

Observatoire de Paris
Ecole Doctorale d'Astronomie et Astrophysique d'Ile-de-France

Thèse de doctorat
Astronomie et Astrophysique

Modèle de satellite à trois couches
élastiques : application à la libration en
longitude de Titan et Mimas

par
ANDY RICHARD

Directeurs de thèse :
Jacques Laskar et **Nicolas Rambaux**

soutenue le 22 octobre 2014

devant le jury composé de :

Marianne GREFF-LEFFTZ	Rapporteur
Jacques LASKAR	Directeur de thèse
Anne LEMAÎTRE	Rapporteur
Nicolas RAMBAUX	Directeur de thèse
Bruno SICARDY	Président du jury
Gabriel TOBIE	Examineur
Tim VAN HOOLST	Examineur



A Blaise Pascal qui disait que « le silence éternel des espaces infinis l'effrayait », je répondrai que c'est exactement l'éternité de l'espace qui a permis la complexité moléculaire dont nous sommes faits. Nous sommes les enfants des silences éternels et des espaces infinis.

Alexandre Astier

Résumé

Un grand nombre de satellites naturels du système solaire sont en rotation synchrone, c'est-à-dire que leur rotation s'effectue avec une période égale à leur période de révolution. Les librations en longitude peuvent alors être définies comme étant les variations autour de la rotation uniforme du satellite. Elles sont forcées par le couple gravitationnel exercé par la planète sur le satellite et leurs amplitudes dépendent de la structure interne du satellite. Les récentes observations de la sonde Cassini, en orbite dans le système de Saturne depuis 2004, ont permis de montrer que Titan possède sans doute un océan interne, une particularité de certains satellites de glace déjà détectée notamment sur Europe. L'étude des librations se tourne actuellement vers ces corps glacés afin d'identifier la signature d'un océan dans la dynamique rotationnelle des corps. Cette thèse a pour objectif de construire un modèle de libration pour les satellites de glace possédant une structure à trois couches élastiques. Dans la première partie, nous avons construit un modèle de libration tenant compte de l'orbite non-Képlérienne du satellite, des déformations élastiques des couches solides sous l'influence des forces de marées de la planète, ainsi que, dans le cas de Titan, du couplage exercé par l'atmosphère. Les librations de Titan sont étudiées dans la seconde partie. Les résultats obtenus montrent que la prise en compte des déformations élastiques de marées des différentes couches de Titan réduit l'amplitude de la libration à la fréquence orbitale au même ordre de grandeur que celle d'un corps solide, rendant difficile la détection d'un océan interne. Les librations les plus importantes sont associées à des oscillations saisonnières dont l'amplitude ne dépend qu'au second ordre de la structure interne. Finalement, l'atmosphère de Titan ne contribue que pour quelques pourcents à la libration saisonnière, la principale composante de cette libration étant due à la perturbation orbitale liée au mouvement de Saturne autour du Soleil. Finalement, dans la troisième partie nous appliquons le modèle de libration à Mimas. Les librations de ce satellite ont été récemment observées, avec une amplitude de libration à la fréquence orbitale deux fois supérieure à celle attendue pour un modèle solide. En incluant un océan interne sous la surface de Mimas, nous montrons que l'amplitude observée est retrouvée. Ce résultat apporte un nouveau scénario sur la structure interne de Mimas et de nouvelles interrogations sur sa formation.

Abstract

Most of the natural satellites in the Solar System are in a state of synchronous rotation, *i.e.* their rotation and revolution have the same period. The longitudinal librations can then be defined as the variations around the uniform rotational motion of the satellite. These librations are forced by the planet gravitational torque and their amplitudes depend on the internal structure of the satellite. The recent analyses of Cassini observations, in orbit around Saturn since 2004, suggest that Titan has an internal ocean, a feature already detected on several icy satellites like Europa. The signature of an internal ocean on a satellite may be detected by studying the librational dynamics of these celestial bodies. The objectives of this thesis is to build a librational model for icy satellites with a three-layers internal structure. In the first part, we have developed a librational model including the satellite non-keplerian orbit, the tidal deformations of the solid layers and, in the case of Titan, the atmospheric torque. Titan librations are analyzed in the second part. The results show tidal deformations of the solid layers reduce the orbital frequency libration at the same order of amplitude than for a solid model. Thus the detection of the internal ocean is challenging. The most important librations

are seasonal oscillations with only a second order dependence on the internal structure. Finally, Titan's atmosphere contributes for only a few percent to the seasonal libration, its main component being due to the orbital perturbation associated to the motion of Saturn around the Sun. In the thir part, we apply the librational model to Mimas. The librations of this satellite have been recently observed, with a orbital frequency libration amplitude being twice the one predicted by a solid model. By including an internal ocean on Mimas, we obtain a libration amplitude in agreement with the observations. This result bring a new scenario for the internal structure of Mimas and new questions on its formation.

Remerciements

Les personnes que je tiens à remercier pour leur soutien durant cette thèse et les années qui les ont précédées sont nombreuses. J'en oublierai certainement beaucoup mais ce n'est pas par ingratitude.

Je tiens à remercier en premier mes directeurs de thèse, Nicolas Rambaux et Jacques Laskar. Merci à Nicolas qui m'a proposé ce sujet de thèse et m'a accompagné durant ces trois ans de travail. Son perfectionnisme et sa rigueur scientifique m'ont beaucoup appris sur les qualités d'un bon physicien, et j'espère un jour parvenir à appliquer cette même rigueur dans tous mes travaux. Merci à Jacques qui a posé son regard bienveillant sur mes travaux et m'a apporté de précieux conseils pour sans cesse améliorer mes méthodes. Le travail auprès ce grand astronome est une source d'enrichissement scientifique sans égale.

Je remercie également les membres du jury d'évaluation de cette thèse, Marianne Greff-Lefftz, Anne Lemaître, Bruno Sicardy, Gabriel Tobie et Tim Van Hoolst qui ont accepté d'apporter leur regard critique sur ces travaux. Leurs questions et discussions sur le contenu de cette thèse est une source d'améliorations et d'études pour les prochaines années. Je remercie Gwenaël Boué, Mickael Gastineau, Philippe Robutel, Alain Vienne et Jean-Louis Simon pour leurs précieux éclaircissements sur des sujets parfois obscurs. Je remercie d'ailleurs l'ensemble de l'IMCCE pour son accueil et sa bonne humeur. Je remercie en particulier Valéry Lainey qui a accepté de partager un bureau avec moi durant la majeure partie de ma thèse et qui ne s'est pas effrayé de mes silences. Sa gentillesse et son humour font de lui un "co-bureau" idéal en plus d'un chercheur admirable. Je remercie également Benjamin Charnay pour nos échanges et nos discussions sur les effets de l'atmosphère de Titan.

Je remercie Denis Savoie, Sébastien Fontaine et l'ensemble de l'équipe d'astronomie du Palais de la Découverte pour m'avoir donné l'opportunité de diffuser quelques notions scientifiques auprès du public. Cette expérience fut extrêmement enrichissante d'un point de vue personnel et professionnel.

Je remercie également mes amis bretons Romuald, Nadège, et Yann qui ont été présents depuis bien longtemps pour certains et qui continuent d'être présents aujourd'hui malgré la distance. Je remercie Edouard, Alexandre, Jessica et Jean pour avoir accompagné ma vie de thésard à l'Observatoire au quotidien et partager de nombreux moments autour d'un café où d'une assiette. Merci à Claire-Line, Baptiste, Elise et Chloé, qui nous rappelle que le monde ne tourne pas autour de l'astronomie lorsque l'on quitte l'Observatoire. Je remercie également Aurélie, Vanessa, Justine et tout ceux qui étaient présents le 22 octobre pour leur aide et leur présence à la soutenance. Merci à Isabelle et sa famille pour leur soutien lors de mon arrivée à Paris. Je remercie également les amis les plus lointains qui ont accompagné mon parcours depuis la maternelle pour certains et depuis le doctorat pour d'autres. Il est parfois difficile de quitter l'astronomie en leur compagnie, mais les bons moments sont nombreux.

Les proches passent en dernier mais leur importance n'est pas moindre. Je remercie tout d'abord ma famille. Merci à mes parents qui ont toujours été derrière moi durant mes études malgré les différents changements d'orientation sans jamais remettre en question la finalité. Je vous dois tout et cette thèse est pour vous. Merci à Eric et Aurore pour leur soutien indéfectible et leur présence à mes côtés même lorsque les déménagements ont créé de la distance. J'espère que vous êtes aussi fier de moi que je ne le suis de vous. Merci à Chonch pour sa bonne humeur communicative. Merci à toute la famille Chassignol, père, mère et filles, pour leur accueil chaleureux et leur aide précieuse. Enfin je remercie particulièrement Audrey, qui m'a

tant apporté durant la dernière année de thèse. Son sourire, sa patience et son affection étaient une lueur dans les moments de doute. Sa présence est aussi indispensable que le brouillard de la Colline Silencieuse.

Sommaire

Nomenclature	1
Introduction	3
I Librations d'un corps à trois couches	9
1 Equations de la dynamique librationnelle	11
1.1 Définition des librations	12
1.1.1 Librations optiques	12
1.1.2 Etats de Cassini	12
1.1.3 Librations physiques	15
1.2 Equations d'Euler-Liouville	17
1.2.1 Variation du moment cinétique	18
1.2.2 Dynamique d'un corps à trois couches	20
2 Forme et inertie du satellite	23
2.1 Forme du satellite	23
2.1.1 Forme d'équilibre	23
2.1.2 Equation de Clairaut	25
2.1.3 Forme dynamique	25
2.2 Moments d'inertie du satellite	26
3 Couples et déformations	29
3.1 Couples de forces	29
3.1.1 Couplage gravitationnel avec la planète	29
3.1.2 Couplage gravitationnel interne	33
3.1.3 Couplage de pression et couplage inertiel	37
3.1.4 Couplage atmosphérique	40
3.1.5 Couple total exercé sur les couches	42
3.2 Déformations élastiques	44
3.2.1 Formalisme de Love	44
3.2.2 Coefficients de déformation	46
3.2.3 Bourelets de marée périodiques	48

II	Etude des librations en longitude de Titan	51
4	Présentation et modèles de Titan	53
4.1	Description de Titan	53
4.1.1	Observations	54
4.1.2	Champ de gravité	56
4.1.3	Océan interne	57
4.2	Modèles d'intérieur et d'atmosphère	59
4.2.1	Composition de l'hydrosphère	60
4.2.2	Composition du noyau	60
4.2.3	Modèles étudiés	62
4.2.4	Modèles d'atmosphère	62
5	Mouvement orbital de Titan	69
5.1	Ephéméride Horizons	70
5.2	Ephéméride TASS	74
5.3	Identification des fréquences	75
6	Solutions de la libration	81
6.1	Librations pour un modèle rigide	81
6.1.1	Solutions forcées de la libration rigide	82
6.1.2	Analyse des solutions	86
6.1.3	Application aux modèles	88
6.2	Librations pour un modèle élastique	92
6.2.1	Solution de la libration élastique	92
6.2.2	Application aux modèles de Titan	100
6.3	Comparaisons et études complémentaires	103
6.3.1	Cas rigide	103
6.3.2	Cas élastique	104
6.3.3	Cas visco-élastique	108
6.4	Résumé	110
III	Etude des librations en longitude de Mimas	111
7	Présentation et mouvement orbital de Mimas	113
7.1	Description de Mimas	113
7.2	Analyse de l'orbite	116
8	Librations de Mimas	119
8.1	Observations	119
8.2	Modèles rigides	120
8.3	Modèles élastiques	120
8.4	Résumé	122
	Conclusion	123
A	Axes de Tisserand	127

B	Polynomes de Legendre	129
B.1	Equation de Legendre	129
B.2	Polynômes de Legendre	130
B.3	Fonctions associées de Legendre	130
C	Harmoniques sphériques	133
D	Coefficients du champ de gravité	135
D.1	Coefficients de Stokes	135
D.2	Composantes statiques et élastiques	136
D.3	Relation hydrostatique	138
E	Equation de Clairaut	139
F	Equation de Darwin-Radau	143
G	Matrices de rotation	147
	Liste des publications	147

Nomenclature

Ψ, Θ, Φ	Angles d'Euler
Ω	Longitude du noeud ascendant de l'orbite
I	Inclinaison de l'équateur par rapport au repère inertiel
f	Anomalie vraie
ν	Longitude vraie
M	Anomalie moyenne
L	Longitude moyenne
a	Demi-grand axe de l'orbite
e	Excentricité de l'orbite
n	Moyen mouvement
N	Moyen mouvement moyen
ω	Argument du péricentre de l'orbite
i	Inclinaison de l'orbite par rapport au repère inertiel
ϵ	Obliquité
ϕ	Longitude
θ	Colatitute
λ	Angle de rotation du corps
$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$	Repère inertiel
$(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$	Repère des axes de Tisserand centré sur le centre de masse
σ, ρ, γ	Angles de libration physique
\mathbf{H}^l	Moment cinétique de la couche l
$\mathbf{\Gamma}^l$	Couple de force exercé sur la couche l
$\mathbf{\Gamma}_j^l$	Composantes du couple de force exercé sur la couche l
$\mathbf{\Gamma}_{ext}$	Couple gravitationnel exercé par la planète
$\mathbf{\Gamma}_{int}$	Couple gravitationnel interne
$\mathbf{\Gamma}_{pre}$	Couple de pression
$\mathbf{\Gamma}_{atm}$	Couple atmosphérique
ρ_l	Densité de la couche l
\mathbf{r}	Rayon vecteur entre les centres de masse de la planète et du satellite
\mathbf{r}'	Rayon vecteur d'un point du satellite
\mathbf{v}'	Vitesse d'un point du satellite
x', y', z'	Coordonnées Cartésiennes d'un point du satellite
\mathbf{r}''	Rayon vecteur d'un point situé à l'intérieur d'une couche du satellite
v_o^l	Vitesse d'une couche dans le repère inertiel
v^l	Vitesse d'une couche dans le repère des axes de Tisserand

R	Rayon moyen du satellite
M_s	Masse du satellite
M_p	Masse de la planète
\mathbf{u}	Vecteur unitaire directeur de la planète
\mathcal{I}	Tenseur d'inertie
$\boldsymbol{\omega}$	Vecteur de rotation
ω_j	Composantes du vecteur de rotation
$\boldsymbol{\omega}^l$	Vecteur de rotation relatif
ω_j^l	Composantes du vecteur de rotation relatif
V'	Volume du satellite
V'_c	Volume d'une coquille
I_{ij}^l	Moments d'inertie de la couche l
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
I	Moment d'inertie du corps
A, B, C	Moments d'inertie statiques
A', B', C'	Incréments d'inertie statiques dus à la pression
c_{ij}	Moments d'inertie dynamiques
a', b', c'	Principaux axes de l'ellipsoïde
α	Aplatissement polaire
β	Aplatissement équatorial
Y_n^m	Harmonique sphérique de degré n et d'ordre m
P_n^m	Fonctions associées de Legendre
P_n	Polynômes de Legendre
r'_o	Rayon de la sphère équivalente à la surface r'
u_r	Déformation radiale de la sphère
d_{ij}, e_{ij}	Coefficients de déformation
$\bar{d}_{ij}, \bar{e}_{ij}$	Coefficients des déformations statiques
$\tilde{d}_{ij}, \tilde{e}_{ij}$	Coefficients des déformations dynamiques
h_f, k_f	Nombres de Love fluide
h_2, k_2, l_2	Nombres de Love de degré 2
$H(r_l), K(r_l)$	Fonction de déformation de la surface r_l égaux aux nombres de Love en surface
F	Force appliquée au corps
F_{ext}	Force gravitationnelle à l'extérieur du corps
W	Potentiel gravitationnel du corps
W_2	Potentiel perturbateur d'ordre 2
W_{ext}	Potentiel gravitationnel externe
W_{int}	Potentiel gravitationnel interne
W_c	Potentiel gravitationnel d'une coquille non-sphérique
Π	Potentiel de pression inertielle
J_2, C_{22}	Coefficients du champ de gravité
P	Force de pression
η	Viscosité
μ	Rigidité
D/Dt	Dérivée particulaire
n	Normale extérieure à la surface S

g	Gravité à la surface du corps
u	Vitesse du vent horizontal est-ouest
p_s	Pression atmosphérique à la surface
q_r	Rapport entre les accélérations centrifuge et gravitationnelle
q_t	Paramètre de marée
R_1, R_2, R_3	Matrices de rotation
H_j, ω_j, α_j	Amplitude, fréquence et phase du forçage
K, K_s, K_i	Amplitude des couplages gravitationnels externes sur les bourrelets statiques
K^p, K_s^p, K_i^p	Amplitudes des couplages gravitationnels externes sur les bourrelets dynamiques
K_{int}	Amplitude du couplage gravitationnel interne sur les bourrelets statiques
$K_{int}^{s/p}, K_{int}^{p/s}$	Amplitude des couplages gravitationnels internes sur les bourrelets dynamiques
$\omega_f, \omega_1, \omega_2$	Fréquences propres
γ_l	Amplitude de la libration en longitude de la couche l
F_l	Fonction de transfert de la couche l
E_{elas}	Energie élastique
E_{grav}	Energie gravitationnelle
Γ_{elas}	Couple élastique

Introduction

Mouvements des corps célestes

Dans le cadre de la mécanique classique, la dynamique des corps célestes peut être décomposée en deux mouvements distincts : le premier est un mouvement de translation du centre de masse de l'objet, le second est le mouvement de rotation autour de ce centre de masse. Chacun de ces deux mouvements résulte, d'après les travaux de Newton, de l'exercice des forces sur les masses élémentaires constituant l'objet. Le mouvement de translation du corps céleste est décrit notamment par les lois empiriques de Képler (publiées entre 1609 et 1619), qui permettent de déterminer le comportement d'un système de deux masses ponctuelles. Dans notre système solaire, les lois de Kepler ne constituent qu'une première approximation du mouvement d'un système planétaire à N corps, une planète tournant principalement autour du Soleil mais étant également perturbée par l'attraction des autres corps (planètes, satellites, ...). L'attraction mutuelle des corps du système solaire rend celui-ci instable sur le long terme et les intégrations numériques ont montré que sa dynamique est chaotique (*e.g.* [Laskar \(2010\)](#)). Les couples de forces exercés sur un corps sphérique sont nuls et le mouvement de rotation est alors uniforme (*e.g.* [Tisserand \(1891\)](#)). Cependant, lorsque la forme de l'objet s'écarte de la sphère, l'attraction gravitationnelle exercée par le corps central sur l'objet déformé perturbe son mouvement de rotation. Au premier ordre, le mouvement orbital d'un corps peut être étudié sans connaître sa dynamique rotationnelle.

Rotation des satellites naturels

Les satellites naturels du système solaire, comme la Lune, ont un mouvement de translation de leur centre de masse s'effectuant autour d'une planète. Pour la plupart d'entre eux (*e.g.* [Rambaux and Castillo-Rogez \(2013\)](#)), leur rotation s'effectue avec une période égale à leur période de révolution. On parle alors de mouvement synchrone où le satellite montre en moyenne toujours la même face à la planète. Ce mouvement particulier est décrit pour la Lune dans les travaux d'observations de [Cassini \(1693\)](#). [Tisserand \(1891\)](#) résume la rotation de la Lune à une période de $27j\ 7h\ 43min$ identique à la période de révolution sidérale, c'est-à-dire le temps nécessaire à un même méridien de la Lune pour repasser devant une étoile fixe dans le ciel. Le mouvement synchrone de la Lune n'est cependant pas uniforme (c'est-à-dire avec une rotation à vitesse angulaire constante) mais possède des oscillations de la face lunaire appelées librations témoignant de l'ellipticité de l'orbite lunaire et de ses perturbations par les autres corps du système solaire. Tisserand explique que les librations sont principalement d'origine géométrique pour un observateur situé sur Terre, on parle de librations *optiques* ou *apparentes*, mais qu'une partie de ces oscillations résulte de l'attraction gravitationnelle de la planète sur la forme du satellite, on parle alors de librations *physiques*, prédites par Newton.

Influence de la structure interne

L'étude de la rotation des corps est une source d'informations sur leur structure interne. Un exemple courant pour montrer cette association est la comparaison du mouvement de rotation d'un oeuf cru et d'un oeuf cuit sur une table, chacun d'entre eux ayant une rotation dépendante de leur composition interne. L'étude de la structure interne de la Terre, issue de l'essor de la géophysique moderne, débute avec les premières observations sismologiques (voir le livre de [Deparis and Legros \(2000\)](#) pour un historique de la géophysique). La propagation des ondes sismiques dans le sol terrestre permet de définir les premiers schémas de la stratification de l'intérieur de la Terre au début du XX^{ème} siècle. Viennent ensuite les observations des déformations élastiques de la Terre dues aux marées, avec la théorie de [Love \(1909, 1911\)](#), dont l'amplitude dépend des matériaux et de la réponse du sol terrestre à l'attraction luni-solaire. Les mesures du champ gravitationnel à la surface de la Terre, puis en orbite, ont permis d'obtenir des informations sur la distribution de masse à l'intérieur de la planète, et l'étude du champ magnétique indique la présence d'un noyau fluide en mouvement. A ces études s'ajoutent les premiers modèles thermiques décrivant l'évolution de la température à l'intérieur de la planète, et les études sur les variations de la rotation de la Terre. Les travaux de [Euler \(1765\)](#) sur la rotation des corps rigides permettent de déterminer un mouvement d'oscillations libres du pôle terrestre et qui sera observé par Chandler en 1891 mais avec une amplitude correspondant à un comportement élastique de la planète déterminé par Newcomb la même année.

Depuis l'avènement de la conquête spatiale dans les années 60, les méthodes et instruments utilisés pour l'étude de la structure interne de la Terre s'exportent vers les autres corps du système solaire. La Lune, l'objet le plus proche de la Terre, a reçu sur son sol des sismographes et magnétomètres, notamment avec les missions Apollo. Les sondes en orbite, comme GRAIL, ont constitué des cartes précises du champ de gravité lunaire ([Konopliv et al., 2013](#); [Lemoine et al., 2013](#)), et des mesures télémétriques effectuées entre des stations lasers réparties sur Terre et des rétro-rélecteurs placés sur certains sites d'alunissages permettent de déterminer avec une précision centimétrique la distance Terre-Lune et les variations du mouvement de rotation de notre satellite (*c.f.* l'article de revue de [Bois \(2000\)](#) et [Williams et al. \(2001\)](#)).

Cependant, plus le corps à étudier se trouve loin de la Terre, plus il est coûteux en temps et en énergie d'y envoyer une sonde en orbite ou de poser un module à la surface. Pour les satellites de Saturne, d'autres techniques de mesures sont mises en place. Les observations effectuées par les sondes *Pioneer* dans les années 70, *Voyager* dans les années 80 et l'actuelle sonde *Cassini* en orbite depuis 2004, combinées aux observations faites depuis la Terre, permettent d'essayer de contraindre les modèles de structure interne. Les mesures radar de la surface de Titan effectuées par *Cassini* ([Stiles et al., 2008](#)) et les mesures des déplacements de points de contrôle de la surface de Mimas ([Tajeddine, 2013](#)) ont permis d'étudier les variations du mouvement de rotation de ces satellites.

Librations en longitude

Les librations physiques en longitude de Tisserand sont les variations autour de la rotation uniforme du satellite. Ces variations sont causées par l'attraction gravitationnelle de la planète sur la figure dynamique du satellite lorsque l'orbite de celui-ci est excentrique ou qu'elle subit des perturbations orbitales. Il s'agit d'un mouvement forcé dont l'amplitude dépend de l'inertie du satellite ([Goldreich and Peale, 1966](#)), et porte donc la signature de la structure interne. Les librations détectées sur la Lune ([Williams et al., 2001](#); [Williams et al., 2014](#)) et Mercure

(Margot et al., 2007) ont permis d'affiner les modèles d'intérieur de ces corps, et confirment le lien entre la structure interne et les variations de la rotation du satellite.

Satellites de glace

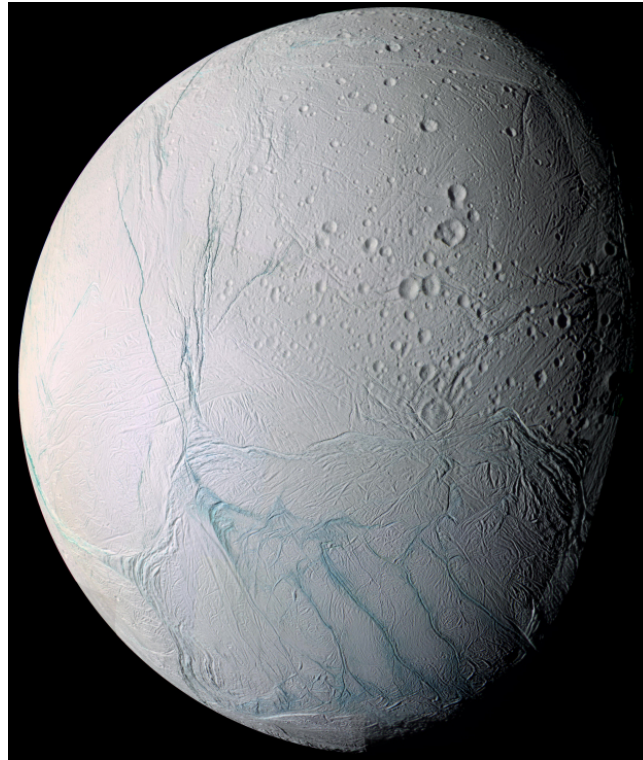


FIGURE 1: Surface glacée d'Encelade, satellite de Saturne (Source : NASA/JPL/Space Science Institute).

Parmi les satellites naturels du système solaire, les satellites de glace en orbite autour des planètes géantes possèdent une structure particulière. Leur surface, comme leur nom l'indique, est constituée essentiellement de glace d'eau. Les satellites joviens Europe et Ganymède et les satellites saturniens Encelade, Mimas et Titan sont des exemples de cette catégorie de satellites. Dans le cas de certains de ces satellites, comme Europe (Carr et al., 1998) ou Titan (Iess et al., 2012), les observations suggèrent la présence d'un océan global sous leur surface glacée. L'existence d'un océan interne peut être expliquée par un réchauffement de l'intérieur sous l'effet des marées importantes de la planète géante autour de laquelle orbite le satellite. La caractérisation de la taille, la température et la nature de cet océan permettent de contraindre les modèles thermiques et les modèles d'évolution des satellites (*c.f.* l'article de revue de Tobie et al. (2012) pour Titan). Ces informations sont également très importantes pour l'exobiologie, les océans internes pouvant détenir les conditions requises pour le développement de la vie (*e.g.* Coustenis et al. (2012)). Cette quête de l'habitabilité est d'ailleurs l'un des moteurs de la mission spatiale JUICE à destination du système jovien (Grasset et al., 2013).

Description de la thèse

Titan possède une atmosphère opaque d'azote et de méthane qui rend difficiles les observations de sa surface. Les observations radars de la sonde *Cassini* ne permettent pas d'obtenir une résolution meilleure que 300 mètres sur les images de la surface du satellite. L'étude des variations du champ de gravité par [Iess et al. \(2012\)](#) suggère cependant la présence d'un océan interne sous la surface du satellite. L'observation et la détermination de son mouvement de libration physique permettraient de contribuer à la contrainte sur la taille et la nature de cet océan. Dans le cadre de cette thèse, nous développons un modèle dynamique des librations en longitude de Titan dont la structure est représentée par trois couches : une coquille de glace, un océan interne et un noyau solide.

Dans la première partie, nous posons les équations de la dynamique librationnelle d'un satellite à trois couches. Pour cela, nous revenons tout d'abord dans le premier chapitre à la définition des librations physiques en longitude telle qu'elle est présentée notamment par [Eckhardt \(1965\)](#), puis nous insérons cette définition dans les équations d'Euler-Liouville décrivant la conservation du moment cinétique du satellite. Dans le second chapitre, nous développons la forme ellipsoïdale du satellite sous forme d'harmoniques sphériques et définissons les moments d'inertie décrivant la distribution de masse à l'intérieur du satellite. Enfin dans le chapitre trois, nous développons les expressions des différents couples agissant sur chacune des couches du satellite ainsi que leur déformation due à l'attraction de la planète.

Dans la seconde partie, nous appliquons ces développements théoriques à différents modèles de Titan sélectionnés dans le chapitre quatre pour leur structure interne représentant les différents groupes de modèles existants dans la littérature. Les librations en longitude sont forcées par le couplage gravitationnel exercé par la planète, par conséquent nous détaillons et analysons le mouvement orbital de Titan dans le chapitre cinq. Finalement, nous explicitons et évaluons les solutions de la libration en longitude dans le chapitre six, pour des modèles rigides et élastiques.

La troisième partie est consacrée à l'application de notre modèle au satellite Mimas. Le chapitre sept décrit la problématique liée à la récente observation d'une forte amplitude de libration à la fréquence orbitale non-attendue dans les modèles théoriques de libration d'un satellite solide, et décrit également le mouvement orbital du satellite. Dans le chapitre huit, les solutions de la libration en longitude de Mimas sont appliquées à des modèles à trois couches contenant un océan interne afin de tenter d'expliquer cette forte amplitude de libration observée.

