - \sum_{\overline{\mathcal{D}} \cap \{n'=l\}} \mathcal{B}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, (0, k')} \sqrt{\Gamma'}^n e^{ik' \tilde{\omega}}.$$

De même, nous développons le hamiltonien  $\hat{\mathcal{K}}$  en fonction de l'ordre en  $\sqrt{\Gamma'}$  tel que

$$\hat{\mathcal{K}} = \hat{\mathcal{K}}_0 + \sum_{l>0} \hat{\mathcal{K}}_l,$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_0(\zeta_1, \hat{u}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) &= \alpha_0^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(2,0)} \zeta_1^2 + (\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o \alpha_0^{(0,3)}) \hat{u}^2 \\ &+ \mathcal{O}(\|(\zeta_1, \hat{u})\|^3) \end{aligned}$$

et pour tout  $l > 0$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_l(\zeta_1, \hat{u}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) &= \varepsilon \sqrt{\Gamma'}^l \left( \beta_l^{(0,0)} + \beta_l^{(1,0)} \zeta_1 + \beta_l^{(0,1)} \hat{u} + \beta_l^{(1,1)} \zeta_1 \hat{u} + \beta_l^{(2,0)} \zeta_1^2 + \beta_l^{(0,2)} \hat{u}^2 \right) \\ &+ \mathcal{O}(\|(\zeta_1, \hat{u})\|^3). \end{aligned}$$

$\check{\Psi}$  se ramène à une composition de transformations dédiées à la suppression des termes linéaires ainsi que du terme croisé à un ordre donné en  $\sqrt{\Gamma'}$ . Une transformation élémentaire  $\check{\Psi}_l$  associée à l'ordre  $\sqrt{\Gamma'}^l$  est proche de l'identité et donc définie par le transport du flot hamiltonien engendré par une fonction génératrice  $\mathcal{W}_l$ . Or pour supprimer les termes linéaires et croisé au degré  $\sqrt{\Gamma'}^l$ , nous avons nécessairement :

$$(5.19) \quad \mathcal{W}_l(\check{\zeta}_1, \check{u}, \check{\Gamma}, \check{\omega}) = \mathcal{U}'_l \check{\zeta}_1 - \mathcal{Z}'_l \check{u} + \phi'_l \check{\zeta}_1^2$$

où  $\mathcal{U}'_l$ ,  $\mathcal{Z}'_l$  et  $\phi'_l$  sont les translations et la rotation à effectuer. À chaque degré, nous devons résoudre l'équation suivante :

$$(5.20) \quad \{\mathcal{W}_l, \check{\mathcal{K}}_0\} = \Xi_l$$

avec  $\Xi_l$  uniquement constitué de termes linéaires et croisé en  $\check{\zeta}_1$  et  $\check{u}$ .

En posant

$$\Xi_l = \varepsilon \sqrt{\Gamma'}^l \left( \mathcal{Q}^{(1,0)} \check{\zeta}_1 + \mathcal{Q}^{(0,1)} \check{u} + \mathcal{Q}^{(1,1)} \check{\zeta}_1 \check{u} \right),$$

où  $\mathcal{Q}^{\mathbf{d}}$  sont des fonctions de  $\check{\Gamma}$  et  $\check{\omega}$ , nous déduisons que  $\mathcal{Z}'_l$ ,  $\mathcal{U}'_l$  et  $\phi'_l$  sont égaux à

$$(5.21) \quad \begin{cases} \mathcal{Z}'_l = -\frac{1}{2\alpha_1^{(2,0)}} \sqrt{\Gamma'}^l \mathcal{Q}^{(1,0)} \\ \mathcal{U}'_l = -\frac{\varepsilon}{2(\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o \alpha_0^{(0,3)})} \left( \sqrt{\Gamma'}^l \mathcal{Q}^{(0,1)} - \frac{\partial \alpha_1^{(0,0)}}{\partial \check{\Gamma}} \frac{\partial \mathcal{Z}'_l}{\partial \check{\omega}} \right) \\ \phi'_l = -\frac{\varepsilon}{4(\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o)} \left( \sqrt{\Gamma'}^l \mathcal{Q}^{(1,1)} - 2\alpha_1^{(2,1)} \mathcal{Z}'_l \right). \end{cases}$$

En itérant la procédure ordre par ordre, nous diminuons la taille des termes linéaires et croisés. Afin de stopper ce processus, nous définissons  $n'_{\max} \in \mathbb{N}_*$  tel que

$$(5.22) \quad \sqrt{\Gamma'}^{n'_{\max}+1} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

ce qui permet d'envoyer tous les termes d'ordre supérieur à  $n'_{\max}$  dans le reste  $\check{\mathcal{K}}_*$ . Par conséquent, la transformation  $\check{\Psi}$  est égale à

$$(5.23) \quad \check{\Psi} = \check{\Psi}_1 \circ \dots \circ \check{\Psi}_{n'_{\max}} = \exp L_{\mathcal{W}},$$

avec

$$\mathcal{W}(\check{\zeta}_1, \check{u}, \check{\Gamma}, \check{\varpi}) = \mathcal{U}'\check{\zeta}_1 - \mathcal{Z}'\check{u} + \phi'\check{\zeta}_1^2,$$

où

$$\mathcal{Z}' = \sum_{l=1}^{n'_{\max}} \mathcal{Z}'_l, \quad \mathcal{U}' = \sum_{l=1}^{n'_{\max}} \mathcal{U}'_l, \quad \phi' = \sum_{l=1}^{n'_{\max}} \phi'_l.$$

En pratique, nous avons construit le hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$  sous TRIP à partir de  $\check{H}'$  obtenu à l'ordre  $\mathfrak{D}$  en  $\|(\zeta_1, u)\|$ ,  $\mathfrak{N}$  en  $\sqrt{\check{\Gamma}}$  et  $\mathfrak{N}'$  en  $\sqrt{\Gamma'}$ . La transformation  $\check{\Psi}$  se réduit à processus itératif calculant  $\mathcal{Z}'_l$ ,  $\mathcal{U}'_l$  et  $\phi'_l$  à chaque ordre. Toutefois, mentionnons que pour qu'aucun terme ne manque dans le hamiltonien, il est nécessaire de poser  $\mathfrak{D} = n'_{\max} + 2$ .

**2.3.2. La variété invariante  $\mathcal{C}_{e'}$ .** Au premier en  $\varepsilon$ , la composition de la transformation  $\check{\Psi}$  avec  $\hat{\mathcal{K}}$  fournit le hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$  présenté dans l'équation (5.17). Celui-ci ne possède aucun terme linéaire et croisé en les variables  $\check{\zeta}_1$  et  $\check{u}$ . L'ensemble

$$\mathcal{C}_{e'} = \{\check{\zeta}_1 = \check{u} = 0\}$$

est donc une variété invariante par le flot du hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$ .

Pour  $e' = 0$ ,  $\mathcal{C}_{e'}$  coïncide avec la variété  $\mathcal{C}_0$ . De ce fait,  $\mathcal{C}_{e'}$  correspond à la variété associée à la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  qui persiste sous l'effet de la perturbation engendrée par l'excentricité de la planète. Le hamiltonien associé  $\mathcal{C}_{e'}$ ,

$$(5.24) \quad \check{\mathcal{K}}|_{\mathcal{C}_{e'}}(\check{\Gamma}, \check{\varpi}) = \check{\mathcal{K}}(0, 0, \check{\Gamma}, \check{\varpi}) = \alpha_0^{(0,0)} + \varepsilon\alpha_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}) + \varepsilon\sqrt{\Gamma'}\gamma^{(0,0)}(\check{\Gamma}, \check{\varpi}),$$

possède un degré de liberté et est intégrable. Les solutions appartenant à  $\mathcal{C}_{e'}$  sont périodiques de fréquence  $g$  associée à la précession de la longitude du périastre ou des points fixes. En outre,  $\check{\mathcal{K}}|_{\mathcal{C}_{e'}}$  permet une description complète de la dynamique par l'intermédiaire de portraits de phases dans les variables  $\check{\Gamma}$  et  $\check{\varpi}$  pour différentes valeurs de l'excentricité de la planète.

**2.3.3. Portraits de phases de  $\mathcal{C}_{e'}$ .** Pour obtenir les portraits de phase associés à  $\mathcal{C}_{e'}$ , nous avons effectué la transformation  $\check{\Psi}$  au premier ordre en excentricité de la planète (ce qui revient à poser  $n'_{\max} = 1$ ). Ainsi, au premier ordre en excentricité, nous avons

$$\check{\mathcal{K}}|_{\mathcal{C}_{e'}}(\check{\Gamma}, \check{\varpi}) = \check{\mathcal{K}}(0, 0, \check{\Gamma}, \check{\varpi}) = \alpha_0^{(0,0)} + \varepsilon\alpha_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}) + \varepsilon\sqrt{\Gamma'}\beta_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}, \check{\varpi})$$



et

$$(5.25) \quad \begin{cases} \mathcal{Z}' = -\frac{1}{2\alpha_1^{(2,0)}} \sqrt{\Gamma'} \beta_1^{(1,0)} \\ \mathcal{U}' = -\frac{\varepsilon}{2(\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon\alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o\alpha_0^{(0,3)})} \left( \sqrt{\Gamma'} \beta_1^{(0,1)} - \frac{\partial\alpha_1^{(0,0)}}{\partial\tilde{\Gamma}} \frac{\partial\mathcal{Z}'}{\partial\tilde{\omega}} \right) \\ \phi' = -\frac{\varepsilon}{4(\alpha_0^{(0,2)} + \varepsilon\alpha_1^{(0,2)} + 3\mathcal{U}^o)} \left( \sqrt{\Gamma'} \beta_1^{(1,1)} - 2\alpha_1^{(2,1)} \mathcal{Z}' \right). \end{cases}$$

Afin de vérifier la validité de notre approximation, nous avons évalué la quantité

$$\rho(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}) = \left| \frac{\tilde{\mathcal{K}}(0, 0, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}, ) - \hat{\mathcal{K}}(\tilde{\Gamma}, \hat{\omega}, \mathcal{Z}', \mathcal{U}')}{\hat{\mathcal{K}}(\tilde{\Gamma}, \hat{\omega}, \mathcal{Z}', \mathcal{U}')} \right| < \varepsilon^2$$

où  $\tilde{\Gamma}$  et  $\hat{\omega}$  sont déduits de la transformation  $\tilde{\Psi}$ .

Sur la figure 5.2, nous représentons les portraits de phase de  $\mathcal{C}_{e'}$  pour  $e' = 0$  (**a.**),  $e' = 0.001$  (**b.**),  $e' = 0.01$  (**c.**) et  $e' = 0.05$  (**d.**) dans le cas d'un système de type "Soleil-Jupiter" ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ).

La figure 5.2**a.** est associée à la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Le portrait de phase est composé d'une famille de points fixes dégénérés (croix vertes) qui correspondent aux "cercles de points fixes"  $G_{QS}$ , et deux domaines de trajectoires dont la longitude du périastre circule : l'un dans le sens indirect pour des excentricités faibles et moyennes, l'autre dans le sens direct pour de très hautes excentricités.

Pour  $e' > 0$ , la topologie du portrait de phase évolue. En effet, bien que le cercle de points fixes soit détruit par l'effet de l'excentricité de la planète, deux points fixes persistent : un stable (croix bleu) pour  $\tilde{\omega} = 180^\circ$ , l'autre instable (croix rouge) pour  $\tilde{\omega} = 0$ . Plus précisément, ce sont respectivement des points fixes des familles  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $G_{QS,2}^{e'}$  que nous avons étudiées dans la section 3 du chapitre 1. Le point fixe instable engendre une séparatrice (courbe grise) qui décompose le portrait de phase en trois domaines : un domaine où les trajectoires librent autour du point fixe stable et deux domaines où  $\tilde{\omega}$  circule, l'un dans le sens indirect pour des excentricités faibles et moyennes, l'autre pour de très hautes excentricités. En outre, nous remarquons que dans ces deux domaines  $\tilde{\Gamma}$  n'a pas le même comportement. En effet, pour des trajectoires moyennement excentriques,  $\tilde{\Gamma}$  atteint son maximum en  $\tilde{\omega} = 180^\circ$  et son minimum en  $\tilde{\omega} = 0$ . Dans le domaine à très haute excentricité, la situation est inversée.

En augmentant  $e'$  jusqu'à  $e' = 0.05$ , la topologie ne change pas. Toutefois la taille du domaine de libration augmente ainsi que les variations de  $\tilde{\Gamma}$  dans les domaines où  $\tilde{\omega}$  circule. Mentionnons que dans les variables  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\omega}$ , les variations de  $\tilde{\Gamma}$  sont très faibles en dehors du domaine de libration. Par conséquent, ce sont des variables très intéressantes dans le cadre d'un éventuel modèle de trajectoires quasi-satellites dans le problème plan-excentrique.

Afin de simplifier l'interprétation des portraits de phase, nous fournissons une représentation dans les éléments orbitaux  $(e_0, \varpi)$ . De même, la figure 5.4 représente la projection des trajectoires de  $\mathcal{C}_{e'}$  dans le plan  $(\zeta_1, u)$ . La variable  $e_{0\pi}$  correspond

à la valeur de  $e_0$  lorsque  $\check{\omega} = 180^\circ$  dans les portraits de phase de la figure 5.3. Ces projections des trajectoires de  $\mathcal{C}_{e'}$  constituent les orbites des “centres de libration” que décrivent Nesvorný *et al.* (2002) dans l’espace des phases du cas excentrique-plan. Ces centres de libration évoluent comme :

$$(5.26) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \mathcal{Z}'(\check{\Gamma}(t), \check{\omega}(t)) \\ u = \mathcal{U}^o(\check{\Gamma}(t)) + \mathcal{U}'(\check{\Gamma}(t), \check{\omega}(t)) \end{cases}$$

Ce sont donc des orbites périodiques de fréquences  $g$  qui oscillent autour de la position  $(\zeta_1, u) = (0, \mathcal{U}^o)$ .

Par le système (5.25), nous déduisons que l’amplitude de ces oscillations sont de taille  $\varepsilon e'$  et  $e'$  respectivement dans la direction  $u$  et  $\zeta_1$ . La figure 5.4 confirme que l’amplitude en  $\zeta_1$  augmente linéairement avec l’excentricité de la planète. Nous constatons également que plus l’excentricité de la particule est élevée, plus l’amplitude de l’oscillation en  $\zeta_1$  est importante.

À partir d’intégrations numériques des trajectoires sur  $\mathcal{C}_{e'}$  ainsi que d’une application de Poincaré associée à la section  $\{\check{\omega} = 0\}$ , nous calculons la fréquence  $g$ . Ensuite, à l’aide de la matrice de monodromie du système différentiel linéaire dans les directions  $\zeta_1$  et  $u$ , nous avons caractérisé la stabilité de  $\mathcal{C}_{e'}$  dans la direction transverse à la variété. Pour plus de précisions sur la méthode, nous renvoyons le lecteur à la section 3.2.3 du chapitre 6.

Dans le cas excentrique-plan, les variétés invariantes sont stables dans la direction transverse. Chaque solution de  $\mathcal{C}_{e'}$  est donc caractérisée par la fréquence  $g$  ainsi que la fréquence de libration  $\nu$ . Sur la figure 5.5, nous présentons l’évolution de ces fréquences le long de la variété pour  $0.15 \leq e_{0\pi} \leq 0.9$ . Les courbes rouge, jaune et verte sont associées respectivement à  $e' = 0$ ,  $e' = 0.01$  et  $e' = 0.05$ . Nous constatons que l’évolution des fréquences  $g$  et  $\nu$  est très similaire de celles de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  (voir la description de la section 2.4). Toutefois, elle semble se décaler en fonction de l’excentricité de la planète. En particulier l’excentricité limite pour que les trajectoires se trouvent en dehors de la zone d’exclusion (flèche en trait interrompu) est de plus en plus faible lorsque l’on augmente l’excentricité de la planète. Enfin, nous observons le passage de la séparatrice (flèches en trait continu) qui indique le domaine de libration de la variété.

**2.3.4. Étude des points fixes.** Pour terminer cette section, nous présentons quelques résultats analytiques.

Le développement analytique de  $\check{\mathcal{K}}$ , permet d’estimer la position des points fixes  $G_{QS,1}^{e'}$  et  $G_{QS,2}^{e'}$ . Nous savons qu’en  $G_{QS}$ , la fréquence  $g$  est nulle. Il existe donc une valeur  $\check{\Gamma}^o$  telle que :

$$(5.27) \quad \frac{\partial \alpha_1^{(0,0)}}{\partial \check{\Gamma}}(\check{\Gamma}^o) = 0.$$

En développant le hamiltonien au voisinage de  $(\check{\Gamma}^o, \check{\omega}')$ , avec  $\check{\omega}'$  que l'on ne définit pas pour le moment, nous obtenons l'expression

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{K}}(\check{\Gamma}, \check{\omega}) &= \alpha_0^{(0,0)} + \varepsilon \alpha_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}^o) + \varepsilon \sqrt{\Gamma'} \beta_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}^o, \check{\omega}') \\ &+ \varepsilon \sqrt{\Gamma'} \left( \frac{\partial \beta_1^{(0,0)}}{\partial \check{\Gamma}}(\check{\Gamma}^o, \check{\omega}')(\check{\Gamma} - \check{\Gamma}^o) + \frac{\partial \beta_1^{(0,0)}}{\partial \check{\omega}}(\check{\Gamma}^o, \check{\omega}')(\check{\omega} - \check{\omega}') \right) \\ &+ \mathcal{O}(\|\check{\Gamma} - \check{\Gamma}^o, \check{\omega} - \check{\omega}'\|^2) \end{aligned}$$

qui possède des termes linéaires d'ordre  $\varepsilon \sqrt{\Gamma'}$  associé au coefficient  $\beta_1^{(0,0)}$ .

Par les relations de d'Alembert et la parité de la fonction

$$\varpi \mapsto \beta_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}, \check{\omega}),$$

le coefficient  $\beta_1^{(0,0)}$  s'écrit nécessairement :

$$\beta_1^{(0,0)}(\check{\Gamma}, \check{\omega}) = f(\check{\Gamma}) \cos \check{\omega}$$

où  $f$  est une fonction de  $\check{\Gamma}$ . Par conséquent, pour  $\check{\omega}' = 0$  et  $\check{\omega}' = \pi$ , le terme linéaire en  $(\check{\omega} - \check{\omega}')$  est supprimé et la position du point fixe est obtenue par une simple translation :

$$(5.28) \quad \begin{cases} \check{\Gamma}' = \check{\Gamma}^o - \sqrt{\Gamma'} \frac{\partial \beta_1^{(0,0)}}{\partial \check{\Gamma}}(\check{\Gamma}^o, \check{\omega}') \left( 2 \frac{\partial^2 \alpha_1^{(0,0)}}{\partial \check{\Gamma}^2}(\check{\Gamma}^o) \right)^{-1} \\ \check{\omega} = 0 + k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ceci permet d'établir que  $G_{QS}$  engendre uniquement deux familles de points fixes, l'une en  $\check{\omega} = \pi$ , l'autre en  $\check{\omega} = 0$ . En outre, celle-ci se décale linéairement en excentricité comme  $e'$ . La partie quadratique du hamiltonien au point fixe stable permet de montrer que la fréquence de libration au voisinage du point fixe stable est de taille  $\varepsilon e'$ . Enfin par la résolution de l'équation suivante

$$\check{\mathcal{K}}(\check{\Gamma}, 0) = \check{\mathcal{K}}(\check{\Gamma}, \pi)$$

nous établissons que la taille du domaine de libration augmente comme  $\sqrt{e'}$ .

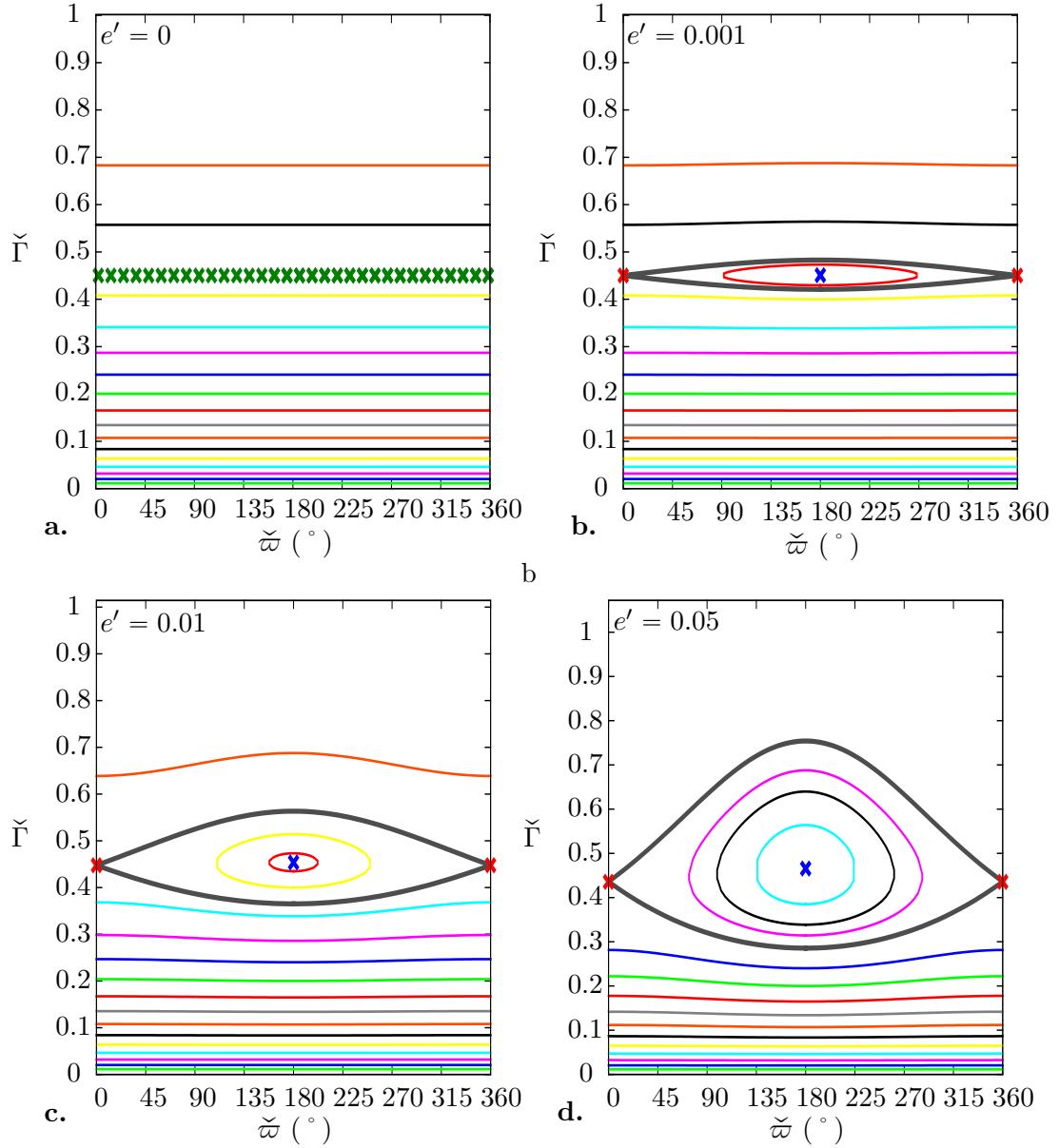


FIGURE 5.2. Portraits de phase de la variété invariante  $\mathcal{C}_{e'}$  pour  $e' = 0$  (a.),  $e' = 0.001$  (b.),  $e' = 0.01$  (c.) et  $e' = 0.05$  (d.) dans les variables  $\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\omega}$ . Ils ont été obtenus pour une transformation  $\tilde{\Psi}$  réalisée au premier ordre en excentricité. Lorsque  $e' = 0$ , la variété invariante est décomposée en deux domaines de trajectoires où  $\tilde{\omega}$  précède, séparés par le cercle de points fixes (croix vertes) associé à l'orbite  $G_{QS}$ . Pour  $e' > 0$ , le cercle de points fixes est détruit mais deux points fixes subsistent : un stable, appartenant à  $G_{QS,1}^{e'}$  (croix bleu), l'autre instable, appartenant à  $G_{QS,2}^{e'}$ . En outre, la variété est constituée de trois domaines : deux à faible et haute excentricité où  $\tilde{\omega}$  circule et un autre à l'intérieur de la séparatrice (courbe grise) où les trajectoires librent autour du point fixe stable. En augmentant l'excentricité de la planète, la topologie ne change pas. Cependant, le domaine de libration s'élargit et les variations sur  $\tilde{\Gamma}$  sont plus importantes.