Première partie

Librations d'un corps à trois couches

Chapitre 1

Equations de la dynamique librationnelle

Sommaire

1.1 Définition des librations	12
1.1.1 Librations optiques	12
1.1.2 Etats de Cassini	12
1.1.3 Librations physiques	15
1.2 Equations d'Euler-Liouville	17
1.2.1 Variation du moment cinétique	18
1.2.2 Dynamique d'un corps à trois couches	20

La précision des observations de la Lune effectuées au XVII^{ème} siècle notamment par Jean-Dominique Cassini et retranscrites dans son traité *De l'origine et du progrès de l'Astronomie, et de son usage dans la Géographie et dans la Navigation* (Cassini, 1693) ont permis de décrire élégamment le mouvement de rotation de la Lune. Ce mouvement est résumé sous la forme de trois lois, usuellement appelées lois de Cassini, dont les énoncés selon Tisserand sont :

1° *La Lune tourne sur elle-même, dans le sens direct, d'un mouvement uniforme autour d'un axe dont les pôles sont fixes à sa surface; la durée de la rotation, $27^j7^h43^m11^s,5$ est identique à la révolution sidérale de la Lune autour de la Terre,*

2° *L'axe de rotation fait un angle constant avec l'écliptique; cet angle est de $88^\circ 25'$,*

3° *L'axe de l'écliptique, l'axe de l'orbite de la Lune et son axe de rotation sont constamment dans un même plan.*

(Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, 1891)

Le mouvement décrit par ces lois correspond en réalité à un mouvement moyen de la Lune, et Tisserand utilise le terme de *librations* pour décrire les variations du mouvement de rotation de la Lune autour de ces trois lois.

Dans ce chapitre, les librations sont définies selon Tisserand et décrites dans la section 1.1. La composante en longitude des librations sera utilisée comme un outil pour sonder la structure interne de Titan et des satellites de glace du système solaire, l'un des buts étant notamment d'obtenir des informations sur la présence éventuelle d'un océan interne. A partir des équations

d’Euler-Liouville détaillées dans la section 1.2, la libration en longitude d’un corps multi-couche est définie en tant que réponse d’un corps céleste aux couples des forces appliquées sur celui-ci. L’objectif est d’obtenir un modèle semi-analytique, une description analytique du mouvement de libration en longitude dont le mouvement orbital contenu dans les couples résulte en partie d’intégrations numériques, afin de déterminer l’influence de la structure du corps sur l’amplitude de sa libration.

1.1 Définition des librations

Les librations peuvent être décomposées en plusieurs composantes selon leur origine (voir *e.g.* Bois (2000)). Nous décrivons ici ces différentes composantes et séparons les librations dites *apparentes* ou *optiques* des librations *physiques* qui sont au centre des travaux de cette thèse.

1.1.1 Librations optiques

Revenons au mouvement de rotation de la Lune décrit par les lois de Cassini. La première loi décrit le mouvement de rotation synchrone de la Lune qui présente toujours en moyenne la même face à la Terre. Un observateur terrestre observe cependant plus de la moitié de la surface lunaire grâce à trois mouvements d’oscillations dus à la géométrie du système, appelés *librations optiques* :

1) *Libration optique en longitude* : Du fait de l’excentricité de l’orbite lunaire et des perturbations du mouvement orbital de la Lune, un observateur terrestre voit un mouvement de « balancement périodique » en longitude de la Lune d’un angle d’environ 8° (Tisserand, 1891). Ce mouvement est illustré à la figure 1.1, en haut.

2) *Libration optique en latitude* : Du fait de l’obliquité de l’axe de rotation de la Lune et de l’inclinaison de son orbite, un observateur terrestre voit successivement les zones situées autour des pôles lunaires avec un angle de 6.87° d’après des mesures récentes (Roncoli, 2005). Cette composante est illustrée à la figure 1.1, au milieu.

3) *Libration diurne* : La position de l’observateur étant en mouvement avec la Terre autour de son axe de rotation, une *libration diurne* vient compléter le jeu des librations apparentes, illustrée à la figure 1.1, en bas.

Tisserand indique finalement que ces mouvements de librations permettent à un observateur terrestre de voir plus de $4/7$ de la surface de la Lune. Ces librations ne résultent cependant pas de la variation du mouvement de rotation de la Lune.

1.1.2 Etats de Cassini

Les deuxième et troisième lois de Cassini décrivent un mouvement très particulier de l’orbite lunaire. La seconde loi évoque l’angle constant entre l’axe de rotation de la Lune et la normale au plan de l’écliptique. La troisième loi stipule que la normale au plan de l’écliptique, la normale au plan orbital de la Lune et l’axe de rotation du satellite restent coplanaires. Pour comprendre la particularité de ce mouvement, commençons par décrire les angles du système.

Définissons un repère inertiel $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ où le plan de l’écliptique est défini par \mathbf{i} et \mathbf{j} (Fig. 1.2). On définit la longitude du noeud ascendant Ω , ainsi que la position du péricentre de l’orbite ω mesurée depuis le noeud. La position du satellite sur son orbite est mesurée à partir

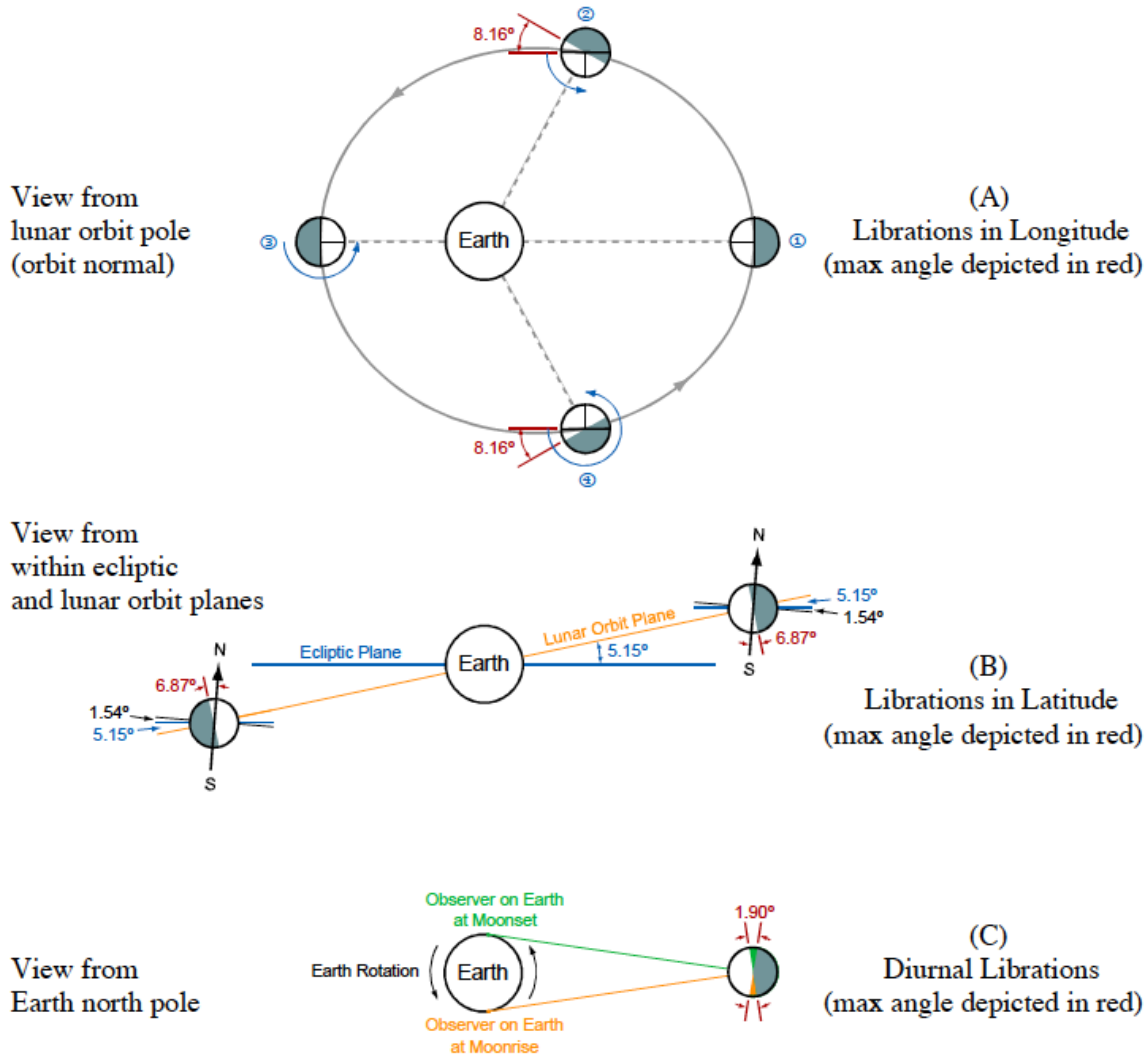


FIGURE 1.1: Librations optiques de la Lune (Source : Roncoli (2005)).

du péricentre par l'anomalie vraie f . L'orbite est inclinée par rapport au plan (\mathbf{i}, \mathbf{j}) d'un angle i .

De la même façon, l'orientation des axes principaux d'inertie du satellite est définie dans le repère $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ centré sur le centre de gravité G du satellite. A partir de l'axe \mathbf{i} , l'angle Ψ désigne la longitude du noeud de l'équateur (Fig. 1.2, Droite). L'équateur est ensuite incliné d'un angle Θ par rapport au plan de référence $(O\mathbf{i}\mathbf{j})$, et la position de l'axe principal du satellite est ensuite déterminée par l'angle Φ par rapport au noeud de l'équateur. Les angles Ψ , Θ et Φ sont appelés angles d'Euler (*e.g.* Kaula (1968)).

L'orbite précesse autour de la normale au plan inertiel à la vitesse $\dot{\Omega}$ (Fig. 1.3, Gauche). De la même façon, l'équateur précesse autour de la normale à l'orbite à la vitesse $\dot{\Psi}$ (Fig. 1.3 Droite). Eckhardt (1965) énonce que les lois de Cassini pour la Lune donnent les relations suivantes :

$$\Psi = \Omega, \quad \Theta = I, \quad \Psi + \Phi = \pi + L, \quad (1.1)$$

où I est l'inclinaison de l'équateur du satellite par rapport à l'écliptique, L est la longitude moyenne du satellite mesurée depuis l'axe \mathbf{i} du repère inertiel. La combinaison $\pi + L$ indique

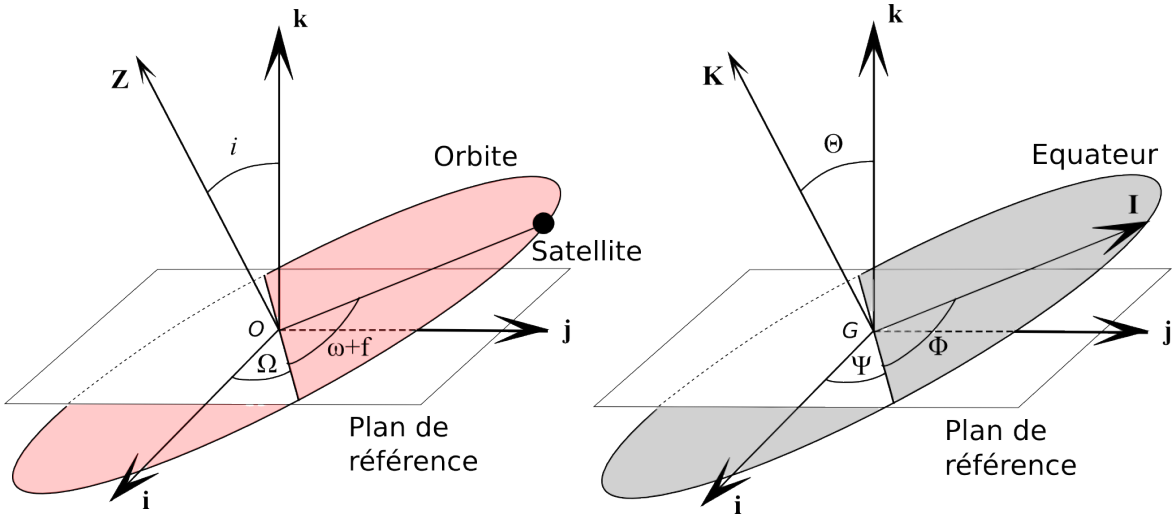


FIGURE 1.2: Gauche : Représentation de l'orbite dans le repère inertiel $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Ω est la longitude du noeud ascendant de l'orbite, i l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan de l'écliptique, ω la position du périhélie mesurée depuis le noeud ascendant et f l'anomalie vraie. Droite : Représentation du référentiel inertiel $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ et du référentiel en rotation $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ attaché aux axes principaux d'inertie du satellite. L'orientation du repère $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ est déterminée par les angles d'Euler Ψ, Θ, Φ .

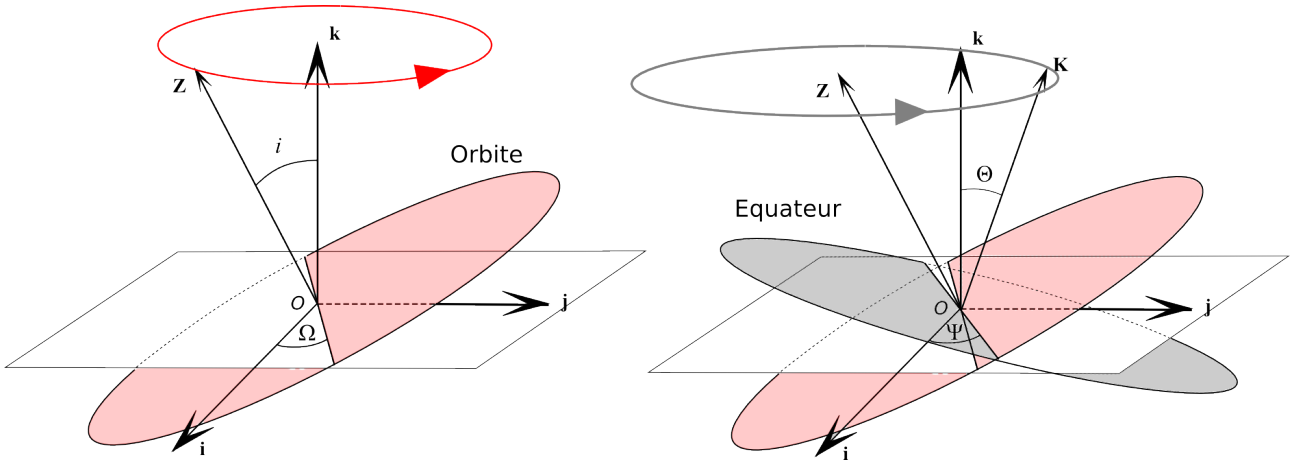


FIGURE 1.3: Gauche : Mouvement de précession de l'orbite autour de la normale au plan inertiel. La précession se fait à la vitesse $\dot{\Omega}$. Droite : La précession de l'équateur se fait autour de la normale à l'orbite à la vitesse $\dot{\Psi}$. Cette configuration de l'équateur par rapport à l'orbite correspond au cas de la Lune où les angles i et Θ sont de signes opposés. Pour Titan les deux angles sont de même signe.

que l'on considère la position de la planète dans le repère du satellite. D'après ces relations, les longitudes des noeuds de l'orbite et de l'équateur coïncident, les positions du plus petit axe d'inertie et de l'axe de figure sont confondues, et la rotation du repère $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ se fait à une vitesse uniforme.

La première de ces relations décrit le comportement des précessions. Si les noeuds de l'orbite et de l'équateur se confondent à tout instant, cela signifie que la vitesse de précession de l'orbite $\dot{\Omega}$ est égale à celle de l'équateur du satellite $\dot{\Psi}$. Ainsi, les normales à l'orbite et à

l'équateur décrivent toutes les deux un cône autour de la normale au plan inertiel, avec une vitesse identique (Fig. 1.4). Le résultat de ce mouvement est que les trois normales (de l'orbite, l'équateur et le plan inertiel) sont coplanaires à tout instant. Cette configuration correspond à un état d'équilibre décrit par Colombo (1966); Peale (1969) et appelé état de Cassini. La généralisation de l'état de Cassini aux corps en résonance *spin-orbite* permet d'identifier trois configurations stables et une configuration instable. La Lune se trouve dans l'état stable où les normales à l'orbite et à l'équateur sont de part et d'autre de la normale au plan inertiel (état de Cassini 2), tandis que Titan est dans un état stable où les normales à l'orbite et à l'équateur se trouvent du même côté de la normale au plan inertiel (état de Cassini 1, e.g. Stiles et al. (2008); Noyelles et al. (2008)).

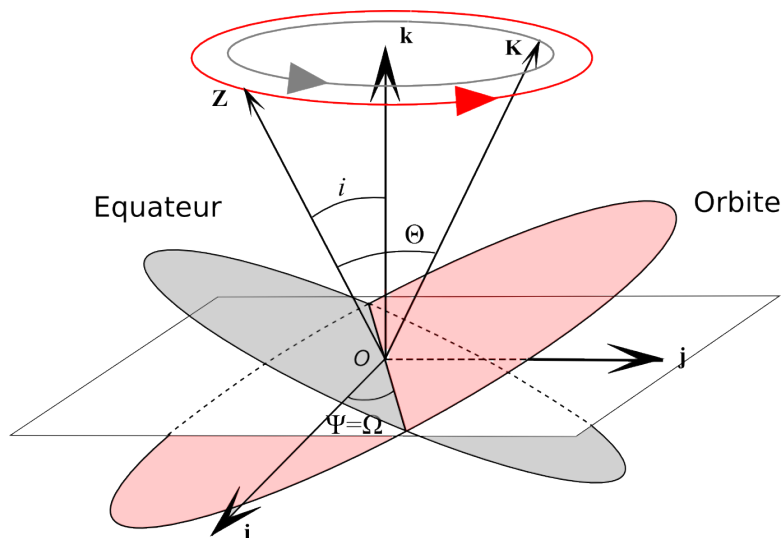


FIGURE 1.4: Représentation du mouvement des normales de l'équateur et de l'orbite de la Lune situé dans un état de Cassini. Les vitesses de précession de Ω et de Ψ sont égales.

Dans le cas des satellites de glace, l'obliquité du satellite résultant de l'état de Cassini est faible. Pour Titan par exemple, cette obliquité est de l'ordre de 0.3° (Stiles et al., 2008). Par conséquent nous considérons l'obliquité nulle dans le reste du manuscrit.

1.1.3 Librations physiques

Les *librations physiques* peuvent être définies comme les écarts aux lois de Cassini. Ainsi Eckhardt (1965) définit

$$\Psi = \Omega + \sigma, \quad \Theta = I + \rho, \quad \Psi + \Phi = \pi + L + \gamma, \quad (1.2)$$

où σ et ρ sont les angles de *librations physiques en latitude* et γ l'angle de *libration physique en longitude*, avec $\sigma, \rho, \gamma \ll 1$.

Intéressons-nous aux librations en longitude. Pour cela, supposons un satellite triaxial rigide et homogène de masse M_s en orbite képlérienne synchrone autour d'une planète ponctuelle de masse M_p (Fig. 1.5). L'obliquité du satellite est supposée faible, ainsi que l'inclinaison de son orbite. La position du centre de masse du satellite sur l'orbite est repérée par son anomalie vraie f mesurée depuis la ligne des apsides. L'angle de rotation du satellite est défini par l'angle λ entre la direction de l'axe principal de figure du satellite et la ligne des apsides. La position

de la planète dans le repère $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ lié au satellite est donnée par l'angle $\phi = f - \lambda$ correspondant aux librations optiques en longitude décrites plus haut. La généralisation de cet angle de libration optique est fait dans la section 5 du second chapitre.

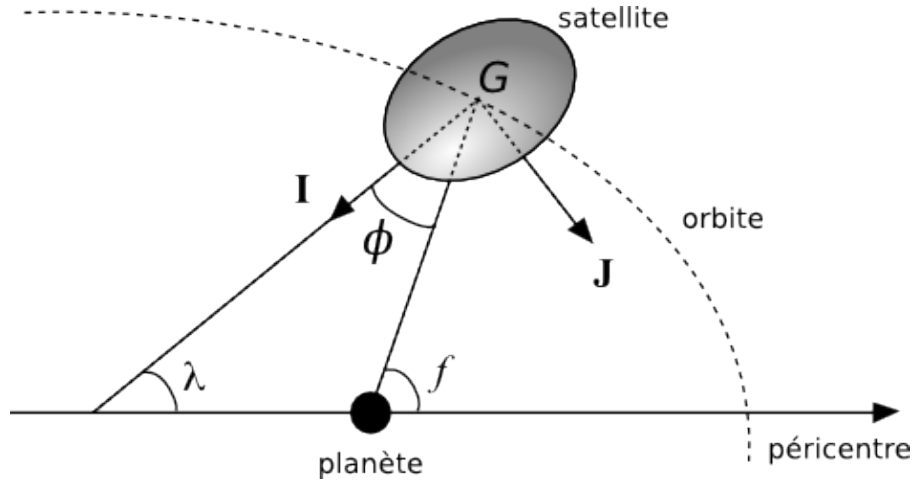


FIGURE 1.5: Satellite triaxial en orbite synchrone autour d'une planète ponctuelle.

Dans le cas d'une orbite Képlérienne, l'excentricité de l'orbite crée une différence entre la vitesse orbitale du satellite et sa rotation $\dot{\lambda}$ supposée uniforme. Cette différence de vitesse est à l'origine de l'angle ϕ entre l'axe principal du satellite et la direction de la planète. La force gravitationnelle exercée par la planète ponctuelle sur le satellite triaxial désaxé crée un couple de rappel qui tend à aligner la figure du satellite dans la direction de la planète. Ce couple ne s'exerce que sur les parties non-sphériques du corps et est d'autant plus important que l'angle ϕ est grand. On parlera ici de *couple gravitationnel* (Fig. 1.6).

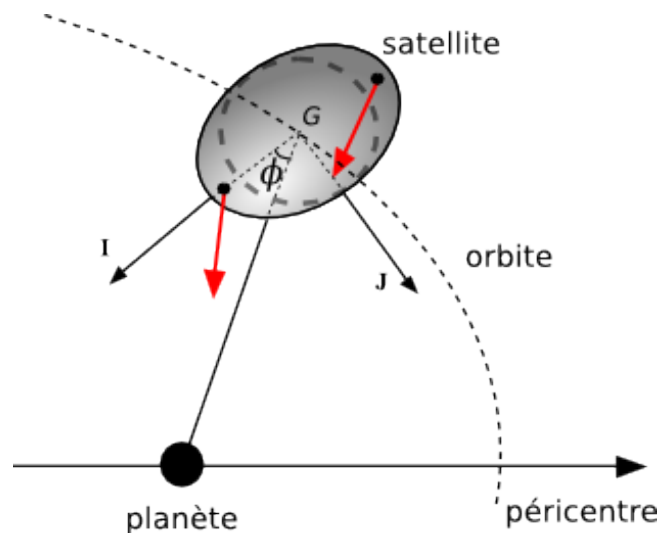


FIGURE 1.6: Représentation schématisée des forces gravitationnelles responsables du couple de rappel exercé sur la figure du satellite. ϕ est la longitude de la planète mesurée à partir du plus long axe de figure du satellite.

Le couple gravitationnel modifie la vitesse de rotation $\dot{\lambda}$ du satellite au cours de son parcours sur son orbite. Ces variations autour de la rotation uniforme sont les *librations physiques en*

longitude décrites par l'angle γ et dépendent de l'inertie du corps, elles sont donc une source d'informations sur la distribution de masse et la structure interne de l'objet. Elles sont à distinguer des *librations apparentes* qui résultent de la géométrie de l'orbite du satellite ou de la position de l'observateur sans entraîner de variations réelles de la rotation de l'objet. Dans la suite du manuscrit, le terme *librations* désignera les librations physiques.

Dans le cas de corps en rotation non-synchrone, notamment les planètes, les oscillations autour de la rotation uniforme sont appelées des nutations. De nombreux travaux théoriques ont été menés sur ces oscillations pour les objets du Système Solaire (*e.g.* Goldreich and Peale (1966); Comstock and Bills (2003)), notamment Mercure (*e.g.* Peale (2005); Rambaux et al. (2007); Van Hoolst et al. (2012)) et la Terre (*e.g.* Hinderer et al. (1982); Lefftz et al. (1991); Mathews et al. (1991)). L'étude des librations des satellites en rotation synchrone a été faite notamment pour la Lune (*e.g.* Eckhardt (1981)) et les satellites de glace (*e.g.* Henrard (2005); Van Hoolst et al. (2008); Rambaux et al. (2010)). Les modèles analytiques des librations ont notamment permis d'expliquer les librations de la Lune observées précisément grâce à la méthode de télémétrie laser (Williams et al., 2001) et de contraindre la structure de son noyau. Les librations théoriques de Mercure ont été confirmées par les observations radar de la surface de la planète faites depuis la Terre (Margot et al., 2007), puis celles de Phobos grâce au suivi de points de référence de la surface obtenus grâce aux images de la sonde *Mars Express* (Willner et al., 2010). Ces nouvelles observations de Phobos ont amené à construire de nouveaux modèles pour les librations du satellite et sur son évolution dynamique (*e.g.* Rambaux et al. (2012)). De façon similaire, les librations ont été détectées sur les satellites de Saturne Epiméthée (Tiscareno et al., 2009) et Mimas (Tajeddine, 2013) grâce aux images fournies par la sonde *Cassini*. Tiscareno et al. (2009) ont pour cela construit un modèle de la forme de la surface du satellite Epiméthée dont l'orientation est ajustée sur les images de 49 points de contrôle. La solution de la libration est alors obtenue lors du processus d'ajustement du modèle sur les images. Cette méthode a également permis la détection des librations de Mimas dans le cadre de la thèse de Tajeddine (2013).

Ces récents résultats, résumés par Rambaux (2013), ont permis d'affirmer l'intérêt de l'étude des librations dans l'exploration des structures internes. Les récentes analyses du champ gravitationnel de Titan suggèrent la présence d'un océan interne (Iess et al., 2012) et une structure à trois couches similaire à celle d'Europe (Carr et al., 1998) : une couche de glace recouvrant un océan et un noyau de silicates. L'objectif ici est d'étudier les librations en longitude d'un modèle à trois couches de Titan, dans la continuité des travaux menés par Rambaux et al. (2007) sur Mercure et Van Hoolst et al. (2008, 2009) sur Europe et Titan basés sur la théorie SOS (Sasao, Okubo et Saito) de Sasao et al. (1980) et les développements de Hinderer et al. (1982) pour les couples, en incluant les perturbations orbitales, le couplage atmosphérique et les déformations de marées suivant le formalisme de Love (1911).

1.2 Equations d'Euler-Liouville

Les équations du mouvement de rotation de la Lune sont obtenues par Tisserand (1891) à partir des équations de Lagrange. Il retrouve les équations d'Euler (1765) de la rotation d'un corps de forme invariable. Dans cette section, les expressions d'Euler-Liouville sont obtenues à partir de l'équation de variation du moment cinétique pour un corps composé de plusieurs couches.

1.2.1 Variation du moment cinétique

La dynamique d'un satellite en rotation et soumis à l'attraction gravitationnelle d'une planète est déterminée par l'équation de variation du moment cinétique \mathbf{H} exprimée dans un référentiel inertiel ($G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) lié au centre de masse G du satellite (e.g. Danby (1988))

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{\Gamma}, \quad (1.3)$$

où t est le temps, $\mathbf{\Gamma}$ est le couple (ou moment) des forces appliquées sur le corps et

$$\mathbf{H} = \int_{V'} \rho(r')(\mathbf{r}' \times \mathbf{v}')dV', \quad (1.4)$$

où \mathbf{r}' désigne ici la position d'un point du satellite et $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$, ρ est la densité et V' le volume du satellite. Dans la suite, l'indice prime désigne les coordonnées d'un point du satellite. En faisant apparaître le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ du satellite, le moment cinétique \mathbf{H} peut s'écrire

$$\mathbf{H} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (1.5)$$

avec \mathcal{I} la matrice d'inertie du corps. Cette matrice symétrique quantifie la répartition géométrique des masses à l'intérieur du corps selon les axes du repère dans lequel elle est définie et caractérise la réponse de celui-ci face à une variation de la rotation. Poincaré (1902) démontre notamment que la rotation libre d'un corps n'est stable que si les axes du repère sont ceux auxquels sont associés les plus grandes composantes de \mathcal{I} . Dans le cas d'un système contenant des forçages, l'axe de rotation est stable s'il est associé à la plus grande composante du tenseur d'inertie correspondant au plus petit axe de l'ellipsoïde (Landau and Lifshitz, 1969).

Les composantes de la matrice \mathcal{I} sont appelées moments d'inertie et sont définies en coordonnées Cartésiennes telles que

$$I_{ij} = \int_{V'} \rho(r')(r'^2\delta_{ij} - x'_ix'_j)dV', \quad (1.6)$$

où les x'_i sont les composantes du vecteur \mathbf{r}' et δ_{ij} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Le choix du référentiel pour l'expression des composantes I_{ij} est primordial. Dans le référentiel inertiel, leur expression dépend du temps car les coordonnées Cartésiennes x'_i varient constamment avec l'orientation du satellite. Le choix judicieux d'un système de référence en rotation avec le satellite permet de rendre ces variations temporelles nulles dans le cas d'un satellite rigide et négligeables dans un cas élastique.

Pour cela, la matrice d'inertie est écrite dans le repère décrit par le système d'axes ($\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$) de Tisserand (1891) lié au satellite. Le système d'axes de Tisserand est un référentiel moyen, ayant pour origine le centre de masse du satellite et en rotation avec celui-ci, dans lequel le moment cinétique est indépendant des déformations (voir Annexe A). Le passage du repère inertiel ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) au repère tournant ($\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$) se fait par l'intermédiaire des trois angles d'Euler Ψ , Θ et Φ . Dans le référentiel ($\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$), la matrice d'inertie d'un ellipsoïde triaxial homogène

peut se décomposer en une partie statique constante et diagonale due à la forme moyenne du corps et une partie dynamique liée à ses déformations

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

où A , B , et C sont les principaux moments d'inertie constants ($A \leq B \leq C$) et c_{ij} sont les incréments d'inertie dépendant du temps dus aux déformations ($c_{ij} \ll A$). Le moment d'inertie moyen I du corps est défini comme étant égal à $I = (A + B + C)/3$. Les composantes diagonales de la matrice \mathcal{I} sont définies comme la somme des composantes statiques et dynamiques

$$\begin{aligned} I_{11} &= A + c_{11}, \\ I_{22} &= B + c_{22}, \\ I_{33} &= C + c_{33}, \end{aligned}$$

tandis que les composantes non-diagonales ne contiennent que des termes dynamiques, de sorte que dans le cadre de faibles déformations, on a $I_{ij} \ll I_{ii}$ pour $j \neq i$. Dans les développements du manuscrit, nous utiliserons les moments d'inerties I_{ij} contenant à la fois les termes d'inertie statiques et leurs variations.

Les lois empiriques de [Cassini \(1693\)](#), données à la page 11 et décrivant le mouvement de la Lune, ont été généralisées aux satellites en rotation synchrone ([Colombo, 1966](#); [Peale, 1969](#)). Elles stipulent notamment que la période de précession de l'équateur du satellite est égale à la période de précession de son orbite. Dans le cas de Titan, la période de précession de l'orbite et de l'équateur est de l'ordre de 703 ans et grande devant la période orbitale de 15.94 jours ([Vienne and Duriez, 1995](#)). De plus, l'angle entre l'axe de rotation et l'axe de figure du satellite est petit, ce qui permet de définir le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ dans l'expression (1.5) tel que dans le repère $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, la rotation s'effectue principalement le long de l'axe \mathbf{K} du satellite avec une vitesse quasi-uniforme ω . Il peut s'écrire

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \omega_1, \omega_2 \ll \omega_3.$$

L'équation (1.3) est exprimée dans le repère $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ lié au satellite et tournant avec le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ tel que

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\Gamma}. \quad (1.8)$$

On a

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{pmatrix},$$

soit en développant au premier ordre en ω_k ($k = 1, 2$) et I_{ij} ($i \neq j$)

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \approx \begin{pmatrix} (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 - I_{23}\omega_3^2 \\ (I_{11} - I_{33})\omega_1\omega_3 + I_{13}\omega_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

De la même façon, au premier ordre on a

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} \approx \begin{pmatrix} I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{13}\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{13}\omega_3 \\ I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{23}\omega_3 \\ I_{33}\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{33}\omega_3 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

En utilisant ces définitions, l'équation de variation du moment cinétique exprimée dans le repère $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ attaché au corps peut être écrite au premier ordre en $\omega_{k,k=1,2}$ et $I_{ij,i \neq j}$

$$I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{13}\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{13}\omega_3 + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 - I_{23}\omega_3^2 = \Gamma_1, \quad (1.11)$$

$$I_{22}\dot{\omega}_2 + I_{23}\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{23}\omega_3 + (I_{11} - I_{33})\omega_1\omega_3 + I_{13}\omega_3^2 = \Gamma_2, \quad (1.12)$$

$$I_{33}\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{33}\omega_3 = \Gamma_3, \quad (1.13)$$

où Γ_i sont les composantes du vecteur $\mathbf{\Gamma}$. [Liouville \(1858\)](#) a déterminé ces relations pour un corps de forme variable en se basant sur les développements de [Euler \(1765\)](#) pour un corps de forme invariable. Elles sont connues sous le nom d'équations d'Euler-Liouville. Ici, les deux premières équations décrivent l'ensemble des variations latitudinales du mouvement de rotation. Elles sont découplées de la troisième qui, quant à elle, décrit les variations longitudinales autour de l'axe \mathbf{K} . C'est cette dernière équation, indépendante des deux autres, qui est utilisée pour l'étude de la libration en longitude d'un satellite en introduisant l'angle de rotation ϕ .

1.2.2 Dynamique d'un corps à trois couches

Les équations précédentes peuvent se généraliser pour un corps à trois couches. On suppose pour cela que les axes et vitesses de rotation des différentes couches sont proches de ceux de la surface de manière à pouvoir écrire l'équation de variation du moment cinétique d'une couche l quelconque dans le repère défini par le système d'axes de Tisserand $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ de la couche de surface (exposant s) tournant avec $\boldsymbol{\omega}$ telle que

$$\frac{d\mathbf{H}^l}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^l = \mathbf{\Gamma}^l, \quad (1.14)$$

où le moment cinétique \mathbf{H}^l est défini par

$$\mathbf{H}^l = \mathcal{I}^l(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^l), \quad \text{pour } l \neq s. \quad (1.15)$$

\mathcal{I}^l est la matrice d'inertie de la couche l exprimée dans le repère $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, et $\boldsymbol{\omega}^l$ le vecteur rotation relative de la couche l par rapport au repère $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$. Pour la couche de surface, on a

$$\mathbf{H}^s = \mathcal{I}^s\boldsymbol{\omega}. \quad (1.16)$$

En supposant que la rotation des différentes couches s'effectue principalement selon $\boldsymbol{\omega}$, on peut écrire $\omega_{i,i=1,2,3}^l \ll \omega_3$.

En supposant que les axes principaux d'inertie des couches internes s'écartent peu de ceux de la couche de surface, les matrices d'inertie peuvent s'écrire dans le système d'axes de Tisserand $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ de la couche s comme une matrice diagonale constante et une partie dynamique due aux déformations telles que

$$I_{ij,j \neq i}^l \ll I_{ii}^l, \quad \forall l.$$

On a alors pour $l \neq s$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^l = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{11}^l(\omega_1 + \omega_1^l) + I_{12}^l(\omega_2 + \omega_2^l) + I_{13}^l(\omega_3 + \omega_3^l) \\ I_{21}^l(\omega_1 + \omega_1^l) + I_{22}^l(\omega_2 + \omega_2^l) + I_{23}^l(\omega_3 + \omega_3^l) \\ I_{31}^l(\omega_1 + \omega_1^l) + I_{32}^l(\omega_2 + \omega_2^l) + I_{33}^l(\omega_3 + \omega_3^l) \end{pmatrix},$$

soit au premier ordre en $\omega_{i,i \neq 3}$, ω_j^l et $I_{jk,j \neq k}^l$ pour la composante longitudinale (coordonnée z)

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^l \Big|_z \approx 0. \quad (1.17)$$

On a également

$$\frac{d\mathbf{H}^l}{dt} \approx \begin{pmatrix} I_{11}^l(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_1^l) + I_{13}^l\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{13}^l\omega_3 \\ I_{22}^l(\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_2^l) + I_{23}^l\dot{\omega}_3 + \dot{I}_{23}^l\omega_3 \\ I_{33}^l(\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_3^l) + \dot{I}_{33}^l(\omega_3) \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

La couche s de surface est quant à elle décrite par les équations d'Euler-Liouville de la section précédente où les moments d'inertie I_{ij} sont remplacés par I_{ij}^s . L'obliquité de Titan étant de 0.3° (Stiles et al., 2008), les composantes selon \mathbf{i} et \mathbf{j} du vecteur rotation sont faibles, et nous ne considérons ici que la composante selon \mathbf{k} des équations de variations du moment cinétique.

Titan peut être représenté par un modèle d'intérieur semblable à Europe, c'est-à-dire par une coquille de glace recouvrant un océan liquide et un noyau de roche (Iess et al., 2012). Chacune des couches subit l'attraction gravitationnelle de Saturne responsable du couple de rappel externe noté $\boldsymbol{\Gamma}_{ext}$. Elles exercent également une force gravitationnelle les unes sur les autres, et on parle alors de couplage gravitationnel interne noté $\boldsymbol{\Gamma}_{int}$. Au niveau des interfaces entre l'océan et les couches solides, les forces de pression couplent le mouvement de l'océan à celui des couches solides par le moment $\boldsymbol{\Gamma}_{pre}$. Enfin, Titan possède une atmosphère épaisse pouvant influencer le mouvement de la coquille de glace en surface. Cette influence se manifeste par un couplage atmosphérique que nous noterons $\boldsymbol{\Gamma}_{atm}$. A ces couples s'ajoutent également les déformations des coquilles sous l'influence des potentiels centrifuge et de marée. Le premier est considéré comme étant constant et induit un aplatissement polaire statique. Le second possède une composante constante responsable de l'élongation du satellite, et une composante dynamique et périodique sur une orbite qui induit une variation de la forme de la surface lorsque le satellite s'approche ou s'éloigne de la planète. On parlera de déformations de marées, à l'origine de la variation des moments d'inertie du satellite.

L'étude de la libration en longitude de Titan nécessite trois équations de variation du moment cinétique, chacune associée à une couche. Nous posons les indices s pour la couche de glace de surface, o pour l'océan et i pour le noyau et le système dynamique à étudier s'écrit

$$\frac{d\mathbf{H}^s}{dt} \Big|_z = \boldsymbol{\Gamma}_{ext,z}^s + \boldsymbol{\Gamma}_{int,z}^s + \boldsymbol{\Gamma}_{pre,z}^s + \boldsymbol{\Gamma}_{atm,z}^s, \quad (1.19)$$

$$\frac{d\mathbf{H}^o}{dt} \Big|_z = \boldsymbol{\Gamma}_{ext,z}^o + \boldsymbol{\Gamma}_{int,z}^o + \boldsymbol{\Gamma}_{pre,z}^o, \quad (1.20)$$

$$\frac{d\mathbf{H}^i}{dt} \Big|_z = \boldsymbol{\Gamma}_{ext,z}^i + \boldsymbol{\Gamma}_{int,z}^i + \boldsymbol{\Gamma}_{pre,z}^i. \quad (1.21)$$

Ces relations sont similaires à l'expression (1.13) où les moments d'inerties et les vecteurs rotation sont ceux de la couche considérée (1.18) et les couples exercés sont décomposés selon leur origine (*c.f.* section 3.1).

La résolution de ces équations pour un corps déformable nécessite de déterminer les moments d'inertie et leurs variations dues aux déformations de marée, ainsi que les couples de forces exercées sur chacune des couches. Les moments d'inertie définis par l'expression (1.6) sont intégrés sur le volume V' de chaque couche de forme ellipsoïdale du satellite. Il est nécessaire dans un premier temps de déterminer la forme du satellite et des couches qui le composent pour obtenir les moments d'inertie associés.

Chapitre 2

Forme et inertie du satellite

Sommaire

2.1	Forme du satellite	23
2.1.1	Forme d'équilibre	23
2.1.2	Equation de Clairaut	25
2.1.3	Forme dynamique	25
2.2	Moments d'inertie du satellite	26

2.1 Forme du satellite

L'expression (1.6) des moments d'inertie du satellite est intégrée sur l'ensemble du volume du corps. La détermination de la forme du satellite permet de calculer cette intégrale et d'obtenir les moments d'inertie d'un corps de forme ellipsoïdale.

2.1.1 Forme d'équilibre

Un satellite à l'équilibre hydrostatique en orbite synchrone autour d'une planète peut être représenté de manière simple par un ellipsoïde triaxial du fait de l'aplatissement dû au potentiel centrifuge et à l'élongation par la force de marée. On suppose en première approximation que son orientation est donnée par le repère $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ de sorte que son vecteur instantané de rotation soit orienté selon \mathbf{K} et que la planète se trouve en moyenne le long de l'axe \mathbf{I} . La forme de sa surface à l'équilibre hydrostatique est une équipotentielle correspondant à un ellipsoïde triaxial.

La surface d'un ellipsoïde triaxial est définie en coordonnées Cartésiennes (x', y', z') par

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1, \quad (2.1)$$

où a' , b' , et c' sont les longueurs des axes de figures de l'ellipsoïde (Fig. 2.1). On pose les

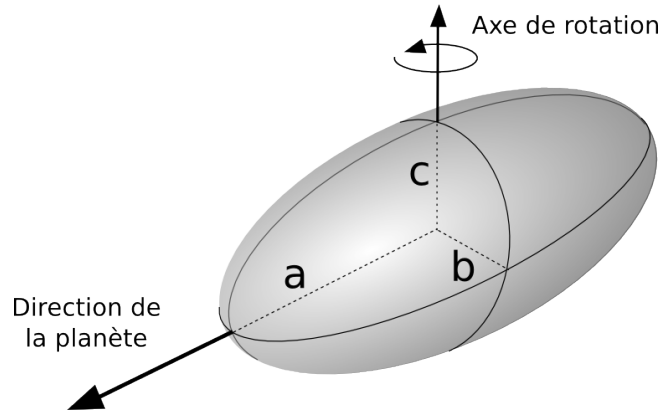


FIGURE 2.1: Satellite représenté sous la forme d'un ellipsoïde triaxial suite aux déformations de marées et de la force centrifuge. Ses axes de figures sont notés $a > b > c$. La longueur respective des axes de l'ellipsoïde est volontairement exagérée.

coefficients d'aplatissements $\alpha, \beta \ll 1$ (Van Hoolst and Dehant, 2002),

$$\alpha = \frac{\frac{a'+b'}{2} - c'}{\frac{a'+b'}{2}}, \quad (2.2)$$

$$\beta = \frac{a' - b'}{a'}, \quad (2.3)$$

ce qui permet d'écrire au premier ordre en α, β ,

$$x'^2 + y'^2(1 + 2\beta) + z'^2(1 + 2\alpha + \beta) = a'^2.$$

En effectuant un passage en coordonnées sphériques (r', θ', ϕ') où θ' est la colatitude et ϕ' la longitude,

$$\begin{cases} x' = r' \sin \theta' \cos \phi', \\ y' = r' \sin \theta' \sin \phi', \\ z' = r' \cos \theta', \end{cases}$$

on peut alors écrire l'équation de l'ellipsoïde sous la forme (e.g. Szeto and Xu (1997); Van Hoolst and Dehant (2002))

$$r' = a' \left(1 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta \right) - \frac{2\alpha}{3} a' Y_2^0(\theta', \phi') + \frac{\beta}{6} a' Y_2^2(\theta', \phi'), \quad (2.4)$$

où $Y_n^m(\theta', \phi')$ et $Y_n^{-m}(\theta', \phi')$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire des harmoniques sphériques définies par (Annexe C)

$$\begin{aligned} Y_n^m(\theta', \phi') &= P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi', \\ Y_n^{-m}(\theta', \phi') &= P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi', \end{aligned}$$

où les $P_n^m(\cos \theta')$ sont les fonctions associées de Legendre (Annexe B). On pose alors l'expression du rayon moyen de la sphère équivalente

$$r'_o = a' \left(1 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta \right), \quad (2.5)$$

ce qui permet d'écrire l'équation de la surface de l'ellipsoïde triaxial au premier ordre en aplatissements sous la forme

$$r' = r'_o \left(1 - \frac{2}{3} \alpha Y_2^0(\theta', \phi') + \frac{1}{6} \beta Y_2^2(\theta', \phi') \right). \quad (2.6)$$

Cette équation décrit les déformations autour de la sphère moyenne de rayon r'_o sous forme de coefficients proportionnels aux harmoniques sphériques. Puisque l'on a

$$\begin{aligned} Y_2^0(\theta', \phi') &= \frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2}, \\ Y_2^2(\theta', \phi') &= 3 \sin^2 \theta' \cos 2\phi', \end{aligned}$$

l'harmonique $Y_2^0(\theta', \phi')$, indépendante de la longitude et symétrique par rapport à l'équateur, est maximale pour $\theta' = 0$ et $\theta' = \pi$. L'amplitude associée est $-2\alpha/3$, et induit donc un aplatissement au niveau des pôles du corps. L'harmonique $Y_2^2(\theta', \phi')$ est maximale au niveau de l'équateur ($\theta' = \pi/2$) et pour $\phi' = 0$ et $\phi' = \pi$. L'amplitude $\beta/6$ étant positive, il s'agit ici d'une élongation le long de l'axe a' .

2.1.2 Equation de Clairaut

Clairaut (1743) a écrit l'équation différentielle décrivant la forme à l'équilibre hydrostatique de la surface (Annexe E). De façon similaire à **Kaula (1968)**, l'équation est ici donnée par exemple pour l'aplatissement β

$$\left(\frac{1}{6} \frac{\partial^2 \beta(r'_o)}{\partial r'^2_o} - \frac{\beta(r'_o)}{r'^2_o} \right) \tilde{\rho} + \frac{\rho(r'_o)}{r'_o} \left(\frac{\beta(r'_o)}{r'_o} + \frac{\partial \beta(r'_o)}{\partial r'_o} \right) = 0, \quad (2.7)$$

où ρ est la densité et $\tilde{\rho}$ la densité moyenne sous la surface paramétrée par r'_o . A la surface R , l'équation différentielle suivante est vérifiée (*e.g.* **Moritz and Mueller (1987)**)

$$\frac{d\beta(r'_o)}{dr'_o}(R) = \frac{1}{R} \left[\frac{15}{2} q_r - 2\beta'(R) \right]. \quad (2.8)$$

Cette équation décrit la figure d'équilibre d'un fluide soumis à des potentiels perturbateurs. Ici, les potentiels perturbateurs sont le potentiel centrifuge et le potentiel de marée. Le premier induit un aplatissement polaire α , tandis que le second crée une élongation de l'équateur β . Ces déformations sont indépendantes du temps. La première solution de cette équation a été obtenue par **Radau (1890)** qui parvient par une transformation à réduire l'équation différentielle du second ordre à une équation du premier ordre.

Dans le cas de Titan, nous intégrons numériquement l'équation pour β et α en fonction des différents modèles de structure interne. Les aplatissements dépendent de la densité des matériaux et de la structure du satellite. Nous utiliserons pour cela les modèles décrits dans la section (4.2).

2.1.3 Forme dynamique

La paramétrisation (2.6) de la surface du satellite peut se généraliser par un développement aux degrés et ordres supérieurs en écrivant

$$r' = r'_o + u_r(r'_o, \theta', \phi'), \quad (2.9)$$

où u_r est l'écart à la sphère de rayon r'_o tel que (Hinderer et al., 1982)

$$u_r(r'_o, \theta', \phi') = r'_o \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(d_{n,m}(r'_o) Y_n^m(\theta', \phi') + e_{n,m}(r'_o) Y_n^{-m}(\theta', \phi') \right) \right], \quad (2.10)$$

où nous appellerons $d_{n,m}$ et $e_{n,m}$ les coefficients des déformations associées aux harmoniques sphériques correspondantes. Cette écriture permet donc d'approximer la surface d'un satellite de forme ellipsoïdale par une décomposition en harmoniques sphériques au degré voulu et de quantifier les déformations de cette surface. La forme de la surface est dictée par les potentiels perturbateurs (marée, centrifuge) et est développée au même degré que ceux-ci (Love, 1911). Dans ce manuscrit, les potentiels sont développés au degré 2, la précision actuelle des mesures de libration sur Titan ne permettant pas de détecter un effet provenant d'un ordre supérieur.

Les déformations peuvent être statiques, comme par exemple dans le cas du satellite triaxial rigide où $d_{2,0} = -2\alpha/3$ et $d_{2,2} = \beta/6$ (c.f. (2.6)) et où α et β sont constants, mais elles peuvent également être dynamiques, sous l'effet de la force de marée par exemple. Dans la suite du manuscrit, nous distinguerons les déformations statiques notées $\bar{d}_{n,m}$, $\bar{e}_{n,m}$ des déformations dynamiques notées $\tilde{d}_{n,m}$, $\tilde{e}_{n,m}$ de sorte que la déformation totale soit une combinaison de ces deux éléments

$$d_{n,m} = \bar{d}_{n,m} + \tilde{d}_{n,m} \quad \text{et} \quad e_{n,m} = \bar{e}_{n,m} + \tilde{e}_{n,m}. \quad (2.11)$$

Parmi les coefficients de déformation du satellite triaxial, les termes associés à la déformation statique (aplatissement, élongation) ont une amplitude plus importante. On suppose dans le reste du manuscrit que les déformations dynamiques $\tilde{d}_{n,m}$ sont petites devant les déformations statiques, et que les termes $d_{2,0}$ et $d_{2,2}$ associés à la triaxialité et ses variations sont grands devant les autres coefficients de déformation. Globalement, le satellite est triaxial au premier ordre. L'expression (2.9) de la surface paramétrée par r' permet de calculer les moments d'inertie associés à un corps de forme quelconque, et les coefficients $d_{n,m}$, $e_{n,m}$ sont utilisés pour calculer les couplages exercés sur les différentes couches du satellite.

2.2 Moments d'inertie du satellite

Les moments d'inertie du satellite permettent de quantifier sa réaction face à une variation de la rotation, ils constituent donc un paramètre clé dans l'étude des librations. Ils dépendent de la distribution de masse à l'intérieur du satellite (différentiation, structure, anomalies) mais également de la forme du satellite. La relation entre les moments d'inertie et les coefficients de déformations de la surface est déterminée ici.

Les moments d'inertie sont définis (c.f. (1.6)) dans le repère lié aux axes principaux d'inertie tels que $I_{33} > I_{22} > I_{11} \gg I_{ij, j \neq i}$. On peut alors calculer chaque composante de la matrice d'inertie en utilisant la forme du satellite (2.9) calculée dans la section précédente. Par exemple, l'équation d'Euler-Liouville en longitude (1.13) dépend du moment d'inertie I_{33} qui s'écrit en coordonnées Cartésiennes (x', y', z')

$$I_{33} = \int_{V'} \rho(r') (x'^2 + y'^2) dx' dy' dz', \quad (2.12)$$

où ρ est la densité et V' le volume du satellite. On effectue alors le changement de coordonnées

suivant qui nous permet d'introduire l'expression (2.9) de la surface déformée r'

$$\begin{cases} x' = r'(r'_o, \theta', \phi') \sin \theta' \cos \phi', \\ y' = r'(r'_o, \theta', \phi') \sin \theta' \sin \phi', \\ z' = r'(r'_o, \theta', \phi') \cos \theta', \end{cases} \quad (2.13)$$

où θ' est la colatitude et ϕ' la longitude du point du satellite situé en \mathbf{r}' et le jacobien de la transformation est

$$J = r'^2 \frac{\partial r'}{\partial r'_o} \sin \theta'. \quad (2.14)$$

r'_o désigne ici le rayon moyen de la sphère équivalente à la surface r' . L'expression du moment d'inertie I_{33} s'écrit alors en coordonnées sphériques (r'_o, θ', ϕ') (Van Hoolst and Dehant, 2002)

$$I_{33} = \int_{V'} \rho(r'_o) r'^4 \frac{\partial r'}{\partial r'_o} \sin^3 \theta' dr'_o d\theta' d\phi'. \quad (2.15)$$

Or on a

$$\sin^2 \theta' = -\frac{2}{3} Y_2^0(\theta', \phi') + \frac{2}{3} Y_0^0(\theta', \phi'), \quad (2.16)$$

ce qui permet d'écrire le moment d'inertie sous forme de produits entre harmoniques sphériques issus du développement de r' (2.9) en utilisant l'orthonormalisation des harmoniques (cf. Annexe C). Le moment d'inertie s'écrit après quelques développements

$$I_{33} = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r'_o) \left(r_o'^4 - \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial r'_o} (d_{2,0}(r'_o) r_o'^5) \right) dr'_o, \quad (2.17)$$

où R est le rayon moyen de la sphère équivalente correspondant à la surface moyenne du satellite.

La même approche est utilisée pour obtenir les autres composantes de la matrice d'inertie,

$$I_{11} = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r'_o) \left(r_o'^4 + \frac{1}{10} \frac{\partial}{\partial r'_o} (d_{2,0}(r'_o) r_o'^5) - \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial r'_o} (d_{2,2}(r'_o) r_o'^5) \right) dr'_o, \quad (2.18)$$

$$I_{22} = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r'_o) \left(r_o'^4 + \frac{1}{10} \frac{\partial}{\partial r'_o} (d_{2,0}(r'_o) r_o'^5) + \frac{3}{5} \frac{\partial}{\partial r'_o} (d_{2,2}(r'_o) r_o'^5) \right) dr'_o, \quad (2.19)$$

$$I_{12} = I_{21} = -\frac{8\pi}{5} \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} (e_{2,2}(r'_o) r_o'^5) dr'_o, \quad (2.20)$$

$$I_{13} = I_{31} = -\frac{4\pi}{5} \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} (d_{2,1}(r'_o) r_o'^5) dr'_o, \quad (2.21)$$

$$I_{23} = I_{32} = -\frac{4\pi}{5} \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} (e_{2,1}(r'_o) r_o'^5) dr'_o. \quad (2.22)$$

Ces expressions sont générales et valables pour un corps inhomogène. Nous notons ici qu'une faute de frappe existe dans l'article de Richard et al. (2014) où le coefficient du terme I_{12} devrait être $-8\pi/5$. Les moments d'inertie diagonaux ne dépendent que des coefficients d'ordre pair $d_{2,0}$ et $d_{2,2}$ décrivant la forme d'équilibre du corps et ses variations le long des axes principaux d'inertie. Les moments non-diagonaux dépendent des coefficients d'ordre impair $d_{2,1}$, $e_{2,1}$ et du coefficient $e_{2,2}$ associé à l'harmonique Y_2^{-2} . Ces derniers sont associés aux déformations autour des axes principaux d'inertie et ont une amplitude plus faible que les coefficients $d_{2,0}$ et $d_{2,2}$.

Comme indiqué dans la section 2.1, les coefficients de déformations $d_{i,j}$ et $e_{i,j}$ comportent une partie statique correspondant à la forme d'équilibre et une partie périodique associée à ses variations. Les expressions des moments d'inertie obtenues ici contiennent donc les variations d'inertie dues aux déformations dynamiques du corps.

Prenons maintenant pour comparaison le cas d'un satellite homogène de densité ρ , rigide et triaxial. Nous avons obtenu l'expression de la surface r' (2.6) de l'ellipsoïde triaxial avec $d_{2,0}(R) = -2\alpha/3$ et $d_{2,2}(R) = \beta/6$ où R est le rayon moyen de la sphère équivalente à la surface de l'ellipsoïde. Les autres coefficients de déformation sont nuls. En injectant ces coefficients dans les expressions (2.17)-(2.22) des moments d'inertie, on trouve

$$I_{11} = \frac{8\pi}{15}\rho R^5 \left(1 - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\beta\right), \quad (2.23)$$

$$I_{22} = \frac{8\pi}{15}\rho R^5 \left(1 - \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right), \quad (2.24)$$

$$I_{33} = \frac{8\pi}{15}\rho R^5 \left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right), \quad (2.25)$$

$$I_{ij, i \neq j} = 0. \quad (2.26)$$

Dans ce cas, on vérifie bien que la matrice d'inertie d'un satellite triaxial est purement diagonale puisque le satellite ne possède pas de dissymétrie dans sa distribution de masse par rapport aux différents axes d'inertie. Ici, les coefficients α et β sont des constantes, les moments d'inertie sont indépendants du temps et sont usuellement notés A , B , et C . On vérifie également que la somme des moments d'inertie $(I_{11} + I_{22} + I_{33})/3$ est bien égale au moment d'inertie du corps $I = \frac{8\pi}{15}\rho R^5$.

Les coefficients de déformations utilisés ici pour déterminer les moments d'inertie sont également utilisés pour calculer les couplages exercés sur les différentes couches.

Chapitre 3

Couples et déformations

Sommaire

3.1	Couples de forces	29
3.1.1	Couplage gravitationnel avec la planète	29
3.1.2	Couplage gravitationnel interne	33
3.1.3	Couplage de pression et couplage inertiel	37
3.1.4	Couplage atmosphérique	40
3.1.5	Couple total exercé sur les couches	42
3.2	Déformations élastiques	44
3.2.1	Formalisme de Love	44
3.2.2	Coefficients de déformation	46
3.2.3	Bourellets de marée périodiques	48

3.1 Couples de forces

Les couplages sont responsables de la variation temporelle du moment cinétique et constituent le second membre des équations différentielles (1.19)-(1.21). Il s'agit des couples de forces exercées sur le satellite ou une partie de celui-ci, et notamment la force gravitationnelle exercée par la planète, l'interaction gravitationnelle entre les différentes couches ou encore la pression aux interfaces entre la couche fluide et les couches solides ou les échanges de moment cinétique entre l'atmosphère et la surface. Tous ces couples constituent un forçage du mouvement de rotation et induisent une réponse librationnelle du satellite.

3.1.1 Couplage gravitationnel avec la planète

L'attraction gravitationnelle de la planète sur les différentes couches du satellite est à l'origine d'un couplage gravitationnel modifiant la vitesse de rotation (cf. Fig. 1.6). L'expression du couple gravitationnel est obtenue en utilisant l'expression vectorielle du couple $\mathbf{\Gamma}$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

où \mathbf{r} est le rayon vecteur reliant les centres de masse du satellite et de la planète et \mathbf{F} est la force gravitationnelle exercée par la planète sur le satellite. L'expression de la force exercée sur le satellite est obtenue à partir de son potentiel gravitationnel externe W_{ext} .

3.1.1.1 Potentiel gravitationnel externe

Le potentiel gravitationnel W généré par une masse ponctuelle M en un point situé à la distance r s'écrit simplement

$$W = -\frac{GM}{r}, \quad (3.2)$$

où G est la constante gravitationnelle. La force gravitationnelle exercée par cette masse ponctuelle sur un corps externe de masse m peut donc s'écrire $\mathbf{F} = -m\nabla W$. Le signe du potentiel est ici choisi négatif de telle manière que la force gravitationnelle soit attractive. D'après la relation (3.1), l'attraction gravitationnelle entre deux corps ponctuels ne donne naissance à aucun couple de rappel. Il faut calculer la force exercée sur une masse non-ponctuelle pour obtenir l'expression du couple gravitationnel externe.

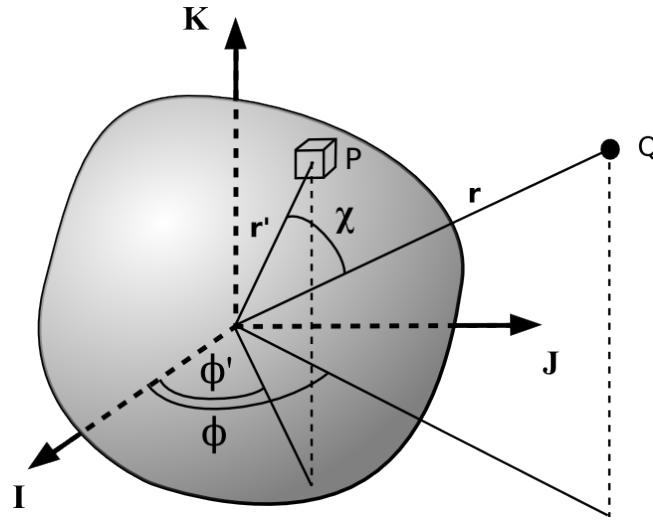


FIGURE 3.1: Corps solide non-ponctuel. La masse dm située au point P à la distance r' du centre du satellite exerce un potentiel gravitationnel au point Q situé à la distance r .