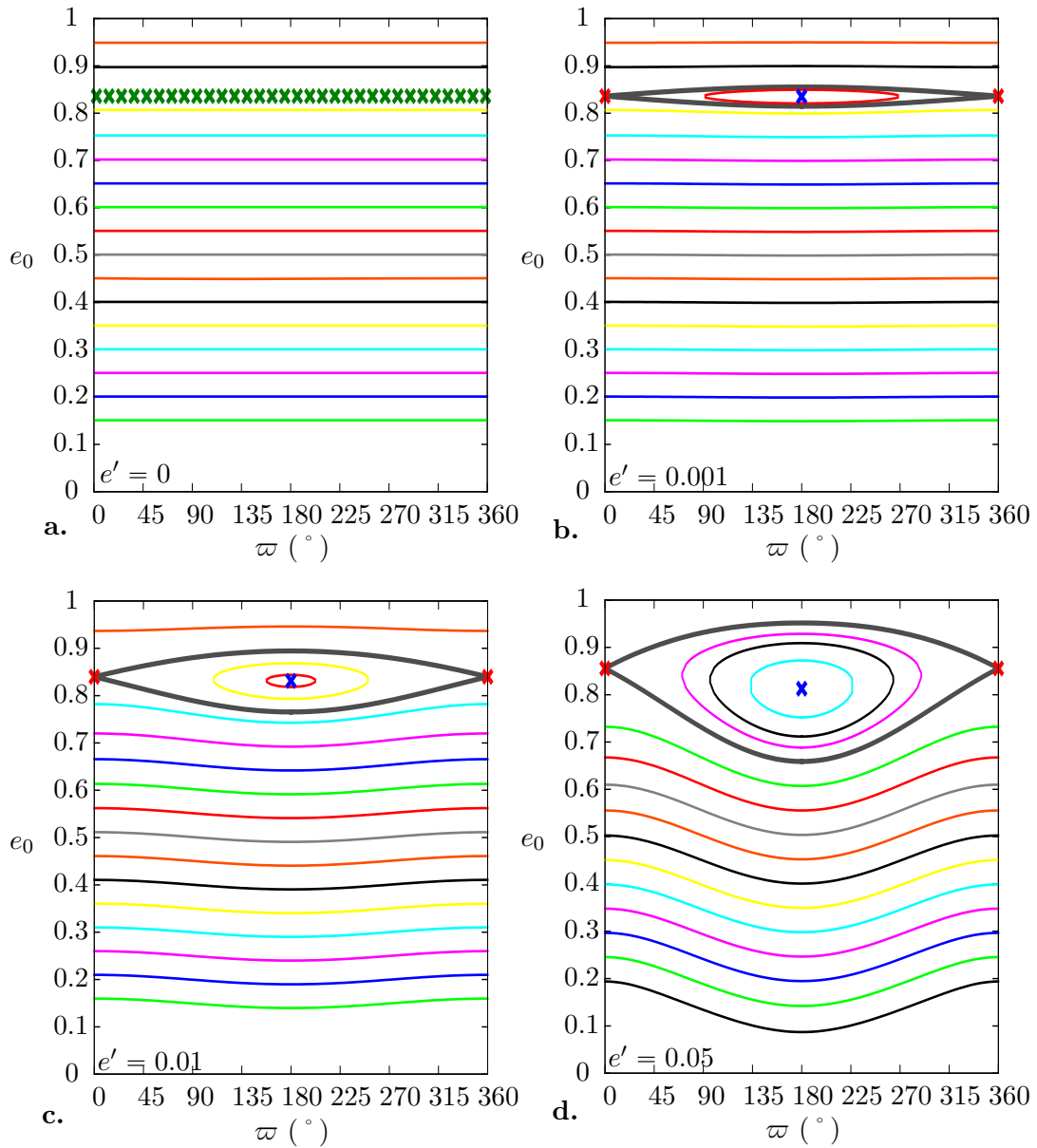


FIGURE 5.3. Projection des trajectoires de la figure 5.2 dans le plan  $(\varpi, e_0)$ . La topologie est identique à celle décrite dans la figure précédente.

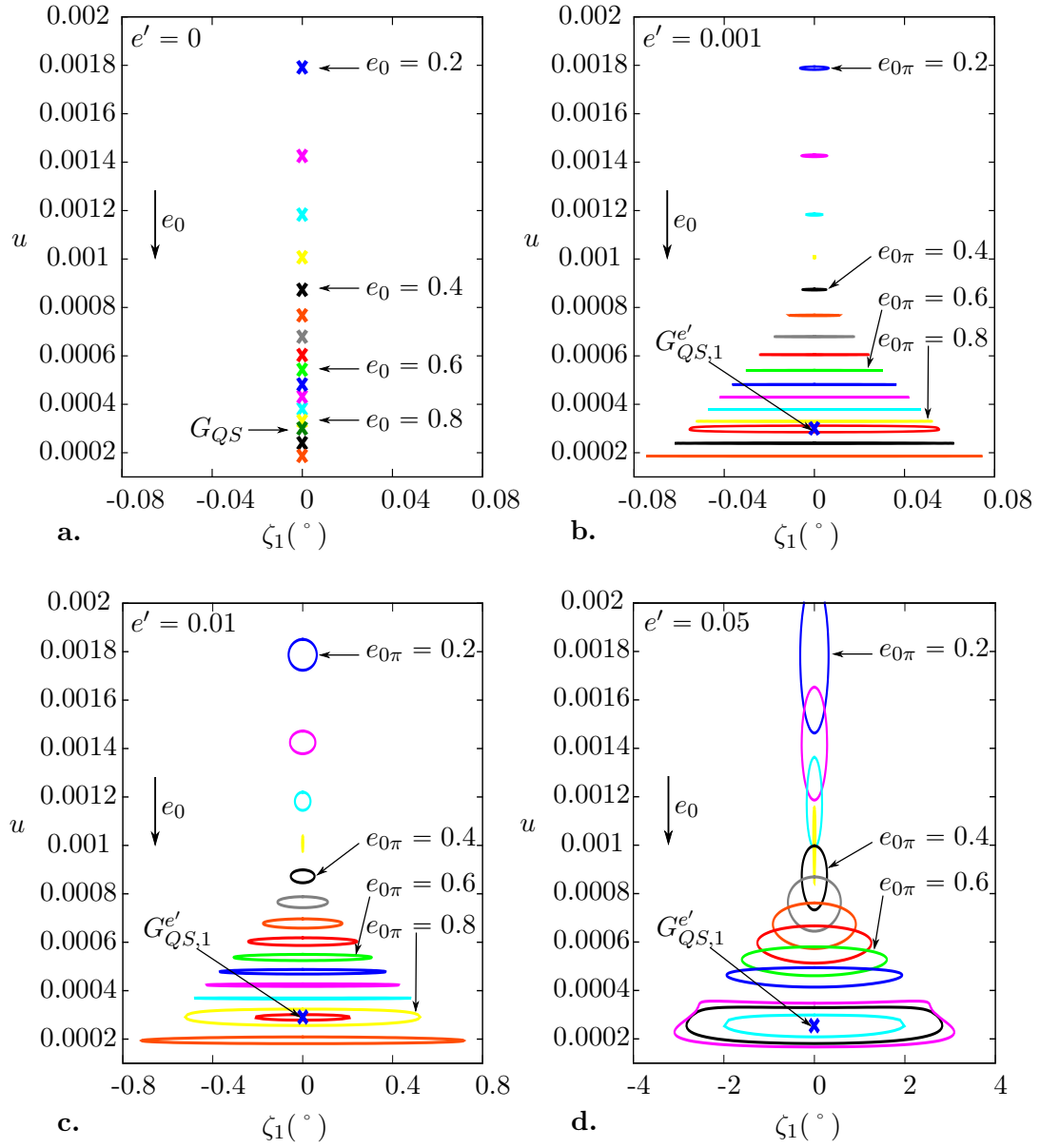


FIGURE 5.4. Projection des trajectoires de la figure 5.2 dans le plan  $(\zeta_1, u)$ . Ce sont les trajectoires des “centres de libration” des orbites périodiques appartenant à la variété  $\mathcal{C}_{e'}$ . En particulier, l’amplitude de l’oscillation en  $\zeta_1$  augmente linéairement avec l’excentricité de la planète.

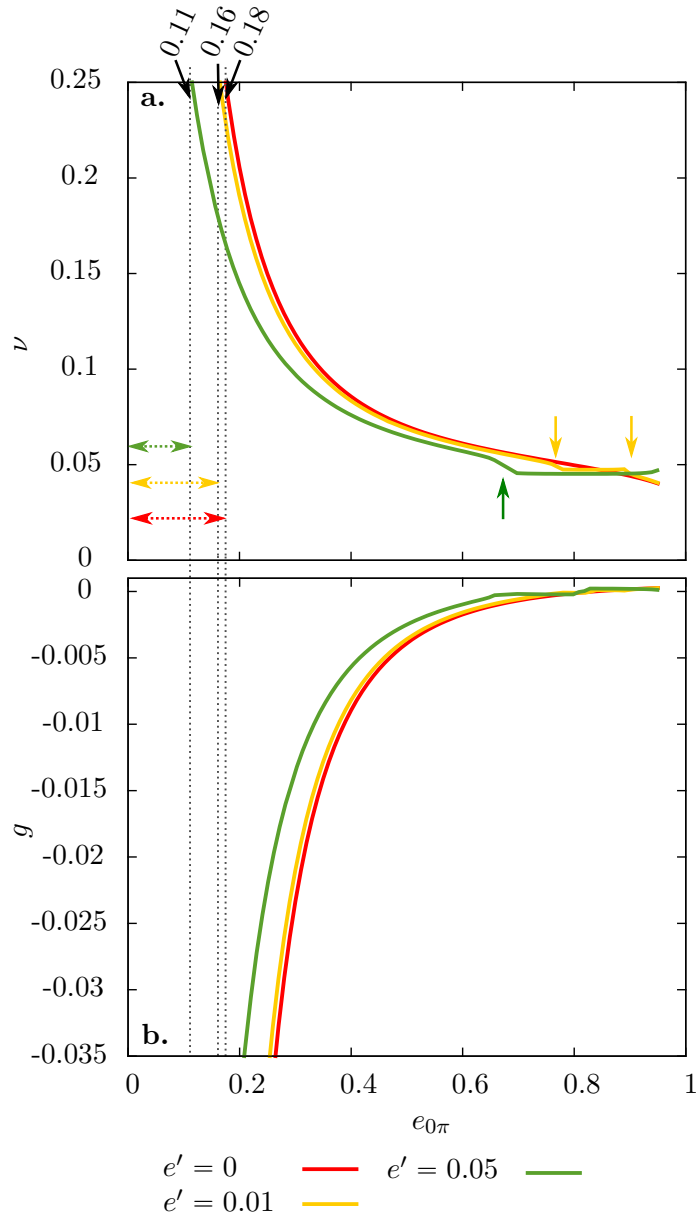


FIGURE 5.5. Fréquences des orbites en fonction de la valeur de  $e_0$  lorsque  $\varpi = \pi$ . Les flèches en trait continu sont associées aux passages de la séparatrice pour entrer dans le domaine de libration. Les flèches en trait interrompu indiquent la zone d'exclusion.

### 3. Une étude du cas circulaire-spatial

**3.1. Le hamiltonien moyen.** Dans les variables action-angle  $(\Gamma, \varpi)$ , introduites par la transformation  $\Psi$  définie dans l'équation (3.5), le hamiltonien moyen du cas circulaire-spatial est égal à

$$(5.29) \quad \overline{H}^s = H_K - u + \overline{H}_P^s,$$

où  $\overline{H}_P^s(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, y, \tilde{y})$  avec  $e' = 0$ .

Nous rappelons les notations suivantes :

$$Z = (1 + u)\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos I), \quad y = \sqrt{Z} \exp(i\Omega) \quad \text{et} \quad \tilde{y} = -i\bar{y}.$$

Également,  $\overline{H}^s$  est relié au hamiltonien du cas circulaire-plan tel que :

$$(5.30) \quad \overline{H}^s = \overline{H}^o + R^s,$$

où  $R^s = \overline{H}_P^s - \overline{H}_P^o = \mathcal{O}(\varepsilon I)$ .

Lorsque l'inclinaison est nulle ( $I = 0$ ), le hamiltonien moyen du cas circulaire-spatial est égal à  $\overline{H}^o$  ; il possède 2 degrés de liberté et peut être réduit par l'intermédiaire du problème moyen réduit.

Lorsque  $I > 0$ , le hamiltonien moyen du cas circulaire-spatial possède 3 degrés de liberté.

En outre, et de façon identique au cas circulaire-plan, le problème moyen est invariant par l'action du groupe de symétrie  $SO(2)$  associé aux rotations autour de l'axe vertical. Dans la série de Taylor associée à  $\overline{H}^s$  au voisinage des configurations quasi-circulaires et co-planaires,

$$\sum_{\overline{\mathcal{D}}} f_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{(k, -k)}(u) x^p \tilde{x}^{\tilde{p}} y^q \tilde{y}^{\tilde{q}} e^{ik\zeta_1},$$

où  $f_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^k$  est une fonction de  $u$  à valeurs complexes,  $\mathbf{p} = (p, \tilde{p}) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{q} = (q, \tilde{q}) \in \mathbb{N}^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et les règles de d'Alembert sont égales à

$$(5.31) \quad \overline{\mathcal{D}} := \left\{ \begin{array}{l} (k, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^6 \text{ tels que } q - \tilde{q} = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{et } p - \tilde{q} - (\tilde{p} - q) = 0 \end{array} \right\},$$

et mettent en évidence que le hamiltonien  $\overline{H}^s$  est pair en inclinaison et dépend uniquement des angles  $\zeta_1$  et  $\varpi - \Omega =: \omega$ , (où  $\omega$  est l'argument du périastre). De ce fait, cela impose à la quantité

$$(5.32) \quad K := \Gamma + Z = (1 + u)(1 - \sqrt{1 - e^2} \cos I)$$

d'être une intégrale première.

De manière équivalente, en introduisant la transformation

$$(5.33) \quad \mathcal{T}^s : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ (\zeta_1, u, P_1, \gamma_1, P_2, \gamma_2) & \longmapsto & (\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \tilde{y}, y) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \eta & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta + \kappa} \begin{pmatrix} \kappa & -\eta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma \\ Z \end{pmatrix}$$



où

$$\gamma_1 = \varpi - \Omega = \omega$$

et  $\eta$ ,  $\kappa$ , deux réels que nous ne précisons pas pour le moment, alors le hamiltonien  $\overline{\mathcal{H}}$ , tel que

$$(5.34) \quad \overline{\mathcal{H}} = \overline{H}^s \circ \mathcal{T}^s,$$

est indépendant de  $\gamma_2$  tandis que

$$P_2 = (\eta + \kappa)^{-1}(\Gamma + Z) = (\eta + \kappa)^{-1}K$$

est une intégrale première. De ce fait, en considérant  $P_2$  comme un paramètre à valeur fixée et en éliminant la variable  $\gamma_2$ , nous obtenons un problème réduit à deux degrés de liberté : c'est le problème moyen réduit dans le cas circulaire-spatial où  $\overline{\mathcal{H}}_{P_2}(\zeta_1, u, \gamma_1, P_1)$  est le hamiltonien réduit.

Dans ces variables et à  $P_2$  fixé, nous avons :

$$\overline{\mathcal{H}}_{P_2}(\zeta_1, u, \gamma_1, P_1) = \overline{H}^o(\zeta_1, u, P_2) + \mathcal{R}(\zeta_1, u, \gamma_1, P_1, P_2)$$

où

$$\mathcal{R} = \overline{H}_P^o \circ \mathcal{T}^s - \overline{H}^o + R^s \circ \mathcal{T}^s.$$

En focalisant notre étude sur le voisinage des trajectoires co-planaires, nous posons  $\eta = 1$  et  $\kappa = 0$  ce qui implique :

$$P_2 = K, \quad P_1 = Z \quad \text{et} \quad \gamma_2 = -\varpi.$$

Ainsi, en considérant l'inclinaison  $I$  suffisamment petite, alors la variable  $Z$  est négligeable devant 1 et  $\mathcal{T}^s$  est une transformation proche de l'identité et qui en diffère à l'ordre 1 en  $Z$ . Par conséquent, nous avons

$$\mathcal{R} = \mathcal{O}(\varepsilon Z),$$

ce qui signifie que l'étude du cas circulaire-spatial se ramène à une étude de perturbation du cas circulaire-plan par l'effet de l'inclinaison de l'orbite de la particule. En outre, comme  $\overline{\mathcal{H}}_{P_2}$  possède 2 degrés de liberté et un paramètre, la situation est équivalente à celle du problème excentrique-plan. Toutefois, une différence subsiste : le paramètre  $P_2$  n'est pas le "petit paramètre" de la méthode de perturbation. C'est la variable  $Z$  qui joue ce rôle. De ce fait, en supposant qu'il soit possible d'obtenir un développement en série de Laurent du hamiltonien moyen, nous pouvons procéder à étude des quasi-satellites similaire à celle que nous avons menée dans le cas excentrique-plan.

Dans ce chapitre, cette étude n'a pas été menée. Cela fait partie des perspectives issues de ce travail. Dans la section suivante, nous esquisserons l'idée de la méthode appliquée au cas circulaire-spatial et indiqueront quelques résultats potentiels.

Avant cela, mentionnons que nous aurions pu également poser  $\eta = 0$  et  $\kappa = 1$  dans la transformation  $\mathcal{T}^s$ . Cela aurait permis de conserver la variable  $\Gamma$  et faire disparaître  $Z$ . C'est ce que font Nesvorný *et al.* (2002) dans leur étude. Dans le cadre de notre méthode de perturbation, cette transformation permet d'accéder à toutes les valeurs

d'inclinaison mais contraint à considérer  $\Gamma$  comme négligeable devant 1, ce qui limite l'étude aux voisinages des trajectoires quasi-circulaires. Or, en rappelant que les configurations quasi-satellites sont des orbites nécessairement excentriques, il est fortement probable que cette méthode de perturbation ne permette pas de dépasser la zone d'exclusion du problème moyen. Cela reste cependant une piste.

**3.2. Idée de l'étude du domaine des quasi-satellites.** Pour reproduire l'étude réalisée dans le cas excentrique-plan, il est nécessaire d'obtenir un développement de  $\overline{\mathcal{H}}$  en une série de Laurent. Or comme la collision mutuelle en  $\zeta_1 = u = 0$  se produit lorsque l'excentricité de la planète est nulle pour toute valeur d'inclinaison alors nous avons,

$$(5.35) \quad \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|_{\{\zeta_1=u=K=0\}} = 0,$$

ce qui signifie qu'il n'est pas nécessaire d'introduire de nouvelles variables pour adapter le développement au voisinage de la collision. Par un raisonnement identique à celui conduit<sup>2</sup> dans le cas excentrique-plan, le développement du hamiltonien moyen en une série de Laurent au voisinage de  $\zeta_1 = u = K = 0$  ne semble pas poser de difficultés. Toutefois, il est nécessaire de vérifier l'étendue du domaine de convergence de la série en terme d'inclinaison.

L'étude des trajectoires quasi-satellites consiste en un développement du hamiltonien réduit en une série de Taylor au voisinage de  $\zeta_1 = u = 0$ . En utilisant des variables complexes

$$\xi = \sqrt{Z} \exp(i\omega) \quad \text{et} \quad \tilde{\xi} = -i\tilde{x},$$

afin d'éviter tout problème de singularité dans les variables lorsque l'inclinaison est nulle, le hamiltonien réduit,  $\overline{\mathcal{H}}_K$  pour  $K$  arbitrairement fixé, s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_K &= \alpha_0^{(0,0)} + \alpha_0^{(0,2)} u^2 \\ &+ \varepsilon \left( \alpha_1^{(0,0)} + \alpha_1^{(0,1)} u + \alpha_1^{(2,0)} \zeta_1^2 + \alpha_1^{(0,2)} u^2 \right) \\ &+ \varepsilon \sqrt{\Gamma'} \left( \Theta^{(0,0)} + \Theta^{(1,0)} \zeta_1 + \Theta^{(0,1)} u + \Theta^{(1,1)} \zeta_1 u + \Theta^{(2,0)} \zeta_1^2 + \Theta^{(0,2)} u^2 \right) \\ &+ \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|^3) \end{aligned}$$

où les coefficients  $\alpha_0^{\mathbf{d}}$  et  $\alpha_1^{\mathbf{d}}$  sont issus respectivement de la partie keplerienne et de la partie perturbatrice du hamiltonien moyen dans le cas circulaire-plan tandis que les coefficients  $\Theta^{\mathbf{d}}$  proviennent de la perturbation engendrée par l'inclinaison de l'orbite. En outre ce sont des fonctions de  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  et du paramètre  $K$  telles que

$$\Theta^{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \xi & \tilde{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{\mathbf{d},(1,1)} & \theta^{\mathbf{d},(1,2)} \\ \theta^{\mathbf{d},(2,1)} & \theta^{\mathbf{d},(2,2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|(\xi, \tilde{\xi})\|^4),$$

où les coefficients  $\theta^{\mathbf{d},\mathbf{p}}$  sont des fonctions de  $K$  issues de la série de Laurent du hamiltonien moyen au voisinage de la collision.

En rappelant que  $Z = 0$  implique  $K = \Gamma$  alors lorsque  $I = 0$ , une translation suffit pour mettre en évidence la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Nous pourrions déterminer

2. voir la section 1 de l'annexe A.

la stabilité dans la direction transverse à la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  à partir de la matrice  $\Theta^{(0,0)}$ . En particulier, nous nous attendons à trouver que  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  est stable dans cette direction et donc à déduire la fréquence  $s$  associée à la précession du nœud ascendant.

Lorsque  $I > 0$ , il est nécessaire de procéder par des translations successives à chaque ordre en inclinaison afin d'envoyer les termes  $\Theta^{(1,0)}$  et  $\Theta^{(0,1)}$  dans un reste de taille  $\varepsilon^2$ . En appliquant cette méthode, nous devrions obtenir un hamiltonien de la forme

$$G^{(0,0)} + G^{(2,0)}(\check{\zeta}_1)^2 + G^{(0,2)}\check{u}^2 + \mathcal{O}(\|(\zeta_1, u)\|^3)$$

où les coefficients  $G^d$  dépendent de  $\xi$ ,  $\check{\xi}$  et  $K$ . De ce fait, pour  $K$  arbitrairement fixé, l'ensemble

$$\mathcal{C}_K = \{\check{\zeta}_1 = \check{u} = 0\}$$

est une variété invariante par le flot du hamiltonien réduit, de dimension 2 et dont le hamiltonien associé,  $G^{(0,0)}$ , est intégrable. Cette variété invariante décrit des solutions périodiques de fréquences  $g - s$ , où  $s$  est la fréquence de précession de la longitude du nœud ascendant. Dans le problème moyen, ce sont des orbites quasi-périodiques de fréquences  $g - s$  et  $g$ . En outre, elles constituent le voisinage de l'orbite de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  telle que

$$e_0 = \sqrt{1 - (1 - K)^2}.$$

Enfin, par une étude de stabilité dans la direction transverse, associée aux variables  $\zeta_1$  et  $u$ , nous pourrions caractériser la fréquence  $\nu$  s'il y a effectivement stabilité.

L'étude que nous proposons et qui semble réalisable d'après les méthodes exposées dans les études précédentes, nous permettrait d'explorer le domaine des quasi-satellites dans le cas circulaire-spatial au voisinage de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . En particulier, nous espérons mettre en évidence les transitions qui ont lieu entre quasi-satellites, tapoles ou fers-à-cheval (Namouni, 1999) comme un changement de stabilité dans la direction associée aux variables  $\zeta_1$  et  $u$ . C'est donc une perspective de travail très intéressante.



## Conclusion

Dans cette seconde partie, nous avons mis en évidence une méthode analytique adaptée aux trajectoires du domaine des quasi-satellites. Plus précisément, cette méthode s'appuie sur un développement du hamiltonien moyen en une série de Laurent qui converge dans une vaste région de la dynamique des quasi-satellites.

Dans le cas circulaire-plan, nous avons retrouvé les résultats sur les fréquences de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  qui sont présentés dans la section 2.4 du chapitre 1. En particulier, cela nous a permis de constater que la méthode est très satisfaisante même pour de très hautes valeurs d'excentricités. C'est donc un résultat très encourageant dans l'optique de l'exploration du domaine ou d'un développement de modèles de trajectoires quasi-satellites.

À l'aide d'un processus de normalisation, nous avons exploré le voisinage de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Nous avons constaté en particulier que les fréquences s'éloignent peu de celles de  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . La famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  constitue donc la "colonne vertébrale" du domaine des quasi-satellites, fournissant l'essentiel des informations sur la dynamique.

En dressant une carte des structures de résonances, nous avons mis en évidence une accumulation de résonances d'ordre faible pour des valeurs faibles et moyennes d'excentricité ( $e < 0.4$  dans un système de type "Soleil-Jupiter"). Cela indique très probablement une augmentation de l'instabilité par des recouvrements de résonance. Un prolongement naturel de ce résultat consiste en une investigation numérique de ces structures comme cela a été mené dans le cadre des trajectoires de type "tadpoles" (Robutel et Gabern, 2006). Toutefois, un travail analytique préliminaire dans le cas spatial pourrait être réalisé afin de mettre en évidence la fréquence de précession de la longitude du nœud de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ .

Le cas excentrique-plan ne permet pas une exploration du domaine des quasi-satellites par un processus de normalisation. Cependant, en ramenant l'étude à un problème de perturbation du cas circulaire-plan, nous avons mis en évidence la persistance de la variété associée à la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  sous l'effet de la perturbation engendrée par la planète. En particulier, nous avons établi que le "cercle de points fixes" associé à l'orbite  $G_{QS}$  est détruit par la perturbation mais que deux points fixes persistent : un stable et un instable appartenant respectivement aux familles  $G_{QS,1}'$  et  $G_{QS,2}'$ . En outre, une séparatrice émerge de  $G_{QS,2}'$  et divise la variété en trois domaines : deux domaines où la longitude du périastre circule, à faibles et très hautes excentricités respectivement, et un domaine de trajectoires qui librent autour de la famille  $G_{QS,1}'$ .