Un corps non-ponctuel de densité uniforme ρ exerce un potentiel gravitationnel qui peut être écrit comme une fonction angulaire liée à sa forme, c'est-à-dire développé en harmoniques sphériques. Dans le cas d'une masse étendue, on s'intéresse au potentiel exercé par l'ensemble des masses infinitésimales dm du corps, situées en \mathbf{r}' , sur un point \mathbf{r} à l'extérieur du corps (Figure 3.1) où $r \gg r'$. Ce potentiel W s'écrit alors

$$W = -G\rho \int_{V'} \frac{dV'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (3.3)$$

où V' désigne le volume du satellite.

Le potentiel W peut se décomposer en deux parties : le potentiel d'une sphère de rayon moyen r'_o et celui de la coquille non-sphérique qui la recouvre. La première partie est donnée par l'expression (3.2), tandis que la seconde s'écrit sous la forme (3.3) en intégrant sur le volume de la coquille non-sphérique. Le volume dV'_c d'une coquille non-sphérique infinitésimale de rayon interne r'_o et d'épaisseur $u_r(r'_o, \theta', \phi')$ s'écrit

$$dV'_c = r'^2_o u_r(r'_o, \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi', \quad (3.4)$$

où $u_r(r'_o, \theta', \phi')$ est défini par l'équation (2.9).

Le volume dV'_c est introduit dans l'expression du potentiel (3.3), où $\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$ est la distance entre la masse dm en P et le point Q (Fig. 3.1), que l'on peut écrire en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \chi}, \\ &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'))}, \end{aligned}$$

avec (r, θ, ϕ) les coordonnées sphériques du point Q, (r', θ', ϕ') celles de la masse dm en P et χ est l'angle entre \mathbf{r} et \mathbf{r}' . En utilisant les polynômes de Legendre $P_n(\cos \chi)$ (voir Annexe B), on peut développer en série pour $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}'$

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \chi).$$

Le potentiel W_c de la coquille non-sphérique peut alors s'écrire au premier ordre en aplatissements

$$W_c = -G\rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r_o'^2 u_r(r_o', \theta', \phi') \sin \theta' \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r_o'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \chi) d\theta' d\phi'.$$

Or $P_n(\cos \chi)$ peut se développer en harmoniques sphériques en utilisant le théorème d'addition des harmoniques (Annexe C)

$$P_n(\cos \chi) = \sum_{m=-n}^n (2 - \delta_{0,m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Y_n^m(\theta', \phi') Y_n^m(\theta, \phi).$$

En utilisant la normalisation des harmoniques définie dans l'annexe C, le potentiel de la coquille peut s'écrire après quelques développements et en intégrant sur θ' et ϕ'

$$W_c = -G\rho \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left(\frac{r_o'^{i+3}}{r^{i+1}} \frac{4\pi}{2i+1} (d_{i,j}(r_o') Y_i^j(\theta, \phi) + e_{i,j}(r_o') Y_i^{-j}(\theta, \phi)) \right). \quad (3.5)$$

Le potentiel à l'extérieur de l'ellipsoïde homogène W_{ext} s'écrit finalement, en sommant le potentiel de la sphère au potentiel W_c de la coquille, sous la forme (Jeffreys, 1970)

$$W_{ext} = -\frac{4\pi G}{3} \rho \left[\frac{r_o'^3}{r} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left(\frac{3}{2i+1} \frac{r_o'^{i+3}}{r^{i+1}} (d_{i,j}(r_o') Y_i^j(\theta, \phi) + e_{i,j}(r_o') Y_i^{-j}(\theta, \phi)) \right) \right], \quad (3.6)$$

où l'on retrouve les coefficients $d_{i,j}$ et $e_{i,j}$ (2.9) donnant la forme de la surface du satellite de rayon moyen r_o' ainsi que les angles θ et ϕ qui donnent l'orientation du vecteur \mathbf{r} .

On peut également généraliser cette expression à un corps inhomogène en intégrant sur le rayon moyen r_o' , le potentiel gravitationnel du satellite devient alors

$$W_{ext} = -\frac{4\pi G}{3} \int_0^R \rho(r_o') \frac{\partial}{\partial r_o'} \left[\frac{r_o'^3}{r} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left(\frac{3}{2i+1} \frac{r_o'^{i+3}}{r^{i+1}} (d_{i,j}(r_o') Y_i^j(\theta, \phi) + e_{i,j}(r_o') Y_i^{-j}(\theta, \phi)) \right) \right] dr_o'. \quad (3.7)$$

Le premier terme de W_{ext} est le potentiel de la sphère correspondant au rayon moyen du corps. Les termes suivants décrivent le potentiel exercé par les parties non-sphériques de l'ellipsoïde associées aux harmoniques sphériques $Y_i^j(\theta, \phi)$. Ces termes du potentiel sont pondérés par les coefficients de déformations $d_{i,j}$ et $e_{i,j}$, ils contiennent la réponse gravitationnelle du corps aux déformations de sa surface.

3.1.1.2 Potentiel de McCullagh

Une application de l'expression du potentiel (3.7) peut être faite pour un satellite triaxial, rigide et homogène. L'expression de W_{ext} peut se simplifier en ne considérant que les premières harmoniques. Ainsi, au degré 2, le potentiel gravitationnel exercé en \mathbf{r} s'écrit

$$W_{ext,2} = -\frac{GM}{r} - \frac{4\pi G}{5r^3} \rho R^5 \left(d_{2,0}(R) Y_2^0(\theta, \phi) + d_{2,2}(R) Y_2^2(\theta, \phi) \right),$$

donc en explicitant les coefficients de déformation

$$W_{ext,2} = -\frac{GM}{r} + \frac{8\pi G}{15r^3} \rho R^5 \alpha Y_2^0(\theta, \phi) - \frac{2\pi G}{15r^3} \rho R^5 \beta Y_2^2(\theta, \phi).$$

En utilisant les expressions des moments d'inertie (2.23), (2.24) et (2.25), on obtient

$$W_{ext,2} = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{r^3} \left[J_2 Y_2^0(\theta, \phi) + C_{22} Y_2^2(\theta, \phi) \right], \quad (3.8)$$

où

$$J_2 = -\left(I_{33} - \frac{I_{22} + I_{11}}{2} \right), \quad (3.9)$$

$$C_{22} = \frac{I_{22} - I_{11}}{4}, \quad (3.10)$$

sont les coefficients de degré 2 du champ de gravité. Cette expression est une formulation particulière du potentiel de McCullagh (1855) obtenue par Tisserand (1891).

3.1.1.3 Couple gravitationnel externe

La planète, supposée ponctuelle ici, exerce une force gravitationnelle en chaque point du satellite étendu. Si la répartition des masses du satellite ne possède pas de symétrie axiale autour du vecteur reliant les centres de masse, la résultante des forces appliquées sur le satellite est non-nulle et un couple de rappel agit (voir Fig. 1.6). En utilisant l'expression (3.1), le couple de force $\mathbf{\Gamma}_{ext}$ exercé par une planète de masse M_p sur un satellite dont le potentiel est W_{ext} s'écrit comme l'opposé du couple exercé par le satellite sur la planète

$$\mathbf{\Gamma}_{ext} = M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}.$$

En utilisant l'expression (3.7) intégrée sur l'épaisseur d'une couche comprise entre l et $l+1$, le couplage gravitationnel exercé par la planète sur cette couche devient

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_{ext}^l = & - \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{4\pi G M_p}{2i+1} \left[\int_{r_l}^{r_{l+1}} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(r_o^{i+3} d_{ij}(r'_o) \right) dr'_o \mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{1}{r^{i+1}} Y_i^j(\theta, \phi) \right) \right. \\ & \left. + \int_{r_l}^{r_{l+1}} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(r_o^{i+3} e_{ij}(r'_o) \right) dr'_o \mathbf{r} \times \nabla \left(\frac{1}{r^{i+1}} Y_i^{-j}(\theta, \phi) \right) \right]. \end{aligned}$$

Cette expression montre que seules les composantes non-sphériques du potentiel, c'est-à-dire proportionnelles aux coefficients de déformations d_{ij} et e_{ij} , contribuent au couple gravitationnel.

En intégrant sur toutes les couches du satellite et après développement des produits vectoriels en coordonnées sphériques, on a, au degré 2,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ext,z} = & -\frac{3GM_p}{r^3} I_{13} \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \frac{3GM_p}{r^3} I_{23} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\ & + \frac{3GM_p}{r^3} I_{12} \sin^2 \theta \cos 2\phi + \frac{3GM_p}{2r^3} (I_{22} - I_{11}) \sin^2 \theta \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En supposant que l'obliquité du satellite est nulle, la colatitude de la planète vaut $\theta = \pi/2$. Après passage en coordonnées Cartésiennes, on trouve (*e.g.* Hinderer et al. (1982) pour le cas triaxial)

$$\Gamma_{ext,z} = \frac{3GM_p}{r^5} \left[(I_{22} - I_{11})xy + I_{12}(x^2 - y^2) \right], \quad (3.12)$$

où x , y et z sont les coordonnées de la planète dans le repère lié au satellite. En notation vectorielle, on obtient

$$\mathbf{\Gamma}_{ext} = \frac{3GM_p}{r^3} (\mathbf{u} \times \mathcal{I}\mathbf{u}), \quad (3.13)$$

où \mathbf{u} est le vecteur unitaire directeur de la planète.

L'expression (3.12) est celle du couple gravitationnel externe utilisé dans les équations (1.19)-(1.21) pour la libration en longitude. Elle ne dépend que de la différence de moments d'inertie équatoriaux $I_{22} - I_{11}$ ainsi que des écarts à l'ellipsoïde triaxial décrit par la composante non-diagonale I_{12} de la matrice d'inertie. Le couple appliqué à une couche l quelconque s'écrit en remplaçant les moments d'inertie globaux I_{ij} par ceux de la couche étudiée I_{ij}^l .

3.1.2 Couplage gravitationnel interne

Dans le cas des satellites de glace, une couche fluide peut séparer deux couches solides. Dans ce cas, si les couches solides ne sont pas alignées l'une par rapport à l'autre, un couplage gravitationnel interne agit et tend à les aligner. Ici, le potentiel gravitationnel exercé par une couche supérieure sur une couche inférieure est déterminé, ainsi que le couple de rappel qui résulte du déphasage entre ces couches.

3.1.2.1 Potentiel gravitationnel interne

Pour un point situé à l'intérieur du satellite, deux potentiels gravitationnels agissent de concert : le potentiel gravitationnel exercé par les couches situées en-dessous du point considéré, et celui des couches situées au-dessus. Le premier peut être exprimé sous la forme (3.7) en intégrant jusqu'à la surface interne r_i où se trouve le point considéré. Le second consiste à calculer le potentiel exercé en un point \mathbf{r}'' situé à l'intérieur d'une couche ellipsoïdale. Pour cela, on part de la définition du potentiel (3.3) où cette fois $\mathbf{r}'' \ll \mathbf{r}'$ de sorte que

$$\frac{1}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''\|} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r''}{r'} \right)^n P_n(\cos \chi).$$

Ainsi le potentiel en un point \mathbf{r} exercé par la coquille homogène située au-dessus s'écrit comme la combinaison du potentiel $W_{int,sph}$ interne à la sphère de rayon r'_o et du potentiel $W_{int,ns}$ de

la partie non-sphérique décrite par dV'_c , avec

$$W_{int,sph} = -\frac{4\pi G}{3}\rho\left(\frac{3}{2}r_o'^2 - \frac{r''^2}{2}\right),$$

$$W_{int,ns} = -G\rho\iint\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r''}\right)^n P_n(\cos\chi)dV'_c,$$

où dV'_c est défini par l'équation (3.4). On a donc pour une couche homogène (Jeffreys, 1970)

$$W_{int} = -\frac{4\pi G}{3}\rho\left[\frac{3r_o'^2 - r''^2}{2} + \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=0}^i\frac{r''^i}{r_o'^{i-2}}\frac{3}{2i+1}(d_{i,j}(r_o')Y_i^j(\theta,\phi) + e_{i,j}(r_o')Y_i^{-j}(\theta,\phi))\right].$$

Pour un satellite inhomogène, le potentiel exercé par une couche l dont l'épaisseur varie entre r_l et r_{l+1} en un point \mathbf{r}'' situé à l'intérieur s'écrit alors

$$W_{int} = -4\pi G\int_{r_l}^{r_{l+1}}\rho(r_o')r_o'dr_o' - \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=0}^i\frac{4\pi G}{2i+1}r''^i\int_{r_l}^{r_{l+1}}\rho(r_o')\frac{\partial}{\partial r_o'}\left(r_o'^{2-i}d_{i,j}(r_o')Y_i^j(\theta,\phi) + r_o'^{2-i}e_{i,j}(r_o')Y_i^{-j}(\theta,\phi)\right)dr_o'. \quad (3.14)$$

On retrouve la structure similaire au potentiel W_{ext} , où le premier terme est la composante due à la sphère associée au rayon moyen de la couche et les termes suivants sont associés aux déformations de celle-ci.

3.1.2.2 Couple gravitationnel interne

Dans notre modèle à 3 couches, nous souhaitons déterminer le couplage gravitationnel exercé par la couche de surface sur le noyau. Le fluide sépare les deux couches solides et un écart $\phi_{is} = \phi_i - \phi_s$ dans leur orientation donne naissance à un couple de rappel (fig. 3.2). Cependant, les parties non-sphériques au sommet et au fond du fluide dans la cavité contribuent également au couple de rappel. Nous ne considérons ici que la partie du fluide située à l'extérieur de la sphère inscrite dans la coquille de glace (partie supérieure de l'océan) et celle située à l'intérieur de la sphère dans laquelle est inscrite le noyau (partie inférieure de l'océan) (Fig.3.2 (b) par exemple). Suivant l'approche détaillée par Szeto and Xu (1997), nous devons donc considérer quatre contributions pour le couple gravitationnel interne :

- le couple exercé par le noyau et la partie inférieure de l'océan sur la coquille de surface (Fig. 3.2 (a)),
- le couple exercé par le noyau et la partie inférieure de l'océan sur la partie supérieure de l'océan (Fig. 3.2 (b)).
- le couple exercé par la coquille de surface et la partie supérieure de l'océan sur le noyau (Fig. 3.2 (c)),
- le couple exercé par la coquille de surface et la partie supérieure de l'océan sur la partie inférieure de l'océan (Fig. 3.2 (d)),

Le couple de la force gravitationnelle \mathbf{F}_{int} exercée par une couche supérieure (indice *sup*) sur une couche interne (indice *int*) est donné par l'expression

$$\mathbf{\Gamma}_{int} = -\int_{V_{int}}\rho(\mathbf{r}\times\nabla W_{int})dV_{int}.$$

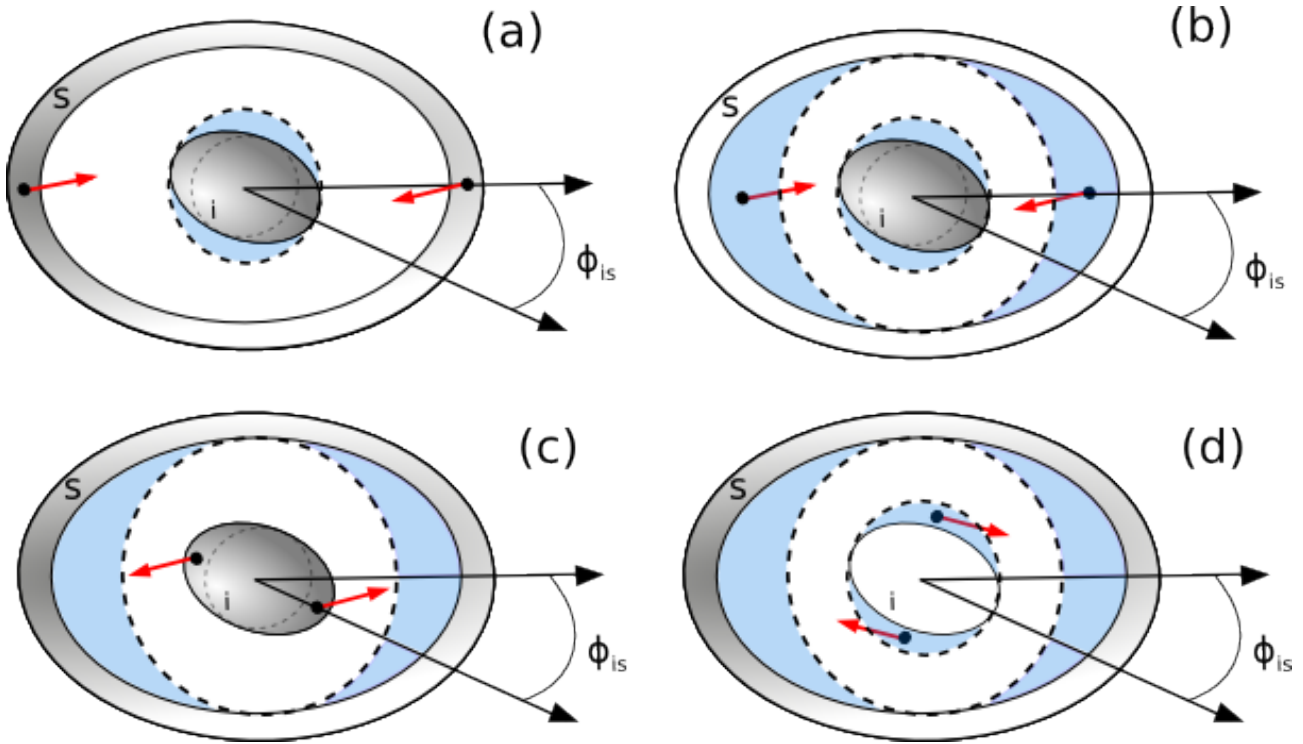


FIGURE 3.2: Représentation schématique des forces gravitationnelles internes exercées entre les couches du satellite dans le problème plan. (a) Le noyau et la partie inférieure de l'océan exercent un couple de rappel sur la coquille de glace et (b) sur la partie supérieure de l'océan. (c) La coquille de glace et la partie supérieure de l'océan exercent également un couple de rappel sur le noyau et (d) sur la partie inférieure de l'océan. La forme et la taille des ellipsoïdes, ainsi que le déphasage ne sont pas représentés à l'échelle.

Ici, l'intégrale porte sur le volume des couches internes. Le couplage est en effet dû aux formes des couches supérieure et interne, et si l'une ou l'autre est sphérique, aucun couple de rappel n'agit entre elles. Le potentiel W_{int} est intégré sur le volume des couches supérieure tandis que le couple est intégré sur celui des couches internes sur lesquelles il est appliqué. L'expression de ce couplage interne peut se développer sous la forme

$$\Gamma_{int} = \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^i \frac{4\pi G}{2i+1} \left[\int_{sup} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(r_o^{i-2} d_{i,j}(r'_o) \right) dr'_o \int_{int} \rho(r'_o) \mathbf{r}' \times \nabla (r^i Y_i^j(\theta, \phi)) dV \right. \\ \left. + \int_{sup} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(r_o^{i-2} e_{i,j}(r'_o) \right) dr'_o \int_{int} \rho(r'_o) \mathbf{r}' \times \nabla (r^i Y_i^{-j}(\theta, \phi)) dV \right]. \quad (3.15)$$

La composante z du couple gravitationnel exercé entre les couches lorsqu'elles sont déphasées d'un angle $\phi_{is} = \phi_i - \phi_s$ en longitude (Fig. 3.2) s'écrit au second ordre

$$\begin{aligned} \Gamma_{int,z} = & -\frac{12\pi G}{5} \int_{sup} \rho(r'_o) \frac{\partial d_{2,1}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o \int_{int} \rho(r'_o) (x'_{int} z'_{int} \sin \phi_{is} + y'_{int} z'_{int} \cos \phi_{is}) dV \\ & + \frac{12\pi G}{5} \int_{sup} \rho(r'_o) \frac{\partial e_{2,1}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o \int_{int} \rho(r'_o) (x'_{int} z'_{int} \cos \phi_{is} - y'_{int} z'_{int} \sin \phi_{is}) dV \\ & - \frac{24\pi G}{5} \int_{sup} \rho(r'_o) \frac{\partial d_{2,2}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o \int_{int} \rho(r'_o) ((x'_{int})^2 - (y'_{int})^2) \sin 2\phi_{is} + 2x'_{int} y'_{int} \cos 2\phi_{is} dV \\ & + \frac{24\pi G}{5} \int_{sup} \rho(r'_o) \frac{\partial e_{2,2}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o \int_{int} \rho(r'_o) ((x'_{int})^2 - (y'_{int})^2) \cos 2\phi_{is} - 2x'_{int} y'_{int} \sin 2\phi_{is} dV, \quad (3.16) \end{aligned}$$

où x'_{int} , y'_{int} et z'_{int} sont les coordonnées du point de la couche interne considérée exprimées dans le repère de la couche de surface (repère de Tisserand). Cette expression traduit l'influence de la forme de la couche supérieure (déterminée par les coefficients $d_{i,j}$ et $e_{i,j}$) sur la couche interne. On remarque notamment que ce couple est indépendant du coefficient $d_{2,0}$ qui quantifie l'aplatissement polaire. Cette particularité s'explique par le fait que l'aplatissement polaire est indépendant de la longitude; par conséquent, celui-ci n'entraîne aucun couple de rappel lors d'un déphasage en longitude. Les autres termes en revanche ont tous une dépendance en ϕ_{is} .

Intéressons-nous aux quatre couples décrits précédemment. Nous allons donner ici les expressions de chacun des couples internes pour des couches homogènes, en utilisant l'expression des moments d'inertie (1.6), qui nous serviront ensuite dans les équations de conservation du moment cinétique (1.19)-(1.21).

(a) Couple exercé par le noyau et la partie inférieure de l'océan sur la coquille :

Ce premier couple dépend de la forme du noyau et des moments d'inertie de la coquille de glace. Le couple exercé sur la coquille par les couches internes est égal et opposé au couple exercé par la coquille sur ces couches internes. L'expression du couple peut s'écrire au premier ordre en $d_{2,1}$, $e_{i,j}$ et $I_{i,j}$, $j \neq i$ sous la forme

$$\begin{aligned} \Gamma_{int,z}^s = & + \frac{24\pi G}{5} \left[\rho_s (d_{2,2}(R) - d_{2,2}(r_o)) \right] \left[(I_{22}^{i,ob} - I_{11}^{i,ob}) \sin 2\phi_{is} - 2I_{12}^{i,ob} \cos 2\phi_{is} \right] \\ & - \frac{24\pi G}{5} \left[\rho_s (e_{2,2}(R) - e_{2,2}(r_o)) \right] \left[(I_{22}^{i,ob} - I_{11}^{i,ob}) \cos 2\phi_{is} \right], \quad (3.17) \end{aligned}$$

où r_o et R désignent les rayons équivalents de l'océan et de la surface respectivement. Les moments d'inertie sont $I_{ij}^{i,ob} = I_{ij}^i + I_{ij}^{ob}$, où ob (pour ocean bottom) désigne la partie inférieure de l'océan et sont définis à partir des expressions (2.17)-(2.22).

(b) Couple exercé par le noyau et la partie inférieure de l'océan sur la partie supérieure de l'océan :

Ce second couple est similaire au précédent, mais il dépend de la forme de l'océan. Le couple exercé sur la partie supérieure de l'océan (exposant ot pour ocean top) par les couches internes est égal et opposé au couple exercé par la partie supérieure de l'océan sur ces couches internes. L'expression du couple peut s'écrire au premier ordre en $d_{2,1}$, $e_{i,j}$ et $I_{i,j}$, $j \neq i$ sous la forme

$$\begin{aligned} \Gamma_{int,z}^{ot} = & + \frac{24\pi G}{5} \left[\rho_o d_{2,2}(r_o) \right] \left[(I_{22}^{i,ob} - I_{11}^{i,ob}) \sin 2\phi_{is} - 2I_{12}^{i,ob} \cos 2\phi_{is} \right] \\ & - \frac{24\pi G}{5} \left[\rho_o e_{2,2}(r_o) \right] \left[(I_{22}^{i,ob} - I_{11}^{i,ob}) \cos 2\phi_{is} \right]. \quad (3.18) \end{aligned}$$

(c) Couple exercé par la coquille et la partie supérieure de l'océan sur le noyau :

Ce troisième couple dépend de la forme de la coquille de glace et de la surface de l'océan interne, ainsi que des moments d'inertie du noyau. L'expression du couple peut s'écrire au premier ordre en $d_{2,1}$, $e_{i,j}$ et $I_{i,j}$, $j \neq i$ sous la forme

$$\Gamma_{int,z}^i = -\frac{24\pi G}{5} \left[\rho_o d_{2,2}(r_o) + \rho_s (d_{2,2}(R) - d_{2,2}(r_o)) \right] \left[(I_{22}^i - I_{11}^i) \sin 2\phi_{is} - 2I_{12}^i \cos 2\phi_{is} \right] \\ + \frac{24\pi G}{5} \left[\rho_o e_{2,2}(r_o) + \rho_s (e_{2,2}(R) - e_{2,2}(r_o)) \right] \left[(I_{22}^i - I_{11}^i) \cos 2\phi_{is} \right]. \quad (3.19)$$

(d) Couple exercé par la coquille et la partie supérieure de l'océan sur la partie inférieure de l'océan :

Ce dernier couple est semblable au précédent, avec une dépendance des moments d'inertie de la partie inférieure de l'océan (exposant *ob*). L'expression du couple peut s'écrire au premier ordre en $d_{2,1}$, $e_{i,j}$ et $I_{i,j}$, $j \neq i$ sous la forme

$$\Gamma_{int,z}^{ob} = -\frac{24\pi G}{5} \left[\rho_o d_{2,2}(r_o) + \rho_s (d_{2,2}(R) - d_{2,2}(r_o)) \right] \left[(I_{22}^{ob} - I_{11}^{ob}) \sin 2\phi_{is} - 2I_{12}^{ob} \cos 2\phi_{is} \right] \\ + \frac{24\pi G}{5} \left[\rho_o e_{2,2}(r_o) + \rho_s (e_{2,2}(R) - e_{2,2}(r_o)) \right] \left[(I_{22}^{ob} - I_{11}^{ob}) \cos 2\phi_{is} \right]. \quad (3.20)$$

De la même façon que pour le couple gravitationnel externe (3.12), l'expression de la composante z des couples gravitationnels internes ne dépend que de la différence des moments d'inertie équatoriaux et de la composante non-diagonale I_{12} du tenseur d'inertie. Pour des couches de forme triaxiale ($I_{12}^i = 0$, $e_{2,2} = 0$), on vérifie bien que le couple gravitationnel interne est nul lorsque l'angle ϕ_{is} entre les deux couches solides est nul, c'est-à-dire lorsque les deux couches sont parfaitement alignées. Egalement, si les couches ont un équateur circulaire ($I_{22} = I_{11}$, $I_{12} = 0$ et/ou $d_{2,2} = e_{2,2} = 0$), le couple gravitationnel interne est nul.

Les expressions des couplages gravitationnels internes interviennent dans les équations (1.19)-(1.21). La coquille de fluide comprise entre les pointillés de la figure 3.2 est sphérique, par conséquent aucun couple de rappel n'est exercé sur elle par les couches supérieures ou inférieures. On vérifie également que, sur l'ensemble du satellite, la somme des couples internes est nulle : $\Gamma_{int,z}^s + \Gamma_{int,z}^{ot} + \Gamma_{int,z}^{ob} + \Gamma_{int,z}^i = 0$.

3.1.3 Couplage de pression et couplage inertiel

La présence d'une couche fluide entre deux couches solides implique l'existence de forces de pression au niveau des interfaces. Ces forces de pression vont induire un couplage dépendant de la forme des interfaces et agissant à la fois sur la couche fluide et sur les couches solides. Nous suivons ici l'approche de [Van Hoolst and Dehant \(2002\)](#); [Van Hoolst et al. \(2009\)](#) pour l'écriture du couplage de pression.

3.1.3.1 Force de pression

La dynamique dans une couche fluide (f) de densité constante ρ_f est déterminée par l'équation de Navier-Stokes (*e.g.* [Landau et al. \(1959\)](#))

$$\rho_f \frac{D\mathbf{v}_o^f}{Dt} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_o^f + \mathbf{F}, \quad (3.21)$$

où D/Dt est la dérivée particulaire définie telle que

$$\frac{D\mathbf{v}_o^f}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}_o^f}{\partial t} + (\mathbf{v}_o^f \cdot \nabla)\mathbf{v}_o^f,$$

avec \mathbf{v}_o^f la vitesse du fluide définie dans le repère inertiel $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, P est la pression s'exerçant sur le fluide, η est la viscosité et \mathbf{F} la résultante des forces appliquées au fluide.

Dans le repère $(G, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ tournant à la vitesse ω avec la surface du corps, on a

$$\left(\frac{D\mathbf{v}_o^f}{Dt}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})} = \left(\frac{D\mathbf{v}^f}{Dt}\right)_{(\mathbf{I},\mathbf{J},\mathbf{K})} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^f + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

où \mathbf{v}^f est la vitesse du fluide par rapport au repère $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$. On retrouve dans cette expression le terme inertiel de Coriolis et le terme centrifuge associé au repère tournant.