Enfin, dans le cas spatial-circulaire, nous avons présenté l'idée d'une étude qui peut être menée à l'aide de la méthode analytique. Plus précisément, nous voulons explorer les variétés invariantes qui structurent le voisinage des orbites de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ . Nous espérons mettre en évidence les transitions entre quasi-satellites, tadpoles et fers-à-cheval qui apparaissent dans le cas spatial (Namouni, 1999), comme un changement de stabilité dans la direction transverse à la variété invariante.

Troisième partie

Étude analytique de la résonance  
co-orbitale dans le problème planétaire





## Avant-propos

Comme nous avons pu constater dans les deux parties précédentes, la résonance co-orbitale a été intensivement étudiée dans le cadre du problème restreint des trois corps, que ce soit dans le repère tournant ou avec des méthodes de perturbations comme le problème moyen. Avec la découverte des astéroïdes “troyens” qui accompagnent Jupiter (Wolf, 1906), les travaux analytiques se sont portés sur les trajectoires de type “tadpoles” tandis que l’intérêt dans les configurations en fer-à-cheval est resté essentiellement théorique jusqu’à la découverte des satellites de Saturne, Janus et Epiméthée (Synnott *et al.*, 1981; Smith *et al.*, 1980). En particulier, des propriétés générales sur ces deux types de dynamique ont été énoncées par Dermott et Murray (1981) dans le cas circulaire. Cependant, devant la difficulté à obtenir des expressions explicites pour les configurations en fer-à-cheval, les études menées se sont alors orientées vers des explorations numériques.

Nous rappelons par exemple les travaux de Namouni *et al.* (1999) et Christou (2000) qui ont montré l’existence de transitions entre les domaines des tadpoles et des fers-à-cheval par l’intermédiaire des configurations de type “quasi-satellite”. Enfin, en développant une méthode numérique de moyennisation, Nesvorný *et al.* (2002) ont effectué une étude globale de l’espace des phases de la résonance co-orbitale et exposé ses différentes structures en fonction des excentricités et de l’inclinaison du troisième corps.

C’est avec une méthode numérique équivalente que Giuppone *et al.* (2010) ont étudié les régions de stabilité associées au problème de deux planètes dont les orbites sont co-planaires et en résonance co-orbitale. En particulier, ils ont mis en évidence une famille à un paramètre associée aux configurations quasi-satellites ainsi que deux autres qu’ils ont dénommées anti-Lagrange  $AL_4$  et  $AL_5$ . Ces configurations remarquables forment des familles de points fixes dans le problème moyen réduit dont les deux dernières semblent émerger des configurations équilatérales de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$ . Ainsi, c’est dans le but de retrouver ces configurations remarquables que nous avons développé une méthode analytique adaptée au problème planétaire en résonance co-orbitale.

Dans cette partie, nous présenterons les résultats de l’article Robutel et Pousse (2013). Après une présentation du formalisme hamiltonien associé au problème planétaire plan ainsi que sa réduction par un processus de moyennisation, nous verrons qu’il existe une variété invariante représentant les configurations quasi-circulaires et dont le hamiltonien associé est intégrable. De ce fait, nous caractériserons

leur dynamique (portrait de phases, points fixes, fréquences) ainsi que leur voisinage (stabilité de la variété invariante dans les directions transverses, familles de Lyapounov). En outre, nous mettrons en évidence les configurations anti-Lagrange ainsi que la famille instable de Hadjidemetriou *et al.* (2009). En particulier, nous établirons que ces familles émergent respectivement des configurations équilatérales de Lagrange et de la configuration alignée de Euler  $L_3$ . Enfin par la construction d'une forme normale, nous explorerons ces deux familles en fonction des valeurs d'excentricités.

Dans le problème planétaire et pour la même raison que dans le problème restreint, il n'est pas possible d'accéder aux configurations quasi-satellites à partir du développement analytique dédié aux configurations quasi-circulaires. Toutefois, une adaptation de la méthode de développement en série de Laurent semble réalisable (chapitre 3). De ce fait, dans le chapitre 7, nous esquisserons l'idée d'une étude de la famille de points fixes quasi-satellites de Giuppone *et al.* (2010).

## Les configurations quasi-circulaires

### 1. La résonance co-orbitale dans le problème moyen

#### 1.1. Le formalisme hamiltonien du problème planétaire co-planétaire.

Nous considérons deux corps de masses  $\tilde{m}_1$  et  $\tilde{m}_2$  orbitant dans un plan autour d'un corps central de masse  $m_0$  dominante par rapport aux deux autres. Comme dans le chapitre 1, nous supposons ces corps uniquement soumis à leurs interactions gravitationnelles mutuelles. Ce modèle est donc autant adapté aux problèmes définis par deux planètes autour d'une étoile que deux satellites autour d'une planète.

Dans le cadre de trajectoires co-orbitales, une planète ne peut se trouver de manière permanente à une plus grande distance du corps central que l'autre. Par conséquent, le système de coordonnées héliocentriques semble être le plus adapté à cette situation. Ainsi, si l'on note  $\tilde{\beta}_j = m_0\tilde{m}_j(m_0 + \tilde{m}_j)^{-1}$  pour  $j \in \{1, 2\}$ , la masse réduite des planètes et  $\tilde{\mu}_j = \mathcal{G}(m_0 + \tilde{m}_j)$  où  $\mathcal{G}$  est la constante gravitationnelle, alors la formulation hamiltonienne du problème planétaire s'écrit <sup>1</sup> :

$$(6.1) \quad \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{R}}_j) := \tilde{\mathcal{H}}_K(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{R}}_j) + \tilde{\mathcal{H}}_P(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{R}}_j)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{H}}_K(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{R}}_j) := \sum_{j \in \{1, 2\}} \left( \frac{\|\tilde{\mathbf{R}}_j\|^2}{2\tilde{\beta}_j} - \frac{\tilde{\mu}_j\tilde{\beta}_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right)$$

et

$$\tilde{\mathcal{H}}_P(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{R}}_j) := \frac{\langle \tilde{\mathbf{R}}_1, \tilde{\mathbf{R}}_2 \rangle}{m_0} - \mathcal{G} \frac{\tilde{m}_1\tilde{m}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|},$$

où  $\mathbf{r}_j$  et  $\tilde{\mathbf{R}}_j$  sont respectivement la position héliocentrique et le moment linéaire barycentrique – son conjugué – de la planète  $j$ .

Ce hamiltonien est décomposé en deux parties. La première,  $\tilde{\mathcal{H}}_K$ , représente le mouvement keplerien non perturbé de chacune des planètes. Plus précisément, le mouvement keplerien de la planète  $j$  sera celui d'un corps de masse  $\tilde{\beta}_j$  autour d'un corps central fixe de masse  $m_0 + \tilde{m}_j$ . La seconde,  $\tilde{\mathcal{H}}_P$ , correspond à la perturbation de ces mouvements kepleriens par les interactions gravitationnelles mutuelles entre les planètes ainsi qu'un terme d'inertie provenant du référentiel héliocentrique.

Introduisons un petit paramètre  $\varepsilon$  tel que pour tout  $j \in \{1, 2\}$ , nous avons

$$m_j := \frac{\tilde{m}_j}{\varepsilon}, \quad \beta_j := \frac{\tilde{\beta}_j}{\varepsilon} = \frac{m_0 m_j}{m_0 + \varepsilon m_j} \quad \text{et} \quad \mu_j := \mathcal{G}(m_0 + \varepsilon m_j) = \tilde{\mu}_j,$$

1. voir Chenciner et Laskar (1989) pour plus de détails.

qui sont des constantes en  $\mathcal{O}(1)$ . De ce fait, cela permet d'observer que  $\tilde{\mathcal{H}}_K$  est de l'ordre de  $\varepsilon$  tandis que  $\tilde{\mathcal{H}}_P$  est de l'ordre de  $\varepsilon^2$ , ce qui justifie la représentation perturbative. Cependant, il est important de rappeler que cette hiérarchie entre les différentes composantes du hamiltonien est valable si et seulement si les deux planètes sont suffisamment éloignées l'une de l'autre. Cette condition n'étant pas garantie à cause des éventuels passages proches entre les deux planètes, il faudra donc garder à l'esprit que cette représentation puisse se révéler inadaptée.

Afin de rendre explicite le petit paramètre  $\varepsilon$  associé aux masses planétaires, nous procédons à un changement d'échelle en posant  $\tilde{\mathbf{R}}_j = \varepsilon \tilde{\mathbf{r}}_j$  pour tout  $j \in \{1, 2\}$ . Alors, la composition du hamiltonien par la transformation symplectique

$$(6.2) \quad \mathcal{E} : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ (\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j)_{j \in \{1,2\}} & \longmapsto (\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{R}}_j)_{j \in \{1,2\}} \end{cases}$$

permet d'obtenir le hamiltonien

$$(6.3) \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j) := \varepsilon^{-1} \tilde{\mathcal{H}} \circ \mathcal{E}(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j) = \mathcal{H}_K(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j) + \mathcal{H}_P(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j)$$

avec

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j) := \sum_{j \in \{1,2\}} \left( \frac{\|\tilde{\mathbf{r}}_j\|^2}{2\beta_j} - \frac{\mu_j \beta_j}{\|\mathbf{r}_j\|} \right)$$

et

$$\mathcal{H}_P(\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j) := \varepsilon \left( \frac{\langle \tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2 \rangle}{m_0} - \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \right).$$

Comme  $\mathcal{H}_K$  est la composante dominante de la dynamique, nous choisissons d'introduire un jeu de variables canoniques proches des éléments elliptiques  $(a_j, e_j, \lambda_j, \varpi_j)$ <sup>2</sup> comme les variables de Poincaré. Ainsi sous la forme complexe, ces variables s'écrivent  $(\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j)$  telles que

$$\Lambda_j = \beta_j \sqrt{\mu_j a_j}, \quad \Gamma_j = \Lambda_j (1 - \sqrt{1 - e_j^2}), \quad x_j = \sqrt{\Gamma_j} \exp(i\varpi_j) \quad \text{et} \quad \tilde{x}_j = -i\bar{x}_j,$$

et présentent l'avantage d'être régulières lorsque les excentricités tendent vers zéro. Par conséquent, en définissant les transformations

$$(6.4) \quad \Phi_j : \begin{cases} \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j) & \longmapsto (\mathbf{r}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j) \end{cases} \quad \text{pour } j \in \{1, 2\},$$

nous obtenons le hamiltonien :

$$(6.5) \quad \tilde{H}(\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j) := \tilde{H}_K(\Lambda_1, \Lambda_2) + \tilde{H}_P(\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j)$$

avec

$$\tilde{H}_K(\Lambda_1, \Lambda_2) := - \sum_{j \in \{1,2\}} \frac{1}{2} \frac{\mu_j^2 \beta_j^3}{\Lambda_j^2}$$

et

$$\tilde{H}_P(\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j) := \tilde{H}_P \circ (\Phi_1, \Phi_2)(\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j).$$

---

2.  $(a_j, e_j, \lambda_j, \varpi_j)$  : respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, la longitude moyenne et la longitude du périastre de la planète  $j$

**1.2. La résonance co-orbitale.** En limitant le hamiltonien à l'approximation keplerienne, deux planètes sont considérées en résonance co-orbitale si il existe un rapport 1/1 entre leur moyen mouvement  $n_j = \frac{\partial \tilde{H}_K}{\partial \Lambda_j}$ , signifiant que ces corps orbitent autour de l'étoile sur des ellipses dont les demi-grands axes sont égaux à :

$$a_{j,0} = \mu_j^{1/3} \omega^{-2/3} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

où

$$(6.6) \quad \omega := \frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{(\Lambda_{1,0})^3} = \frac{\mu_2^2 \beta_2^3}{(\Lambda_{2,0})^3} \quad \text{avec} \quad \Lambda_{j,0} = \beta_j \sqrt{\mu_j a_{j,0}}$$

est le moyen mouvement des deux planètes à la résonance.

Dans le problème perturbé, c'est au voisinage de ces demi-grands axes résonants que se trouve le domaine des configurations co-orbitales. En outre, le long d'une trajectoire appartenant à ce domaine, l'angle  $\zeta_1 := \lambda - \lambda'$  oscille lentement par rapport aux longitudes moyennes elles-mêmes. Par conséquent, en définissant la transformation symplectique :

$$(6.7) \quad \Phi_{1/1} : \begin{cases} (\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 & \longrightarrow (\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 \\ (\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j)_{j \in \{1,2\}} & \longmapsto (\lambda_j, \Lambda_j, \tilde{x}_j, x_j)_{j \in \{1,2\}} \end{cases}$$

où

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

nous obtenons

$$H := \tilde{H} \circ \Phi_{1/1},$$

le hamiltonien du problème planétaire dans les variables adaptées à la résonance co-orbitale. Plus précisément, celui-ci s'écrit :

$$(6.8) \quad H(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) = H_K(Z_1, Z_2) + H_P(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j)$$

avec

$$H_K(Z_1, Z_2) := -\frac{1}{2} \frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{Z_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2 \beta_1^3}{(Z_2 - Z_1)^2}$$

et

$$H_P := \tilde{H}_P \circ \Phi_{1/1}.$$

$H$  possède 4 degrés de liberté, chacun associé à un régime spécifique de la dynamique dans la résonance co-orbitale. De manière identique au problème restreint, l'angle  $\zeta_2$ , dont la fréquence est le moyen mouvement de la planète 2, représente le régime "rapide" alors que l'angle  $\zeta_1$  et les variables  $(x_j, \tilde{x}_j)$  sont associés respectivement aux variations "semi-rapide" et séculaire. Ainsi la moyennisation du hamiltonien  $H$  sur  $\zeta_2$  permet d'accéder à ces deux dernières composantes par l'intermédiaire d'un hamiltonien réduit à 3 degrés de liberté : le hamiltonien moyen  $\overline{H}$ .

**1.3. Le hamiltonien moyen.** En accord avec la théorie des perturbations, il existe une transformation canonique

$$(6.9) \quad \mathcal{C} : \begin{cases} (\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 & \longrightarrow (\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C})^2 \\ (\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j)_{j \in \{1,2\}} & \longmapsto (\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j)_{j \in \{1,2\}} \end{cases}$$

telle que dans les variables moyennes  $(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j)_{j \in \{1,2\}}$ , nous avons

$$\mathbf{H} := H \circ \mathcal{C} \quad \text{avec} \quad \mathbf{H} := \overline{H} + H_*$$

où

$$(6.10) \quad \overline{H} := H_K + \overline{H}_P$$

et

$$(6.11) \quad \overline{H}_P(\zeta_1, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_P(\zeta_1, \zeta_2, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) d\zeta_2,$$

tandis que  $H_*$  est un reste en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  tant que les deux planètes sont suffisamment éloignées l'une de l'autre. Par conséquent, cette transformation est limitée au premier ordre en les masses planétaires. De ce fait,  $\mathcal{C}$  est une transformation proche de l'identité qui peut être définie par le transport du flot hamiltonien engendré par une fonction génératrice  $\chi$ . Ainsi il suffit de conduire un raisonnement identique à celui effectué dans le problème restreint pour définir cette fonction.

Pour une fonction  $f$  le crochet de Poisson avec  $\chi$  s'écrit :

$$L_\chi(f) = \{\chi, f\} = \sum_{j \in \{1,2\}} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_j} \frac{\partial f}{\partial Z_j} + \frac{\partial \chi}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial \chi}{\partial Z_j} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_j} \right).$$

Ainsi, dans les variables moyennes, nous avons l'équation suivante :

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{H} &= \exp L_\chi(H) \\ &= H_K + H_P + \{\chi, H_K\} + \{\chi, H_P\} + \mathbf{H} - H - \{\chi, H\}. \end{aligned}$$

Donc en supposant  $\chi$  du même ordre que la partie perturbatrice de  $H$ , le processus de moyennisation consiste en la résolution de l'équation :

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \overline{H}_P(\zeta_1, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) &= [H_P + \{\chi, H_K\}](\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) \\ &= H_P(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) + \sum_{j \in \{1,2\}} \frac{\partial H_K}{\partial Z_j}(Z_1, Z_2) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_j}(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j). \end{aligned}$$

Or, comme au voisinage de la résonance co-orbitale nous avons

$$\left| \frac{\partial H_K}{\partial Z_2}(Z_1, Z_2) - \omega \right| \ll |\omega|,$$

nous pouvons donc restreindre les valeurs des  $Z_j$  à un domaine tel que

$$(6.14) \quad \frac{\partial H_K}{\partial Z_1}(Z_1, Z_2) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \frac{\partial H_K}{\partial Z_2}(Z_1, Z_2) - \omega = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

afin que la composante

$$\left| \frac{\partial H_K}{\partial Z_1} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_1} + \left( \frac{\partial H_K}{\partial Z_2} - \omega \right) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_2} \right| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

issue de l'équation (6.13) soit envoyée dans le reste  $H_*$ . Par conséquent, dans ce voisinage, nous avons  $\chi$  comme solution de l'équation :

$$(6.15) \quad \omega \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_2}(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) = \overline{H}_P(\zeta_1, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) - H_P(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j).$$

Ainsi, si nous posons

$$(6.16) \quad \chi(\zeta_j, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) = \frac{1}{\omega} \int_0^{\zeta_2} \left[ \overline{H}_P(\zeta_1, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) - H_P(\zeta_1, \tau, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) \right] d\tau$$

l'équation (6.15) est alors satisfaite. De ce fait, nous obtenons

$$\mathbf{H}(\zeta_j, Z_j, x_j, \tilde{x}_j) = \overline{H}(\zeta_1, Z_j, x_j, \tilde{x}_j) + H_*(\zeta_j, Z_j, x_j, \tilde{x}_j)$$

avec un reste

$$(6.17) \quad H_* = \frac{\partial H_K}{\partial Z_1} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_1} + \left( \frac{\partial H_K}{\partial Z_2} - \omega \right) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_2} + \{\chi, H_P\} + \mathbf{H} - H - \{\chi, H\}$$

qui est en  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  tant que  $H_P$  est en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , c'est-à-dire en dehors des passages proches entre les planètes<sup>3</sup>.

Comme dans le chapitre 1, nous supprimons la notation "sous-point" dans la suite de l'étude.

**1.4. Quelques propriétés de  $\overline{H}$ .** L'indépendance de  $\overline{H}$  à l'angle  $\zeta_2$  implique que le hamiltonien moyen est réduit à 3 degrés de liberté en fixant une valeur de  $Z_2$  qui est une intégrale première. En outre,  $\overline{H}$  et a fortiori  $H$  sont invariants sous l'action du groupe de symétrie  $SO(2)$  associé à l'ensemble des rotations agissant dans le plan. En effet, la série entière associée à  $H$ ,

$$\sum_{\mathcal{D}} f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{(k_1, k_2)}(Z_1, Z_2) x_1^{p_1} x_2^{p_2} \tilde{x}_1^{\tilde{p}_1} \tilde{x}_2^{\tilde{p}_2} e^{ik_1 \zeta_1} e^{i(k_1 + k_2) \zeta_2},$$

avec  $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbf{p}_j = (p_j, \tilde{p}_j) \in \mathbb{N}^2$  et  $f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{k}}$  qui est une fonction des  $Z_j$  à valeurs complexes, possède les relations suivantes

$$(6.18) \quad \mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^4 \text{ tels que } \sum_{j=1}^2 (k_j + p_j - \tilde{p}_j) = 0 \right\},$$

qui correspondent aux règles de d'Alembert et sont issues de cette invariance. À partir de cette série, en tronquant les termes tels que  $k_1 + k_2 \neq 0$  afin de supprimer la dépendance en  $\zeta_2$ , nous obtenons la série entière associée à  $\overline{H}$ ,

$$\sum_{\overline{\mathcal{D}}} f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{(k_1, -k_1)}(Z_1, Z_2) x_1^{p_1} x_2^{p_2} \tilde{x}_1^{\tilde{p}_1} \tilde{x}_2^{\tilde{p}_2} e^{ik_1 \zeta_1},$$

avec les règles de d'Alembert dans le problème moyen :

$$(6.19) \quad \overline{\mathcal{D}} = \left\{ (k_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^4 \text{ tels que } \sum_{j=1}^2 (p_j - \tilde{p}_j) = 0 \right\}.$$

D'un point de vue pratique, mentionnons que ces séries peuvent être obtenues en adaptant la méthode de Laskar et Robutel (1995) au contexte de la résonance co-orbitale. Comme dans la partie 2, nous les avons construites à l'aide du manipulateur algébrique TRIP (Gastineau et Laskar, 2011; Laskar, 1990).

3. voir Robutel *et al.* (2016) pour plus de détails sur l'estimation de la taille du reste.

Les règles de d'Alembert montrent que le hamiltonien est uniquement composé de monômes de la forme

$$(x_1 \tilde{x}_1)^{p_{11}} (x_2 \tilde{x}_2)^{p_{22}} (x_1 \tilde{x}_2)^{p_{12}} (x_2 \tilde{x}_1)^{p_{21}}$$

avec  $p_{ij} \in \mathbb{N}$  pour  $i, j \in \{1, 2\}$ . Il est donc pair en excentricité et dépend uniquement des angles  $\zeta_1$  et  $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$ . De ce fait, nous avons

$$\sum_{j \in \{1, 2\}} \left( x_j \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} - \tilde{x}_j \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tilde{x}_j} \right) = 0$$

qui implique que la quantité

$$(6.20) \quad \mathcal{C} = |x_1|^2 + |x_2|^2$$

est une intégrale première de  $\bar{H}$ . Plus précisément, c'est l'intégrale première qui est issue de la conservation du moment cinétique dans le problème moyen (voir Malige *et al.*, 2002). Il est possible de profiter de cette propriété en construisant un système de coordonnées introduisant  $\Delta\varpi$ , puis en passant au quotient sur la variable d'angle associée à  $\mathcal{C}$  afin d'introduire le "problème moyen réduit". À l'instar du problème restreint, cette réduction fournit un problème avec un degré de liberté en moins, c'est-à-dire un problème de dimension 4. C'est dans ce contexte que Giuppone *et al.* (2010) ont mené leur exploration numérique de l'espace des phases de la résonance co-orbitale. En effet, dans le problème moyen réduit, ils ont mis en évidence des familles de points fixes qui correspondent à des familles d'orbites périodiques dans le problème moyen. Toutefois, mentionnons que cette réduction introduit également certaines difficultés techniques comme la présence d'une singularité lorsque les excentricités tendent vers zéro, ce qui pose problème dans notre étude des configurations quasi-circulaires. Par conséquent, nous choisissons de ne pas effectuer ce type de réduction. Par contre, nous y reviendrons dans le chapitre 7, dans le cadre des configurations quasi-satellites du problème planétaire.

Afin de profiter de la parité en excentricité, nous fixons les notations du hamiltonien sous la forme :

$$\bar{H} = \sum_{j \geq 0} \bar{H}_{2j}$$

où

$$\bar{H}_{2j}(\zeta_1, Z_j, \tilde{x}_j, x_j) = \sum_{\mathcal{D}_{2j}} f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{(k_1, -k_1)}(Z_1, Z_2) x_1^{p_1} x_2^{p_2} \tilde{x}_1^{\tilde{p}_1} \tilde{x}_2^{\tilde{p}_2} e^{ik_1 \zeta_1},$$

qui représente les termes de puissances  $2j$  en excentricité avec

$$\mathcal{D}_{2j} = \left\{ (k_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^4 \quad \text{tels que} \quad p_1 + p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = j \right\}.$$

La parité en excentricité engendre une propriété remarquable sur la dynamique : elle impose à l'ensemble

$$\mathcal{C}_0 := \{\mathcal{C} = 0\} = \{x_1 = x_2 = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0\}$$



d'être une variété invariante par le flot de  $\overline{H}$ . Ainsi,  $\overline{H}|_{\mathcal{C}_0} = \overline{H}_0$  est intégrable et l'étude de ce hamiltonien fournit une description complète du domaine des configurations où les planètes sont sur des orbites quasi-circulaires, c'est-à-dire des trajectoires où leurs ellipses instantanées sont des cercles dont le demi-grand axe varie au cours du temps. Cette étude est menée dans la section suivante.

## 2. La dynamique des configurations quasi-circulaires

**2.1. Le hamiltonien intégrable  $\overline{H}_0$ .** Tout d'abord, mentionnons que le hamiltonien associé à  $\mathcal{C}_0$ ,

$$\overline{H}_0(\zeta_j, Z_j) = H_K(Z_1, Z_2) + \overline{H}_P(\zeta_1, Z_1, Z_2, 0, 0, 0, 0),$$

peut être simplifié par

$$(6.21) \quad \overline{H}_0 = -\frac{\beta_1\mu_1}{2a_1} - \frac{\beta_2\mu_2}{2a_2} + \varepsilon\mathcal{G}m_1m_2 \left( \frac{\cos \zeta_1}{\sqrt{a_1a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \zeta_1}} \right)$$

en envoyant le terme

$$\varepsilon \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\sqrt{a_1a_2}} \left( \frac{\beta_1\beta_2}{m_1m_2} \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\mathcal{G}m_0} - 1 \right) \cos \zeta_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

dans le reste  $H_*$ . Dans ces expressions, les  $a_j$  sont les demi-grands axes associés au problème moyen tels que :

$$(6.22) \quad a_1 = \beta_1^{-2} \mu_1^{-1} Z_1^2 \quad \text{et} \quad a_2 = \beta_2^{-2} \mu_2^{-1} (Z_2 - Z_1)^2.$$

$\overline{H}_0$  ne dépendant que des variables  $\zeta_1$  et  $Z_1$  avec  $Z_2$  comme intégrale première, il est intégrable ce qui permet de décrire de manière complète la dynamique sur  $\mathcal{C}_0$  à l'aide de portraits de phase dans les variables  $\zeta_1$  et  $Z_1$  à  $Z_2$  fixé.