Quelques hypothèses permettent de simplifier la dynamique. On suppose que le fluide possède un *mouvement simple* (Poincaré, 1910), où les composantes de la vitesse sont des fonctions linéaires des coordonnées telles que (Sasao et al., 1980)

$$\mathbf{v}^f = \boldsymbol{\omega}^f \times \mathbf{r} + \mathbf{v}, \quad (3.22)$$

c'est-à-dire une rotation solide à la vitesse relative $\omega^f \ll \omega$ et un champ de vitesse résiduel \mathbf{v} dû à l'ellipticité de la cavité. On néglige également le terme dissipatif $\eta \nabla^2 \mathbf{v}_o^f$. L'équation de Navier-Stokes se réduit selon ces hypothèses à (Hinderer et al., 1982)

$$\nabla \Pi = -\nabla \left(\frac{P}{\rho_f} + W_{cent} \right) + \frac{\mathbf{F}}{\rho_f}, \quad (3.23)$$

où W_{cent} est le potentiel centrifuge associé à la rotation du référentiel défini tel que

$$\nabla W_{cent} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (3.24)$$

et Π le potentiel inertiel défini tel que

$$\nabla \Pi = \frac{D\mathbf{v}^f}{Dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^f + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}.$$

Une autre formulation du potentiel inertiel est obtenue si l'on linéarise la dérivée particulaire. Si la vitesse de rotation relative ω^f est petite, et si la cavité est peu aplatie, le terme $(\mathbf{v}^f \cdot \nabla)\mathbf{v}^f$ d'ordre 2 en \mathbf{v}^f est négligé et $\nabla \Pi$ se réduit alors à (Lefftz et al., 1991)

$$\nabla \Pi = \boldsymbol{\omega}^f \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}^f \times \mathbf{r}), \quad (3.25)$$

où le terme centrifuge provenant de la vitesse relative du fluide $\boldsymbol{\omega}^f \times (\boldsymbol{\omega}^f \times \mathbf{r})$ est négligé car d'ordre 2 en ω_j^f . Dans la suite, cette hypothèse de vitesse relative \mathbf{v}^f faible sera conservée pour permettre un calcul simple du potentiel inertiel.

En supposant que les forces appliquées au fluide dérivent uniquement du potentiel gravitationnel externe W_{ext} et interne W_{int} , l'équation (3.23) permet d'écrire la pression telle que

$$\nabla P = -\rho_f (\nabla W_{ext} + \nabla W_{int} + \nabla W_{cent} + \nabla \Pi). \quad (3.26)$$

Cette expression de la pression est très pratique car elle ne dépend que des potentiels gravitationnels, déjà obtenus dans les sections 3.1.1 et 3.1.2, ainsi que des composantes des vecteurs vitesses $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{\omega}^f$ contenus dans ∇W_{cent} et $\nabla \Pi$.

3.1.3.2 Couples de pression sur l'océan

La couche ellipsoïdale de fluide de volume V_o et de densité constante ρ_o est soumise à une force de pression P le long de ses surfaces externe S_1 et interne S_2 lorsque les couches solides sont mises en rotation (Fig. 3.3). La force de pression étant une force surfacique, le couple de pression exercé sur la couche fluide $\mathbf{\Gamma}_{pre}^o$ est donné par (e.g. Baland and Van Hoolst (2010))

$$\mathbf{\Gamma}_{pre}^o = - \int_{S_1} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}_1) P dS + \int_{S_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}_2) P dS, \quad (3.27)$$

où \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 sont les normales des surfaces S_1 et S_2 orientées vers l'extérieur.

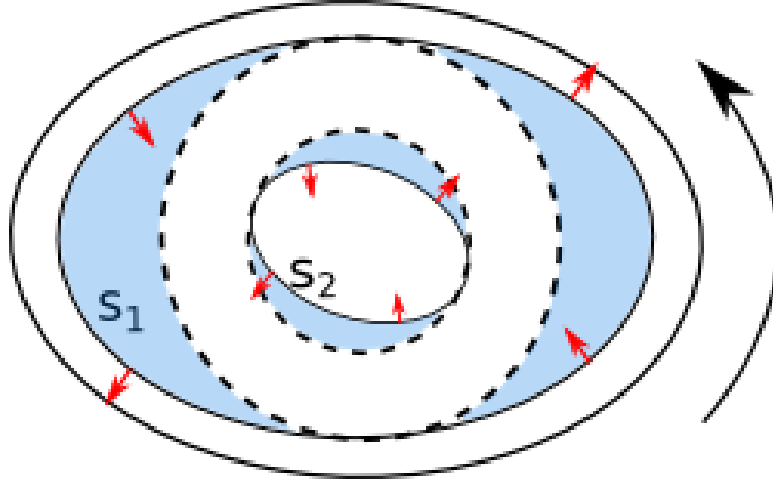


FIGURE 3.3: Représentation schématique des forces de pression agissant sur les surfaces externe S_1 et interne S_2 de l'océan lors de la rotation des couches solides.

L'utilisation du théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface S en intégrale sur le volume V bordé par S tel que

$$\int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) P dS = \int_V \mathbf{r} \times \nabla P dV.$$

Le couple de pression exercé sur le fluide s'écrit alors

$$\mathbf{\Gamma}_{pre}^o = - \int_{V_o} \mathbf{r} \times \nabla P dV,$$

où V_o est le volume de fluide contenu entre les surfaces S_1 et S_2 .

En utilisant l'expression de ∇P (3.26), l'expression du couple de pression exercé sur l'océan homogène de densité ρ_o devient

$$\mathbf{\Gamma}_{pre}^o = \int_{V_o} \rho_o \mathbf{r} \times (\nabla W_{ext} + \nabla W_{int} + \nabla W_{cent} + \nabla \Pi) dV. \quad (3.28)$$

Le couple de pression est écrit ici comme la réponse du fluide aux différentes forces volumiques (gravitationnelles, centrifuge) et à la pression inertielle Π . On peut cependant montrer que la composante z du couple induit par les potentiels centrifuge et inertielle sont d'ordre 2 en ω_j , $j \neq 3$ et ω_i^o , par conséquent ils sont négligeables devant les autres composantes du couple (Hinderer et al., 1982).

3.1.3.3 Couples de pression sur les couches solides

Le fluide exerce une pression sur les parois des couches solides qui le contiennent. Cette pression induit des couples sur la coquille ($\mathbf{\Gamma}_{pre}^s$) et le noyau ($\mathbf{\Gamma}_{pre}^i$) qui sont opposés aux couples de pression exercés sur les surfaces S_1 et S_2 dans l'expression (3.27). L'utilisation du théorème de la divergence nous permet d'écrire ces couples tels que $\mathbf{\Gamma}_{pre}^i$ correspond à la pression exercée par un volume de fluide V_i contenu dans S_2 et $\mathbf{\Gamma}_{pre}^s$ à la pression exercée par un volume de fluide $V_i + V_o$ contenu dans S_1 . Or les composantes radiales des forces ne contribuent pas au couple, et l'effet de la pression sur le volume de fluide $V_i + V_o$ peut se réduire à l'intégrale sur l'écart à la sphère incluse dans S_1 , c'est-à-dire le volume de la partie supérieure de l'océan V_{ot} compris entre S_1 et la sphère inscrite dans S_1 . En utilisant cette simplification, ces couples deviennent

$$\mathbf{\Gamma}_{pre}^s = \int_{V_{ot}} \mathbf{r} \times \nabla P dV, \quad (3.29)$$

$$= M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}^{ot} + \int_{V_{i,ob}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{ot} dV - \int_{V_{ot}} \rho \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV, \quad (3.30)$$

où ∇P est donné par l'expression (3.26), W_{ext}^{ot} indique le potentiel externe exercé sur la couche supérieure de l'océan et W_{int}^{ot} indique le potentiel interne exercé sur la couche supérieure de l'océan, et

$$\mathbf{\Gamma}_{pre}^i = - \int_{V_i} \mathbf{r} \times \nabla P dV, \quad (3.31)$$

$$= -M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}^{i'} + \int_{V_i} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{s,ot} dV + \int_{V_i} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV, \quad (3.32)$$

où $W_{ext}^{i'}$ indique le potentiel externe exercé sur le noyau pris avec une densité ρ_o et $W_{int}^{s,ot}$ est le potentiel interne exercé sur la couche de glace et la couche supérieure de l'océan. Ces couples de pression s'ajoutent aux couples gravitationnels exercés sur les couches solides lorsque celles-ci sont en contact avec le fluide.

3.1.4 Couplage atmosphérique

Les satellites du système solaire possèdent généralement une atmosphère ténue. Ce n'est pas le cas de Titan en orbite autour de Saturne, dont l'atmosphère épaisse et opaque est suggérée comme étant un facteur influant le mouvement de rotation du satellite (Tokano and Neubauer, 2005; Lorenz et al., 2008).

L'existence d'une atmosphère sur un corps planétaire entraîne une interaction entre les vents et la surface de l'objet, nourrissant un échange de moment cinétique entre le fluide et le corps. On parle alors de *couplage atmosphérique*, qui se manifeste par un transfert de moment cinétique du corps vers l'atmosphère et inversement selon des cycles diurnes et saisonniers dûs à la redistribution d'énergie en surface (e.g. Bougeault and Sadourny (2001)).

L'inclinaison de l'orbite de Titan par rapport à l'écliptique est à l'origine d'une variation annuelle de l'insolation de sa surface. L'apport d'énergie agit également sur l'atmosphère et les courants qui l'habitent, les écarts de température à différentes latitudes donnant naissance à une circulation atmosphérique appelée *cellule de Hadley* (Fig. 3.4). A un instant donné dans la région sub-solaire du corps, l'atmosphère est chauffée et un courant ascendant entraîne le gaz en altitude, puis vers les pôles. Il se refroidit dans ces régions froides et se rapproche de

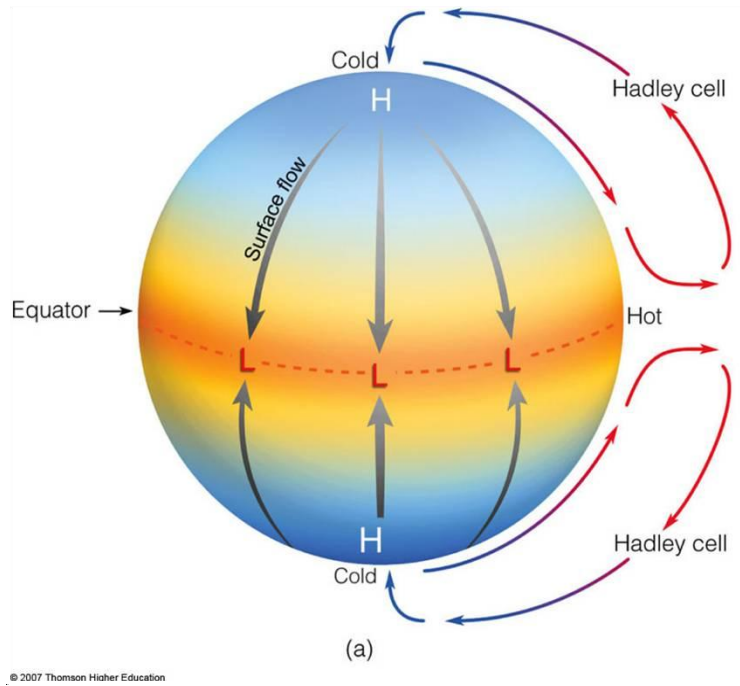


FIGURE 3.4: Cellules de Hadley à l'équinoxe. La circulation atmosphérique s'effectue de l'équateur vers les pôles, la zone d'ascension est appelée zone convergente intertropicale. (Source : Lyndon State College Atmospheric Sciences)

la surface pour retourner vers la zone sub-solaire. La zone ascendante pour le gaz est appelée *zone de convergence intertropicale*, du fait de son évolution entre les deux tropiques au cours d'une saison pour un corps possédant une obliquité non-nulle. Un modèle simple de circulation atmosphérique sur Titan suppose l'existence d'une cellule de Hadley s'étendant d'un pôle à l'autre du corps la majeure partie de l'année saturnienne. A l'équinoxe, la circulation s'inverse et le déplacement de la zone de convergence intertropicale d'un pôle à l'autre accompagne l'existence simultanée et temporaire de deux cellules de Hadley (*e.g.* [Lebonnois et al. \(2012\)](#)). C'est au cours de cette inversion que se produit le maximum d'échange de moment cinétique, cet échange étant saisonnier et responsable du couplage atmosphérique (*e.g.* [Tokano and Neubauer \(2005\)](#)).

Au niveau de la zone convergente intertropicale, où le moment cinétique du solide est important, la vitesse relative de l'atmosphère par rapport à la surface est négative. Le moment cinétique est transféré de la surface vers l'atmosphère par friction. Il est ensuite rendu au solide au niveau des pôles où l'atmosphère tourne plus vite que la surface. Le transfert est donc maximal lorsque la zone convergente intertropicale coïncide avec l'équateur du corps, c'est-à-dire lorsqu'elle se trouve au point le plus éloigné de l'axe de rotation. Ce cas correspond à l'équinoxe. L'extension en latitude de la cellule de Hadley est également primordiale pour le transfert de moment cinétique, le maximum d'échange ayant lieu lorsque la cellule s'étale de l'équateur au pôle.

[Tokano and Neubauer \(2005\)](#) définissent le moment cinétique de l'atmosphère comme étant

$$H_{atm} = \frac{2\pi R^3}{g} \int_0^{p_s} \int_0^\pi u \sin^2 \theta d\theta dp, \quad (3.33)$$

où R est le rayon moyen du corps, g est la gravité à la surface, p_s est la pression à la surface, u est la vitesse du vent horizontal dans la direction est-ouest relativement à la surface et définie positivement vers l'est et θ est la colatitute. Le couple atmosphérique exercé sur la surface est défini comme la variation du moment cinétique de l'atmosphère (*e.g.* Charnay (2014))

$$\Gamma_{atm} = -\frac{dH_{atm}}{dt}. \quad (3.34)$$

L'utilisation de GCM (Global Circulation Model) pour simuler le comportement d'une atmosphère planétaire permet d'obtenir le moment cinétique de l'atmosphère et ses variations, et ainsi de déterminer l'amplitude et la fréquence du couplage atmosphérique. Dans le cas d'un satellite à trois couches, le couplage est introduit dans l'équation (1.19) pour obtenir le mouvement de libration en longitude de la couche de surface. L'effet de ce couple est décrit dans la section (6.1) où l'étude de la libration de Titan rigide est détaillée.

3.1.5 Couple total exercé sur les couches

Faisons maintenant le bilan des couples que nous avons décrits dans cette section. Chacune des trois couches du satellite subit un couple gravitationnel Γ_{ext} exercé par la planète, un couplage interne Γ_{int} qui la lie aux autres couches et un couple de pression Γ_{pre} dû aux forces de surface sur les interfaces avec l'océan. La surface possède également un couplage atmosphérique Γ_{atm} .

3.1.5.1 Couple sur la couche de glace

La couche de glace subit l'influence des couples suivants

$$\Gamma^s = \Gamma_{ext}^s + \Gamma_{int}^s + \Gamma_{pre}^s + \Gamma_{atm}^s.$$

En explicitant les couples, on a

$$\begin{aligned} \Gamma^s = M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}^s + \int_{V_{i,ob}} \rho(r'_o) \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^s dV + M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}^{ot} + \int_{V_{i,ob}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{ot} dV \\ - \int_{V_{ot}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV + \Gamma_{atm}^s, \end{aligned}$$

et après réécriture

$$\begin{aligned} \Gamma^s = M_p \mathbf{r} \times \nabla (W_{ext}^s + W_{ext}^{ot}) + \int_{V_{i,ob}} \rho(r'_o) \mathbf{r} \times \nabla (W_{int}^s + W_{int}^{ot}) dV \\ - \int_{V_{ot}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV + \Gamma_{atm}^s. \quad (3.35) \end{aligned}$$

On obtient la composante z en développant les expressions des potentiels au second degré pour le cas particulier d'un corps rigide triaxial, *i.e.* sans termes non-diagonaux dans la matrice d'inertie, et en négligeant la contribution des potentiels centrifuge et inertiel (*c.f.* section 3.1.3) (Van Hoolst et al., 2009)

$$\begin{aligned} \Gamma_z^s = \frac{3GM_p}{r^5} \left[\left((I_{22}^s - I_{11}^s) + (I_{22}^{s'} - I_{11}^{s'}) \right) xy \right] \\ + \frac{4\pi G}{5} \left[\rho_s (\beta(r_s) - \beta(r_o)) + \rho_o \beta(r_o) \right] \left[\left((I_{22}^i - I_{11}^i) - (I_{22}^{i'} - I_{11}^{i'}) \right) \sin 2\phi_{is} \right] + \Gamma_{atm,z}^s, \quad (3.36) \end{aligned}$$

où r_s et r_o sont les rayons équivalents de la couche de glace et de l'océan, et où l'on a posé

$$(I_{22}^{s'} - I_{11}^{s'}) = \frac{8\pi}{15} \rho_o \beta(r_o) r_o^5, \quad (3.37)$$

$$(I_{22}^{i'} - I_{11}^{i'}) = \frac{8\pi}{15} \rho_o \beta(r_i) r_i^5. \quad (3.38)$$

L'effet de la pression se traduit par un incrément d'inertie dans les couples externes et internes, les parties non-sphériques de l'océan ajoutant leurs contributions aux expressions des couples gravitationnels.

3.1.5.2 Couple sur l'océan

L'océan subit les couples suivants

$$\mathbf{\Gamma}^o = \mathbf{\Gamma}_{ext}^o + \mathbf{\Gamma}_{int}^o + \mathbf{\Gamma}_{pre}^o.$$

Nous avons vu cependant que l'océan peut être découpé en une coquille sphérique s'inscrivant dans la cavité ellipsoïdale entre les couches solides, et deux parties non-sphériques, supérieure et inférieure. Puisque la coquille sphérique, de par sa forme, ne contribue pas au couple exercé sur le fluide, le couple total peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{\Gamma}^o = \mathbf{\Gamma}_{ext}^{ot} + \mathbf{\Gamma}_{ext}^{ob} + \mathbf{\Gamma}_{int}^{ot} + \mathbf{\Gamma}_{int}^{ob} + \mathbf{\Gamma}_{pre}^{ot} + \mathbf{\Gamma}_{pre}^{ob},$$

où les exposants *ot* et *ob* indiquent respectivement la partie supérieure et la partie inférieure de l'océan. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^o = & M_p \mathbf{r} \times \nabla (W_{ext}^{ot} + W_{ext}^{ob}) dV + \int_{V_{i,ob}} \rho(r'_o) \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{ot} - \int_{V_{ob}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{s,ot} dV \\ & - M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}^{ot} - \int_{V_{i,ob}} \rho(r'_o) \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{ot} dV - M_p \mathbf{r} \times \nabla W_{ext}^{ob} + \int_{V_{ob}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{s,ot} dV \\ & + \int_{V_{ot}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV + \int_{V_{ob}} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Le potentiel $W_{int}^{s,ot}$ vaut $W_{int}^s + W_{int}^{ot}$ et correspond au couple exercé par la coquille et la partie supérieure de l'océan sur une couche interne. En négligeant la contribution des couples centrifuge et inertiel, la composante z du couple total sur l'océan vaut donc $\Gamma_z^o = 0$. L'équation de conservation du moment cinétique de l'océan est découplée des deux équations pour les couches solides.

3.1.5.3 Couple sur le noyau

Le noyau subit les couples suivants

$$\mathbf{\Gamma}^i = \mathbf{\Gamma}_{ext}^i + \mathbf{\Gamma}_{int}^i + \mathbf{\Gamma}_{pre}^i.$$

En développant les couples, on a après simplification

$$\mathbf{\Gamma}^i = M_p \mathbf{r} \times \nabla (W_{ext}^i - W_{ext}^{i'}) - \int_{V_i} (\rho_i - \rho_o) \mathbf{r} \times \nabla W_{int}^{s,ot} dV + \int_{V_i} \rho_o \mathbf{r} \times \nabla (W_{cent} + \Pi) dV. \quad (3.40)$$

Dans cette expression, $W_{ext}^{i'}$ correspond à l'expression de W_{ext}^i intégrée sur une couche de densité ρ_o .

Dans le cas d'un ellipsoïde triaxial rigide, la composante z s'écrit au second degré et après développement

$$\Gamma_z^i = \frac{3GM_p}{r^5} \left[\left((I_{22}^i - I_{11}^i) - (I_{22}^{i'} - I_{11}^{i'}) \right) xy \right] - \frac{4\pi G}{5} \left[\rho_o \beta(r_o) + \rho_s (\beta(r_s) - \beta(r_o)) \right] \left[\left((I_{22}^i - I_{11}^i) - (I_{22}^{i'} - I_{11}^{i'}) \right) \sin 2\phi_{is} \right]. \quad (3.41)$$

On vérifie bien en sommant $\Gamma_z^s + \Gamma_z^o + \Gamma_z^i$ que les couples internes s'annulent.

3.2 Déformations élastiques

Les équations (1.19)-(1.21) contiennent les variations temporelles des moments d'inertie, correspondant aux variations de la distribution de masse du satellite suite aux déformations dynamiques. Les déformations dynamiques traitées ici proviennent du potentiel de marées et sont purement élastiques. Elles sont périodiques sur une orbite et sont liées aux variations de distance entre la planète et le satellite ainsi qu'aux variations de la longitude de la planète dans le repère du satellite. Le potentiel centrifuge n'entraîne ici qu'une déformation statique car la rotation est supposée quasi-uniforme et ses variations négligeables. Le formalisme de Love est utilisé pour déterminer les expressions des coefficients de déformation des surfaces. A partir de ces coefficients, nous exprimons ensuite les variations périodiques des moments d'inertie et des couples de forces exercées sur le satellite.

3.2.1 Formalisme de Love

La théorie de Love (1909, 1911) postule que la déformation élastique d'une surface à l'équilibre et la variation de son potentiel gravitationnel sont proportionnelles au potentiel perturbateur à l'origine de la déformation. Il écrit en 1909 :

There are two determinate constant numbers related to the methods that have been used for obtaining estimates of the rigidity of the Earth. One of these numbers specifies the amount by which the surface of the Earth yields to forces of the type of the tide-generating attractions of the Sun and Moon. The other number specifies the amount by which the potential of the Earth is altered through the rearrangement of the matter within it when this matter is displaced by the deforming influence of the Sun and Moon.

(Love, *The yielding of the Earth to disturbing forces*, 1909)

Love décrit alors les nombres qui portent aujourd'hui son nom, et qu'il définit dans les relations

$$u_r = -H(r') \frac{W_2}{g}, \quad W = W_o + K(r') W_2,$$

où u_r est la composante radiale du déplacement, W le potentiel perturbé du corps et W_o sa composante non-perturbée, W_2 la composante périodique du potentiel de marée, g la gravité à la surface et $H(r')$ et $K(r')$ les nombres décrits par Love qui sont des fonctions du rayon r' .

Il donne à la surface les valeurs h et k aux fonctions $H(R)$ et $K(R)$ de sorte que l'équation de la surface perturbée soit (Love, 1909)

$$r' = R - h \frac{W_2}{g}, \quad (3.42)$$

où R est le rayon moyen de la surface, et la perturbation du potentiel à la surface s'écrit kW_2 . Le signe de u_r est différent des notations de Love (1909, 1911) du fait du choix de convention pour le potentiel. Love choisit d'exprimer le potentiel avec un signe positif tandis qu'il est écrit dans ce manuscrit avec un signe négatif. Les nombres h et k sont communément appelés *nombres de Love*. Un troisième nombre l a été introduit par Shida (1912) pour compléter la description des déformations avec leur composante tangentielle.

Sous l'influence de l'attraction de la planète et du potentiel centrifuge, les surfaces des différentes couches du satellite subissent des déformations statiques (aplatissement, élongation) et périodiques (variations autour de la forme statique). A l'équilibre hydrostatique, un satellite soumis aux marées et au potentiel centrifuge a une surface décrite par l'équation (2.6). Les paramètres α et β définissent la forme de la surface équipotentielle r' . Ils peuvent être déterminés en intégrant l'équation de Clairaut (1743) en tenant compte des potentiels perturbateurs statiques (marées, centrifuge). La théorie de Love (1909, 1911) est plus générale et permet de calculer les coefficients de déformations d_{ij} et e_{ij} d'une surface quelconque r' (2.9) soumise à des potentiels perturbateurs.

Le potentiel perturbateur W peut être développé en harmoniques sphériques (exemple : potentiel de McCullagh (3.8)). La réponse du potentiel peut être décomposée selon le degré des harmoniques, telle que à la surface, l'incrément de potentiel W_T vaut (Kaula, 1968)

$$W_T(R, \theta, \phi) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n k_n W_n^m(R, \theta, \phi), \quad (3.43)$$

où W_n^m est la partie du potentiel W associée à l'harmonique sphérique $Y_n^m(\theta, \phi)$. De façon similaire, la déformation de la surface peut s'écrire

$$u_R = - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n \frac{W_n^m}{g}. \quad (3.44)$$

De cette façon, les nombres k_n et h_n ont une valeur différente selon l'harmonique. Dans ce manuscrit, les potentiels ne sont développés qu'au degré 2, et les nombres de Love que nous traitons sont du même degré.

La détermination des fonctions $H(r')$ et $K(r')$ permet de quantifier l'amplitude des déformations pour une couche de rayon r' du satellite. Les solutions de ces fonctions sont obtenues en intégrant numériquement les équations de gravito-élasticité (Alterman et al., 1959) décrivant le comportement rhéologique d'un corps soumis à des potentiels perturbateurs. Le procédé suivi dans cette thèse pour l'intégration des fonctions $H(r')$ et $K(r')$ dans le cas d'un corps à plusieurs couches est décrit par Takeuchi and Saito (1972). Elles permettent ensuite de connaître les valeurs des coefficients de déformations $d_{i,j}$ et $e_{i,j}$ utilisés dans les expressions des moments d'inertie et des couples exprimées dans les sections précédentes.

Le potentiel perturbateur W peut parfois être décomposé en une partie statique et une partie périodique. C'est le cas pour le potentiel de marée lorsqu'il est développé en anomalie moyenne et en excentricité (Giampieri, 2004) (c.f. section 3.2.2). La réponse du corps à la

partie statique de V est celle d'un fluide à l'équilibre hydrostatique et est indépendante de la fréquence d'excitation. Elle est associée à une série de nombres de Love (k_f, h_f, l_f) qui décrivent le comportement rhéologique dans le cas limite d'un fluide. La réponse à la partie périodique, en revanche, est une réponse de type élastique dépendant de la nature des matériaux et de la fréquence de la perturbation. Afin de distinguer les deux types de réponses, les nombres de Love associés à la réponse fluide seront appelés nombres de Love fluide et seront notés avec un indice f .

3.2.2 Coefficients de déformation

La surface d'une couche de forme quelconque est paramétrée dans la section (2.1) par l'équation

$$r' = r'_o + u_r(r'_o, \theta', \phi'), \quad (3.45)$$

où r'_o est le rayon moyen de la sphère équivalente, θ' est la colatitute et ϕ' la longitude, et u_r , défini par (2.10), correspond à la déformation radiale de la sphère de rayon r'_o quantifiée par les coefficients $d_{n,m}$ et $e_{n,m}$. Par identification avec l'équation (3.44), on a donc

$$d_{n,m}(r')Y_n^m(\theta', \phi') = -\frac{H(r')}{r'g}W_n^m(r', \theta', \phi'), \quad (3.46)$$

$$e_{n,m}(r')Y_n^{-m}(\theta', \phi') = -\frac{H(r')}{r'g}W_n^{-m}(r', \theta', \phi'). \quad (3.47)$$

Les coefficients $d_{n,m}$ et $e_{n,m}$ sont donc directement proportionnels à H et au potentiel perturbateur associé à l'harmonique $Y_n^m(\theta', \phi')$. On rappelle que g est la gravité à la surface du satellite. En effectuant un développement au premier ordre en $d_{i,j}$ de ces expressions, ces expressions ne dépendent que du rayon équivalent de la surface r'_o défini dans l'expression de la surface (3.45).

Dans le cas d'un satellite en orbite synchrone autour d'une planète, le potentiel perturbateur W sera le potentiel de marée défini tel qu'au second ordre (Murray and Dermott, 1999)

$$W_2 = -\frac{GM_p}{r} \left(\frac{r'_o}{r}\right)^2 P_2^0(\cos \chi),$$

où M_p est la masse de la planète et χ est l'angle entre la position \mathbf{r}'_o du point considéré sur le satellite et la position \mathbf{r} de la planète (Fig. 3.1).

Ce potentiel peut être réécrit pour faire apparaître explicitement le demi-grand axe a de l'orbite du satellite et son anomalie moyenne M de sorte que pour une planète située dans le plan équatorial du satellite (Annexe D.2) (Giampieri, 2004)

$$W_2 = -\frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'_o}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{q_t}{6} \left(P_2^0(\cos \theta') - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta') \cos 2(\phi' - \nu + L) \right), \quad (3.48)$$

où R est le rayon équivalent du satellite de masse M_s , L son anomalie moyenne, q_t le paramètre de marée défini tel que (Rappaport et al., 1997)

$$q_t = -3 \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{R}{a}\right)^3,$$

et la longitude de la planète dans le repère du satellite s'écrit $\phi = \nu - L$ où ν est la longitude vraie. Pour une orbite Képlérienne, en utilisant les développements au premier ordre en

excentricité e des fonctions

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + 3e \cos M + \mathcal{O}(e^2),$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(\phi' - \nu + L) = \cos 2\phi' + \frac{1}{2}e[7 \cos(2\phi' - M) - \cos(2\phi' + M)] + \mathcal{O}(e^2),$$

Giampieri (2004) écrit le potentiel de marée

$$W_2 = \frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'_o}{R}\right)^2 q_t \left[-\frac{1}{6}P_2^0(\cos \theta') + \frac{1}{12}P_2^2(\cos \theta') \cos 2\phi' \right. \\ \left. + e \left[-\frac{1}{2}P_2^0(\cos \theta') \cos M + P_2^2(\cos \theta') \left(\frac{1}{3} \sin 2\phi' \sin M + \frac{1}{4} \cos 2\phi' \cos M \right) \right] \right]. \quad (3.49)$$

Ce potentiel perturbateur peut être décomposé en une partie statique (indépendante du temps t) et une partie dynamique (dépendante du temps par la variable $M = nt$ où n est le moyen mouvement du satellite). La réponse du satellite à cette perturbation se fait donc en deux étapes : une réponse hydrostatique au potentiel statique et une réponse élastique au potentiel dynamique. Seule la réponse élastique est détaillée ici.

Le potentiel perturbateur périodique (exposant p) de degré 2 est alors décomposé en

$$W_2^{0,p} = -\frac{GM_s}{2R} \left(\frac{r'_o}{R}\right)^2 q_t e P_2^0(\cos \theta') \cos M, \quad (3.50)$$

$$W_2^{2,p} = \frac{GM_s}{4R} \left(\frac{r'_o}{R}\right)^2 q_t e P_2^2(\cos \theta') \cos 2\phi' \cos M, \quad (3.51)$$

$$W_2^{-2,p} = \frac{GM_s}{3R} \left(\frac{r'_o}{R}\right)^2 q_t e P_2^2(\cos \theta') \sin 2\phi' \sin M, \quad (3.52)$$

et les équations (3.46) et (3.47) donnent

$$\tilde{d}_{2,0}(r'_o) = -\frac{1}{2}\Delta d(r'_o)e \cos M, \quad (3.53)$$

$$\tilde{d}_{2,2}(r'_o) = \frac{1}{4}\Delta d(r'_o)e \cos M, \quad (3.54)$$

$$\tilde{e}_{2,2}(r'_o) = \frac{1}{3}\Delta d(r'_o)e \sin M, \quad (3.55)$$

où l'on a posé

$$\Delta d(r'_o) = -\frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'_o}{R}\right)^2 q_t \frac{H(r'_o)}{r'_o g}. \quad (3.56)$$

Le tilde sur les coefficients $d_{n,m}$ et $e_{n,m}$ symbolise la partie due uniquement aux déformations périodiques. En utilisant les relations (2.17) à (2.22) pour les moments d'inertie, les composantes périodiques de la matrice \mathcal{I} s'écrivent

$$c_{11} = -\Delta I e \cos M, \quad (3.57)$$

$$c_{22} = \frac{\Delta I}{2} e \cos M, \quad (3.58)$$

$$c_{33} = \frac{\Delta I}{2} e \cos M, \quad (3.59)$$

$$c_{12} = -\Delta I e \sin M, \quad (3.60)$$

$$c_{13} = c_{23} = 0, \quad (3.61)$$

avec

$$\Delta I = \frac{8\pi}{15} \int_0^R \rho(r'_o) \frac{d}{dr'_o} (\Delta d(r'_o) r_o'^5) dr'_o. \quad (3.62)$$

Les variations de I_{11} et I_{22} sont associées à ce que l'on appelle la marée radiale tandis que la variation de I_{33} est associée à la marée zonale. Ces variations des moments d'inertie sont induites par une variation de la distribution de masse à l'intérieur du satellite sur une période orbitale. La variation de I_{12} est associée à un bourrelet de marée déphasé de $\pi/4$ en longitude par rapport à l'axe \mathbf{I} , on l'appelle marée librationnelle (Greenberg et al., 1998; Murray and Dermott, 1999). Ce découpage de la déformation de marée en trois composantes est dû à la décomposition en harmoniques sphériques de degré 2 du potentiel de marée.

3.2.3 Bourelets de marée périodiques

Il est plus facile de se représenter les déformations en utilisant la forme de la surface développée en harmoniques. Ici, seules les déformations périodiques sont décrites, par supposition r_o^h contient les déformations hydrostatiques, de sorte que

$$r' = r_o^h + r'_o \left(\tilde{d}_{2,0}(r'_o) P_2^0(\cos \theta') + \tilde{d}_{2,2}(r'_o) P_2^2(\cos \theta') \cos 2\phi' + \tilde{e}_{2,2}(r'_o) P_2^2(\cos \theta') \sin 2\phi' \right). \quad (3.63)$$

En regardant ce qui se passe uniquement dans le plan équatorial ($\theta' = \pi/2$), l'équation de la surface s'écrit

$$r' = r_o^h + r'_o \left(-\frac{1}{2} \tilde{d}_{2,0}(r'_o) + 3\tilde{d}_{2,2}(r'_o) \cos 2\phi' + 3\tilde{e}_{2,2}(r'_o) \sin 2\phi' \right). \quad (3.64)$$

En utilisant les relations (3.53)-(3.55), on a donc

$$r' = r_o^h + r'_o \left(\frac{1}{4} \Delta d(r'_o) e \cos M + \frac{3}{4} \Delta d(r'_o) e \cos M \cos 2\phi' + \Delta d(r'_o) e \sin M \sin 2\phi' \right), \quad (3.65)$$

où e est l'excentricité et M l'anomalie moyenne. Dans cette expression, les termes dans la parenthèse constituent les déformations périodiques de la surface autour de la forme à l'équilibre hydrostatique décrite par r_o^h . On remarque que le premier terme en $\cos M$ est indépendant de la longitude ϕ' , il s'agit du terme de marée zonale qui se traduit par une pulsation de l'aplatissement polaire du satellite. Le terme en $\cos 2\phi'$ est périodique le long de l'équateur, avec des extrema en $\phi' = 0$ et $\phi' = \pi/2$. Il s'agit du terme de marée radiale correspondant à une oscillation de l'élongation du satellite. Enfin, le terme en $\sin 2\phi'$ est périodique avec des extrema en $\phi' = \pi/4$ et $\phi' = 3\pi/4$, ce terme correspond à la marée librationnelle (Fig. 3.5) (Murray and Dermott, 1999).

Pour Titan, les composantes de marées radiales et librationnelles sont représentées sur les figures 3.6 et 3.7. La première représente la forme dynamique du satellite lorsque celui-ci est au périastre, on observe une augmentation de l'élongation. La seconde figure décrit la composante de marée librationnelle dont l'amplitude est maximale lorsque $M = \pi/2$. Le bulbe périodique est déphasé de $\pi/4$ par rapport à l'axe principal du satellite.

Les déformations du satellite entraînent des variations périodiques dans sa distribution de masse. Les moments d'inertie dépendent donc du temps et oscillent autour de leurs valeurs à l'équilibre hydrostatique. Les expressions des couples obtenues dans les sections précédentes dépendent explicitement des moments d'inertie du satellite et varient avec la position du corps

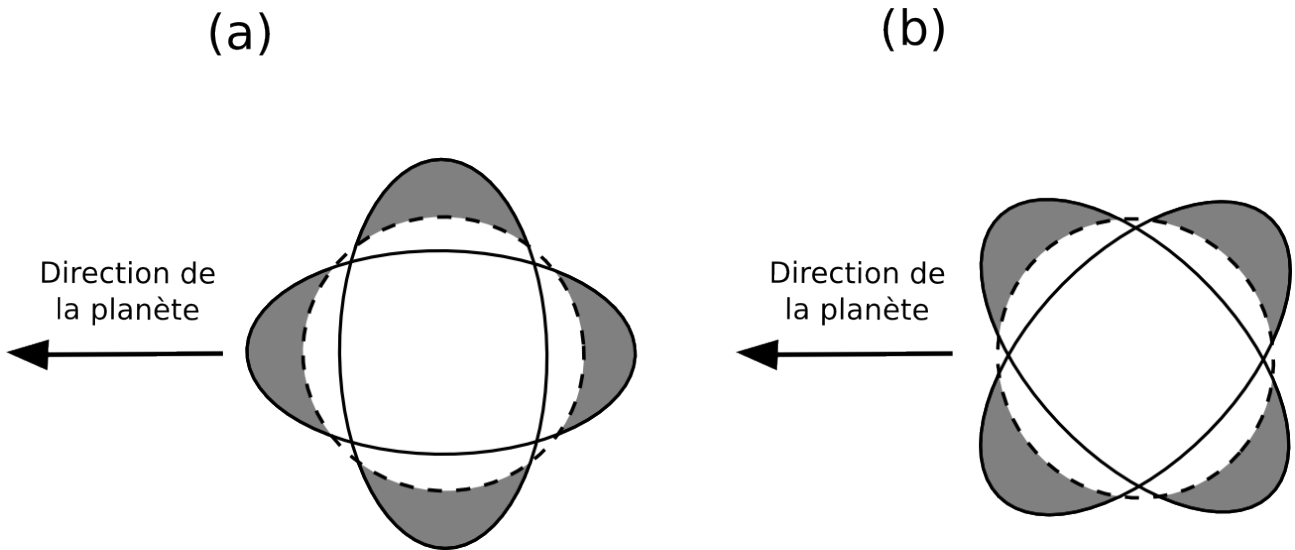


FIGURE 3.5: Représentation schématique des déformations périodiques de l'équateur du satellite sous l'effet des marées radiales (a) et librationnelles (b).

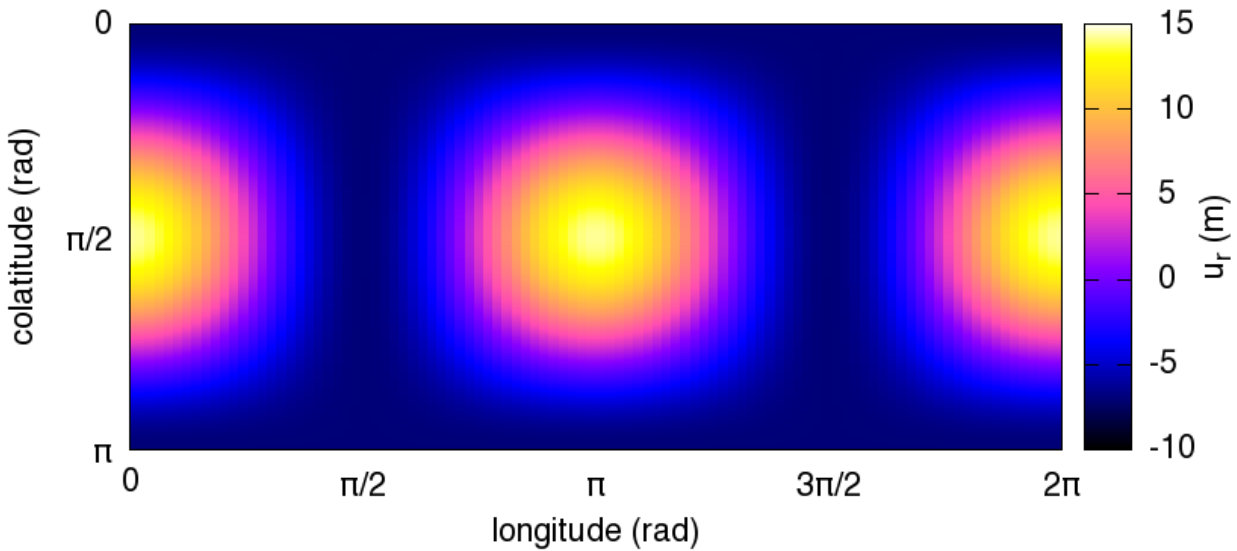


FIGURE 3.6: Carte des déformations dynamiques de la surface de Titan lorsque $M = 0$.

sur son orbite. La réponse librationnelle du satellite dépend à la fois de la variation de ses moments d'inertie et de celle des couplages appliqués sur chacune de ses couches. L'ensemble des couples et des moments d'inertie, ainsi que les variations de ceux-ci, ont été exprimés de façon générale. La résolution des équations (1.19)-(1.21) dans le cas particulier des satellites de glace nécessite maintenant de connaître la structure du corps ainsi que son mouvement orbital.

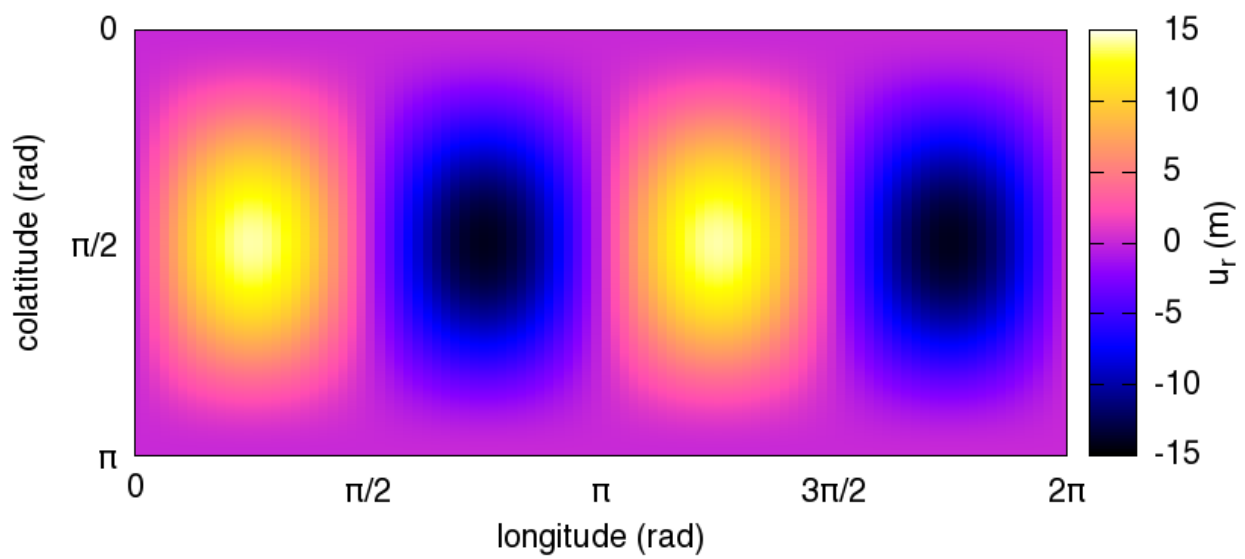


FIGURE 3.7: Carte des déformations dynamiques de la surface de Titan lorsque $M = \pi/2$.

Deuxième partie

Etude des librations en longitude de Titan

Chapitre 4

Présentation et modèles de Titan

Sommaire

4.1 Description de Titan	53
4.1.1 Observations	54
4.1.2 Champ de gravité	56
4.1.3 Océan interne	57
4.2 Modèles d'intérieur et d'atmosphère	59
4.2.1 Composition de l'hydrosphère	60
4.2.2 Composition du noyau	60
4.2.3 Modèles étudiés	62
4.2.4 Modèles d'atmosphère	62

4.1 Description de Titan

Le système de Saturne possède 62 satellites¹ dont Titan est le premier représentant découvert par Huygens en 1655. Avec un rayon moyen de 2575,5 kilomètres, il surpasse la planète Mercure (2439,7 kilomètres de rayon) et se classe en seconde position des satellites les plus massifs après le satellite jovien Ganymède. Cette masse lui permet de maintenir une épaisse atmosphère d'azote et de méthane à sa surface, une caractéristique unique pour un satellite du système solaire. Cette atmosphère opaque empêche toute observation de la surface du satellite par les instruments optiques (Fig. 4.1). Sa faible densité de 1881 kg m^{-3} suggère une structure interne composée d'un mélange de roche à 60% et de glace à 40% (voir l'article de revue de [Tobie et al. \(2012\)](#)). La dynamique rotationnelle de Titan est certainement celle d'un satellite en rotation synchrone autour de Saturne. Sa période de rotation est d'environ 15,94 jours et égale à sa période de révolution. Il présente donc en moyenne la même face à Saturne, dont les forces de marées allongent la figure le long de l'axe planète/satellite. Le mouvement synchrone de Titan possède des similarités avec celui de la Lune autour de la Terre étudié par [Tisserand \(1891\)](#), en revanche son orientation d'équilibre correspond à un état de Cassini 1.

1. http://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_discovery

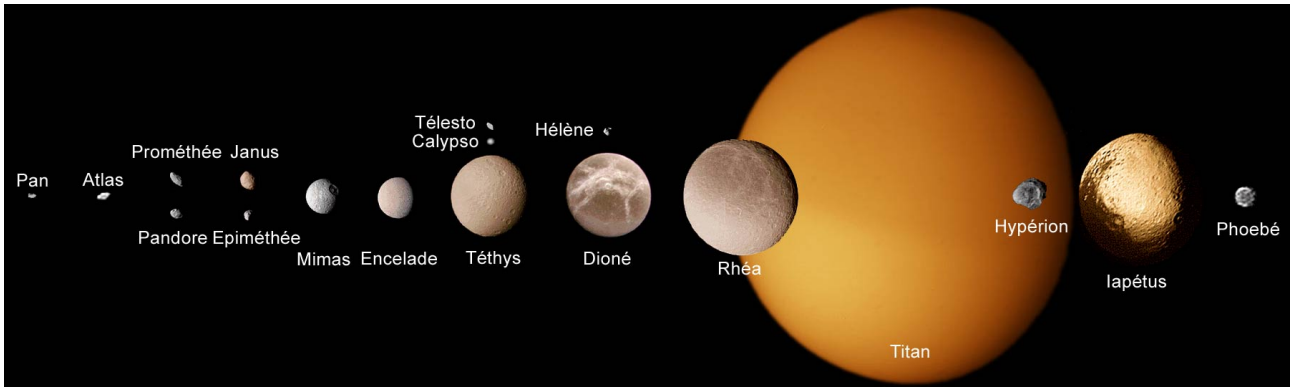


FIGURE 4.1: Représentation des principaux satellites naturels de Saturne. Ils sont classés selon leur distance à Saturne, le plus proche de la planète étant à gauche de l'image. Les tailles respectives sont respectées sauf pour Pan, Atlas, Telesto, Calypso et Hélène où les tailles ont été exagérées d'un facteur 5 (Source : <http://pds-rings.seti.org>).

TABLE 4.1: Paramètres de Titan

Paramètre	Valeur	Source
R (km)	2575.5	Fortes (2012)
M_s (kg)	$13455.3 \cdot 10^{19}$	Fortes (2012)
$\tilde{\rho}_o$ (kg m^{-3})	1881	Iess et al. (2010)
n (rad jour^{-1})	0.394042	Jacobson, 2010, Sat339
a (km)	1221865	Jacobson, 2010, Sat339
e	0.0288	Jacobson, 2010, Sat339
M_p (kg)	$5.6832592 \cdot 10^{26}$	(Jacobson et al., 2006)
I ($M_s R^2$)	0.3414	(Iess et al., 2010)

4.1.1 Observations

En 1944, l'astronome danois Gerard Kuiper observe la raie du méthane dans le spectre de la lumière réfléchiée par Titan (Kuiper, 1944) et détecte ainsi l'atmosphère du satellite. Les informations sur Titan viennent ensuite de l'exploration spatiale du système solaire lointain, à commencer par la sonde *Pioneer XI* qui établit la première estimation de la température du satellite à environ 80 K lors de son survol de Titan en 1979 (Ingersoll et al., 1980). Vint ensuite le survol de la sonde *Voyager I* en 1980 qui mesura une température d'environ 94 K en surface, et observa une atmosphère épaisse (Fig. 4.2) composée à plus de 90% d'azote et en plus faible proportion de méthane pour une pression de surface d'environ 150 kPa (Lindal et al., 1983).

Les premières images de la surface de Titan, masquée par cette atmosphère opaque, ont été obtenues en infra-rouge proche par le télescope spatial *Hubble* en 1994 (Fig. 4.3). Elles révèlent une surface hétérogène composée de zones de teintes différentes, traces possibles de la présence de pluie de méthane à la surface (Smith et al., 1996). La plus grande zone claire, de la taille de l'Australie, est nommée *Xanadu*. L'année 2004 a vu l'arrivée de la mission spatiale *Cassini-Huygens* dans le système de Saturne. Cette mission développée conjointement par l'ESA (European Space Agency), la NASA (National Aeronautics and Space Agency) et l'ISA (Italian Space Agency) est constituée de deux modules. Le premier est un orbiteur, *Cassini*, possédant

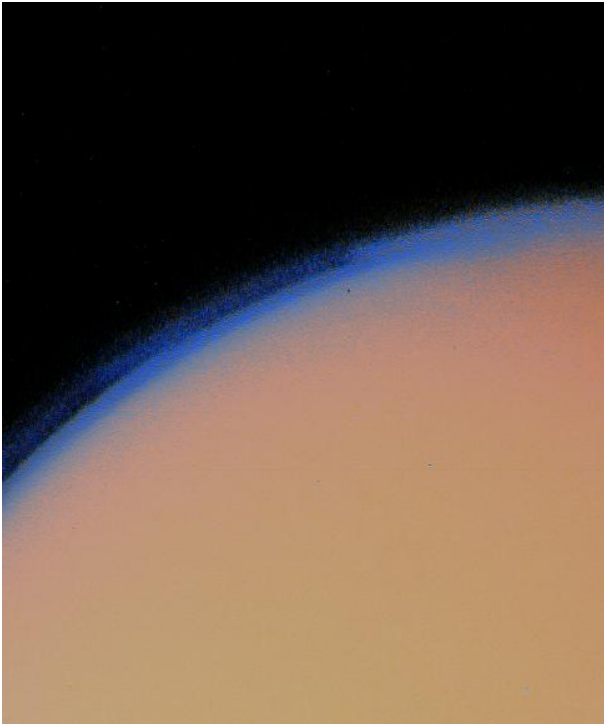


FIGURE 4.2: Image de l'atmosphère brumeuse de Titan prise par la sonde *Voyager I* le 11 novembre 1980 (Source : NASA/JPL).

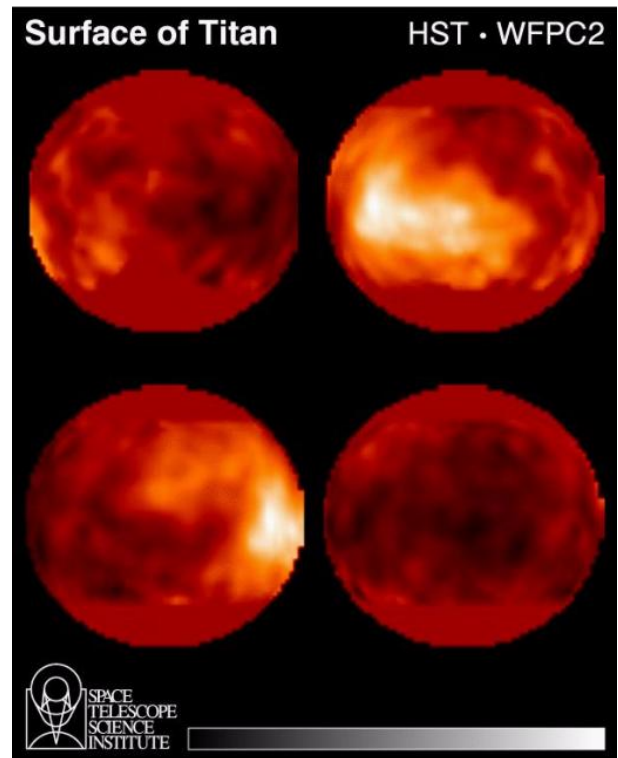


FIGURE 4.3: Image de la surface de Titan en infra-rouge prise par le télescope spatial *Hubble* en 1994 (Source : NASA/JPL/STScI).

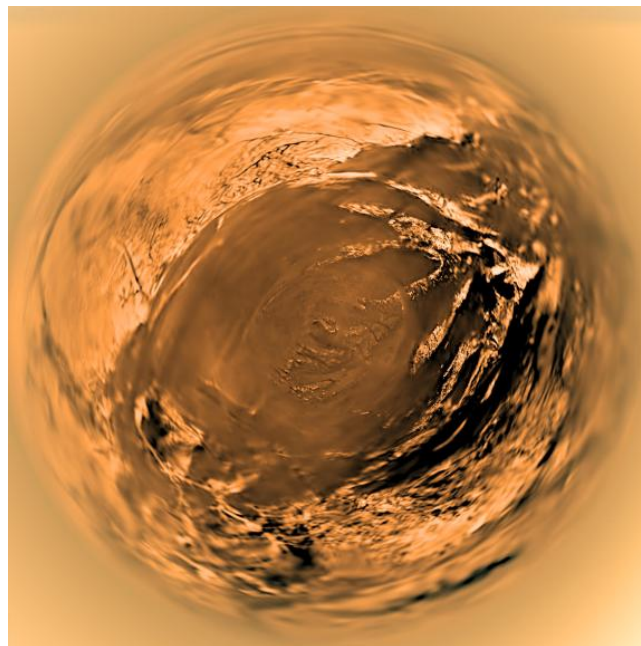


FIGURE 4.4: Vue "fish-eye" de la surface de Titan par le module *Huygens*. L'image est prise à environ 5 kilomètres d'altitude lors de la descente du module dans l'atmosphère de Titan le 14 janvier 2005 (Source : ESA/NASA/JPL/University of Arizona).

TABLE 4.2: Coefficients du champ de gravité d'ordre 2 obtenus par [Iess et al. \(2010\)](#) à partir du suivi radio de la sonde Cassini. Les deux solutions obtenues à partir des mesures de Cassini (SOL1) et de la combinaison des données *Cassini* avec les mesures *Pioneer*, *Voyager* et les observations astronomiques du système de Saturne (SOL2) sont retranscrites.

Coef.	SOL1	SOL2
$J_2 (\times 10^6)$	31.808 ± 0.404	33.462 ± 0.632
$C_{22} (\times 10^6)$	9.983 ± 0.039	10.022 ± 0.071
k_f	1.0131 ± 0.0143	1.0149 ± 0.0192
$I (M_s R^2)$	0.3414 ± 0.0143	0.3419 ± 0.0192

notamment des caméras infra-rouge et radio, des spectromètres à différentes longueurs d'ondes et un altimètre. Il effectue depuis 2004 de nombreux survols de Saturne et de ses lunes, dont une centaine réalisée autour de Titan. Le second module, *Huygens*, s'est posé à la surface de Titan le 14 janvier 2005 après une descente de plus de deux heures et demie à travers l'atmosphère du satellite. Les images de la surface fournies par *Huygens* (Fig. 4.4) montrent un paysage de glace et de sable d'hydrocarbure, où des traces d'érosion sous l'effet de l'écoulement d'un fluide, probablement le méthane, sont visibles (voir par exemple l'article de [Lorenz \(2006\)](#)). Cette descente de *Huygens* dans l'atmosphère a permis de mesurer les profils de vents, de pression et de température qui servent à contraindre les modèles de circulation atmosphérique. La détection d'une onde électrique dans l'atmosphère a également permis d'apporter un argument en faveur de la présence d'un océan interne sous la surface gelée ([Béghin et al., 2012](#)).

4.1.2 Champ de gravité

Le suivi radiométrique de la sonde *Cassini* lors des survols de Titan a permis de mesurer le champ de gravité du satellite, et notamment ses coefficients aux degrés 2 et 3 ([Iess et al., 2010](#)). Les coefficients de degré 2 sont dominants lors des déformations dues aux marées et au potentiel centrifuge et nous ne nous intéressons pas aux coefficients de degré supérieur dans ce manuscrit. Les coefficients $J_2 = -C_{20}$ et C_{22} obtenus par [Iess et al. \(2010\)](#) sont reportés dans la Table 4.2.

Ces coefficients permettent notamment d'obtenir la valeur du moment d'inertie de Titan. George Howard [Darwin \(1899\)](#), le fils du célèbre biologiste Charles Darwin, a étudié la théorie de la figure de la Terre en suivant notamment les développements de [Radau \(1890\)](#). Parmi les résultats de leurs travaux, l'équation de Darwin-Radau (Annexe F) permet d'obtenir l'expression du moment d'inertie I du satellite en fonction du nombre de Love fluide k_f (*e.g.* [Rappaport et al. \(1997\)](#) et section 3.2.1)

$$\frac{I}{M_s R^2} = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{5} \left(\frac{5}{k_f + 1} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.1)$$

où M_s est la masse du satellite de rayon moyen R . Pour un corps fluide homogène, $k_f = 3/2$ et l'on retrouve le moment d'inertie de la sphère homogène $I = 2/5 M_s R^2$. L'inhomogénéité du corps modifie la valeur de k_f et le moment d'inertie de l'objet, la réponse des couches de densités différentes aux potentiels perturbateurs n'étant pas identique. En introduisant la définition

des facteurs q_r , représentant le rapport entre l'accélération centrifuge et l'accélération gravitationnelle du satellite, et le paramètre de marée q_t représentant le rapport entre le potentiel gravitationnel de la planète et celui du satellite,

$$q_r = \frac{\omega^2 R^3}{GM_s}, \quad (4.2)$$

$$q_t = -3 \left(\frac{R}{a} \right)^3 \frac{M_p}{M_s}, \quad (4.3)$$

où M_s est la masse du satellite, a le demi-grand axe de son orbite et ω sa vitesse de rotation, [Hubbard and Anderson \(1978\)](#) obtiennent les différences de moments d'inertie suivantes

$$I_{22} - I_{11} = -M_s R^2 \frac{k_f}{3} q_t,$$

$$I_{33} - \frac{I_{22} + I_{11}}{2} = M_s R^2 \frac{k_f}{3} \left(q_r - \frac{1}{2} q_t \right),$$

ce qui permet de calculer les valeurs de k_f et de I à partir des coefficients J_2 (3.9) et C_{22} (3.10) issus des observations (Table 4.2). La valeur du moment d'inertie de Titan déduite des observations du champ de gravité est proche de $0.34 M_s R^2$ ([Iess et al., 2010](#)). Cette valeur correspond à un satellite différencié, avec une densité plus importante au centre. La structure suggérée pour expliquer la faible densité de Titan est celle d'un noyau de silicates recouvert d'une hydrosphère faite de glace et/ou d'eau liquide ([Iess et al., 2010](#)). Les modèles de structure internes de Titan seront discutés dans la section 4.2.

Dans le cas d'un satellite à l'équilibre hydrostatique, on a (*e.g.* [Rappaport et al. \(1997\)](#), Annexe D)

$$\frac{J_2}{C_{22}} = \frac{10}{3}.$$

Les valeurs de J_2 et de C_{22} de Titan (Table 4.2) donnent une valeur de 3.186, Titan est donc très proche de l'équilibre hydrostatique. Nous supposons ici que la surface est à l'équilibre hydrostatique. Sa forme peut être obtenue en intégrant l'équation de Clairaut pour un corps à l'équilibre, et les variations périodiques autour de la surface d'équilibre sont dues aux variations des potentiels perturbateurs décrits dans la section 3.2. Pour déterminer l'amplitude de ces variations, il est nécessaire d'analyser l'orbite de Titan et d'isoler les fréquences des différents termes qui la composent.