Dans le but de simplifier l'interprétation de ces représentations, nous remplaçons les variables  $Z_j$  par une variable proche de la différence entre les deux demi-grands axes. Ainsi en introduisant la quantité

$$a_* = \mu_0^{1/3} \omega^{2/3} \quad (\mu_0 := \mathcal{G}m_0)$$

qui se situe à proximité des demi-grands axes résonants<sup>4</sup>  $a_{1,0}$  et  $a_{2,0}$ , nous translatons l'action associée à  $\zeta_1$  au voisinage de la configuration où les planètes ont le même demi-grand axe :

$$(6.23) \quad \begin{cases} Z_1 &= Z_{1,*} + Z &= \beta_1 \sqrt{\mu_1 a_*} + Z \\ Z_2 &= Z_{2,*} &= (\beta_1 \sqrt{\mu_1} + \beta_2 \sqrt{\mu_2}) \sqrt{a_*} \end{cases}$$

et définissons une variable sans dimension (mais non canonique)  $u$  telle que

$$Z = (\beta_1 + \beta_2) \sqrt{\mu_0 a_*} u.$$

En substituant  $Z_j$  dans (6.22) par leur développement dans l'équation (6.23), nous avons

$$a_j = \left( \sqrt{a_*} + \frac{(-1)^{j+1}}{\beta_j \sqrt{\mu_j}} Z \right)^2 = a_* \left( 1 + (-1)^{j+1} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_j} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_j}} u \right)^2,$$

4.  $a_* - a_{j,0} = (\mu_j - \mu_0) \omega^{2/3} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  pour  $j = 1, 2$ .

et donc

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_*}} = \left( \frac{1}{\beta_1 \sqrt{\mu_1 a_*}} + \frac{1}{\beta_2 \sqrt{\mu_2 a_*}} \right) Z = \left( \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_1}} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}} \right) u.$$

Nous pouvons donc constater que ces nouvelles variables mesurent l'écart à la configuration où les deux planètes sont sur des orbites de même demi-grand axe instantané. Comme au voisinage de la résonance co-orbitale les moyens mouvements des planètes oscillent autour du moyen mouvement résonant  $\omega$ , leur demi-grand axe oscillera autour de la valeur  $a_*$  qui peut donc être vu comme un facteur d'échelle du système. De plus, ce paramètre étant lui-même relié au moyen mouvement résonant, fixer une valeur de  $\omega$  revient donc à fixer la taille du système.

Par commodité, dans la suite de ce chapitre, nous “oublions” la variable  $Z_2$  et redéfinissons  $\bar{H}$  et les  $\bar{H}_j$  tel que :

$$\bar{H}_j(\zeta_1, Z, \tilde{x}_j, x_j) := \bar{H}_j(\zeta_1, Z_{1,*} + Z, Z_{2,*}, \tilde{x}_j, x_j).$$

## 2.2. Description de la variété $\mathcal{C}_0$ .

2.2.1. *Portrait de phase.* Sur la figure 6.1a, nous représentons le portrait de phase de  $\mathcal{C}_0$  dans le cas d'un système de type “Soleil-Jupiter-Saturne”<sup>5</sup>. Il comporte cinq points fixes associés aux configurations alignées de Euler  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  (voir les illustrations des figures 6.2b et c) et équilatérales de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$  (voir Fig.6.2a) ainsi qu'une singularité à l'origine représentant la collision double entre les planètes. En dehors de ces orbites particulières, les solutions sur  $\mathcal{C}_0$  sont périodiques. De manière générale, nous noterons  $\nu$  leur fréquence associée. Parmi ces solutions, nous pouvons isoler quatre domaines.

Au voisinage de  $L_4$  et  $L_5$  situés en  $(\pm \frac{\pi}{3}, 0)$ , nous trouvons les trajectoires de type “tadpole” (domaines bleus) qui sont associées aux déformations périodiques de la configuration en triangle équilatéral formée par les trois corps (voir Fig.6.2f). Ce domaine est délimité par la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  (courbe rouge) qui émerge du point fixe hyperbolique  $L_3$  proche de  $(\pi, 0)$ . Cette configuration instable est celle de trois corps alignés avec l'étoile pour corps central (voir Fig.6.2b).

Le domaine à l'extérieur de  $\mathcal{S}_3$  est celui des trajectoires en fer-à-cheval (domaine rouge). Ces orbites – dont l'exemple le plus classique est celui du système Saturne-Janus-Épiméthée – entourent les points fixes  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Cela signifie que les planètes passent continûment des configurations proches du triangle équilatéral à des configurations alignées avec de potentiels passages proches entre elles (voir Fig.6.2d). Ce domaine est délimité par les séparatrices  $\mathcal{S}_1$  (courbe marron) et  $\mathcal{S}_2$  (courbe brune) qui émergent des points fixes hyperboliques  $L_1$  et  $L_2$ , configurations instables où les trois corps sont alignés avec les deux planètes du même côté du corps central (voir Fig.6.2c).

Également délimité par  $\mathcal{S}_1$ , le domaine des trajectoires de type “satellite prograde” (domaine marron) est centré autour de la singularité. En outre il correspond à des configurations où les deux planètes forment un système binaire dont le sens de

5.  $\mathcal{G} = \omega = m_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $m_1 = 1$  et  $m_2 = 3/10$ .

révolution est identique à celui de leur barycentre autour du Soleil (voir Fig.6.2e). Enfin à l'extérieur des séparatrices  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  et pour des valeurs de  $|u|$  assez grandes, nous trouvons les orbites hors résonance (domaines gris) où l'angle  $\zeta_1$  n'oscille pas mais circule.

En se rappelant que lorsque  $u$  est positif,  $a_1 > a_2$  et donc que  $\zeta_1$  évolue vers les valeurs négatives, nous remarquons que le mouvement des solutions tadpoles et fers-à-cheval dans le portrait de phase s'effectue dans le sens prograde. Au contraire, à l'intérieur du domaine des satellites progrades, le mouvement des solutions s'effectue dans le sens rétrograde.

En outre, mentionnons que ce portrait de phase est topologiquement équivalent à celui du cas restreint pour  $e_0 = 0$ . Cependant une différence existe lorsque les masses des planètes sont égales. Dans le cas présenté sur les figures 6.1a et b (qui est un élargissement du portrait de phase au voisinage de la singularité), les séparatrices  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont bien distinctes. Par contre, lorsque les masses sont égales,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  fusionnent et forment une unique séparatrice connectant les points fixes  $L_1$  et  $L_2$  (voir Fig.6.1c pour  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$  et  $m_1 = m_2 = 1$ ).

*2.2.2. Étude des points fixes.* À partir de l'expression analytique de  $\overline{H}_0$ , nous pouvons estimer la position des points fixes et ainsi caractériser leur stabilité. Pour cela, il est nécessaire de développer  $\overline{H}_0$  au voisinage de  $Z = 0$ . Cependant, deux cas sont à considérer : loin de la singularité, pour  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ , et à proximité de celle-ci pour  $L_1$  et  $L_2$ .

Dans le premier cas, nous supposons que  $\zeta_1$  n'est pas proche de zéro et développons le hamiltonien au voisinage de  $Z = 0$  jusqu'aux termes quadratiques en  $Z$ . En résolvant les équations

$$(6.24) \quad \dot{\zeta}_1 = \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial Z}(\zeta_1, Z) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{Z} = -\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, Z) = 0,$$

nous déduisons la position des points fixes. Les configurations  $L_4$  et  $L_5$  sont situées en

$$(6.25) \quad (\zeta_1, u) = \left( \pm \frac{\pi}{3}, 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)$$

ce qui correspond à des demi-grands axes,  $a_1 = a_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , égaux au premier ordre en  $\varepsilon$ . L'expression de la partie quadratique de  $\overline{H}_0$  au voisinage de  $L_4$  (respectivement  $L_5$  en changeant  $\frac{\pi}{3}$  par  $-\frac{\pi}{3}$ ) est égale à

$$\overline{H}_{0,L_4}^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}}{a_*} \left( \frac{m_0 m_\Sigma^3}{m_\Pi} (1 - \varepsilon \sigma_{L_4}) u^2 + \frac{3}{4} \varepsilon m_\Pi \left( \zeta_1 - \frac{\pi}{3} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

avec

$$\sigma_{L_4} = 3 \frac{m_\Sigma}{m_0} - 5 \frac{m_\Pi}{m_0 m_\Sigma}$$

et  $m_\Sigma = m_1 + m_2$ ,  $m_\Pi = m_1 m_2$ ,  $m_\Delta = m_1 - m_2$ . Par conséquent, dans un voisinage infinitésimal de ces points fixes, la configuration équilatérale se déforme

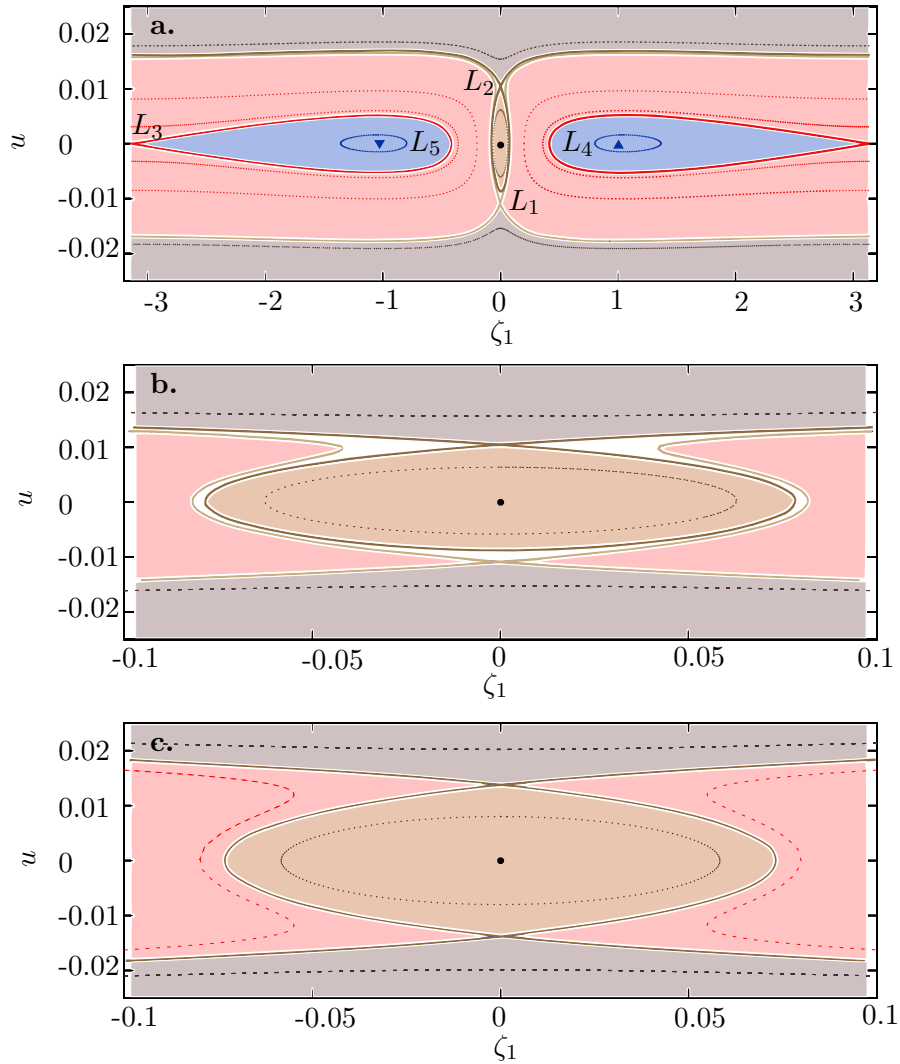


FIGURE 6.1. (a) Portrait de phase de  $\overline{H}_0$  dans le cas d'un système de type "Soleil-Jupiter-Saturne" (avec  $\mathcal{G} = \omega = m_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $m_1 = 1$  et  $m_2 = 3/10$ ). Il possède une singularité à l'origine, 5 points fixes dont 2 elliptiques ( $L_4$  et  $L_5$ ) et 3 hyperboliques ( $L_3$ ,  $L_1$  et  $L_2$ ). Les domaines bleus sont associés aux orbites de type "tadpole". Ils sont délimités par la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  (courbe rouge) qui émerge du point fixe  $L_3$ . Le domaine en rouge à l'extérieur de cette séparatrice constitue l'ensemble des orbites de type "fer-à-cheval". Ce domaine est borné par les séparatrices  $\mathcal{S}_1$  (courbe marron) et  $\mathcal{S}_2$  (courbe brune) qui émergent de  $L_1$  et  $L_2$ . Au voisinage de la singularité et également délimité par  $\mathcal{S}_1$  se trouve le domaine des satellites progrades (domaine marron). Enfin  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  délimitent les régions grises représentant des trajectoires en dehors de la résonance. (b) Élargissement du portrait de phase précédent au voisinage de la singularité. (c) Élargissement au voisinage de la singularité d'un portrait de phase pour un système avec deux masses planétaires égales (avec  $\mathcal{G} = \omega = m_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ ,  $m_1 = m_2 = 1$ ). Dans ce cas,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont confondues et forment une unique séparatrice qui émerge de  $L_1$  et  $L_2$ .

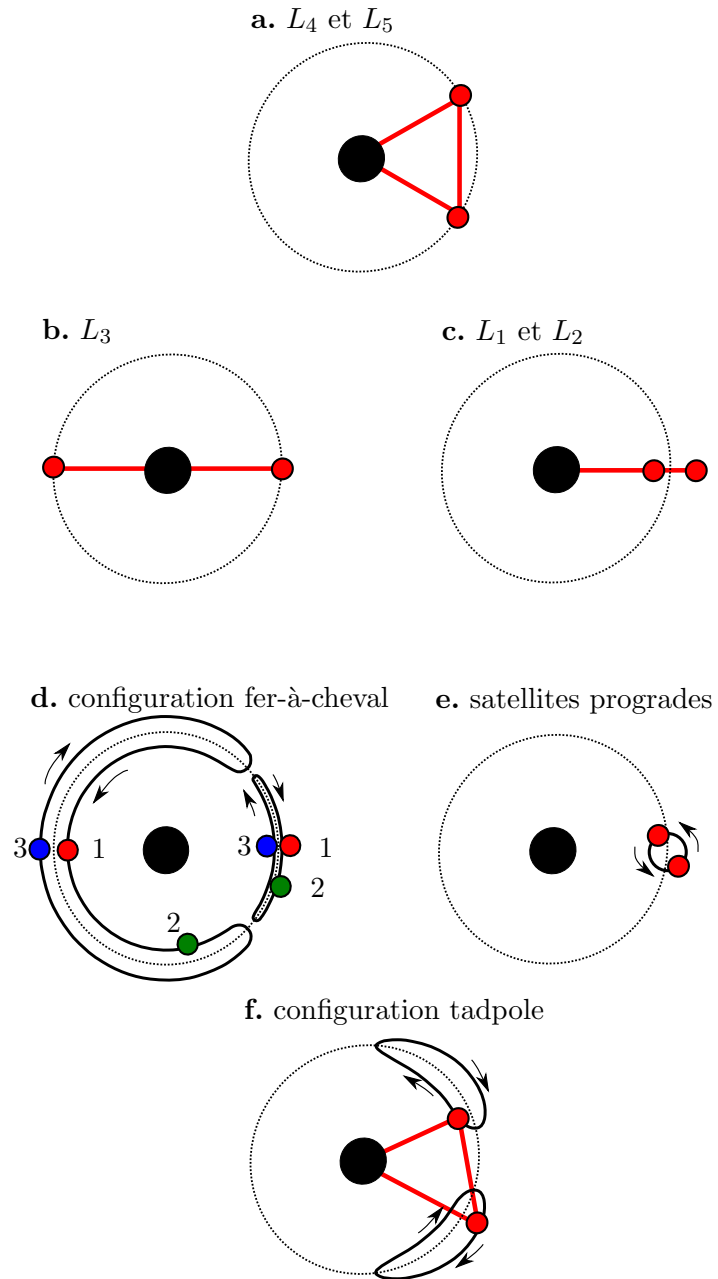


FIGURE 6.2. Illustration des différentes configurations quasi-circulaires dans le plan en repère tournant avec une fréquence  $\omega$ .

périodiquement avec une fréquence de libration :

$$(6.26) \quad \nu_{L_4} = \omega \sqrt{\varepsilon \frac{27 m_\Sigma}{4 m_0}} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_{L_4} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Le point fixe  $L_3$  est situé en  $(\pi, u_{L_3})$  avec

$$u_{L_3} = -\frac{\varepsilon m_\Delta m_\Pi}{3 m_0 m_\Sigma^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

c'est-à-dire

$$(6.27) \quad a_j = a_* \left( 1 + (-1)^j \frac{\varepsilon m_k m_\Delta}{3 m_0 m_\Sigma} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)^2 \quad \text{pour } k \neq j.$$

De même, la partie quadratique de  $\overline{H}_0$  s'écrit

$$\overline{H}_{0,L_3}^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}}{a_*} \left( \frac{m_0 m_\Sigma^3}{m_\Pi} (1 - \varepsilon \sigma_{L_3}) (u - u_{L_3})^2 - \frac{7}{24} \varepsilon m_\Pi (\zeta_1 - \pi)^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

avec

$$\sigma_{L_3} = \frac{7 m_\Sigma}{6 m_0} - 3 \frac{m_\Pi}{m_0 m_\Sigma}$$

et est caractéristique d'un point fixe hyperbolique.

Les équilibres  $L_1$  et  $L_2$  se situant sur l'axe  $\{\zeta_1 = 0\}$  et donc à proximité de la singularité à l'origine, le développement précédent n'est pas valable. Cependant, il est possible de développer asymptotiquement la partie singulière du hamiltonien au voisinage de l'origine. Ainsi, comme

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \zeta_1 = (a_*)^2 \left( 4 \frac{m_\Sigma^2}{m_\Pi^2} \frac{Z^2}{\mu_0 a_*} + \zeta_1^2 \right) + \mathcal{O}(\|(\zeta_1, Z)\|^2)$$

alors en supposant  $\zeta_1 = 0$  et  $Z$  dans un voisinage de zéro tel que  $Z \neq 0$ , l'inverse de la distance entre les planètes s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \zeta_1}} = \frac{1}{2a_*} \frac{m_\Pi}{m_\Sigma} \left( \frac{\sqrt{\mu_0 a_*}}{|Z|} + \mathcal{O}(Z) \right).$$

La recherche de points fixes sur ce développement analytique de  $\overline{H}_0$  permet alors de mettre en évidence la position de  $L_1$  et  $L_2$ . Ces configurations sont situées en  $(0, u_{L_1})$  et  $(0, u_{L_2})$  avec  $u_{L_2} = -u_{L_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$  où

$$u_{L_1} = \left( \frac{\varepsilon}{6} \right)^{1/3} \frac{m_\Pi}{m_0^{1/3} m_\Sigma^{5/3}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$$

et donc des demi-grands axes

$$(6.28) \quad a_j = a_* \left( 1 + (-1)^{j+1} \left( \frac{\varepsilon}{6} \right)^{1/3} \frac{m_k}{m_0^{1/3} m_\Sigma^{2/3}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}) \right)^2 \quad \text{pour } k \neq j.$$

En outre pour  $L_1$  (respectivement  $L_2$ ), la partie quadratique du hamiltonien s'écrit

$$\overline{H}_{0,L_1}^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}}{a_*} \left( \frac{m_0 m_\Sigma^3}{m_\Pi} \left( 1 + \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{m_\Pi^2}{m_0^{2/3} m_\Sigma^{10/3}} \right) (u - u_{L_2})^2 - \frac{6^{1/3}}{24} \frac{m_0 m_\Pi^3}{m_\Sigma^{4/3}} \zeta_1^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et est caractéristique d'un point fixe hyperbolique.

2.2.3. *La zone d'exclusion.* Les positions des configurations alignées  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  pouvant également être obtenues à partir des racines positives d'un polynôme issu du problème complet vu dans le repère tournant (voir par exemple Robutel, 2015, pour plus de détails), nous avons donc pu les comparer aux positions trouvées dans le problème moyen.

Pour  $L_3$ , l'écart sur la position étant de l'ordre de  $\varepsilon^2$ , le hamiltonien moyen est donc une bonne approximation. Par contre dans le cas de  $L_1$  et  $L_2$ , nous trouvons une différence de l'ordre de  $\varepsilon^{1/3}$  par rapport à la position réelle. Cet écart est engendré par la proximité de la singularité associée à la collision entre les deux planètes. En effet, comme dans un voisinage de l'origine,  $\overline{H}_0$  peut être approximé par

$$(6.29) \quad -\mathcal{G} \frac{m_{\Pi}}{a_*} \left( \frac{4}{\mu_0 a_*} \frac{m_{\Sigma}^2}{m_{\Pi}^2} Z^2 + \zeta_1^2 \right)^{-1/2},$$

une trajectoire de condition initiale  $(\zeta_{1,0}, 0)$  sera périodique de fréquence

$$(6.30) \quad \varepsilon \omega \frac{m_{\Sigma}}{m_0} \frac{1}{(\zeta_{1,0})^3}$$

qui croît et tend asymptotiquement vers l'infini lorsque  $\zeta_{1,0}$  se rapproche de zéro. De ce fait, les fréquences obtenues dans le problème moyen deviennent comparables voire supérieures à la fréquence  $\omega$  sur laquelle nous avons effectué la moyennisation. Ainsi, au voisinage de la singularité, les solutions du problème moyen ne représentent plus des solutions réelles. En effet, dans ce voisinage le reste de la transformation de moyennisation,  $H_*$  qui est supposé d'ordre  $\varepsilon^2$ , devient de taille comparable voire dominante à la partie perturbatrice de  $\overline{H}$ . Précisons que ce n'est pas le cas dans la majeure partie du portrait de phase, mais que lorsque la distance à la collision est de l'ordre de  $\varepsilon^{1/3}$  voire inférieure, le reste  $H_*$  est de l'ordre de  $\varepsilon$ . Pour plus de précisions sur la taille de la transformation de moyennisation et donc la "distance" entre les problèmes moyen et complet, nous renvoyons le lecteur à l'article Robutel *et al.* (2016).

Au voisinage de la singularité, il existe donc une "zone d'exclusion" qui peut être mise en évidence en comparant<sup>6</sup> les fréquences des trajectoires du problème moyen à la fréquence de moyennisation ou en évaluant<sup>7</sup> la taille du reste  $H_*$ . Dans le cas des configurations quasi-circulaires,  $\overline{H}_0$  fournit donc une représentation fidèle de la topologie du problème mais qui est une approximation très peu précise dans la zone d'exclusion qui inclut le domaine des satellites progrades ainsi que les points fixes  $L_1$  et  $L_2$ .

2.2.4. *La taille des domaines et de la résonance.* Le domaine des satellites progrades,  $L_1$  et  $L_2$  ainsi que des portions de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  se trouvent dans la zone d'exclusion. À l'extérieur de cette zone, ces séparatrices matérialisent la limite du domaine des fers-à-cheval et de la résonance co-orbitale. De même,  $\mathcal{S}_3$  caractérise la limite des domaines des tadpoles. Par conséquent, en évaluant la position de leur extrema

6. voir la section 2.4 du chapitre 1.

7. voir Robutel *et al.* (2016).

le long de chaque axe, nous pouvons estimer précisément la taille de ces différents domaines. D'après le portrait de phase,  $\mathcal{S}_3$ ,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont à leur maximum en  $u$  pour  $\zeta_1 = \pi/3$ . Ainsi, par la résolution des équations

$$\overline{H}_0\left(\frac{\pi}{3}, u^{\mathcal{S}_1}\right) = \overline{H}_0(0, u_{L_1}) \quad \text{et} \quad \overline{H}_0\left(\frac{\pi}{3}, u^{\mathcal{S}_3}\right) = \overline{H}_0(\pi, u_{L_3}),$$

nous trouvons que

$$u^{\mathcal{S}_1} = \frac{(6\varepsilon)^{1/3}}{2^{1/2}} \frac{m_\Pi}{m_0^{1/3} m_\Sigma^{5/3}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}),$$

et

$$(6.31) \quad u^{\mathcal{S}_3} = \left(\frac{2}{3}\varepsilon\right)^{1/2} \frac{m_\Pi}{m_0^{1/2} m_\Sigma^{3/2}} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

ce qui montre que la taille de la résonance co-orbitale est d'ordre  $\varepsilon^{1/3}$  alors que celle du domaine des tadpoles est en  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ . En outre, en calculant le rapport

$$(6.32) \quad \frac{u^{\mathcal{S}_3}}{u^{\mathcal{S}_1}} = 2\left(6\varepsilon \frac{m_\Sigma}{m_0}\right)^{1/6} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$$

nous retrouvons la taille des domaines des tadpoles relativement à celle des fers-à-cheval qui a été obtenue par Dermott et Murray (1981).

De manière identique, nous pouvons caractériser la taille du domaine des tadpoles en  $\zeta_1$  à partir du minimum de la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  le long de cet axe. Comme il est atteint en  $u = 0$ , alors en résolvant

$$\overline{H}_0(\zeta^{\mathcal{S}_3}, 0) = \overline{H}_0(\pi, u_{L_3}),$$

nous trouvons

$$(6.33) \quad \zeta_1^{\mathcal{S}_3} = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \simeq 23.9^\circ$$

qui est un résultat classique du problème restreint (Garfinkel, 1977). Enfin, en résolvant l'équation

$$\overline{H}_0(\zeta_1^{\mathcal{S}_1}, 0) = \overline{H}_0(0, u_{L_1}),$$

nous obtenons le minimum de  $\mathcal{S}_1$  en  $\zeta_1$  séparant les domaines des fers-à-cheval et des satellites progrades :

$$(6.34) \quad \zeta_1^{\mathcal{S}_1} = \frac{4}{3}\varepsilon^{1/3} \left(\frac{m_\Sigma}{6m_0}\right)^{1/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}).$$

Étant de taille  $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ , il doit donc exister des orbites de type “fer-à-cheval” avec des passages très proches entre les planètes et qui pénètrent à l'intérieur de la zone d'exclusion.

### 3. Le voisinage des configurations quasi-circulaires

Dans la section précédente nous avons décrit la dynamique des configurations quasi-circulaires en étudiant la variété  $\mathcal{C}_0$ . Un prolongement naturel à cette étude consiste à caractériser la stabilité de ces trajectoires dans les directions transverses à  $\mathcal{C}_0$ .



**3.1. Les équations variationnelles.** Nous considérons  $(\zeta_1(t), Z(t))$ , une solution sur  $\mathcal{C}_0$  et regardons la forme des équations aux variations dans les variables  $(x_j, \tilde{x}_j)$  pour cette solution. Ces équations correspondent à la linéarisation du système différentiel associé à  $\overline{H}$  au voisinage de  $\mathcal{C}_0$ . Elles sont obtenues à partir de la partie quadratique en excentricité, c'est-à-dire  $\overline{H}_2$ . En se limitant aux termes d'ordre  $\varepsilon$ , nous avons

$$(6.35) \quad \overline{H}_2 = i\omega \frac{\varepsilon}{m_0} \frac{\sqrt{a_*}}{(a_1 a_2)^{1/4}} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_1^{-1/4} a_2^{1/4} m_2 A(\zeta_1, Z) & \sqrt{m_1 m_2} B(\zeta_1, Z) \\ \sqrt{m_1 m_2} \overline{B}(\zeta_1, Z) & a_1^{1/4} a_2^{-1/4} m_1 A(\zeta_1, Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \Delta = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \zeta_1}, \\ A = \frac{a_* a_1 a_2}{4\Delta^5} \left( a_1 a_2 (5 \cos 2\zeta_1 - 13) + 4 \cos \zeta_1 (a_1^2 + a_2^2) \right) - \frac{a_*}{\sqrt{a_1 a_2}} \cos \zeta_1 \\ B = \frac{a_*}{\sqrt{a_1 a_2}} e^{-2i\zeta_1} - \frac{a_* a_1 a_2}{\Delta^5} \left( a_1 a_2 (e^{-i3\zeta_1} + 9e^{i\zeta_1} - 26e^{-i\zeta_1}) + 8(a_1^2 + a_2^2) e^{-2i\zeta_1} \right). \end{cases}$$

Par conséquent, au voisinage de la solution  $(\zeta_1(t), Z(t))$ , les équations variationnelles dans les directions  $(x_j, \tilde{x}_j)$  s'écrivent :

$$(6.36) \quad \dot{X} = \mathcal{M}(\zeta_1(t), Z(t)) X \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M} = 2i\omega \frac{\varepsilon}{m_0} \frac{\sqrt{a_*}}{(a_1 a_2)^{1/4}} \begin{pmatrix} a_1^{-1/4} a_2^{1/4} m_2 A & \sqrt{m_1 m_2} B \\ \sqrt{m_1 m_2} \overline{B} & a_1^{1/4} a_2^{-1/4} m_1 A \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Le voisinage de $\mathcal{C}_0$ .

3.2.1. *Aux points fixes  $L_3, L_4$  et  $L_5$ .* De manière générale, comme les solutions sur  $\mathcal{C}_0$  sont périodiques de fréquence  $\nu$ ,  $\mathcal{M}(\zeta_1(t), Z(t))$  dépend périodiquement du temps et il n'est donc pas possible de donner une solution explicite à l'équation (6.36). Cependant dans le cas des points fixes, comme  $\mathcal{M}(\zeta_1(t), Z(t))$  est autonome, les équations variationnelles sont intégrables et leur stabilité est donnée par les valeurs propres de cette matrice. Par exemple dans le cas de  $L_4$  (et de manière identique pour  $L_5$ ), la matrice  $\mathcal{M}$  est égale à

$$-i\omega \frac{27}{8} \frac{\varepsilon}{m_0} \begin{pmatrix} m_2 & -\sqrt{m_1 m_2} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -\sqrt{m_1 m_2} e^{-i\frac{\pi}{3}} & m_1 \end{pmatrix}$$

au premier ordre en  $\varepsilon$ . Elle possède donc deux directions privilégiées qui sont représentées par les vecteurs propres

$$(6.37) \quad V_{L_4,1} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_2} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ -\sqrt{m_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_{L_4,2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ \sqrt{m_2} \end{pmatrix}$$

et dont les valeurs propres respectives sont

$$(6.38) \quad v_{L_4,1} = -ig_{L_4,1} \quad \text{où} \quad g_{L_4,1} = \omega \varepsilon \frac{27}{8} \frac{m_1 + m_2}{m_0}$$

et

$$(6.39) \quad v_{L_{4,2}} = -ig_{L_{4,2}} = 0.$$

Dans le cas de  $L_3$ , comme la matrice  $\mathcal{M}$  est égale à

$$i\omega \frac{7}{8} \frac{\varepsilon}{m_0} \begin{pmatrix} m_2 & \sqrt{m_1 m_2} \\ \sqrt{m_1 m_2} & m_1 \end{pmatrix}$$

au premier ordre en  $\varepsilon$ , elle possède deux directions privilégiées associées aux vecteurs propres

$$(6.40) \quad V_{L_{3,1}} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_2} \\ \sqrt{m_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_{L_{3,2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} \\ -\sqrt{m_2} \end{pmatrix}$$

et dont les valeurs propres respectives sont

$$(6.41) \quad v_{L_{3,1}} = -ig_{L_{3,1}} \quad \text{où} \quad g_{L_{3,1}} = -\omega\varepsilon \frac{7}{8} \frac{m_1 + m_2}{m_0}$$

et

$$(6.42) \quad v_{L_{3,2}} = -ig_{L_{3,2}} = 0.$$

Ainsi, comme les valeurs propres sont, soit imaginaires pures, soit dégénérées, les configurations  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$  sont stables ou, au pire, neutres dans les directions transverses à cette variété.

Pour chaque point fixe, la diagonalisation de la matrice  $\mathcal{M}$  nous fournit des vecteurs propres dont les directions associées ont une signification physique précise. En effet,  $V_{L_{4,2}}$  et  $V_{L_{5,2}}$  représentent les configurations où

$$(6.43) \quad \zeta_1 = \Delta\varpi = \pm \frac{\pi}{3}, \quad a_1 = a_2 = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad e_1 = e_2$$

(notées  $L_4^{ecc}$  et  $L_5^{ecc}$ )

qui sont associées aux équilibres équilatéraux excentriques. Elles sont également appelées configurations homothétiques puisque les planètes et le corps central forment en permanence un triangle équilatéral dont la longueur des côtés se déforme périodiquement (voir Fig.6.3b).

De même,  $V_{L_{3,2}}$  est associée à la configuration où

$$(6.44) \quad \zeta_1 = \Delta\varpi = \pi, \quad a_1 = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad a_2 = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad e_1 = e_2$$

(notée  $L_3^{ecc}$ )

représentant les équilibres de Euler  $L_3$  excentriques. Ces configurations instables connaissent également des déformations homothétiques où les deux planètes sont en permanence alignées de part et d'autre et à égale distance du corps central (voir Fig.6.4b). Ainsi, les directions associées aux valeurs propres dégénérées sont des points fixes du problème moyen et correspondent à des configurations bien connues du problème planétaire.

Le long de  $V_{L_{4,1}}$  et  $V_{L_{5,1}}$ , les orbites des planètes satisfont les relations suivantes :

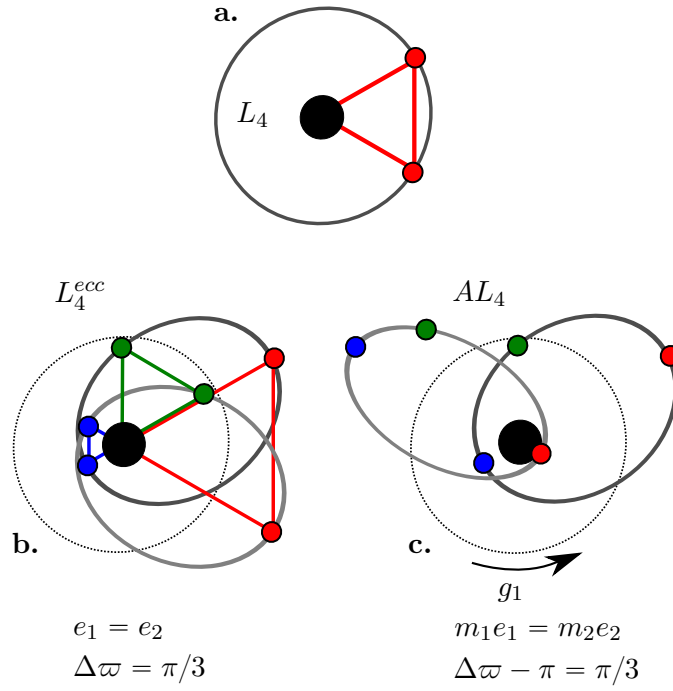


FIGURE 6.3. Illustration des configurations infinitésimales  $AL_4$  et  $L_4^{ecc}$  qui émergent de  $L_4$ .

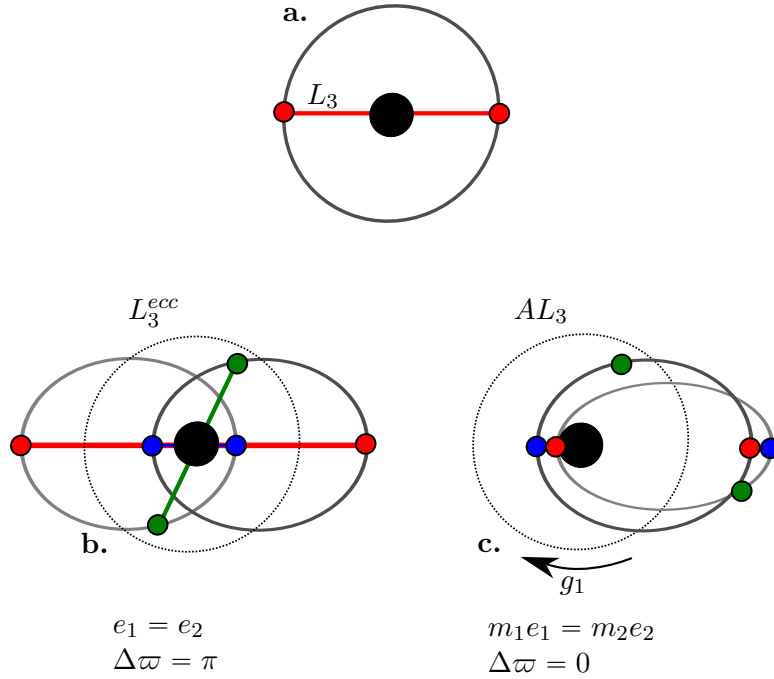


FIGURE 6.4. Illustration des configurations infinitésimales  $AL_3$  et  $L_3^{ecc}$  qui émergent de  $L_3$ .

$$(6.45) \quad \zeta_1 = \Delta\varpi - \pi = \pm \frac{\pi}{3}, \quad a_1 = a_2 = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad m_1 e_1 = m_2 e_2.$$

(notées  $AL_4$  et  $AL_5$ )

Ces configurations illustrées dans la figure 6.3c représentent une version infinitésimale de la famille d'orbites anti-Lagrange mise en évidence par Giuppone *et al.* (2010). Comme les éléments orbitaux sont constants et que seuls les périastres précèdent à la fréquence  $g_{L_4,1}$  (respectivement  $g_{L_5,1}$  pour  $AL_5$ ), la configuration  $AL_4$  est une orbite périodique du problème moyen qui se réduit à un point fixe dans le problème moyen réduit. C'est exactement ce que trouvent Giuppone *et al.* (2010) : une famille de points fixes paramétrés par l'une des deux excentricités. Par conséquent, comme nous le verrons dans la section suivante, la direction  $V_{L_4,1}$  constitue l'approximation linéaire de la famille anti-Lagrange  $AL_4$  (respectivement  $AL_5$ ). De même, comme  $V_{L_3,1}$  est associée aux relations

$$(6.46) \quad \zeta_1 = \Delta\varpi - \pi = \pi, \quad a_1 = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad a_2 = a_* + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad m_1 e_1 = m_2 e_2$$

(noté  $AL_3$ )

cette direction constitue l'approximation linéaire de la famille instable de Hadjidemetriou *et al.* (2009). De ce fait, elle est reliée à la famille  $G_{L_3,1}^{e'}$  qui a été exhibée dans le problème restreint<sup>8</sup>. Nous illustrons la configuration associée sur la figure 6.4c. Mentionnons également que cette famille est une solution de seconde sorte (Poincaré et Fichot, 1905) dans le cas de la résonance co-orbitale. Enfin, comme pour  $AL_4$  et  $AL_5$ , ce sont des orbites périodiques du problème moyen qui correspondent à des points fixes dans le problème moyen réduit. Ainsi, par analogie à ces orbites et pour simplifier les notations, nous décidons de les dénommer anti-Lagrange  $AL_3$ .

**3.2.2. La solution générale des équations variationnelles.** Comme nous l'avons énoncé précédemment, il n'est pas possible d'obtenir une solution explicite dans le cas général de trajectoires sur  $\mathcal{C}_0$ . Cependant, par la théorie de Floquet (voir Meyer et Hall, 1992), il nous est permis de connaître les propriétés de stabilité de ces trajectoires. En effet, cette théorie nous assure que la matrice fondamentale solution des équations variationnelles (6.36), notée  $Y$ , s'écrit

$$(6.47) \quad Y(t) = P(\nu t) \exp(Ut)$$

où  $U$  est une matrice constante et  $P(\varphi)$  est une matrice dont les coefficients sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques en  $\varphi$ , en satisfaisant la relation

$$Y(t + 2\pi\nu^{-1}) = Y(t) \exp(2\pi\nu^{-1}U).$$

La stabilité des solutions va donc dépendre uniquement des valeurs propres de la matrice  $U$ . Or, comme  $\mathcal{C} = |x_1|^2 + |x_2|^2$  est une intégrale première du problème moyen, pour une valeur de  $\mathcal{C}$  fixée, les solutions de (6.36) sont bornées ce qui impose à la partie réelle des valeurs propres de  $U$  d'être nulle. Par conséquent, bien que nous

---

<sup>8</sup>. voir le chapitre 1.

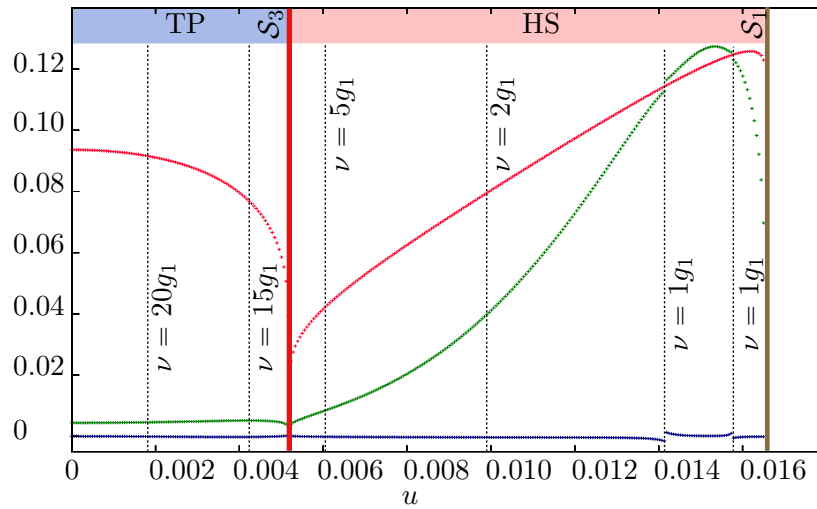


FIGURE 6.5. Fréquences des solutions quasi-périodiques au voisinage de  $\mathcal{C}_0$  pour un système de type “Soleil-Jupiter-Saturne”. Les points rouges, verts et bleus représentent respectivement les fréquences  $\nu$ ,  $g_1$  et  $g_2$ . En partant des conditions initiales  $(\pi/3, u)$  où  $0 \leq u < u^{S_1}$ , nous parcourons les solutions des domaines des tadpoles et des fers-à-cheval. Les solutions associées aux tadpoles quasi-circulaires ne possèdent pas de résonance pouvant déstabiliser significativement le domaine. Dans le domaine des fers-à-cheval,  $g_1$  et  $\nu$  croissent en s'éloignant de la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  jusqu'à devenir comparable. Ces fréquences vont croiser des résonances importantes qui vont engendrer des comportements chaotiques dans le problème moyen.

ne puissions exclure l'existence de dégénérescences,  $\mathcal{C}_0$  est une variété normalement stable. De ce fait, le voisinage infinitésimal de  $\mathcal{C}_0$  est constitué de solutions quasi-périodiques à trois fréquences, notées  $\nu$ ,  $g_1$  et  $g_2$ , dont seules d'éventuelles résonances entre elles peuvent engendrer des comportements chaotiques.

3.2.3. *Les fréquences des solutions au voisinage de  $\mathcal{C}_0$ .* Les solutions quasi-périodiques au voisinage de  $\mathcal{C}_0$  peuvent être obtenues à partir d'une simple intégration numérique des équations variationnelles. Le long d'une trajectoire, la fréquence  $\nu$  est calculée par une application de Poincaré définie par la section  $\{u = 0\}$ . Mentionnons que la théorie de Floquet implique que :

$$(Y(0))^{-1}Y(2\pi\nu^{-1}) = \exp(2\pi\nu^{-1}U).$$

De ce fait, la matrice

$$\left(\mathcal{M}(\zeta_1(0), Z(0))\right)^{-1}\mathcal{M}(\zeta_1(2\pi\nu^{-1}), Z(2\pi\nu^{-1}))$$

engendre deux couples de valeurs propres conjuguées  $(\kappa_j, \overline{\kappa_j})$  avec  $j \in \{1, 2\}$  telles que  $\kappa_j = \exp(ig_j 2\pi/\nu)$ , et fournit les fréquences  $g_1$  et  $g_2$ .

Dans le cadre d'un système de type "Soleil-Jupiter-Saturne", la figure 6.5 représente l'évolution des fréquences  $\nu$  (points rouges),  $g_1$  (points verts) et  $g_2$  (points bleus) pour des conditions initiales  $(\pi/3, u)$  où  $0 \leq u < u^{S_1}$ . Nous parcourons donc l'ensemble des solutions du domaine des tadpoles ainsi que des fers-à-cheval, de  $L_4$  à la séparatrice  $S_1$ . Nous constatons que dans un assez grand voisinage de  $L_4$ , la fréquence  $\nu$  reste en  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  et les  $g_j$  en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . Ainsi, dans cette région des tadpoles, les seules résonances possibles sont d'ordre élevé.

En se rapprochant de  $S_3$ ,  $\nu$  décroît en  $1/\log(u - u^{S_3})$  (Garfinkel, 1977). Des résonances d'ordre faible pouvant engendrer d'importantes instabilités peuvent donc exister dans ce domaine. Toutefois, celles-ci seront très proches de la séparatrice. Par conséquent, les solutions associées aux tadpoles quasi-circulaires ne possèdent pas de résonance pouvant déstabiliser significativement l'ensemble du domaine.

Dans le cas des fers-à-cheval, la situation est différente. En effet, en s'éloignant de la séparatrice, les fréquences  $g_1$  et  $\nu$  croissent jusqu'à devenir comparables voire égales. Ainsi, à travers le domaine des fers-à-cheval, ces fréquences croisent des résonances d'ordre faible qui vont engendrer des comportements chaotiques.

Pour les tadpoles comme dans le cas des fers-à-cheval, le problème moyen nous donne donc des indices quant à la stabilité de ces configurations. Cependant, ce résultat reste encore à démontrer rigoureusement. Actuellement, une collaboration entre P.Robutel, L.Niederman et A.Pousse est en cours dans cette perspective pour les configurations en fer-à-cheval.

#### 4. Une extension aux configurations excentriques

Dans la section précédente, l'étude du voisinage de  $\mathcal{C}_0$  a permis de mettre en évidence des directions que nous avons associées aux configurations des anti-Lagrange  $AL_4$  et  $AL_5$  ainsi que de la famille instable de Hadjidemetriou *et al.* (2009),

que nous avons renommé anti-Lagrange  $AL_3$ . Comme nous l'avons mentionné, ces directions ne constituent pas les familles d'anti-Lagrange mais en sont une approximation infinitésimale au voisinage des points fixes  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Dans cette section, par l'intermédiaire de la construction d'une forme normale de Birkhoff, nous montrons que les familles d'orbites périodiques  $AL_3$  et  $AL_4$  (respectivement  $AL_5$ ) et les familles de points fixes  $L_3^{ecc}$  et  $L_4^{ecc}$  (respectivement  $L_5^{ecc}$ ) bifurquent des mêmes points fixes,  $L_3$  et  $L_4$  (respectivement  $L_5$ ).

#### 4.1. $\bar{H}$ au voisinage de $L_3$ , $L_4$ .

4.1.1. *Réorganisation du hamiltonien moyen.* De manière préliminaire, nous allons écrire  $\bar{H}$  au voisinage des équilibres  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Tout d'abord, nous définissons les transformations adaptées au voisinage de chaque point fixe :

$$(6.48) \quad \check{\Psi}_{L_n} : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \\ (\tilde{z}_0, z_0, \tilde{z}_1, z_1, \tilde{z}_2, z_2) & \longmapsto (\zeta_1, Z, \tilde{x}_1, x_1, \tilde{x}_2, x_2) \end{cases}$$

avec

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{L_n,1} \\ V_{L_n,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

où  $V_{L_n,1}$  et  $V_{L_n,2}$  sont issues des équations (6.37) et (6.40) et

$$\begin{cases} z_0 = \frac{\kappa(\zeta_1 \mp \frac{\pi}{3}) + i\kappa^{-1}Z}{\sqrt{2}} \\ \tilde{z}_0 = -i\overline{z_0} \\ \kappa = \left( \mathcal{G}a_* \varepsilon \frac{3}{4} \frac{m_\pi^2}{m_\Sigma} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \right)^{1/4} \end{cases}, \quad \begin{cases} z_0 = \frac{\kappa\zeta_1 + \kappa^{-1}(Z - Z_{L_3})}{\sqrt{2}} \\ \tilde{z}_0 = \frac{\kappa\zeta_1 - \kappa^{-1}(Z - Z_{L_3})}{\sqrt{2}} \\ \kappa = \left( \mathcal{G}a_* \varepsilon \frac{7}{24} \frac{M_\pi^2}{M_\Sigma} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \right)^{1/4} \end{cases}$$

respectivement en  $L_4$  et  $L_3$ . En appliquant ces transformations au hamiltonien, ce dernier devient

$$\check{\mathcal{K}}_{L_n} := \bar{H} \circ \check{\Psi}_{L_n}$$

et se décompose (à une constante près) en

$$\check{\mathcal{K}}_{L_n} = \check{\mathcal{K}}_{L_n,2} + \sum_{d \geq 3} \check{\mathcal{K}}_{L_n,d}$$

où

$$\check{\mathcal{K}}_{L_n,2}(\tilde{z}_j, z_j) = \sum_{j \in \{0,1,2\}} v_{L_n,j} z_j \tilde{z}_j$$

et pour tout  $d \geq 3$

$$\check{\mathcal{K}}_{L_n,d}(\tilde{z}_j, z_j) = \sum_{|\mathbf{p}| + |\tilde{\mathbf{p}}| = d} v_{L_n,\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}}} z_0^{p_0} \tilde{z}_0^{\tilde{p}_0} z_1^{p_1} \tilde{z}_1^{\tilde{p}_1} z_2^{p_2} \tilde{z}_2^{\tilde{p}_2}$$

avec

$$v_{L_j,\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}}} \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{N}^3 \quad \tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \in \mathbb{N}^3,$$

$$v_{L_4,0} = -i\nu_{L_4}$$

et

$$v_{L_3,0} = \omega \sqrt{\frac{21\varepsilon M_\Sigma}{8 m_0}} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_{L_3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Par l'introduction de ces notations, le processus de normalisation est identique pour  $L_3$  et  $L_4$ . De ce fait, nous supprimerons la notation  $L_n$  afin d'alléger l'écriture du hamiltonien.