4.1.3 Océan interne

La présence d'un océan sous la surface glacée de Titan a été tout d'abord suggérée par [Lunine and Stevenson \(1987\)](#) puis par [Grasset and Sotin \(1996\)](#) à partir de données expérimentales en laboratoire sur le comportement d'un mélange d'ammoniac et d'eau à haute pression et basse température. Cet océan est ensuite annoncé par [Lorenz et al. \(2008\)](#) à partir de l'analyse des observations radars de la surface du satellite. La détermination de l'état de rotation de Titan se fait en suivant l'évolution de différents repères topographiques au cours des survols de la sonde *Cassini*, une technique rendue difficile du fait de l'atmosphère opaque du satellite. En effet, les observations radars de *Cassini* ne permettent qu'une résolution spatiale comprise entre 300 mètres et 1 kilomètre à la surface selon les images ([Stiles et al., 2008](#)). Un modèle de rotation de Titan est ensuite ajusté sur le déplacement observé des repères. [Stiles et al.](#)

(2008); Lorenz et al. (2008) utilisent ainsi les observations faites entre octobre 2004 et mai 2007 pour déterminer les déplacements de 150 repères topographiques sélectionnés manuellement (Fig. 4.5). Ils déterminent que Titan tourne à une vitesse angulaire de 22.5781° par jour, soit

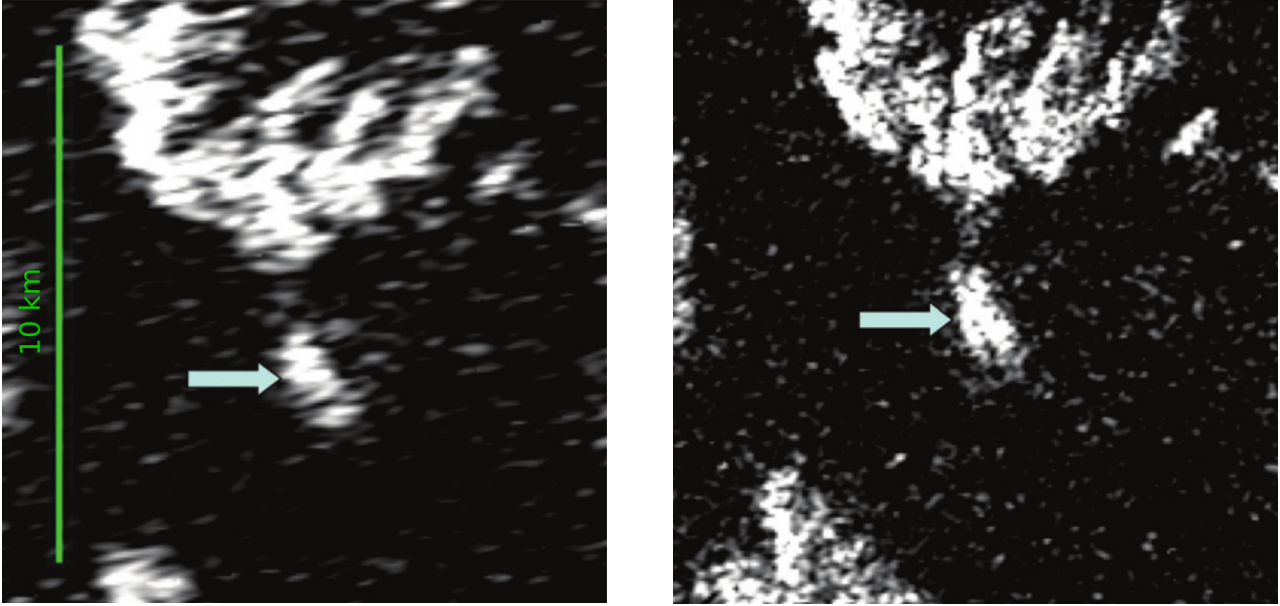


FIGURE 4.5: Exemple d'images radar montrant le déplacement d'un repère topographique à la surface de Titan entre les survols T25 et T28 de *Cassini*. Le déplacement ici est de l'ordre de 3.5 kilomètres. (Source : Stiles et al. (2008)).

0.001° par jour de plus que la vitesse synchrone. Pour expliquer cette rotation super-synchrone de Titan, les auteurs suggèrent que l'atmosphère exerce un couple sur une couche de surface découplée de l'intérieur par un océan interne. Cette valeur de la vitesse angulaire a , depuis, été revue à la baisse suite à la découverte d'une erreur dans le code utilisé pour l'ajustement des positions des repères. Stiles et al. (2010) fournissent une valeur corrigée de 22.57731° par jour soit 0.00033° par jour au-dessus de la vitesse synchrone. L'écart avec la rotation synchrone a été réduit à 0.02° par an grâce à la prise en compte des termes de précession et de nutation dans l'ajustement du modèle de rotation (Meriggiola and Iess, 2012). Titan semble donc être en rotation synchrone mais l'hypothèse de l'océan interne n'est pas écartée.

La valeur de l'obliquité de Titan de 0.3° déterminée par Stiles et al. (2008) à partir des observations radar est également un argument en faveur de la présence d'un océan interne. En effet, Bills and Nimmo (2008) donnent une relation entre le moment d'inertie C du satellite et son obliquité ϵ pour un satellite dans l'état de Cassini, un état d'équilibre où les pôles du satellite et de son orbite précessent à une même vitesse uniforme autour d'un pôle invariant, de telle manière que les trois vecteurs soient coplanaires (*c.f.* section 1.1.2 sur les états de Cassini). Dans cette configuration, la relation s'écrit pour un corps homogène et solide

$$\frac{C}{M_s R^2} = \frac{3n}{2\dot{\Omega}} \left(\frac{(C_{22} + (C_{22} + J_2) \cos \epsilon) \sin \epsilon}{\sin(i - \epsilon)} \right),$$

où C_{22} et J_2 sont les coefficients du champ de gravité, n est le moyen mouvement du satellite, i est l'inclinaison de l'orbite par rapport au repère inertiel et $\dot{\Omega}$ sa vitesse de précession. Puisque l'on a $C = I + 2J_2/3$, la valeur de $I = 0.3414 M_s R^2$ déduite des observations du champ

gravitationnel correspond à une valeur de $\epsilon \sim 0.1^\circ$ pour une inclinaison $i = 0.28^\circ$. [Bills and Nimmo \(2008\)](#) déterminent pour un modèle avec océan, à partir des valeurs de J_2 et de C_{22} mesurées, une valeur d'obliquité de -0.508° correspondant à un moment d'inertie proche de $2/3 M_s R^2$. Cette valeur de moment d'inertie correspond à celle d'une coquille sphérique et les auteurs montrent que la présence d'un océan interne peut découpler la surface de glace du noyau de silicates et permettre d'atteindre la valeur d'obliquité observée. Par la suite, [Baland et al. \(2011\)](#) ont construit un modèle décrivant les états de Cassini pour un satellite contenant un océan interne. À partir de ce modèle, les auteurs montrent que des résonances entre les fréquences du forçage orbital et les fréquences propres du système permettent à l'obliquité d'atteindre une valeur de 0.32° lorsque la surface est découplée du noyau. Ce comportement a été confirmé récemment par une approche numérique dans l'article soumis de [Noyelles and Nimmo \(2014\)](#).

D'autres arguments en faveur de l'océan existent, par exemple dans l'étude des ondes électromagnétiques détectées lors de la descente du module *Huygens* dans l'atmosphère de Titan. [Béghin et al. \(2012\)](#) suggèrent l'existence d'un océan d'eau et d'ammoniaque situé à 55 – 80 kilomètres de profondeur. La topographie observée est également en accord avec un modèle de Titan possédant un océan interne ([Nimmo and Bills, 2010](#)).

Finalement, la valeur du nombre de Love k_2 est estimée à 0.637 ± 0.224 ([Iess et al., 2012](#)) à partir des mesures de variations des coefficients du champ de gravité (*e.g.* [Rappaport et al. \(1997\)](#)). Les valeurs limites de k_2 sont de 0 pour un corps parfaitement rigide et de $3/2$ pour un corps fluide incompressible. [Rappaport et al. \(2008\)](#) suggèrent un nombre de Love de l'ordre de 0.45 pour un modèle de Titan possédant un océan interne. La valeur obtenue par [Iess et al. \(2012\)](#) est en faveur de l'océan interne malgré un surplus d'environ 30% qui est attribué à la forte déformabilité de la surface du satellite sur des échelles de temps de l'ordre de la période orbitale.

Même si les arguments en faveur de l'océan interne sur Titan sont nombreux, les modèles d'intérieurs issus de différentes études thermiques et dynamiques n'excluent pas la possibilité d'un satellite solide (*e.g.* [Tobie et al. \(2012\)](#); [Fortes \(2012\)](#)). Afin d'étudier l'influence de la structure du satellite sur son mouvement de libration, différents modèles issus de la littérature sont sélectionnés et adaptés pour notre étude.

4.2 Modèles d'intérieur et d'atmosphère

Les modèles de structure interne de Titan sont réalisés à partir de modèles thermiques et dynamiques de l'évolution du satellite. Ils sont déterminants dans l'étude de la libration, chacun d'entre eux ayant une réponse au forçage différente selon sa composition.

Les mesures des coefficients du champ de gravité obtenues avec la sonde *Cassini* ([Iess et al., 2010](#)) ont permis de déterminer la valeur du moment d'inertie $I = 0.3414 M_s R^2$, comprise entre celle de Ganymède $I_G = 0.3105 MR^2$ ([Anderson et al., 1996](#)) et celle de Callisto $I_C = 0.3549 MR^2$ ([Anderson et al., 2001](#)). Dans le cas de Ganymède, un noyau de fer pourrait être responsable d'un écart significatif par rapport au moment d'inertie de la sphère homogène. Dans le cas de Titan, le noyau de fer n'est pas exclu. La valeur du moment d'inertie I , la densité moyenne et le rayon moyen sont des contraintes pour les modèles de structure interne. Cependant, le nombre de contraintes est insuffisant pour obtenir l'unicité de la solution et de nombreux modèles d'intérieur de Titan sont compatibles. [Iess et al. \(2010\)](#) suggèrent notamment qu'en combinant la valeur de I et la densité moyenne de 1881 kg m^{-3} du satellite, Titan aurait

un noyau de faible densité ($2550 - 2600 \text{ kg m}^{-3}$) et de taille importante ($2050 - 2100 \text{ km}$), probablement constitué d'un mélange non-différencié de roche et de glace, recouvert d'une couche de glace d'eau pure. Une autre structure compatible serait celle d'un Titan à trois couches composé d'un noyau de silicate recouvert d'une couche mixte de glace et de roche et d'une couche de glace pure. Ces modèles peuvent également contenir un océan interne. Deux types de modèles sont développés dans la littérature à partir de modèles thermiques et chimiques ; les premiers se concentrent essentiellement sur la composition de l'hydrosphère, c'est-à-dire les couches de glaces recouvrant le noyau, tandis que les seconds traitent de la nature du noyau rocheux.

4.2.1 Composition de l'hydrosphère

Du fait de la température de 94 K en surface, la couche superficielle du satellite gèle rapidement, et les modèles différenciés peuvent être décrits en deux couches : un noyau de silicates éventuellement mélangé à de la glace d'eau si la différenciation est imparfaite, le tout recouvert d'une hydrosphère de glace d'eau et de composés organiques. Ce découpage sommaire en hydrosphère et noyau cache en réalité des modèles plus complexes selon la nature des matériaux.

L'hydrosphère peut être composée de glace d'eau pure uniquement. Dans ce cas, l'augmentation de la pression et de la température avec la profondeur induit des changements d'état de la glace. Une couche de glace épaisse sera donc stratifiée en couches de glace de différentes densités selon les conditions du diagramme de phase de la glace d'eau (voir e.g. [Grasset et al. \(2000\)](#); [Fortes \(2012\)](#)).

Certains scénarios de formation de Titan suggèrent une accréation de Saturne dans la nébuleuse solaire alors riche en méthane et en ammoniac (e.g. [Mousis et al. \(2002\)](#)). Ces composants se sont retrouvés dans Titan et son atmosphère lors de sa formation, donnant naissance à un corps riche en éléments organiques. Le mélange d'eau et de méthane peut alors donner naissance à une couche de surface composée de clathrates de méthane, une substance chimique familièrement appelée "glace de méthane" (e.g. [Lunine et al. \(2010\)](#); [Fortes \(2012\)](#)).

La présence d'un océan interne (fig. 4.6) est fortement dépendante de la température à l'intérieur de la couche de glace et de la nature de celle-ci. Pour une couche de glace d'eau pure, la température de fonte est atteinte à 273 K . Cette température peut être diminuée à 177 K par la présence d'ammoniac qui agit comme un anti-gel ([Grasset et al., 2000](#)). La présence de méthanol dans l'océan interne peut également empêcher sa cristallisation ([Deschamps et al., 2010](#)). La présence d'isotopes radioactifs dans le noyau du satellite permet d'obtenir une température avoisinant les 1400 K au centre ([Grasset et al., 2000](#)) et la diffusion de chaleur par convection empêche la cristallisation complète d'un océan enrichi en composés organiques. Dans le cas de ces scénarios, un océan liquide peut subsister sous la surface gelée de Titan.

4.2.2 Composition du noyau

La faible densité moyenne de Titan et son moment d'inertie (*c.f.* Table 4.1) suggèrent un noyau peu dense. Deux mécanismes peuvent expliquer cette faible densité : soit la différenciation est incomplète et le noyau est constitué d'un mélange de roche et de glace recouvrant une graine de roche anhydre, soit la différenciation a eu lieu et les silicates ont été hydratés (*e.g.* [Fortes et al. \(2007\)](#); [Iess et al. \(2010\)](#)). La différence entre ces deux cas réside dans le processus de formation des noyaux. Pour éviter la différenciation complète de la glace et de la roche, l'accréation doit

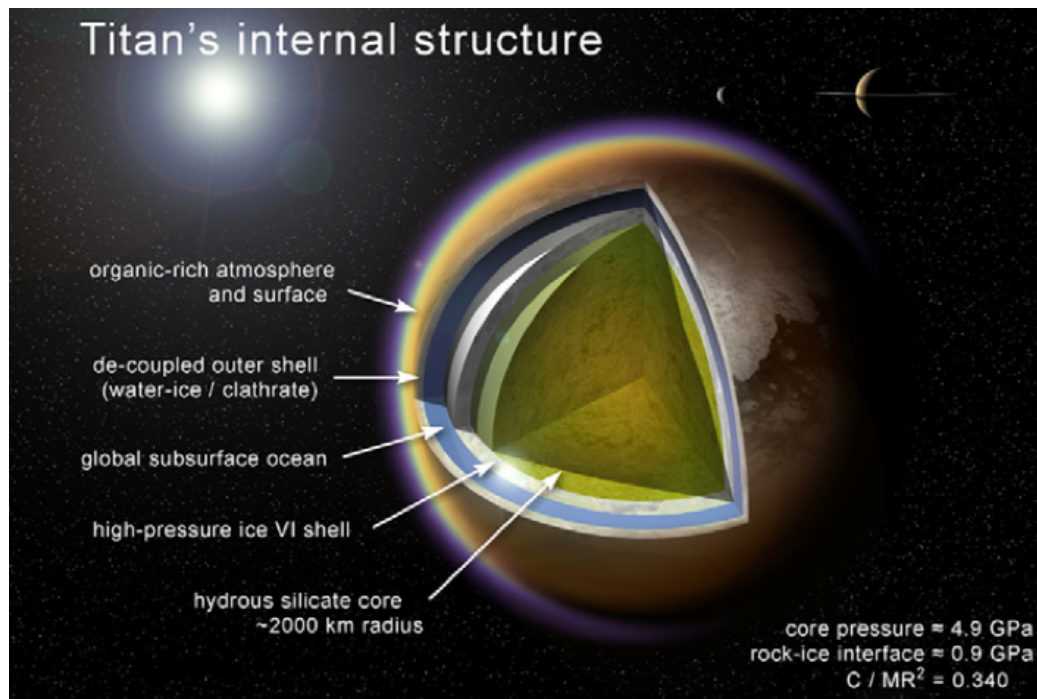


FIGURE 4.6: Représentation schématique des modèles de structure avec océan interne. (Source : Fortes (2012))

être lente et tardive et ainsi empêcher toute augmentation importante de la température. Au contraire, un noyau de silicates nécessite une différenciation provenant de l'accrétion rapide et du chauffage par les isotopes radioactifs (Castillo-Rogez and Lunine, 2012). Les deux types de modèles de noyau n'excluent pas cependant la présence éventuelle d'une graine de fer.

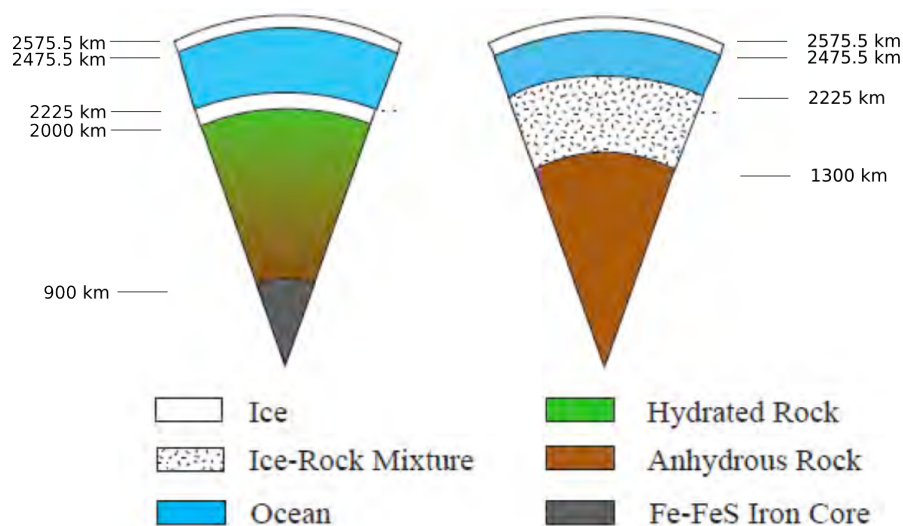


FIGURE 4.7: Représentation schématique des deux catégories de modèles de noyaux : un noyau constitué de silicates hydratés (gauche) et un noyau constitué d'un mélange de glace et de roche (droite). (Adapté de : Castillo-Rogez and Lunine (2012))

4.2.3 Modèles étudiés

Six modèles ont été sélectionnés afin d'étudier leur réponse librationnelle face au forçage gravitationnel de Saturne. L'objectif est de donner un comportement pour une série de modèles représentatifs des différents groupes existants dans la littérature.

Trois modèles sont issus de l'étude de Fortes (2012). Les deux premiers modèles contiennent un océan interne dont la densité est prise à deux valeurs extrêmes, l'un à 1023 kg m^{-3} (appelé F1 dans le reste du manuscrit) et l'autre à 1281 kg m^{-3} (appelé F2). Le premier est associé à un océan constitué d'un mélange d'eau et de méthanol, tandis que le second correspond à un mélange d'eau et d'ammoniac. Le troisième est un modèle solide, constitué d'un noyau fait de roche et de glace et d'une hydrosphère de glace d'eau pure (appelé F3).

Le quatrième modèle (appelé CA10) est issu de l'étude de Castillo-Rogez and Lunine (2010). Il est constitué d'un noyau de roche hydraté et d'une hydrosphère de glace et d'eau liquide (fig. 4.7, gauche). Le cinquième modèle (appelé MC11) est constitué d'un manteau non-différencié d'eau et de glace recouvrant une graine de silicates, basé sur l'étude de McKinnon and Bland (2011) (fig. 4.7, droite). Le dernier modèle (appelé FE10) est identique au modèle CA10 à l'exception de la présence d'une graine de fer, la densité de l'océan étant ajustée pour conserver la densité moyenne du satellite. Les hydrosphères de ces trois derniers modèles ont été choisies identiques et de constitution similaire aux modèles de Fortes afin de pouvoir détecter directement l'influence de la composition du noyau sur le mouvement de libration.

Ces six modèles possèdent un moment d'inertie contenu dans l'incertitude du moment observé (Table 4.1, Iess et al. (2010)) et vérifient la densité moyenne de 1881 kg m^{-3} . Ils sont décrits en détails dans la table 4.3.

Pour chacun de ces modèles, les profils de densités (Fig. 4.8) ainsi que les profils d'aplatissements équatoriaux β obtenus par intégration de l'équation (2.1.2) sont tracés (Fig. 4.9) et montrent la diversité dans la constitution et la figure des différentes couches. On remarque que les modèles ayant un intérieur plus dense ont un aplatissement du noyau plus faible. A la surface, les valeurs d'aplatissements sont proches et de l'ordre de $12 \cdot 10^{-5}$, en accord avec la valeur mesurée de $11.92 \cdot 10^{-5}$ (Iess et al., 2010). Tous les modèles ayant une couche de glace de même épaisseur et de densités semblables (entre 930.8 et 932.8 kg m^{-3}), les différences à la surface proviennent de la différence de constitution de l'océan et du noyau.

4.2.4 Modèles d'atmosphère

Pour déterminer l'influence de l'atmosphère, nous utilisons les couples issus des modèles de circulation atmosphérique de Tokano and Neubauer (2005) (nous appellerons ce modèle TO05) et Charnay and Lebonnois (2012) (nous appellerons ce modèle CH12). L'amplitude de ces couples dépend essentiellement de l'extension en latitude de la cellule de Hadley. Une cellule s'étalant de l'équateur au pôle maximise l'échange de moment cinétique entre l'atmosphère et la surface (section 3.1.4). Cette extension est fortement dépendante de ce que l'on appelle l'inertie thermique du sol, c'est-à-dire la réponse thermique du sol au chauffage solaire. La valeur de cette inertie thermique dans le cas de Titan est inconnue, et a été estimée à $340 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$ par Tokano and Neubauer (2005). Cependant, la valeur peut être plus élevée et atteindre $2000 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$ (Lebonnois et al., 2012).

A partir du modèle TO05, Karatekin et al. (2008) déterminent que la composante principale du couplage atmosphérique est associé à une période de 14.74 ans correspondant à la période semi-annuelle de Saturne. Cette variation saisonnière du couplage atmosphérique se fait avec

TABLE 4.3: Caractéristiques des modèles de structure interne sélectionnés. Les trois premiers modèles intitulés F1, F2 et F3 sont issus des travaux de Fortes (2012). Le modèle CA10 provient de l'étude de Castillo-Rogez and Lunine (2010) et MC11 de celle de McKinnon and Bland (2011), chacun avec un océan dense et une couche de glace de haute pression. Le dernier modèle (FE10) est similaire à CA10 en incluant une graine de fer. I est le moment d'inertie total du corps, tandis que C_s et C_i sont les moments d'inertie polaires de la coquille de glace et du noyau respectivement, exprimés en termes de masse et de rayon de Titan ($M_s = 13455.3 \cdot 10^{19}$ kg et $R = 2575.5$ km d'après Fortes (2012)). Le terme HP désigne les glaces sous haute pression, et les chiffres romains désignent les différents états de la glace d'eau (Grasset et al., 2000).

	F1		F2		F3	
Couche	ρ (kg m ⁻³)	R (km)	ρ (kg m ⁻³)	R (km)	ρ (kg m ⁻³)	R (km)
Coquille de glace	930.9	2575.5	930.9	2575.5	932.8	2575.5
Océan	1023.5	2475	1281.3	2475	-	-
Glace HP II	-	-	-	-	1193.3	2429
Glace HP V	1272.7	2225	1350.9	2225	1268.7	2304
Glace HP VI	1338.9	2163	-	-	1338.9	2185
Noyau de silicates	2542.3	2116	2650.4	1984	2584.1	2055
I (MR ²)	0.3414		0.3413		0.3413	
C_s (MR ²)	0.0357		0.0357		-	
C_i (MR ²)	0.2320		0.2133		-	

	CA10		MC11		FE10	
Couche	ρ (kg m ⁻³)	R (km)	ρ (kg m ⁻³)	R (km)	ρ (kg m ⁻³)	R (km)
Coquille de glace	932.8	2575.5	932.8	2575.5	932.8	2575.5
Océan	1317.6	2475	1315.5	2475	1224.1	2475
Manteau de glace HP	1350.9	2225	1350.9	2225	1350.9	2225
Manteau rocheux	2520	2000	2200	2075	2520	2000
Noyau de silicates	3400	900	3300	1300	3400	900
Graine de fer	-	-	-	-	6500	500
I (MR ²)	0.3402		0.3378		0.3336	
C_s (MR ²)	0.0358		0.0358		0.0358	
C_i (MR ²)	0.2095		0.2073		0.2096	

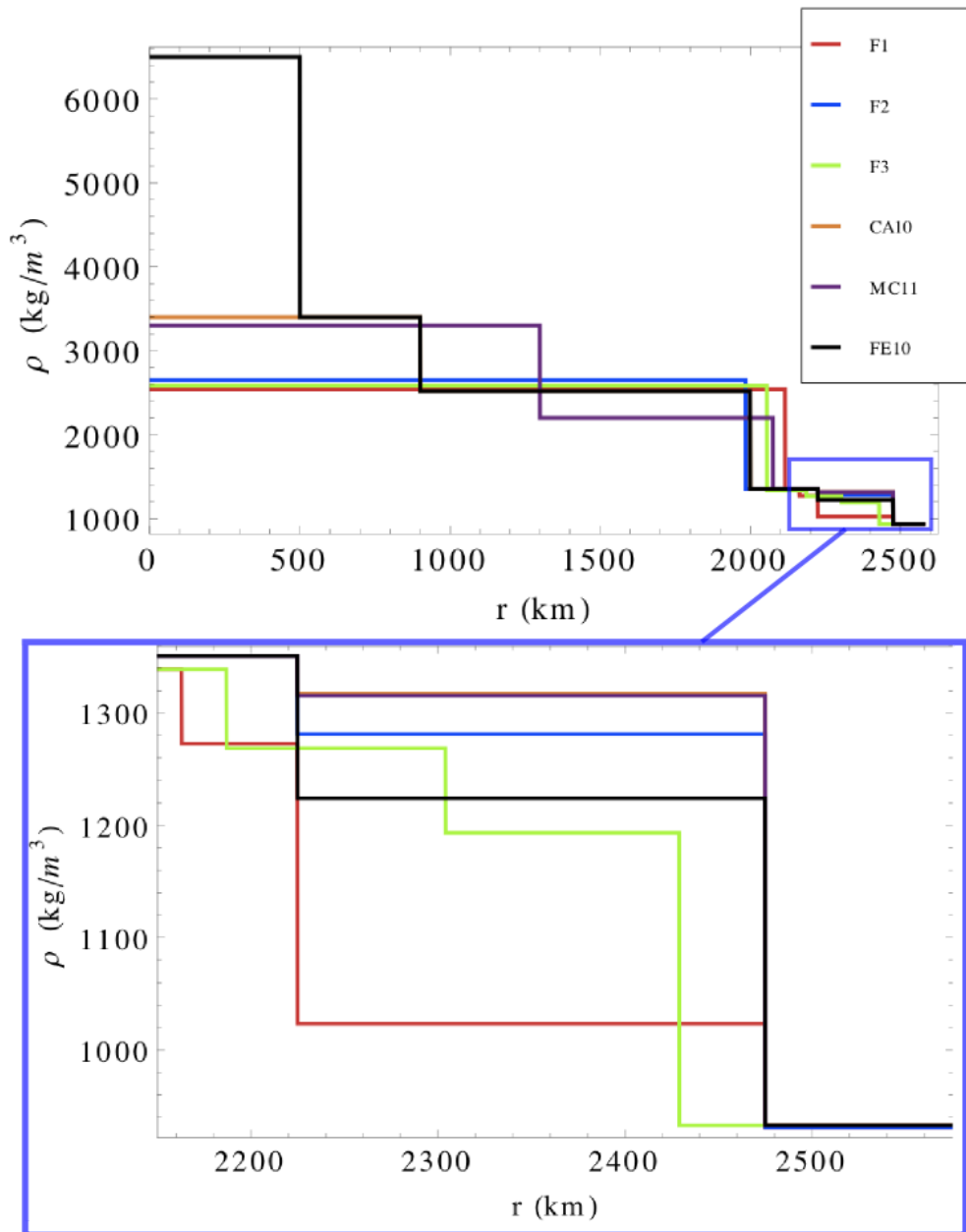


FIGURE 4.8: Profils de densités des modèles d'intérieur de Titan décrits dans la table 4.3.

une amplitude de $1.6 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$.

Les données du couplage atmosphérique issues du modèle CH12 nous ont été fournies par Benjamin Charnay et Sébastien Lebonnois pour différentes valeurs de l'inertie thermique. Nous les avons analysées en fréquence pour déterminer les termes dominants et comparer les résultats avec le modèle TO05. La figure 4.10 présente l'amplitude de la composante z du couplage atmosphérique obtenue à partir des modèles TO05 et CH12 pour une valeur d'inertie thermique de $400 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$. Le couplage obtenu avec le CH12 contient de nombreuses fréquences, mais l'on note que l'amplitude du terme principal du modèle CH12 est un ordre de grandeur inférieur à celui du modèle TO05. Une amplitude plus faible signifie un forçage de la surface et une influence sur le mouvement de libration moins important.