4.1.2. *Les familles issues de l'approximation quadratique  $\check{\mathcal{K}}_2$ .* En limitant le hamiltonien à  $\check{\mathcal{K}}_2$  et donc aux termes quadratiques en les  $z_j$ , nous distinguons les trois familles

$$(6.49) \quad \mathcal{F}_0^l = \{z_1 = z_2 = 0\}, \quad \mathcal{F}_1^l = \{z_0 = z_2 = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2^l = \{z_0 = z_1 = 0\}$$

qui correspondent aux sous-espaces propres associés aux valeurs propres  $(v_j)_{j \in \{0,1,2\}}$ . Dans le cas de  $L_4$ ,  $\mathcal{F}_0^l$  représente les orbites tadpoles quasi-circulaires dans le voisinage infinitésimal du point fixe, alors que  $\mathcal{F}_1^l$  et  $\mathcal{F}_2^l$  sont les approximations infinitésimales des configurations  $AL_4$  et  $L_4^{ecc}$ . De même dans le cas de  $L_3$ ,  $\mathcal{F}_1^l$  et  $\mathcal{F}_2^l$  représentent les approximations infinitésimales des configurations  $AL_3$  et  $L_3^{ecc}$  tandis que  $\mathcal{F}_0^l$  est une approximation de la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  au voisinage de  $L_3$ .

Si l'on pouvait appliquer le théorème central de Lyapounov (voir Meyer et Hall, 1992), nous pourrions déduire que les familles associées à des valeurs propres imaginaires pures ( $\mathcal{F}_0^l$ ,  $\mathcal{F}_1^l$  et  $\mathcal{F}_2^l$  pour  $L_4$ ,  $\mathcal{F}_1^l$  et  $\mathcal{F}_2^l$  pour  $L_3$ ) sont des familles de Lyapounov – i.e. une famille d'orbites périodiques à un paramètre – qui émanent de leur équilibre respectif et sont tangentes à  $\mathcal{F}_j^l$ . Ainsi, cela nous permettrait de conclure que les configurations anti-Lagrange sont des familles de Lyapounov qui émergent de  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_5$ . Cependant, comme  $v_2 = 0$ , la condition de non-résonance nécessaire au théorème n'est pas satisfaite. Il faut donc passer outre cette dégénérescence pour caractériser ces familles.

4.1.3. *La forme du hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$ .* Dans les variables  $z_j$ , l'intégrale première  $\mathcal{C}$  s'écrit

$$\mathcal{C} = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

et les règles de d'Alembert sont préservées. Par conséquent,  $p_1 + p_2 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$  ce qui impose au degré total des monômes de la forme  $z_0^{p_0} z_1^{p_1} z_2^{p_2} \tilde{z}_0^{\tilde{p}_0} \tilde{z}_1^{\tilde{p}_1} \tilde{z}_2^{\tilde{p}_2}$  d'être pair en excentricité. La conséquence directe est que  $\mathcal{F}_0^l$  est une variété invariante par le flot hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$ . En effet, pour  $L_4$ ,  $\mathcal{F}_0^l$  correspond au domaine des tadpoles dans  $\mathcal{C}_0$ . Pour  $L_3$ , elle correspond à une partie de la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  dans un voisinage de l'équilibre hyperbolique.

L'étude de  $\check{\mathcal{K}}$  permet également de montrer que  $\frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial z_j} = \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \tilde{z}_j} = 0$  sur  $\mathcal{F}_2^l$ . Cela est dû au fait que les coefficients  $v_{\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}}$  des monômes

$$(z_2 \tilde{z}_2)^{p_2}, z_0 (z_2 \tilde{z}_2)^{p_2}, \tilde{z}_0 (z_2 \tilde{z}_2)^{p_2}, z_1 \tilde{z}_2 (z_2 \tilde{z}_2)^{p_2}, \tilde{z}_1 z_2 (z_2 \tilde{z}_2)^{p_2}$$

sont nuls et met en évidence que  $\mathcal{F}_2^l$  est une variété invariante du hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$ . Ainsi, nous retrouvons que les équilibres relatifs  $L_3^{ecc}$  et  $L_4^{ecc}$  forment des familles de points fixes du problème moyen qui émergent de leurs équilibres respectifs.

Dans le cas de la direction associée à  $\mathcal{F}_1^l$ , les choses ne sont pas si simples puisque cette famille n'est pas une variété invariante de  $\check{\mathcal{K}}$ . Afin de pouvoir conclure, nous allons réduire le hamiltonien à une forme normale de Birkhoff.



**4.2. La normalisation de  $\check{\mathcal{K}}$ .** La normalisation du hamiltonien  $\check{\mathcal{K}}$  consiste en la construction d'une transformation canonique

$$(6.50) \quad \Psi^\dagger : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \\ (\tilde{\xi}_0, \xi_0, \tilde{\xi}_1, \xi_1, \tilde{\xi}_2, \xi_2) & \longmapsto (\tilde{z}_0, z_0, \tilde{z}_1, z_1, \tilde{z}_2, z_2) \end{cases}$$

telle que la composition avec  $\check{\mathcal{K}}$  fournit le hamiltonien

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_2 + \sum_{d \geq 2} \mathcal{N}_{2d}$$

où

$$\mathcal{N}_2(\tilde{\xi}_j, \xi_j) = \sum_{j=0}^2 v_j \xi_j \tilde{\xi}_j,$$

et

$$\mathcal{N}_{2d}(\tilde{\xi}_j, \xi_j) = \sum_{|\mathbf{p}|=d} \gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}} (\xi_0 \tilde{\xi}_0)^{p_0} (\xi_1 \tilde{\xi}_1)^{p_1} (\xi_2 \tilde{\xi}_2)^{p_2}$$

avec  $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^3$  et  $\gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}} \in \mathbb{C}$ .

$\Psi^\dagger$  est une transformation qui agit sur chaque degré d'un polynôme en les variables  $(\xi_j, \tilde{\xi}_j)_{j \in \{0,1,2\}}$  afin d'éliminer les monômes non-résonants, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas de la forme :

$$(\xi_0 \tilde{\xi}_0)^{p_0} (\xi_1 \tilde{\xi}_1)^{p_1} (\xi_2 \tilde{\xi}_2)^{p_2}.$$

Identiquement au processus de normalisation décrit dans le chapitre 3,  $\Psi^\dagger$  peut être vue comme une composition de transformations dédiées à la normalisation à un degré donné. Une transformation élémentaire est proche de l'identité et donc définie par le transport au temps 1 du flot hamiltonien engendré par une fonction génératrice  $\mathcal{W}_{d-2}$  telle que

$$(6.51) \quad v_0 \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{d-2}}{\partial \tilde{\xi}_0} \tilde{\xi}_0 - \frac{\partial \mathcal{W}_{d-2}}{\partial \xi_0} \xi_0 \right) + v_1 \left( \frac{\partial \mathcal{W}_{d-2}}{\partial \tilde{\xi}_1} \tilde{\xi}_1 - \frac{\partial \mathcal{W}_{d-2}}{\partial \xi_1} \xi_1 \right) = \Xi_d$$

où  $\Xi_d$  contient des termes non-résonants de degré  $d$ . Cette équation étant linéaire, nous la résolvons monôme par monôme. Ainsi, en supposant

$$\Xi_d = \xi_0^{p_0} \tilde{\xi}_0^{\tilde{p}_0} \xi_1^{p_1} \tilde{\xi}_1^{\tilde{p}_1} \xi_2^{p_2} \tilde{\xi}_2^{\tilde{p}_2},$$

l'équation (6.51) est satisfaite par

$$(6.52) \quad \mathcal{W}_{d-2} = \frac{\Xi_d}{v_0(\tilde{p}_0 - p_0) + v_1(\tilde{p}_1 - p_1)}$$

qui introduit le petit diviseur  $v_0(\tilde{p}_0 - p_0) + v_1(\tilde{p}_1 - p_1)$  s'annulant lorsque  $p_j = \tilde{p}_j$  pour tout  $j \in \{0, 1\}$  ou lorsque les fréquences associées à  $v_0$  et  $v_1$  sont en résonance. Dans le premier cas,  $\Xi_d$  doit être égal à  $(\xi_0 \tilde{\xi}_0)^{p_0} (\xi_1 \tilde{\xi}_1)^{p_1} \xi_2^{p_2} \tilde{\xi}_2^{\tilde{p}_2}$  pour que le diviseur s'annule. Mais par les règles de d'Alembert, les seuls monômes impliquant un diviseur égal à zéro sont ceux tels que  $p_j = \tilde{p}_j$  pour tout  $j \in \{0, 1, 2\}$  et donc que l'on ne cherche pas à éliminer. Dans le second cas, le diviseur s'annule si les fréquences  $\nu$  et  $g_1$  sont en résonance. Pour  $L_3$ , ça ne peut arriver puisque  $v_0$  a une partie imaginaire

nulle et que  $g_1$  est non nulle. Pour  $L_4$ ,  $v_0$  et  $v_1$  sont des imaginaires pures : il peut donc exister d'éventuelles résonances. Cependant, comme

$$(6.53) \quad g_1/\nu = \sqrt{27\varepsilon M_\Sigma/m_0}/4 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

alors seules les résonances d'ordre élevé peuvent poser problème. Par conséquent, pour  $L_3$  la forme normale peut être obtenue à n'importe quel degré tandis que pour  $L_4$ ,  $\mathcal{N}$  peut être construite jusqu'à un degré élevé, typiquement  $1/\sqrt{\varepsilon}$ .

### 4.3. Discussion.

4.3.1. *La forme normale  $N$ .* Dans les coordonnées  $(\xi_j, \tilde{\xi}_j)_{j \in \{0,1,2\}}$ , la forme normale  $\mathcal{N}$  est intégrable. Nous introduisons les variables actions-angles  $(J_j, \varphi_j)_{j \in \{0,1,2\}}$  par la transformation

$$(6.54) \quad \Psi_{aa} : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \\ (J_0, \varphi_0, J_1, \varphi_1, J_2, \varphi_2, ) & \longmapsto (\tilde{\xi}_0, \xi_0, \tilde{\xi}_1, \xi_1, \tilde{\xi}_2, \xi_2) \end{cases}$$

où

$$\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T})^3 \quad \text{et} \quad \xi_j = \sqrt{J_j} e^{i\varphi_j} \quad \forall j \in \{0, 1, 2\},$$

pour  $L_4$  et

$$\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T})^2, \quad \xi_0 = \sqrt{J_0} e^{i\varphi_0} \quad \text{et} \quad \xi_j = \sqrt{J_j} e^{i\varphi_j} \quad \forall j \in \{1, 2\}$$

pour  $L_3$ .

Ainsi, nous obtenons la forme normale

$$(6.55) \quad \begin{aligned} N(J_j, \varphi_j) &:= \mathcal{N} \circ \Psi_{aa}(J_j, \varphi_j) \\ &= -iv_0 J_0 - iv_1 J_1 + \sum_{|\mathbf{p}| \geq 2} (-i)^{p_0+p_1+p_2} \gamma_{\mathbf{p}, \mathbf{p}} J_0^{p_0} J_1^{p_1} J_2^{p_2}, \end{aligned}$$

où les variables  $(J_j)_{j \in \{0,1,2\}}$  sont des intégrales premières. Par conséquent, au voisinage de  $L_4$ , l'espace des phases correspond à un feuilletage de tores invariants de dimension 3. Les solutions sont donc quasi-périodiques de fréquences fondamentales

$$\nu(J_j) = -\frac{\partial N}{\partial J_0}(J_j), \quad g_1(J_j) = -\frac{\partial N}{\partial J_1}(J_j) \quad \text{et} \quad g_2(J_j) = -\frac{\partial N}{\partial J_2}(J_j)$$

telles que

$$\nu(0, 0, 0) = \nu_{L_4}, \quad g_1(0, 0, 0) = g_{L_4,1}, \quad \text{et} \quad g_2(0, 0, 0) = g_{L_4,2}.$$

A voisinage de  $L_3$ , l'espace des phases correspond à un feuilletage de tores invariants de dimension 2. Ce sont donc des solutions quasi-périodiques instables de fréquences fondamentales

$$g_1(J_j) = -\frac{\partial N}{\partial J_1}(J_j) \quad \text{et} \quad g_2(J_j) = -\frac{\partial N}{\partial J_2}(J_j)$$

telles que

$$g_1(0, 0, 0) = g_{L_3,1} \quad \text{et} \quad g_2(0, 0, 0) = g_{L_3,2}.$$

Parmi ces solutions, nous nous focalisons sur celles périodiques à une seule fréquence. Nous définissons donc les familles  $\mathcal{F}_j = \{J_k = J_l = 0\}$  avec  $j, k, l$  distincts deux à deux.

4.3.2. *Les familles de solutions  $\mathcal{F}_j$ .* En tenant compte des symétries de la transformation  $\Psi^\dagger$ , les familles  $\mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{F}_2$  sont égales respectivement à  $\mathcal{F}_0^l$  et  $\mathcal{F}_2^l$ . Par conséquent, dans les cas de  $L_4$ ,  $\mathcal{F}_0$  est la famille d'orbites périodiques des tadpoles quasi-circulaires. Celle-ci est paramétrée par

$$(6.56) \quad z_0 = \xi_0 + f(\xi_0, \tilde{\xi}_0) \quad \text{et} \quad z_1 = z_2 = 0$$

avec  $f$  polynôme en  $(\xi_0, \tilde{\xi}_0)$  dont le terme de plus bas degré est quadratique et dont la dynamique est régie par  $\overline{H}_0$ . Par analogie au problème restreint, cette famille est équivalente à celle des orbites à longue période  $\mathcal{L}_4^l$  ou  $\mathcal{N}_{L_4}^u$  dans les problèmes complet en repère tournant et moyen. Dans le cas de  $L_3$ ,  $\mathcal{F}_0$  représente les trajectoires évoluant sur la séparatrice  $\mathcal{S}_3$  dans un voisinage de  $L_3$ .

Pour  $L_3$  et  $L_4$ ,  $\mathcal{F}_2$  est une famille de points fixes associée respectivement aux configurations  $L_3^{ecc}$  et  $L_4^{ecc}$  paramétrées par :

$$(6.57) \quad z_0 = z_1 = 0 \quad \text{et} \quad z_2 = \xi_2.$$

En outre,  $\mathcal{F}_1$  est une famille d'orbites périodiques tangente à  $\mathcal{F}_1^l$  et paramétrée par

$$(6.58) \quad z_0 = P(\xi_1 \tilde{\xi}_1), \quad z_1 = \xi_1 + \xi_1 Q(\xi_1 \tilde{\xi}_1) \quad \text{et} \quad z_2 = \xi_1 R(\xi_1 \tilde{\xi}_1)$$

où  $P, Q$  et  $R$  sont des polynômes de degré  $n$  d'une variable complexe s'annulant en zéro. Plus précisément, c'est la famille associée aux configurations anti-Lagrange  $AL_3$  et  $AL_4$ .

4.3.3. *Étude de  $AL_3$  et  $AL_4$ .* Nous rappelons que les configurations  $AL_4$  et  $AL_3$  ont été partiellement étudiées par Giuppone *et al.* (2010), Hadjidemetriou *et al.* (2009) et Hadjidemetriou et Voyatzis (2011) par l'intermédiaire d'une exploration numérique. L'originalité de notre étude vient du fait que la forme normale de Birkhoff nous permet d'obtenir toutes les informations concernant la dynamique des solutions situées à l'intérieur du domaine de validité de la transformation  $\Psi^\dagger$ . En pratique, comme la normalisation est effectuée jusqu'à un certain degré arbitrairement choisi, seul un ensemble d'orbites se situant dans le voisinage des équilibres  $L_3$  et  $L_4$  peut être entièrement décrit. Afin d'estimer cette région, nous évaluons la différence entre  $\check{\mathcal{K}}$  et  $\mathcal{N}$  telle que

$$\rho(J_j) = \frac{|\check{\mathcal{K}}(\tilde{z}_j, z_j) - N(J_j)|}{|N(J_j)|} < \varepsilon^2.$$

Sur les figures 6.6 et 6.7, nous représentons l'évolution des éléments elliptiques et fréquences fondamentales des familles  $AL_4$  et  $AL_3$  en fonction de  $e_1$ , l'excentricité de la planète 1 dans les cas d'un système de type "Soleil-Jupiter-Saturne". La forme normale a été calculée jusqu'au degré 26. Nous avons également représenté les familles  $L_4^{ecc}$  et  $L_3^{ecc}$  afin de pouvoir les comparer.

Dans le cas des orbites  $AL_4$ , le domaine de validité s'étend de  $0 \leq e_1 \leq 0.08$ , ce qui implique que  $0 \leq e_2 \leq 0.27$ . Dans la figure 6.6b, l'excentricité  $e_2$  semble évoluer linéairement. Cependant la courbe verte représentant  $e_2 - (m_1/m_2)e_1$  indique que la relation  $m_1 e_1 = m_2 e_2$  n'est valable qu'au voisinage de l'origine. Cela se

confirme dans la figure 4 de Hadjidemetriou et Voyatzis (2011) qui exhibe un changement brusque de régime lorsque les masses planétaires sont différentes. La figure 6.6a montre que les angles  $\zeta_1$  et  $\Delta\varpi - \pi$  croissent avec  $e_1$ . La figure 6.6c représente l'évolution des demi-grands axes des deux planètes. Lorsque  $e_1$  augmente,  $a_2$  croît tandis que  $a_1$  diminue en s'éloignant de  $a_* = 1$ . Ces variations en demi-grand axe sont très faibles, de l'ordre de  $\varepsilon^2$ .

En terme d'éléments orbitaux, cette étude est beaucoup plus restreinte que celle de Giuppone *et al.* (2010) puisque nous n'avons accès qu'à une petite portion de la famille  $AL_4$ . Cependant, notre étude analytique nous fournit une connaissance complète de la dynamique par l'intermédiaire des fréquences. Les figures 6.6d, e et f représentent l'évolution des fréquences  $\nu$ ,  $g_1$  et  $g_2$  le long de  $AL_4$ . La fréquence  $g_1$  est celle associée à la précession de  $\Delta\varpi$  au cours du mouvement. Dans la portion étudiée, la fréquence diminue avec l'excentricité. Les fréquences  $\nu$  et  $g_2$  caractérisent le comportement des orbites quasi-périodiques dans un voisinage infinitésimal des orbites  $AL_4$ . La fréquence  $\nu$  est d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ , augmente et semble atteindre un maximum local autour de  $e_1 = 0.08$  tandis que  $g_2$  est d'ordre  $\varepsilon^2$  et décroît.

Dans le cas de  $AL_3$ , la normalisation est valable pour  $0 \leq e_1 \leq 0.15$  ce qui implique que  $0 \leq e_2 \leq 0.55$ . Nous avons donc accès à plus d'informations pour cette famille. Comme pour  $AL_4$ , la courbe verte de la figure 6.7b indique que  $e_2$  évolue linéairement au voisinage de l'origine mais que pour des configurations plus excentriques la relation  $m_1 e_1 = m_2 e_2$  n'est plus valable. Cela se vérifie dans la figure 4 de Hadjidemetriou *et al.* (2009). Les figures 6.7a et b montrent que les angles  $\zeta_1$  et  $\Delta\varpi$  ainsi que les demi-grands axes des planètes sont constants le long de  $AL_3$ . La figure 6.7d nous indique l'évolution de la fréquence de précession de  $\Delta\varpi$  le long de  $AL_3$ . Nous constatons que la précession de la différence des longitudes des périastres s'effectue dans le sens inverse à celle pour  $AL_4$ .

Enfin, nous regardons l'évolution des fréquences pour la famille  $L_4^{ecc}$ . Les figures 6.8a et b représentent respectivement l'évolution de  $\nu$  et des  $g_j$ . Comme attendu  $g_2$  est égale à zéro puisque c'est une famille de points fixes du problème moyen. La fréquence  $g_1$  est d'ordre  $\varepsilon$  est augmentée légèrement. Il est intéressant de considérer l'évolution de la fréquence de libration  $\nu$ . En effet,  $\nu$  augmente fortement jusqu'à devenir comparable avec  $\omega = 1$  pour des valeurs d'excentricité supérieure à  $e_1 = 0.7$ . En utilisant le même critère que dans le cas des quasi-satellites, i.e.

$$(6.59) \quad \max(|\nu|, |g_1|, |g_2|) < \omega/4,$$

nous déduisons que le problème moyen ne représente plus de manière précise la famille  $L_4^{ecc}$  pour  $e_1 > 0.7$ . Ce résultat n'a rien de très étonnant puisqu'en augmentant l'excentricité le long de  $L_4^{ecc}$ , les planètes ont des passages de plus en plus proches lorsqu'elles sont au périastre.

4.3.4. *Le comportement asymptotique des différentes familles.* Pour terminer ce chapitre, nous nous focalisons sur le comportement asymptotique des différentes familles exhibées précédemment.

De la configuration équilatérale de Lagrange  $L_4$  émergent deux familles de configurations excentriques :  $L_4^{ecc}$  et  $AL_4$ . De même, la configuration alignée de Euler  $L_3$  engendre les deux familles  $L_3^{ecc}$  et  $AL_3$ . Parmi ces quatre,  $L_4^{ecc}$  est la plus connue. En effet, depuis les travaux de Gascheau (1843), nous savons que  $L_4$  et donc une partie de  $L_4^{ecc}$  est normalement stable si les masses planétaires sont suffisamment faibles telles que  $27(\tilde{m}_0\tilde{m}_1 + \tilde{m}_0\tilde{m}_2 + \tilde{m}_1\tilde{m}_2) < (\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)^2$ . En outre, le long de  $L_4^{ecc}$ , il existe une valeur critique des excentricités (qui sont égales), dépendant des masses, qui est associée à une bifurcation (Roberts, 2002; Nauenberg, 2002). Plus précisément, pour de plus hautes valeurs d'excentricités, les configurations sont normalement hyperboliques et se terminent à la collision triple avec l'étoile, où les planètes évoluent sur des segments séparés par un angle de  $60^\circ$ . C'est probablement ce mécanisme de changement de stabilité qui est en cause dans la disparition des régions stables au voisinage de  $L_4^{ecc}$ , observée dans Giuppone *et al.* (2010). Toutefois, comme la famille  $L_4^{ecc}$  se trouve dans la zone d'exclusion à haute excentricité (voir la figure 6.8), il n'est pas possible de l'affirmer par une étude dans le problème moyen.  $L_3^{ecc}$  est également bien connue : c'est une famille instable pour toute valeur d'excentricité et qui tend asymptotiquement vers la collision triple alignée.

D'après Hadjidemetriou *et al.* (2009),  $AL_3$  est entièrement instable. En particulier, cette famille présente une configuration à excentricités égales pour  $e_1 = e_2 \simeq 0.73$  et différents rapports des masses planétaires. Or comme nous l'avons mentionné dans le problème restreint (chapitre 1), cette configuration à excentricités égales existe le long de la famille  $G_{L_3,1}'$  pour une valeur similaire d'excentricité. Cela suggère donc que la configuration  $AL_3$  à excentricités égales est faiblement dépendante du rapport des masses planétaires. De plus, en rappelant que les points fixes de  $G_{L_3,1}'$  sont stables pour de faibles valeurs de l'excentricité de la planète, il est permis de se poser la question d'un changement de stabilité éventuel lorsque l'on fait tendre la masse d'une des deux planètes vers zéro. Enfin, nous mentionnons que le comportement asymptotique de  $AL_3$  n'est pas clair : pour des masses planétaires différentes, lorsque  $e_1$  tend vers 1,  $e_2$  semble tendre vers zéro alors que pour des masses égales les excentricités (qui sont égales) tendent simultanément vers 1.

Le comportement asymptotique de la famille  $AL_4$  (respectivement  $AL_5$  est le plus intéressant. En effet, les travaux de Giuppone *et al.* (2010) suggèrent que les angles  $\zeta_1$  et  $\Delta\varpi$  tendent vers  $\pi$  lorsque  $e_1$  tend vers 1. De plus, d'après Hadjidemetriou et Voyatzis (2011), il semble que  $e_1$  et  $e_2$  tendent simultanément vers 1. Par conséquent, le comportement asymptotique de  $AL_4$  et  $AL_5$  serait de tendre vers la collision triple alignée qui est également la finalité de  $L_3^{ecc}$ . De ce fait, une question qui se pose est de savoir si  $AL_4$  et  $AL_5$  sont connectées à  $L_3^{ecc}$ . Si tel est le cas, cela permettrait de construire un chemin dans l'espace des phases joignant  $L_3$  aux configurations équilatérales  $L_4$  et  $L_5$ . La question de la finalité des familles anti-Lagrange  $AL_4$ ,  $AL_5$  mais également  $AL_3$  reste donc ouverte.

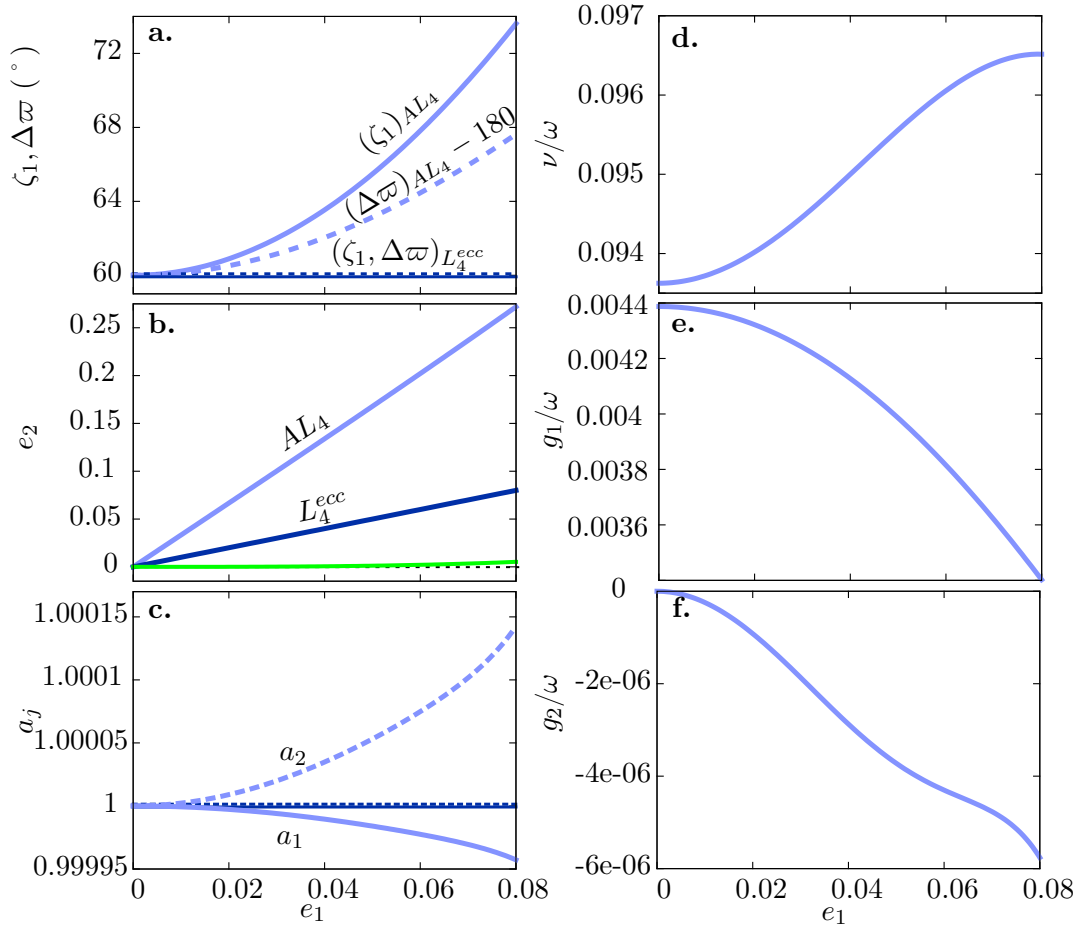


FIGURE 6.6. Évolution des éléments elliptiques (**a**, **b** et **c**) et fréquences fondamentales (**d**, **e** et **f**) en fonction de  $e_1$  le long des familles  $\mathcal{F}_1$  associée à  $AL_4$  (courbes bleu ciel) et  $\mathcal{F}_2$  associée à  $L_4^{ecc}$  (courbes bleu marine) dans le cadre d'un système Soleil-Jupiter-Saturne ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $m_1 = 1$  et  $m_2 = 3/10$ ). (**a**) Les traits continus représentent  $\zeta_1$  et les tirets,  $\Delta\varpi$ . (**b**)  $e_2$  (courbes bleu ciel et marine) et  $(e_2)_{AL_4} - e_1 m_1/m_2$  en vert. (**c**) demi-grands axes  $a_1$  en traits continus et  $a_2$  en tirets. (**d**) fréquence  $\nu$  (**e**) fréquence  $g_1$ . (**f**) fréquence  $g_2$ .

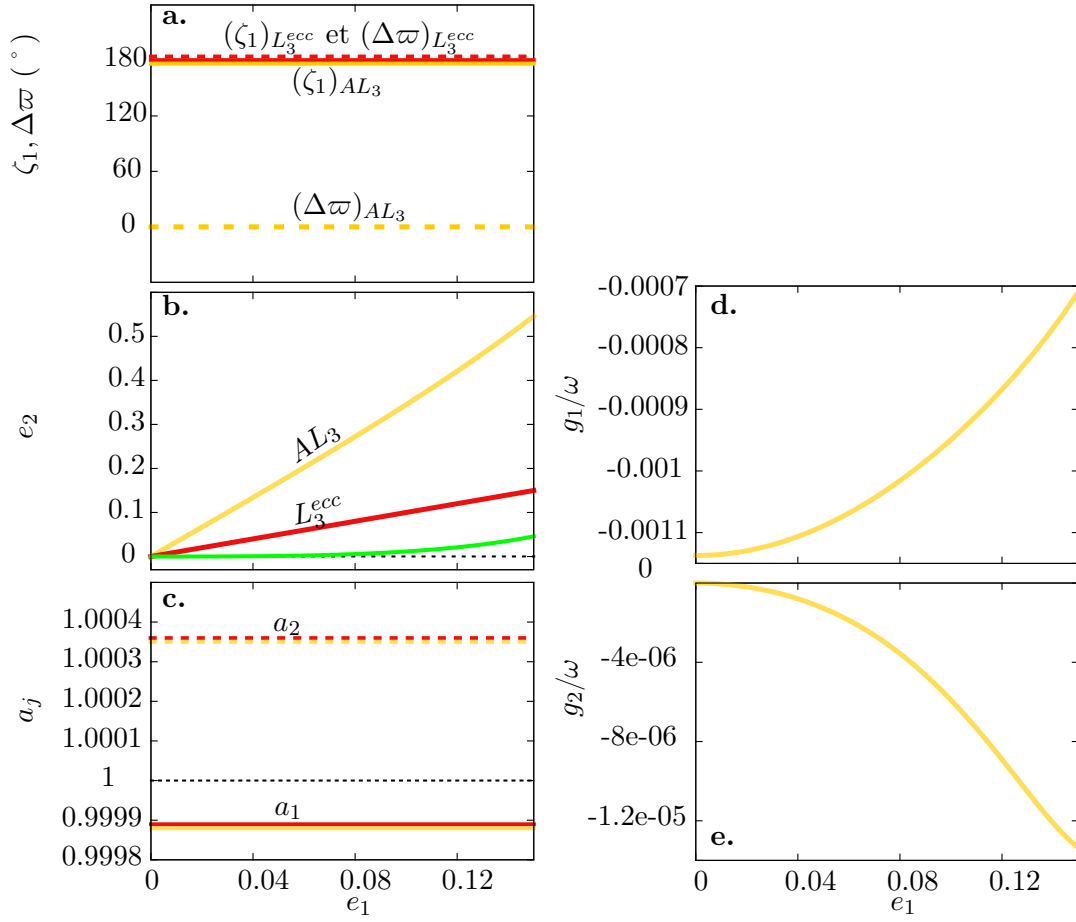


FIGURE 6.7. Évolution des éléments elliptiques (**a**, **b** et **c**) et fréquences fondamentales (**d** et **e**) en fonction de  $e_1$  le long des familles  $\mathcal{F}_1$  associée à  $AL_3$  (courbes jaune) et  $\mathcal{F}_2$  associée à  $L_3^{ecc}$  (courbes rouge) dans le cadre d'un système Soleil-Jupiter-Saturne ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $m_1 = 1$  et  $m_2 = 3/10$ ). (**a**) Les traits continus représentent  $\zeta_1$  et les traits interrompu,  $\Delta\varpi$ . (**b**)  $e_2$  (courbes rouge et jaune) et  $(e_2)_{AL_3} - e_1 m_1/m_2$  en vert. (**c**) demi-grands axes  $a_1$  en trait continu et  $a_2$  en trait interrompu. (**d**) fréquence  $g_1$ . (**e**) fréquence  $g_2$ .

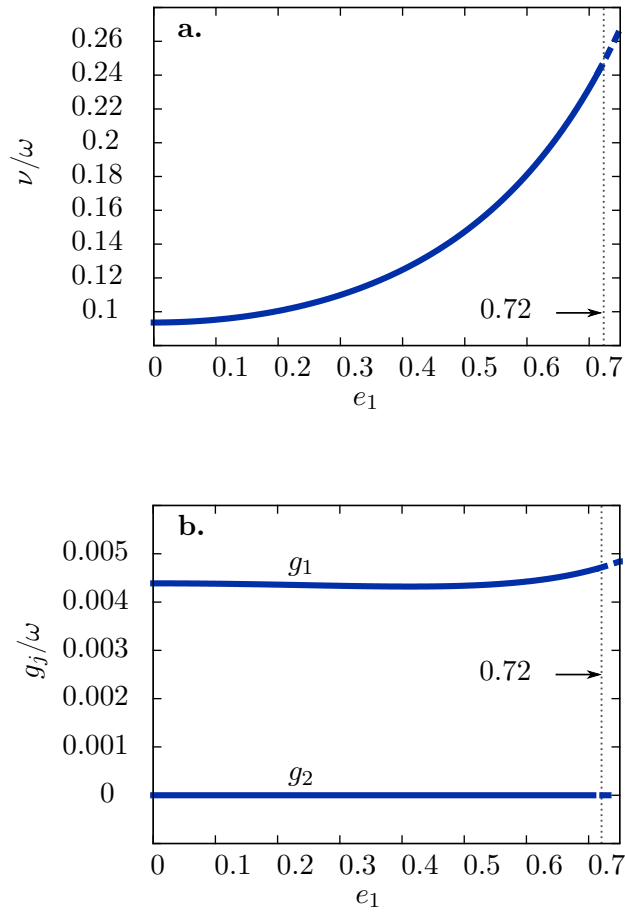


FIGURE 6.8. Dans le cadre d'un système de type "Soleil-Jupiter-Saturne" ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $m_1 = 1$  et  $m_2 = 3/10$ ), évolution des fréquences  $\nu$  (a) et  $g_j$  (b) en fonction de  $e_1$  le long de la famille  $\mathcal{F}_2$  représentant les configurations  $L_4^{ecc}$ . Pour  $e_1 \geq 0.72$ , la fréquence  $\nu$  est supérieure à  $\omega/4$  et donc  $L_4^{ecc}$  se trouve dans la zone d'exclusion.



## Les configurations quasi-satellites

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié la variété invariante des configurations quasi-circulaires à l'aide d'un développement du hamiltonien moyen en une série entière en puissance des excentricités. Or, ce type de développement ne peut fournir de résultats pour des trajectoires nécessairement excentriques comme les configurations quasi-satellites. Pour ce faire, et comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 3, il est nécessaire d'adapter le développement du hamiltonien moyen aux caractéristiques de cette dynamique. Dans cette section, nous ne cherchons pas à réaliser ce développement ; nous esquissons simplement l'idée d'une étude des configurations quasi-satellites dans le problème planétaire.

Tout d'abord, rappelons que dans le problème moyen réduit, Giuppone *et al.* (2010) ont mis en évidence une famille à un paramètre composée de points fixes stables en configuration quasi-satellite, telle que

$$(7.1) \quad \zeta_1 = \Delta\varpi - \pi = 0,$$

et qui existe tant que l'une des deux excentricités est non nulle. Ce contexte semble donc équivalent à celui de la famille de points fixes  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  dans le problème restreint moyen réduit<sup>1</sup>. Pour être plus précis dans notre analogie, énonçons la notion de problème moyen réduit dans le problème planétaire.

Dans les problèmes restreint comme planétaire, le hamiltonien moyen du cas coplanaire est invariant par l'action du groupe des rotations qui agissent dans le plan. Ainsi, il dépend uniquement des angles  $\zeta_1$  et  $\Delta\varpi$ , ce qui impose à la quantité

$$(7.2) \quad \mathcal{C} = |x_1|^2 + |x_2|^2$$

d'être une intégrale première dans le problème planétaire<sup>2</sup>. De manière équivalente, en introduisant les variables  $(P_j, \gamma_j)_{j \in \{1,2\}}$  par la transformation canonique

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta + \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{pmatrix}$$

où  $(\Gamma_j, \varpi_j)$  avec  $\Gamma_j = |x_j|^2$  sont les variables de Poincaré non-complexes,

$$\gamma_1 = \Delta\varpi,$$

---

1. voir la section 2.3 du chapitre 1.

2. voir la section 1.4 de ce chapitre.

et  $\alpha, \beta$  sont deux réels que nous ne précisons pas pour le moment, le hamiltonien moyen dans ces variables, noté  $\overline{\mathcal{H}}$ , est indépendant de  $\gamma_2$  tandis que

$$P_2 = (\alpha + \beta)^{-1}(\Gamma_1 + \Gamma_2) = (\alpha + \beta)^{-1}\mathcal{C}$$

est une intégrale première. De ce fait, en considérant  $P_2$  comme un paramètre de valeur fixée et en éliminant  $\gamma_2$ , nous nous plaçons dans le cadre du problème moyen réduit dont le hamiltonien associé, noté

$$(7.3) \quad \overline{\mathcal{H}}_{P_2}(\zeta_1, Z, \gamma_1, P_1) := \overline{\mathcal{H}}(\zeta_1, Z, \gamma_1, P_1, P_2),$$

possède deux degrés de liberté.

Dans ces variables, la famille de points fixes quasi-satellites est caractérisée par

$$\zeta_1 = \gamma_1 - \pi = 0 \quad \text{pour tout} \quad P_2 > 0.$$

En outre, par Giuppone *et al.* (2010) et Hadjidemetriou *et al.* (2009), nous savons que si les masses planétaires sont égales, alors  $e_1 = e_2$  et donc  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  le long de la famille. Ainsi, un choix judicieux pour les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  consiste à relier la variable  $P_1$  à la différence des excentricités ( $\alpha = \beta = 1$ ). Dans ce cas, la famille de points fixes quasi-satellites est caractérisée par

$$\zeta_1 = \gamma_1 - \pi = P_1 = 0 \quad \text{pour tout} \quad P_2 > 0$$

et il ne reste qu'à définir la variable associée à la différence des demi-grands axes pour obtenir la position du point fixe à  $P_2$  fixé. À masse égale, la situation est donc équivalente à celle de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  dans le problème restreint circulaire-plan.

Par analogie avec  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$ , il est très probable que la famille de points fixes quasi-satellites émerge de la singularité associée à la collision mutuelle qui est située en  $\zeta_1 = Z = P_2 = 0$ . Par conséquent, un développement du hamiltonien moyen en une série de Laurent au voisinage de cette singularité<sup>3</sup> doit fournir une expression analytique de  $\overline{\mathcal{H}}_{P_2}$  au voisinage de  $\zeta_1 = Z = \gamma_1 - \pi = P_1 = 0$  pour tout  $P_2 > 0$  et permettre de déduire la position des points fixes par une simple translation en  $Z$ . Si tel est le cas, une étude analytique de cette famille de points fixes (stabilité, fréquences) ainsi que de son voisinage (normalisation) est réalisable dans le problème planétaire. En outre, il doit être possible d'étendre la méthode au voisinage des masses planétaires égales. En particulier, cela permettrait d'étudier les configurations à excentricités égales, telles que

$$e_1 = e_2 \simeq 0.565,$$

qui semblent exister pour tout rapport des masses planétaires comme nous l'avons mentionné<sup>4</sup> dans le chapitre 1.

L'adaptation de la méthode analytique du chapitre 3 offre donc des perspectives intéressantes pour l'exploration du domaine des quasi-satellites dans le problème planétaire.

3. En particulier, nous nous attendons à ce que la méthode avec  $\sqrt{Y} = \sqrt{8P_2}$  fonctionne.

4. voir la section 3 du chapitre 1.

## Conclusion

Au chapitre 6 nous avons développé un formalisme hamiltonien adapté à la résonance co-orbitale dans le problème planétaire-plan. Dans le cadre du problème moyen nous avons mis en évidence une variété invariante, ce qui nous a permis de fournir une description complète de la dynamique des trajectoires quasi-circulaires. En particulier, nous avons retrouvé les configurations équilatérales de Lagrange,  $L_4$  et  $L_5$ , ainsi que la configuration alignée de Euler  $L_3$  d'où émerge une séparatrice délimitant les domaines des tadpoles et des fers-à-cheval.

Des indices quant à la stabilité de ces domaines d'orbites ont été obtenus. En effet, dans le domaine des tadpoles les seules résonances importantes se situent à proximité de la séparatrice. Au contraire, dans le cas des fers-à-cheval, des résonances importantes apparaissent et peuvent engendrer des comportements chaotiques. Cependant, en rappelant que ces résultats sont valables dans la limite de l'approximation du problème moyen, la stabilité des trajectoires tadpoles et fers-à-cheval restent encore à démontrer rigoureusement.

À l'aide d'une forme normale de Birkhoff, nous avons mis en évidence que les familles anti-Lagrange  $AL_4$  et  $AL_5$  et les familles de configurations équilatérales excentriques  $L_4^{ecc}$  et  $L_5^{ecc}$  bifurquent de  $L_4$  et  $L_5$ . De même, nous avons retrouvé que  $L_3$  engendre la famille de configurations alignées excentriques,  $L_3^{ecc}$ , ainsi que la famille anti-Lagrange  $AL_3$  – ou famille instable de Hadjidemetriou *et al.* (2009) – qui est une solution de seconde sorte de Poincaré et Fichot (1905).  $L_4^{ecc}$  et  $L_3^{ecc}$  sont des familles bien connues. En revanche, dans le cas des anti-Lagrange  $AL_4$ ,  $AL_5$  et  $AL_3$ , la question associée à leur terminaison reste ouverte. En particulier, nous avons mentionné la possibilité d'une rencontre entre les familles  $AL_4$ ,  $AL_5$  et  $L_3^{ecc}$  à la collision, ce qui permettrait de construire un chemin entre  $L_4$ ,  $L_5$  et  $L_3$  à travers l'espace des phases.

La méthode analytique du chapitre 6 ne permettant pas d'accéder à des domaines de dynamique nécessairement excentriques, l'étude des configurations quasi-satellites n'a pas été abordée. Toutefois, en s'appuyant sur la méthode de développement en série de Laurent présentée dans le chapitre 3, une étude de la famille de points fixes quasi-satellites de Giuppone *et al.* (2010) semble réalisable. C'est donc une perspective de travail intéressante dans l'exploration des configurations remarquables de la résonance co-orbitale.



## Conclusions et perspectives



## Conclusions et perspectives

Les résultats présentés dans cette thèse concernent deux cadres particuliers : le problème restreint circulaire-plan et le problème planétaire.

**Le problème restreint circulaire-plan.** Nous avons clarifié la différence entre les quasi-satellites et les satellites rétrogrades en donnant ainsi une définition rigoureuse de ces différentes orbites. Une limite de validité du problème moyen pour l'étude du domaine des quasi-satellites a également été fournie.

Nous avons donné un développement analytique en série de Laurent du hamiltonien dont le (grand) domaine de convergence est inclus dans le domaine des quasi-satellites : ceci donne l'accès à ces trajectoires autrement que par des méthodes numériques et ouvre la voie à des études dans des problèmes plus compliqués comme le cas excentrique-plan ou circulaire-spatial. Les bases de l'étude du cas circulaire-spatial ont été posées également et semblent promettre des résultats concernant les transitions avec les autres domaines de dynamique (tadpoles et fer-à-cheval).

Finalement, à l'aide d'une forme normale, nous avons pu dresser une carte des structures de résonance du domaine de quasi-satellites. Une accumulation de résonances d'ordre faible pour de faibles et moyennes valeurs d'excentricité a été observée. Celles-ci vont probablement contribuer à déstabiliser le domaine, notamment par des recouvrements de résonances qui peuvent apparaître sous l'effet de perturbations comme par exemple l'excentricité de la planète.

Une étude numérique globale de la dynamique à long terme est également envisagée.

**Le problème planétaire.** Nous avons construit un développement analytique à l'aide duquel nous avons pu décrire complètement la dynamique des trajectoires quasi-circulaires et expliquer également l'origine des configurations anti-Lagrange. Cette méthode n'a pas permis d'accéder au domaine des quasi-satellites. Toutefois, l'adaptation de la méthode analytique développée dans le chapitre 3 semble réalisable dans ce contexte plus général afin de saisir la famille de points fixes des quasi-satellites citée par Giuppone *et al.* (2010).

Hadjidemetriou *et al.* (2009) et Giuppone *et al.* (2010) avaient remarqué l'existence d'une configuration quasi-satellite à excentricités égales pour une valeur de 0.565 et différents rapports des masses planétaires. Dans le problème restreint, nous avons également montré que cette configuration subsiste. En outre, une ressemblance avec la famille de Broucke (1975) laisse présager un lien entre les problèmes restreint, planétaire et général pour ces configurations.

Par l'intermédiaire de la méthode analytique qui sera adaptée au problème planétaire

ainsi que d'une estimation rigoureuse de la taille du reste issu du processus de moyennisation comme développé dans Robutel *et al.* (2016), il serait alors possible de montrer rigoureusement l'existence de ces configurations.

*Doc Emmett Brown : Tout ça c'est du passé.*

*Marty McFly : Du futur, vous voulez dire.*

*Doc Emmett Brown : Si tu préfères !*

*Retour vers le futur 2, 1989.*



## Références bibliographiques



## Bibliographie

- BEAUGÉ, C. et ROIG, F. (2001) : A Semianalytical Model for the Motion of the Trojan Asteroids : Proper Elements and Families. *Icarus* **153**, 391–415.
- BENEST, D. (1974) : Effects of the Mass Ratio on the Existence of Retrograde Satellites in the Circular Plane Restricted Problem. *Astronomy & Astrophysics* **32**, 39–46.
- BENEST, D. (1975) : Effects of the mass ratio on the existence of retrograde satellites in the circular plane restricted problem. II. *Astronomy & Astrophysics* **45**, 353–363.
- BENEST, D. (1976) : Effects of the mass ratio on the existence of retrograde satellites in the circular plane restricted problem. III. *Astronomy & Astrophysics* **53**, 231–236.
- BIEN, R. (1978) : Long-period effects in the motion of Trojan asteroids and of fictitious objects at the 1/1 resonance. *Astronomy & Astrophysics* **68**, 295–301.
- BRASSER, R., INNANEN, K., CONNORS, M., VEILLET, C., WIEGERT, P. A., MIKKOLA, S. et CHODAS, P. (2004) : Transient co-orbital asteroids. *Icarus* **171**, 102–109.
- BROUCKE, R. A. (1968) : Periodic orbits in the restricted three-body problem with earth-moon masses. *JPL Technical Report*, 32-1168.
- BROUCKE, R. A. (1975) : On relative periodic solutions of the planar general three-body problem. *Celestial Mechanics* **12**, 439–462.
- BRUMBERG, V. A. (1995) : Analytical Techniques of Celestial Mechanics. *Ed. Springer*
- CHENCINER, A. et LASKAR, J. (1989) : Groupe de travail sur la lecture de : Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste (H. Poincaré). Comptes rendus du 18 et 25 février 1988, 24 mars 1988. *Notes Scientifiques et Techniques du Bureau des Longitudes* **26**.
- CHRISTOU, A. (2000) : A numerical survey of transient co-orbitals of the terrestrial planets. *Icarus* **144**, 1–20.
- CONNORS, M., CHODAS, P., MIKKOLA, S., WIEGERT, P. A., VEILLET, C. et INNANEN, K. (2002) : Discovery of an asteroid and quasi-satellite in an Earth-like horseshoe orbit. *Meteoritics & Planetary Science* **37**, 1435–1441.

- CONNORS, M., VEILLET, C., BRASSER, R., WIEGERT, P. A., CHODAS, P., MIKKOLA, S. et INNANEN, K. (2004) : Discovery of Earth's quasi-satellite. *Meteoritics & Planetary Science* **39**, 1251–1255.
- COUETDIC, J., LASKAR, J., CORREIA, A. C. M., MAYOR, M. et UDRY, S. (2010) : Dynamical stability analysis of the HD 202206 system and constraints to the planetary orbits. *Astronomy & Astrophysics* **519**, A10.
- DANIELSSON, L. et IP, W.-H. (1972) : Capture Resonance of the Asteroid 1685 Toro by the Earth. *Science* **176**, 906–907.
- DE LA FUENTE MARCOS, C. et DE LA FUENTE MARCOS, R. (2012) : Four temporary Neptune co-orbitals : (148975) 2001 XA<sub>255</sub>, (310071) 2010 KR<sub>59</sub>, (316179) 2010 EN<sub>65</sub>, and 2012 GX<sub>17</sub>. *Astronomy & Astrophysics* **547**, L2.
- DE LA FUENTE MARCOS, C. et DE LA FUENTE MARCOS, R. (2014) : Asteroid 2014 OL<sub>339</sub> : yet another Earth quasi-satellite. *Monthly Notices of the RAS* **445**, 2985–2994.
- DEPRIT, A., HENRARD, J., PALMORE, J. et PRICE, J. F. (1967) : The trojan manifold in the system Earth-Moon. *Monthly Notices of the RAS* **137**, 311–335.
- DERMOTT, S. F. et MURRAY, C. D. (1981) : The dynamics of tadpole and horseshoe orbits. I - Theory. II - The coorbital satellites of Saturn. *Icarus* **48**, 1–22.
- EDELMAN, C. (1985) : Construction of periodic orbits and capture problems. *Astronomy & Astrophysics* **145**, 454–460.
- GALLARDO, T. (2006) : Atlas of the mean motion resonances in the Solar System. *Icarus* **184**, 29–38.
- GARFINKEL, B. (1977) : Theory of the Trojan asteroids. I. *The Astronomical Journal* **82**, 368–379.
- GASCHEAU, G. (1843) : Examen d'une classe d'équations différentielles et application à un cas particulier du problème des trois corps. *C. R. Académie des Sciences de Paris* **16**, 393–394.
- GASTINEAU, M. et LASKAR, J. (2011) : Trip : A computer algebra system dedicated to celestial mechanics and perturbation series. *ACM Communication in Computer Algebra* **44(3/4)**, 194–197.
- GIUPPONE, C. A., BEAUGÉ, C., MICHTCHEIKO, T. A. et FERRAZ-MELLO, S. (2010) : Dynamics of two planets in co-orbital motion. *Monthly Notices of the RAS* **407**, 390–398.
- HADJIDEMETRIOU, J. D., PSYCHOYOS, D. et VOYATZIS, G. (2009) : The 1/1 resonance in extrasolar planetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **104**, 23–38.

- HADJIDEMETRIOU, J. D. et VOYATZIS, G. (2011) : The 1/1 resonance in extrasolar systems. Migration from planetary to satellite orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **111**, 179–199.
- HENON, M. (1965a) : Exploration numérique du problème restreint. I. Masses égales ; orbites périodiques. *Annales d'Astrophysique* **28**, 499–511.
- HENON, M. (1965b) : Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques. *Annales d'Astrophysique* **28**, 992–1007.
- HENON, M. (1969) : Numerical exploration of the restricted problem, V. *Astronomy & Astrophysics* **1**, 223–238.
- HENON, M. et GUYOT, M. (1970) : Stability of Periodic Orbits in the Restricted Problem. *Giacaglia G. E. O., Periodic Orbits Stability and Resonances*, 349–374
- JACKSON, J. (1913) : Retrograde satellite orbits. *Monthly Notices of the RAS* **74**, 62–82.
- KINOSHITA, H. et NAKAI, H. (2007) : Quasi-satellites of Jupiter. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **98**, 181–189.
- KOGAN, A. I. (1990) : Quasi-satellite orbits and their applications. *Proceedings of the 41st Congress of the International Astronautical Federation, Ed. R. Jehn. Paper*, 90–307.
- KORTENKAMP, S. J. (2005) : An efficient, low-velocity, resonant mechanism for capture of satellites by a protoplanet. *Icarus* **175**, 409–418.
- KORTENKAMP, S. J. (2013) : Trapping and dynamical evolution of interplanetary dust particles in Earth's quasi-satellite resonance. *Icarus* **226**, 1550–1558.
- LASKAR, J. (1990) : Manipulation des séries. *Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste, D. Benest & C. Froeschlé, Editions frontières*, 89–107.
- LASKAR, J. et ROBUTEL, P. (1995) : Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **62**, 193–217.
- LIDOV, M. L. et VASHKOV'YAK, M. A. (1993) : Theory of perturbations and analysis of the evolution of quasi-satellite orbits in the restricted three-body problem. *Kosmicheskie Issledovaniia* **31**, 75–99.
- LIDOV, M. L. et VASHKOV'YAK, M. A. (1994a) : On quasi-satellite orbits for experiments on refinement of the gravitation constant. *Astronomy Letters* **20**, 188–198.
- LIDOV, M. L. et VASHKOV'YAK, M. A. (1994b) : On quasi-satellite orbits in a restricted elliptic three-body problem. *Astronomy Letters* **20**, 676–690.

- MALIGE, F., ROBUTEL, P. et LASKAR, J. (2002) : Partial Reduction in the N-Body Planetary Problem using the Angular Momentum Integral. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **84**, 283–316.
- MEYER, K. R. et HALL, G. R. (1992) : Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. *Ed. Springer, Applied Mathematical Sciences*.
- MIKKOLA, S., BRASSER, R., WIEGERT, P. A. et INNANEN, K. (2004) : Asteroid 2002 VE68, a quasi-satellite of Venus. *Monthly Notices of the RAS* **351**, L63–L65.
- MIKKOLA, S. et INNANEN, K. (1997) : Orbital Stability of Planetary Quasi-Satellites. *Dvorak, R. & Henrard, J., The Dynamical Behaviour of our Planetary System*, 345–355.
- MIKKOLA, S., INNANEN, K., WIEGERT, P. A., CONNORS, M. et BRASSER, R. (2006) : Stability limits for the quasi-satellite orbit. *Monthly Notices of the RAS* **369**, 15–24.
- MOELLER, J. P. (1935) : Zwei Bahnklassen im probleme restreint. *Publikationer og mindre Meddelelser fra Kobenhavns Observatorium* **99**.
- MORAIS, M. H. M. (2001) : Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion. *Astronomy & Astrophysics* **369**, 677–689.
- MORBIDELLI, A. (2002) : Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics. *Advances in Astronomy and Astrophysics*.
- NAMOUNI, F. (1999) : Secular Interactions of Coorbiting Objects. *Icarus* **137**, 293–314.
- NAMOUNI, F., CHRISTOU, A. et MURRAY, C. (1999) : New coorbital dynamics in the solar system. *Physical Review Letters* **83**, 2506–2509.
- NAUENBERG, M. (2002) : Stability and eccentricity of periodic orbit for two planets in a 1 : 1 resonance. *The Astronomical Journal* **124**, 2332–2338.
- NESVORNÝ, D., THOMAS, F., FERRAZ-MELLO, S. et MORBIDELLI, A. (2002) : A Perturbative Treatment of The Co-Orbital Motion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **82**, 323–361.
- POINCARÉ, H. et FICHOT, E. (1905) : Leçons de mécanique céleste, cours de la faculté des Sciences de Paris, professées à la Sorbonne. *Imp. Gauthier-Villars*.
- POUSSE, A., ROBUTEL, P. et VIENNE, A. (2016) : On the co-orbital motion in the Planar Restricted Three-Body Problem : the Quasi-satellite motion revisited. *ArXiv e-prints* : 1603.06543.
- ROBERTS, G. (2002) : Linear stability of the elliptic Lagrangian triangle solutions in the three-body problem. *Journal of Differential Equations*, **182**, 191–218.

- ROBUTEL, P. (2015) : Sur la dynamique coorbitale : du mouvement des troyens de Jupiter à la rotation des planètes co-orbitales. *Dissertation présentée pour obtenir l'habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI*.
- ROBUTEL, P. et GABERN, F. (2006) : The resonant structure of Jupiter's Trojan asteroids - I. Long-term stability and diffusion. *Monthly Notices of the RAS* **372**, 1463–1482.
- ROBUTEL, P., NIEDERMAN, L. et POUSSE, A. (2015) : Rigorous treatment of the averaging process for co-orbital motions in the planetary problem. *Computational and Applied Mathematics* **35**, 675–699.
- ROBUTEL, P. et POUSSE, A. (2013) : On the co-orbital motion of two planets in quasi-circular orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **117**, 17–40.
- SIDORENKO, V. V., NEISHTADT, A. I., ARTEMYEV, A. V. et ZELENYI, L. M. (2014) : Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1 : 1 mean motion resonance : perturbative treatment. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **120**, 131–162.
- SMITH, B. A., REITSEMA, H. J., FOUNTAIN, J. W. et LARSON, S. M. (1980) : Saturn's Inner Co-Orbital Satellites. *Bulletin of the American Astronomical Society* **12**, 727.
- STRÖMGREN, E. (1933) : Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps. *Bulletin Astronomique* **9**, 87–130.
- SYNNOTT, S. P., PETERS, C. F., SMITH, B. A. et MORABITO, L. A. (1981) : Orbits of the small satellites of Saturn. *Science* **212**, 191–192.
- SZEBEHELY, V. (1967) : Theory of orbits. The restricted problem of three bodies. *Academic Press, New York*
- WAJER, P. (2009) : 2002 AA<sub>29</sub> : Earth's recurrent quasi-satellite? *Icarus* **200**, 147–153.
- WAJER, P. (2010) : Dynamical evolution of Earth's quasi-satellites : 2004 GU<sub>9</sub> and 2006 FV<sub>35</sub>. *Icarus* **209**, 488–493.
- WAJER, P. et KRÓLIKOWSKA, M. (2012) : Behavior of Jupiter Non-Trojan Co-Orbitals. *Acta Astronomica* **62**, 113–131.
- WIEGERT, P., INNANEN, K. et MIKKOLA, S. (2000) : The Stability of Quasi Satellites in the Outer Solar System. *Astronomical Journal* **119**, 1978–1984.
- WOLF, M. (1906) : Photographische Aufnahmen von kleinen Planeten. *Astronomische Nachrichten* **170**, 353.





# Annexes



## Annexes du cas excentrique-plan

### 1. L'approximation du carré de la distance mutuelle

Dans les variables  $(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varpi})$ , nous devons mettre en évidence une approximation du carré de la distance, notée  $\mathcal{Y}$ , telle que

$$(A.1) \quad \mathcal{Y} \geq 0, \quad \mathcal{Y}|_{\{\zeta_1=u=\tilde{\Gamma}=\tilde{\varpi}=0\}} = 0 \quad \text{et} \quad \left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y} \right| < \mathcal{Y},$$

afin que la série

$$(A.2) \quad \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Y}}} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{2m!}{(2^m m!)^2} \left( \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} \right)^m,$$

où  $\mathcal{X} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y}$ , converge dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$ .

Nous introduisons la distance mutuelle entre la planète et la particule dans les nouvelles variables,

$$(A.3) \quad \tilde{\Delta}(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varpi}, \zeta_2) := \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|,$$

la distance mutuelle pour  $\zeta_1 = u = 0$ ,

$$(A.4) \quad \tilde{\Delta}_0(\tilde{\Gamma}, \tilde{\varpi}, \zeta_2) := \tilde{\Delta}(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varpi}, \zeta_2),$$

et

$$(A.5) \quad \tilde{\Delta}_0^{(1)}(\tilde{\varpi}, \zeta_2) := \left( \frac{\partial \tilde{\Delta}_0}{\partial \sqrt{\tilde{\Gamma}}} \right)_{(0, \tilde{\varpi}, \zeta_2)}$$

tel que  $\sqrt{\tilde{\Gamma}} \tilde{\Delta}_0^{(1)}$  est l'approximation au premier ordre en  $\sqrt{\tilde{\Gamma}}$  de la distance mutuelle en  $\zeta_1 = u = 0$ , alors en supposant que  $\|(\zeta_1, u)\| = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\Gamma}^3})$ , il existe une constante  $C_0 \in \mathbb{R}_+$  telle que :

$$\left| (\tilde{\Delta}_0)^2 - (\sqrt{\tilde{\Gamma}} \tilde{\Delta}_0^{(1)})^2 \right| + \left| (\tilde{\Delta})^2 - (\tilde{\Delta}_0)^2 \right| \leq C_0 \sqrt{\tilde{\Gamma}^3}.$$

De plus, en rappelant que  $\Delta(\zeta_1, u, \Gamma, \zeta_2 - \varpi)$  est égale à la distance mutuelle entre la particule et la planète sur une orbite circulaire<sup>1</sup>, le carré de la distance mutuelle dans les nouvelles variables peut être décomposé comme :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 &= (\Delta \circ \mathcal{T})^2 + \underbrace{(\tilde{\Delta})^2 - (\Delta \circ \mathcal{T})^2}_{\mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\Gamma}})} \\ &= (\Delta)^2 + \underbrace{(\Delta \circ \mathcal{T})^2 - (\Delta)^2}_{\mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\Gamma}})} + \underbrace{(\tilde{\Delta})^2 - (\Delta \circ \mathcal{T})^2}_{\mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\Gamma}})}. \end{aligned}$$

1. voir la section 2.1 du chapitre 3.

De ce fait, en définissant la fonction  $f := (\tilde{\Delta})^2 - (\Delta)^2$ , qui est d'ordre  $\sqrt{\Gamma'}$ , nous avons

$$(\tilde{\Delta}_0^{(1)})_{(\tilde{\omega}, \zeta_2)}^2 = (\Delta_0^{(1)})_{(\zeta_2 - \tilde{\omega})}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{\Gamma}} \right)_{(0,0,0,\tilde{\omega},\zeta_2)}$$

où  $\Delta_0^{(1)} = \sqrt{8 - 6 \cos^2(\zeta_2 - \tilde{\omega})}$ . En outre, il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$\left| (\tilde{\Delta}_0^{(1)})^2 - (\Delta_0^{(1)})^2 \right| \leq C_1 \sqrt{\Gamma'}.$$

Donc, en posant  $C_2 := C_0 + C_1 \sqrt{\Gamma'}$ , nous obtenons la majoration :

$$\tilde{\Gamma} \left| (\tilde{\Delta}_0^{(1)})^2 - (\Delta_0^{(1)})^2 \right| + \left| (\tilde{\Delta}_0)^2 - (\sqrt{\tilde{\Gamma}} \tilde{\Delta}_0^{(1)})^2 \right| + \left| (\tilde{\Delta})^2 - (\tilde{\Delta}_0)^2 \right| \leq C_2 \tilde{\Gamma}.$$

Par conséquent, dans un voisinage de  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$  tel que  $\|(\zeta_1, u)\| = \mathcal{O}(\sqrt{\tilde{\Gamma}^3})$  et  $C_2 < 2$ , nous avons

$$\left| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - 8\tilde{\Gamma} \right| \leq 8\tilde{\Gamma}.$$

En posant

$$(A.6) \quad \sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{\tilde{\Gamma}} \Delta_{0 \max}^{(1)} = \sqrt{8\tilde{\Gamma}}$$

les conditions (A.1) sont donc satisfaites.

## 2. Propriétés de la série de Laurent associée à $\tilde{H}'_P$

Dans cette section, nous construisons la série de Laurent de l'équation (A.2) pour  $\sqrt{\mathcal{Y}} = \sqrt{8\tilde{\Gamma}}$ .

Posons :  $\mathcal{X} = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2 - 8\tilde{\Gamma}$ . Dans les variables  $(\zeta_1, u, \tilde{\Gamma}, \tilde{\omega}, \zeta_2)$ , en développant le carré de la distance mutuelle au voisinage de  $\zeta_1 = u = \tilde{\Gamma} = 0$ , nous obtenons

$$\mathcal{X} = \sum_{d \geq 0} \sum_{n' \geq 0} \mathcal{X}_{n'}^d,$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{X}^0 = & \left( \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathbf{0}, \mathbf{n}, \mathbf{k}}^* \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\tilde{\Gamma}'}^{n'} e^{ik' \tilde{\omega}} e^{ik(\zeta_2 - \tilde{\omega})} \right) - 8\tilde{\Gamma} \\ \mathcal{X}^d = & \sum_{|\mathbf{d}|=d} \left( \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{k}}^* \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\tilde{\Gamma}'}^{n'} e^{ik' \tilde{\omega}} e^{ik(\zeta_2 - \tilde{\omega})} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2} \end{cases}$$

avec  $\mathcal{A}_{\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{k}}^* \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{n} = (n, n') \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{k} = (k, k') \in \mathbb{Z}^2$  et les règles de d'Alembert :

$$\mathcal{D} = \left\{ (\mathbf{k}, \mathbf{n}) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n + n' + k = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } |k'| \leq n' \right\}.$$

De ce fait,

$$(A.7) \quad A = \frac{1}{\sqrt{8\tilde{\Gamma}}} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{2m!}{(2^m m!)^2} \left( \frac{\mathcal{X}}{8\tilde{\Gamma}} \right)^m$$

est une série de Laurent en  $\sqrt{\tilde{\Gamma}}$  qui se développe telle que

$$A = \sum_{d \geq 0} A^d,$$

où

$$A^d = \sum_{|\mathbf{d}|=d} \left( \sum_{\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{k}} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\Gamma'}^{n'} e^{ik'\tilde{\omega}} e^{ik(\zeta_2 - \tilde{\omega})} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

avec  $\mathcal{A}_{\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{n} = (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$  et les relations

$$\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|} = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{n}, \mathbf{k}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } n + n' + k = 1 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, |k'| \leq n' \\ \text{et } n \geq -(|\mathbf{d}| + 1) \end{array} \right\}.$$

qui sont obtenues par le même raisonnement que dans le cas circulaire-plan<sup>2</sup>. En dehors de la collision avec l'étoile,

$$B = - \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} + \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle}{\|\mathbf{r}'\|^3} \right)$$

est représenté par la série

$$\sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{k}} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\Gamma'}^{n'} e^{ik'\tilde{\omega}} e^{ik(\zeta_2 - \tilde{\omega})} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2},$$

où  $\mathcal{B}_{\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$  et  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$ .

La série de Laurent associée à  $H'_P$  est donc égale à :

$$-\varepsilon \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\mathcal{S}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},\mathbf{n},\mathbf{k}} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\Gamma'}^{n'} e^{ik'\tilde{\omega}} e^{ik\zeta_2} + \sum_{\mathcal{D}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},\mathbf{n},(0,k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\Gamma'}^{n'} e^{ik'\tilde{\omega}} e^{ik\zeta_2} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}.$$

En ignorant les termes tels que  $k \neq 0$ , nous déduisons la série de Laurent associée à la partie perturbatrice

$$(A.8) \quad \tilde{H}'_P := \overline{H}'_P \circ \mathcal{T}.$$

Celle-ci est égale à :

$$(A.9) \quad -\varepsilon \sum_{|\mathbf{d}| \geq 0} \left( \sum_{\overline{\mathcal{S}}_{|\mathbf{d}|}} \mathcal{A}_{\mathbf{d},\mathbf{n},(0,k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\Gamma'}^{n'} e^{ik'\tilde{\omega}} + \sum_{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{B}_{\mathbf{d},\mathbf{n},(0,k')} \sqrt{\tilde{\Gamma}}^n \sqrt{\Gamma'}^{n'} e^{ik'\tilde{\omega}} \right) \zeta_1^{d_1} u^{d_2},$$

où

$$(A.10) \quad \overline{\mathcal{D}} = \left\{ (\mathbf{n}, k') \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z} \text{ tels que } n + n' = 0 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ et } |k'| \leq n' \right\}$$

correspond aux règles de d'Alembert dans le problème moyen excentrique-plan et

$$(A.11) \quad \overline{\mathcal{S}}_{|\mathbf{d}|} = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{n}, k') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } n + n' + k = 1 \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ |k'| \leq n' \text{ et } n \geq -(|\mathbf{d}| + 1) \end{array} \right\}$$

est associé aux relations issues du développement en série de Laurent.

---

2. Voir la section 2.3 du chapitre 3.



## Nomenclature des configurations remarquables

### Dans le cas circulaire-plan du problème restreint.

$\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  est une famille de points fixes du problème moyen réduit paramétrée par  $e_0$ , c'est-à-dire l'excentricité de l'orbite lorsque les demi-grands axes de la particule et de la planète sont égaux. De manière équivalente, dans le problème moyen  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  est une famille d'orbites périodiques de fréquence  $g$  associée à la précession de la longitude du périastre. La partie de la famille située en dehors de la zone d'exclusion du problème moyen correspond à la famille  $f$  de Henon (1969) dans le repère tournant avec la planète. En outre, elle appartient au domaine des quasi-satellites de type héliocentrique.

$G_{QS}$  est un point fixe appartenant à  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  tel que  $g = 0$ . Dans le problème moyen,  $G_{QS}$  forme un ensemble, ou "cercle", de points fixes dégénérés. En outre, dans le cas excentrique-plan  $G_{QS}$  engendre deux familles de points fixes paramétrées par l'excentricité de la planète : une stable, notée  $G_{QS,1}'$ , et une instable,  $G_{QS,2}'$ . Dans le problème planétaire, la configuration de  $G_{QS,1}'$  correspond à celle de la famille stable de Hadjidemetriou *et al.* (2009) ainsi qu'à la famille de points fixes QS dans Giuppone *et al.* (2010).

Dans le repère tournant avec la planète, la famille  $f$  de Henon (1969) est la famille d'orbites satellites rétrogrades simplement périodiques et symétriques, paramétrée par la constante de Jacobi. Elle est stable pour  $\varepsilon < 0.0477$  et s'étend du voisinage infinitésimal de la planète jusqu'à une orbite de collision avec l'étoile. Elle correspond à la partie de la famille  $\mathcal{G}_{QS}^{e_0}$  située en dehors de la zone d'exclusion du problème moyen. Dans ce cas, la fréquence associée à ces orbites est égale à  $1 - g$  où  $1$  est le moyen mouvement de la planète tandis que  $g$  est la fréquence de précession de la longitude du périastre.

La famille  $f$  possède deux orbites particulières dont les fréquences fondamentales sont en résonance  $1/3$ . De ce fait, ces orbites décomposent le voisinage de la famille en trois différents domaines de dynamique. Le domaine de trajectoires situées à proximité de la planète et délimité par la sphère de Hill représente les satellites rétrogrades "satellisés" (noté sRS). Le domaine contenant les trajectoires les plus éloignées de la planète est de type "quasi-satellite héliocentrique" (noté QS<sub>h</sub>). C'est ce domaine qui est accessible dans le problème moyen. Le domaine de trajectoires située entre sRS et QS<sub>h</sub> correspond aux quasi-satellites de type binaire (noté QS<sub>b</sub>).

$\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  sont des familles de points fixes du problème moyen réduit qui émergent de la configuration de Euler  $L_3$  et des configurations de Lagrange  $L_4$  et  $L_5$ . Dans le problème moyen, ce sont des familles d'orbites périodiques de fréquence  $g$  associée à la précession de la longitude du périastre.  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$ , qui sont des orbites stables, se terminent sur une orbite de la  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$  qui bifurque et devient stable. Dans le repère tournant avec la planète, elles correspondent aux familles d'orbites périodiques à courte période, notées  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_4^s$  et  $\mathcal{L}_5^s$ , dont la fréquence est  $1 - g$ .

$G_{L_3}$ ,  $G_{L_4}$  et  $G_{L_5}$  sont des points fixes appartenant à  $\mathcal{G}_{L_3}^{e_0}$ ,  $\mathcal{G}_{L_4}^{e_0}$  et  $\mathcal{G}_{L_5}^{e_0}$  tels que  $g = 0$ . Dans le problème moyen,  $G_{L_3}$ ,  $G_{L_4}$  et  $G_{L_5}$  forment des "cercles" de points fixes dégénérés. En outre, dans le cas excentrique-plan,  $G_{L_3}$ ,  $G_{L_4}$  et  $G_{L_5}$  engendrent respectivement deux familles de points fixes paramétrées par l'excentricité de la planète :  $G_{L_3,1}^{e'}$ ,  $G_{L_4,1}^{e'}$  et  $G_{L_5,1}^{e'}$  et  $G_{L_3,2}^{e'}$ ,  $G_{L_4,2}^{e'}$  et  $G_{L_5,2}^{e'}$ . Les trois premières sont stables dans un voisinage de  $G_{L_3}$ ,  $G_{L_4}$  et  $G_{L_5}$  tandis que les trois dernières sont instables. Dans le problème planétaire, la configuration de  $G_{L_3,1}^{e'}$  correspond à la famille instable de Hadjidemetriou *et al.* (2009).

Dans les problèmes moyen et moyen réduit,  $\mathcal{N}_{L_4}^u$  et  $\mathcal{N}_{L_5}^u$  sont des familles d'orbites périodiques qui émergent de  $L_4$  et  $L_5$ , et sont de fréquence  $\nu$  associée à la libration autour de ces équilibres. Plus précisément, ce sont des trajectoires quasi-circulaires de type "tadpole". Dans le repère tournant avec la planète, elles correspondent aux familles d'orbites périodiques à longue période, notées  $\mathcal{L}_4^l$  et  $\mathcal{L}_5^l$ . Dans le problème planétaire moyen, elles sont associées aux familles d'orbites périodiques notées  $\mathcal{F}_0$  qui émergent de  $L_4$  et  $L_5$ .

### Dans le problème planétaire.

Dans le problème moyen,  $AL_4$  et  $AL_5$  sont les familles d'orbites périodiques "anti-Lagrange" qui émergent de  $L_4$  et  $L_5$ . Leur fréquence associée est notée  $g_1$  et correspond à la précession de la différence des longitudes du périastre des deux planètes. En outre,  $AL_4$  et  $AL_5$  sont deux familles de points fixes stables dans le problème moyen réduit.

Dans les problèmes moyen et moyen réduit,  $L_4^{ecc}$  et  $L_5^{ecc}$  sont les familles de points fixes stables qui émergent de  $L_4$  et  $L_5$ . Plus précisément,  $L_4^{ecc}$  et  $L_5^{ecc}$  correspondent aux équilibres équilatéraux excentriques, également appelées configurations homothétiques.

Dans le problème moyen,  $AL_3$  est une famille d'orbites périodiques qui émerge de  $L_3$ . Plus précisément, c'est la famille instable de Hadjidemetriou *et al.* (2009). En outre,  $AL_3$  est une famille de points fixes instables dans le problème moyen réduit.



Dans les problèmes moyen et moyen réduit,  $L_3^{ecc}$  est une famille de points fixes instables qui émerge de  $L_3$ . Plus précisément,  $L_3^{ecc}$  correspond aux configurations  $L_3$  excentriques.

*Et c'est la première mesure de ma vie d'après  
Et ça fait 15 ans qu'tout le monde se dit "ça va lui passer"  
Mais si t'écoutes les personnes qui dorment les rêves n'arrivent jamais  
J'veux pas vieillir blasé à 50 piges passées, l'envie d'claquer  
Alors j'lâcherai mes derniers flows jusqu'à finir déshydraté  
Et si l'envie d'tout foutre en l'air se pointe dis lui d'rappeller  
Si jamais la cabine explose j'rapperais même sous une pluie d'acier  
J'finirai d'écrire en m'entaillant les veines sur une vitre cassée  
Si la mort frappe à ma porte me dit "T'es dans mes p'tits papiers"  
Dis-lui d'revenir après, dis-lui d'jarter, dis-lui d'venir backer  
Ou laisse moi lui dire "Ferme ta gueule j'ai pas fini d'rappier  
J'partirai jamais en laissant l'histoire inachevée"*

*Inachevé, Les Casseurs Flowters, 2016.*