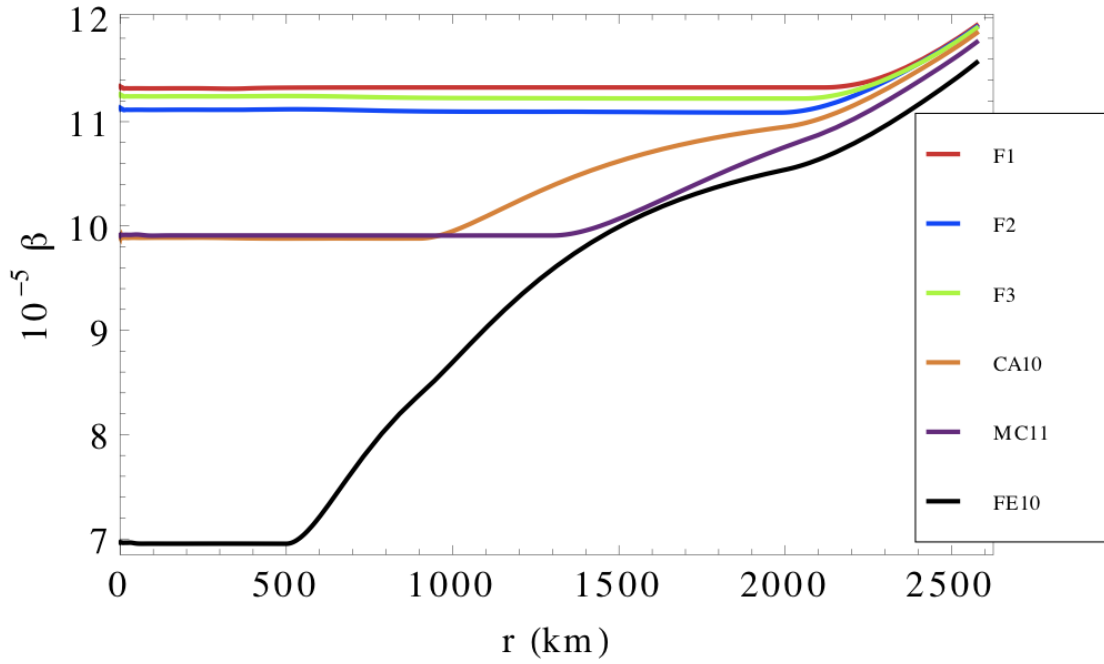


FIGURE 4.9: Profils d'aplatissements équatoriaux β des modèles d'intérieur de Titan décrits dans la table 4.3. Les valeurs sont obtenues en intégrant numériquement l'équation de Clairaut (*c.f.* section 2.1).

Le spectre de l'amplitude du couplage atmosphérique le long de l'axe \mathbf{K} est tracé sur la figure 4.11 pour le modèle CH12 avec une amplitude thermique de $400 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$. L'analyse en fréquence détermine un terme dominant à la fréquence semi-annuelle de Saturne avec une amplitude de l'ordre de $1.6 \cdot 10^{16} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Cette amplitude descend jusqu'à $1.1 \cdot 10^{16} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ pour un modèle possédant une inertie thermique de $2000 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$. Les termes associés à d'autres fréquences existant dans le couple atmosphérique (*c.f.* figure 4.11), comme la fréquence tri-annuelle de Saturne, possèdent des magnitudes inférieures à $5 \cdot 10^{15} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Les courtes oscillations de faibles amplitudes correspondent aux ondes atmosphériques libres et forcées. Celles-ci sont dues notamment aux marées thermiques et gravitationnelles causées par Saturne (Tokano and Neubauer, 2002). Dans la suite, nous utilisons uniquement la composante dominante semi-annuelle du couple et négligeons les termes d'ordres supérieurs dont l'influence sur les librations en longitude est inférieure au mètre. De plus, nous ne considérons que la valeur maximale du couple issue du modèle CH12 possédant la plus faible inertie thermique.

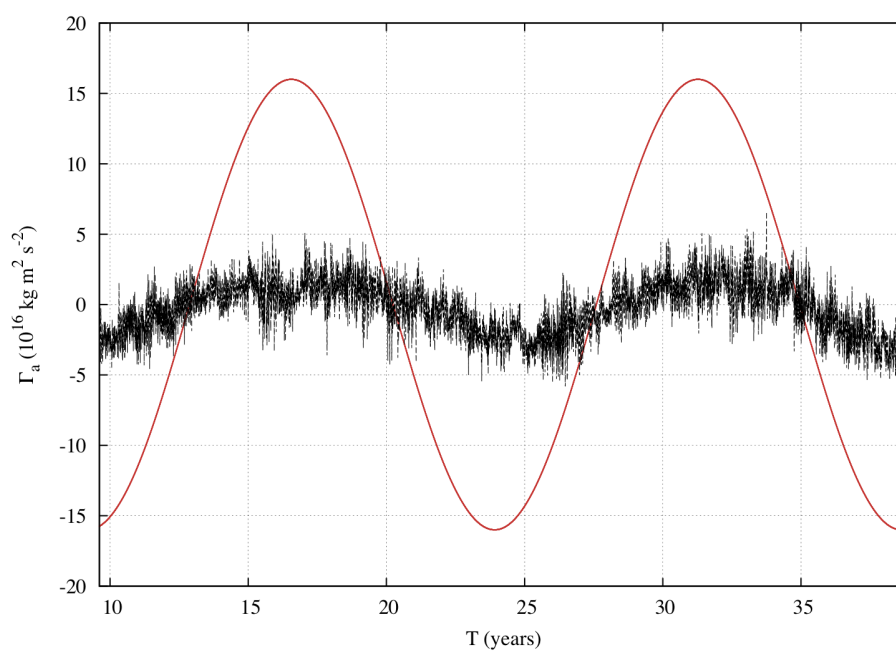


FIGURE 4.10: Amplitude des couplages atmosphériques le long de l'axe **K** pour le couple issu du modèle de circulation atmosphérique de [Charnay and Lebonnois \(2012\)](#) avec une inertie thermique de $400 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$. L'amplitude TO05 du couplage atmosphérique à la fréquence semi-annuelle du modèle de [Tokano and Neubauer \(2005\)](#) est tracée en rouge pour comparaison. La date initiale est J2000.

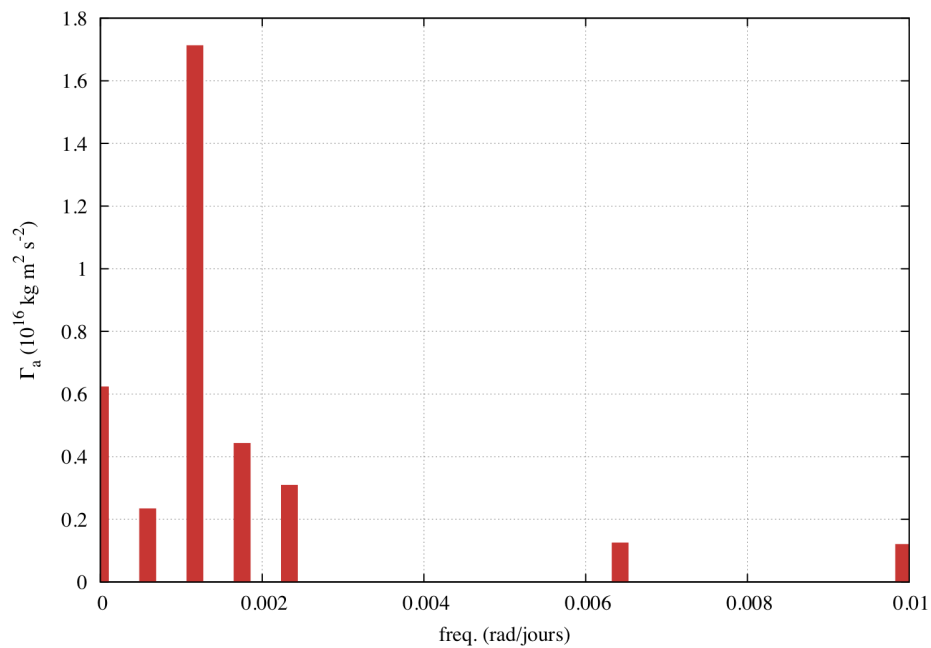


FIGURE 4.11: Spectre de l'amplitude du couple atmosphérique le long de l'axe **K** issu du modèle de circulation atmosphérique de [Charnay and Lebonnois \(2012\)](#) avec une inertie thermique de $400 \text{ J m}^2 \text{ s}^{1/2} \text{ K}^{-1}$.

Chapitre 5

Mouvement orbital de Titan

Sommaire

5.1	Ephéméride Horizons	70
5.2	Ephéméride TASS	74
5.3	Identification des fréquences	75

Le couplage gravitationnel donné dans la section 3.1.1 exercé par la planète sur les différentes couches du satellite dépend du mouvement orbital de celui-ci. En effet, la direction de la planète dans le repère du satellite est donnée par le jeu de rotations suivant (Annexe G)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\Phi)R_1(\Theta)R_3(\Psi)R_3(-\Omega)R_1(-i)R_3(-\omega - f) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

La position de la planète est repérée dans le repère tournant avec l'anomalie vraie par le vecteur $(r, 0, 0)$. Ce vecteur effectue ensuite une rotation d'un angle $-\omega - f$ autour de la normale à l'orbite, ω étant l'argument du périastre mesuré depuis la ligne des noeuds et f l'anomalie vraie du satellite, puis une rotation de $-i$ pour revenir dans le plan inertiel et finalement une rotation de $-\Omega$ pour revenir dans le repère inertiel $(G, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le vecteur est ensuite écrit dans le repère lié aux axes principaux d'inertie du satellite grâce aux rotations $R_3(\Psi)$, $R_1(\Theta)$ et $R_3(\Phi)$ correspondant aux différents angles d'Euler.

Ce système peut être simplifié en supposant le problème plan, c'est-à-dire $\Theta = i = 0$. Les coordonnées de la planète se réduisent alors aux rotations

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\Phi)R_3(\Psi)R_3(-\Omega)R_3(-\omega - f) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit en isolant les contributions du mouvement orbital et du mouvement de rotation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\Phi + \Psi)R_3(-\Omega - \omega - f) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Cependant, on peut utiliser la définition de l'angle de libration physique en longitude γ découlant de l'écart à la loi de Cassini (*c.f.* (1.2))

$$\Psi + \Phi = \pi + L + \gamma,$$

ainsi que la définition de la longitude vraie $\nu = \Omega + \omega + f$ pour que les coordonnées de la planète deviennent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_3(\pi + L + \gamma - \nu) \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos(\nu - L - \gamma) \\ -r \sin(\nu - L - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Ces coordonnées sont celles de la planète exprimées dans le repère du satellite. Elles sont utilisées dans l'expression du couple gravitationnel externe (3.12). L'angle $\phi = \nu - L - \gamma$ correspond à la longitude de la planète dans le repère du satellite. Il s'agit de l'angle introduit dans la section 1.1.3 pour décrire les librations optiques en longitude. Le couple gravitationnel dépend directement des coordonnées de la planète, et en particulier de sa longitude ϕ . Dans le cas d'une orbite Képlerienne, la longitude de la planète $\phi = \nu - L - \gamma$, où $L = \Omega + \omega + M$ avec M l'anomalie moyenne et $\nu = \Omega + \omega + f$ avec f l'anomalie vraie, peut être directement exprimée sous la forme d'une série développée en anomalie moyenne M et en excentricité e . En effet, au second ordre en e , l'équation du centre s'écrit

$$\nu - L = f - M = 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \mathcal{O}(e^3). \quad (5.5)$$

Cependant, les interactions gravitationnelles avec le Soleil et les autres corps du système solaire sont à l'origine de perturbations orbitales, ajoutant des termes de plus longues périodes au forçage de la planète. Dans ce cas, l'équation du centre peut être approximée par une série de Fourier telle que

$$\nu - L = \sum_{j=1}^{\infty} H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad (5.6)$$

où $L = Nt$ avec N le moyen mouvement moyen et H_j désigne l'amplitude des termes périodiques de fréquence ω_j et de phase α_j .

Dans cette section, nous analysons l'orbite de Titan afin d'identifier les différentes fréquences et amplitudes du forçage gravitationnel externe pour le cas non-Képlerien. Nous utilisons pour cela deux éphémérides : Horizons, éphéméride numérique développée au JPL (Giorgini et al., 1996), et TASS, éphéméride analytique des satellites de Saturne développée à l'IMCCE (Vienne and Duriez, 1995). L'intérêt de la première est d'être ajustée sur les données de la sonde *Cassini*, tandis que la seconde permet d'étudier l'orbite de Titan sur plusieurs milliers d'années.

5.1 Ephéméride Horizons

Titan est en rotation synchrone autour de Saturne, avec une fréquence moyenne de 0.394042 rad jour⁻¹ (Jacobson, 2010, Sat339, JPL Ephemerides), soit une période de 15.94 jours. Dans le

cas Képlerien, le développement de $\nu - L - \lambda_o$, où λ_o est la condition initiale de l'angle de rotation du satellite, ne dépend que de l'excentricité e et de l'anomalie moyenne M (*c.f.* (5.5)). Mais les perturbations orbitales de Titan doivent être prises en compte. Nous souhaitons donc écrire l'approximation sous forme de série de Fourier de $\nu - L - \lambda_o$ pour une orbite non-Képlerienne (*c.f.* (5.6)).

Pour cela, nous utilisons l'éphéméride de Titan fournie par le système Horizons¹ du JPL (Giorgini et al., 1996). Le système Horizons intègre numériquement les équations du mouvement pour un système solaire contenant les 8 planètes, le Soleil, 178 satellites naturels, 3259 comètes et 636767 astéroïdes. Les éphémérides sont également ajustées sur les données observationnelles optiques, radar et VLBI obtenues sur Terre et aux observations des sondes spatiales. Dans le cas de Titan, l'éphéméride Horizons est disponible sur une période de 400 ans allant du 7 janvier 1800 au 16 janvier 2200, sous forme de vecteurs positions et vitesses définis dans le repère ICRF² à l'époque de référence J2000³. Les éléments orbitaux obtenus à partir de ces vecteurs sont tracés dans le plan équatorial de Saturne sur la Figure 5.1 pour toute la période de l'éphéméride.

La longitude vraie du satellite est définie comme étant $\nu = f + \varpi$ où f est l'anomalie vraie et ϖ la longitude du périhélie. Notons que la variation de la longitude du périhélie ϖ (fig. 5.1) induit un terme séculaire dans la longitude vraie. Ce terme séculaire possède une période trop importante pour pouvoir être identifié sur une période de 400 ans, il se comporte alors comme une déviation linéaire de la longitude vraie. En utilisant le moyen mouvement moyen N , contenant la déviation linéaire, la dérive séculaire est absorbée lorsque Nt est retiré du signal. En identifiant le moyen mouvement moyen dans le signal de la longitude vraie, et en le retirant, la figure 5.2 associée à $\nu - L$ est obtenue.

La différence $\nu - L - \lambda_o$ (Fig. 5.2) contient à la fois les termes de l'équation du centre (5.5) mais également les termes venant des perturbations orbitales. Pour décomposer le signal de $\nu - L - \lambda_o$ en série de Fourier, nous utilisons l'analyse en fréquence développée par Laskar (1988, 2003) et implémentée dans le logiciel TRIP (Gastineau and Laskar, 2012).

Le processus consiste à chercher une approximation d'une fonction complexe $X + iY$ sous la forme d'une série de Fourier $\sum_{j=0}^k H_j \exp(i\omega_j t + \alpha_j)$, où k est la taille du vecteur fréquence ω . L'analyse en fréquence de la fonction nous donnera alors les amplitudes H_j , les fréquences ω_j et les phases α_j associées aux principaux termes de la série. Dans notre cas, la fonction est réelle et l'approximation en série de Fourier peut s'écrire sous la forme (5.6). Le résultat de l'analyse en fréquence de $\nu - L - \lambda_o$ calculé à partir de l'éphéméride Horizons est présenté dans la Table 5.1. Les termes de la série sont identifiés grâce à l'éphéméride TASS (voir section suivante). Nous utilisons les arguments de Vienne and Duriez (1995) où L est la longitude moyenne, ϕ est proche de la longitude du péricentre, Φ est proche de la longitude du noeud de l'orbite et les indices 6, 8 et 9 font référence à Titan, Japet et le Soleil respectivement.

Certains arguments de la Table 5.1 ne respectent pas la loi de d'Alembert, spécifiant que la somme des coefficients d'un argument est nulle. Ceci peut être expliqué par le fait que certains termes de basses fréquences peuvent contribuer à ces arguments et les combinaisons de fréquences associées ne sont pas nulles. C'est le cas par exemple de l'argument $L_6 - \Phi_6 - 2L_9$

1. <http://ssd.jpl.nasa.gov/?ephemerides>

2. International Celestial Reference Frame (Ma et al., 1998) : Système de référence quasi-inertiel centré sur le barycentre du système solaire et dont les axes sont définis à partir des positions de 212 sources extra-galactiques. Ses axes sont proches de l'équinoxe et l'équateur terrestre à J2000.

3. Jour Julien 2451545.0 soit le 1^{er} janvier 2000 à 12h00 TU, Convention IERS (2003)

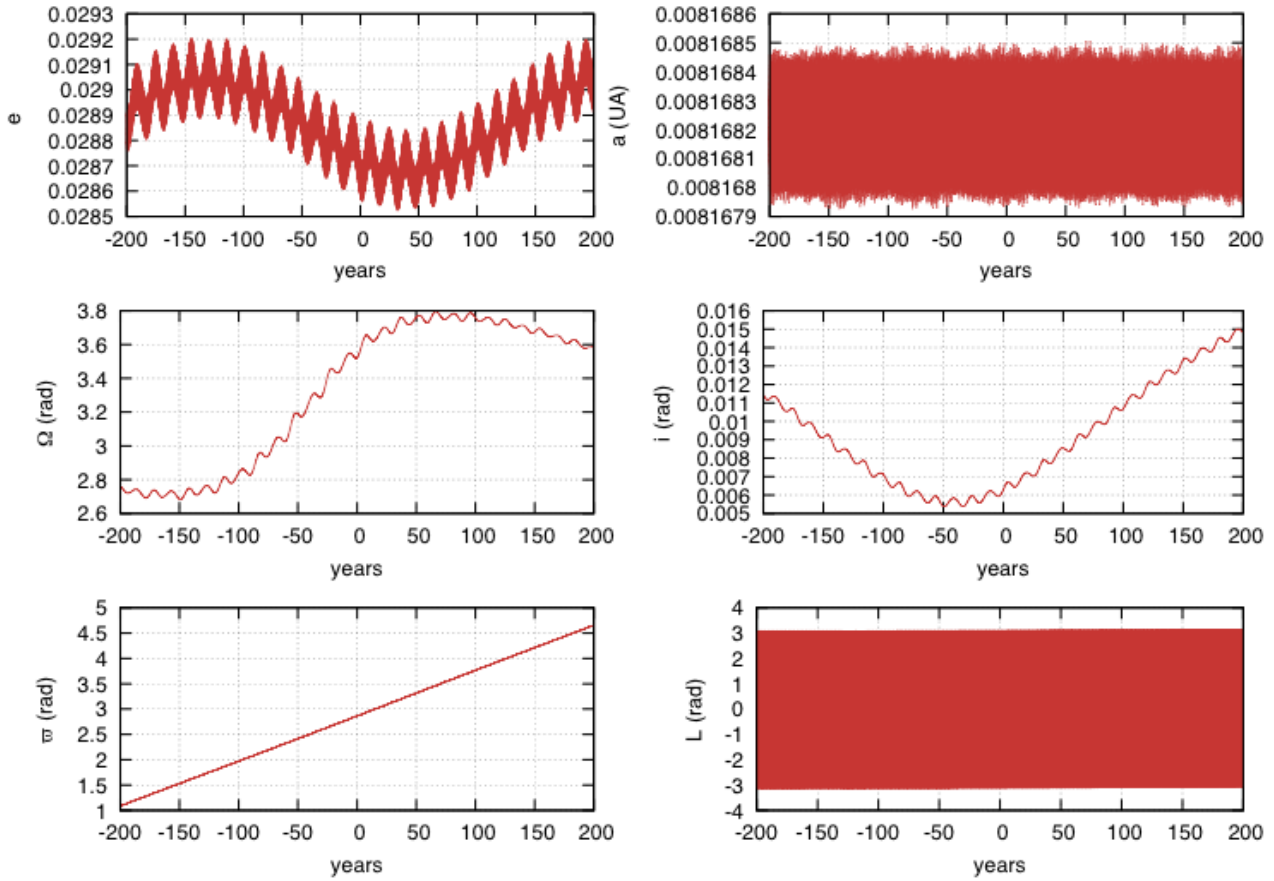


FIGURE 5.1: Elements orbitaux de Titan au cours du temps obtenus avec l'éphéméride Horizons du JPL. La date de référence est J2000. e est l'excentricité, a le demi-grand axe exprimé en unités astronomiques ($1 \text{ UA} = 149597870,7 \text{ km}$), Ω la longitude du noeud ascendant de l'orbite, i l'inclinaison, ϖ la longitude du péricentre et L la longitude moyenne du satellite.

TABLE 5.1: Analyse en fréquence de la longitude vraie de Titan obtenue à partir de l'éphéméride Horizons sur 400 ans. L'identification est effectuée grâce à l'éphéméride TASS (section 5.3). La fréquence du dernier terme est proche de la combinaison $(12L_j - 13L_9)$ où L_j est la longitude moyenne de Jupiter. La date initiale est J2000.

Fréquence (rad/jours)	Période (jours)	Amplitude (")	Phase (degrés)	Identification
0.394018	15.9464	11899.3237	163.3693	$L_6 - \phi_6$
0.788036	7.9732	212.5868	-32.7941	$2L_6 - 2\phi_6$
0.394081	15.9439	56.6941	-68.1211	$L_6 - \Phi_6$
0.001169	5376.6331	43.7313	-66.0428	$2L_9$
0.000584	10750.3648	37.5508	138.4821	L_9
0.392897	15.9919	31.5673	10.8789	$L_6 - \Phi_6 - 2L_9$
0.001753	3583.9304	5.6147	250.1412	$3L_9$
0.009810	640.4892	1.4983	-77.2905	-

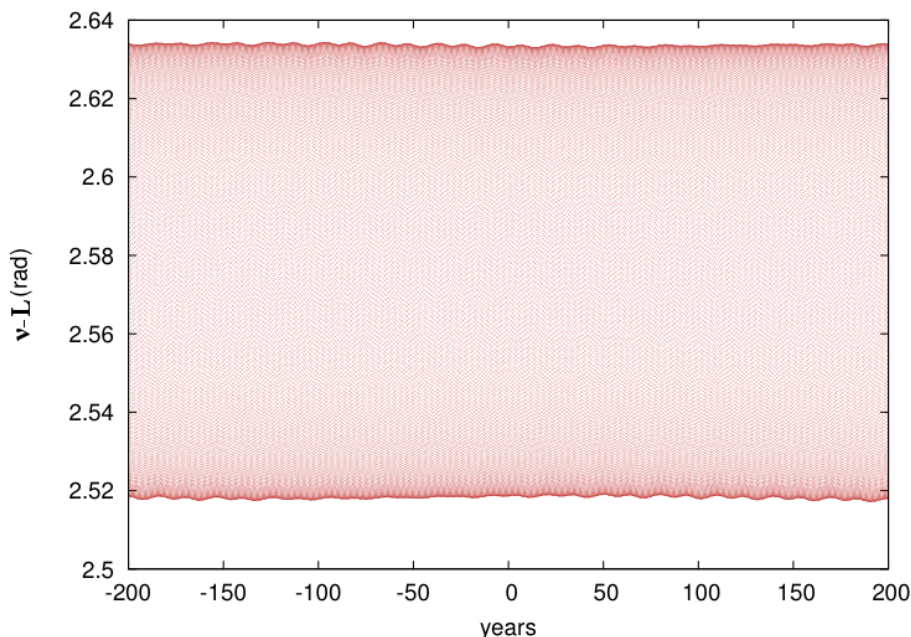


FIGURE 5.2: Différence entre la longitude vraie ν et la longitude moyenne L donnée par l'éphéméride Horizons du JPL. La date de référence est J2000.

dont la somme des coefficients vaut -2 . De la même façon, les phases de certains arguments ne sont pas en accord avec leur identification. Par exemple pour l'argument $L_6 - \Phi_6 - 2L_9$, la phase est de 10.88 degrés. En utilisant les termes ayant pour arguments $L_6 - \Phi_6$ et $2L_9$, et en ajoutant leurs phases, on obtient une valeur de -2.08 degrés. Cet écart est dû aux termes de basses fréquences non-identifiés contribuant à cet argument.

Parmi les termes de la série de Fourier de la longitude vraie de Titan, on vérifie bien que les plus importants sont les termes de l'équation du centre Képlérienne (5.5). Le premier terme, d'amplitude 11899.3237 arcsecondes, correspond à $2e \sin M$, où $e = 0.0288$ et $M = nt = L_6 - \phi_6$ avec $n = 0.394018$ rad/jour. Le second terme, d'amplitude 212.5868 arcsecondes, est $5/4e^2 \sin 2M$ avec une fréquence égale à $2n$. A ces termes Képlériens s'ajoutent les fréquences issues des perturbations orbitales. Leur identification est effectuée à l'aide des fréquences obtenues dans l'éphéméride analytique TASS (Vienne and Duriez, 1995) dans la section 5.3.

L'identification du terme associé à l'argument $L_6 - \Phi_6$ est différente de l'article de Richard et al. (2014). Ce terme, originellement mal déterminé dû à l'intervalle trop court de 400 ans de l'éphéméride Horizons, a été identifié récemment en utilisant l'éphéméride TASS sur une période plus importante (*c.f.* section 5.3).

La différence relative entre l'approximation en série de Fourier de $\nu - L$ et l'éphéméride Horizons est de l'ordre de 0.03 % au maximum (Fig. 5.3). Les 8 termes présentés dans la Table 5.1 suffisent donc pour une bonne approximation de l'équation du centre sur une durée de 400 ans.

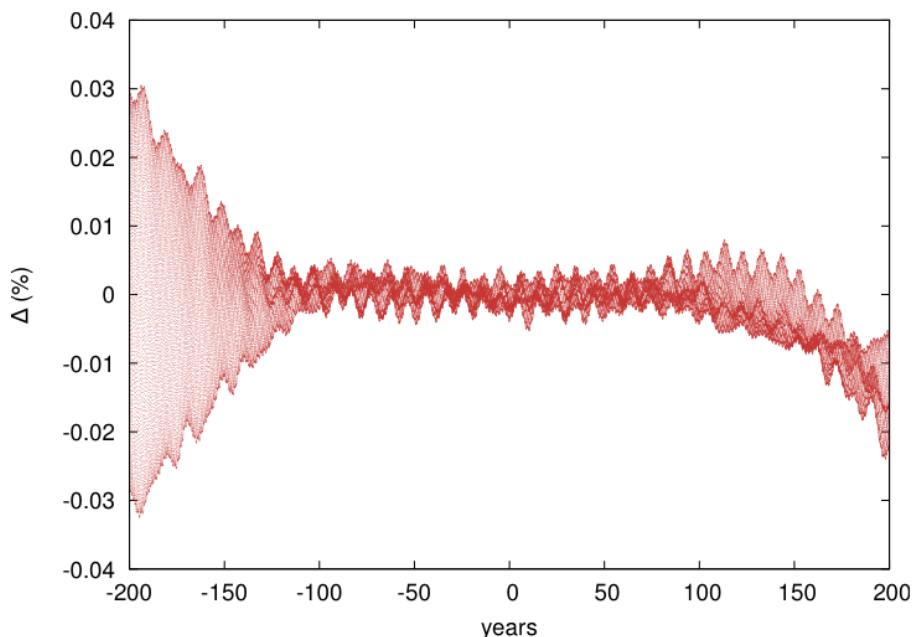


FIGURE 5.3: Différence relative Δ entre la solution de $\nu - L$ obtenue avec Horizons et son approximation analytique sous forme de série de Fourier (Table 5.1). La date initiale est J2000.

5.2 Ephéméride TASS

L'éphéméride TASS (Théorie Analytique des Satellites de Saturne, [Vienne and Duriez \(1995\)](#)) est, comme son nom l'indique, une éphéméride analytique. Cette théorie fournit à l'utilisateur les éléments orbitaux des satellites Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan et Japet sous forme de séries de Fourier avec une précision d'environ 10 kilomètres sur les positions. Elle tient compte de la masse de chacun de ces sept satellites, ainsi que de la masse du Soleil, des coefficients J_2 , J_4 et J_6 du champ gravitationnel de Saturne et de l'orientation de son orbite. Cette théorie a été ajustée sur les observations faites depuis la Terre de ces satellites.

L'avantage de l'éphéméride TASS est de fournir à l'utilisateur l'ensemble des fréquences contenues dans le mouvement orbital de Titan. Ces fréquences peuvent notamment servir à l'identification des termes issus de l'analyse en fréquences de l'éphéméride Horizons (table 5.1). Cette éphéméride permet à l'utilisateur d'étudier le mouvement à long terme des satellites de Saturne et d'identifier les fréquences de variation du péricentre et du noeud de l'orbite de Titan, c'est-à-dire d'identifier des termes dont la période dépasse les 400 ans de données de l'éphéméride Horizons.

Afin d'identifier les termes de longues périodes présents dans l'orbite de Titan, nous analysons l'éphéméride TASS sur 30000 ans. D'après [Vienne and Duriez \(1995\)](#), le terme de plus longue période se situe à environ 3263 ans, toutes les longues périodes de la perturbation orbitale devraient donc être détectées. Les éléments orbitaux de Titan sur 30000 ans obtenus avec TASS contiennent des oscillations basses fréquences (Fig. 5.4) qui étaient partiellement visibles sur les 400 ans de l'éphéméride Horizons (Fig. 5.1) et ne pouvaient être déterminées dans l'analyse en fréquence de la longitude vraie.

Nous analysons les variables $z_6 = e_6 \exp i\varpi_6$ (Table 5.2), $\zeta_6 = \sin(i_6/2) \exp i\Omega_6$ (Table 5.3) et L_6 (Table 5.4) sur 30000 ans. L'identification des fréquences est faite en utilisant les tables de [Vienne and Duriez \(1995\)](#) et leur notation. Le terme d'argument de l'analyse de L_6

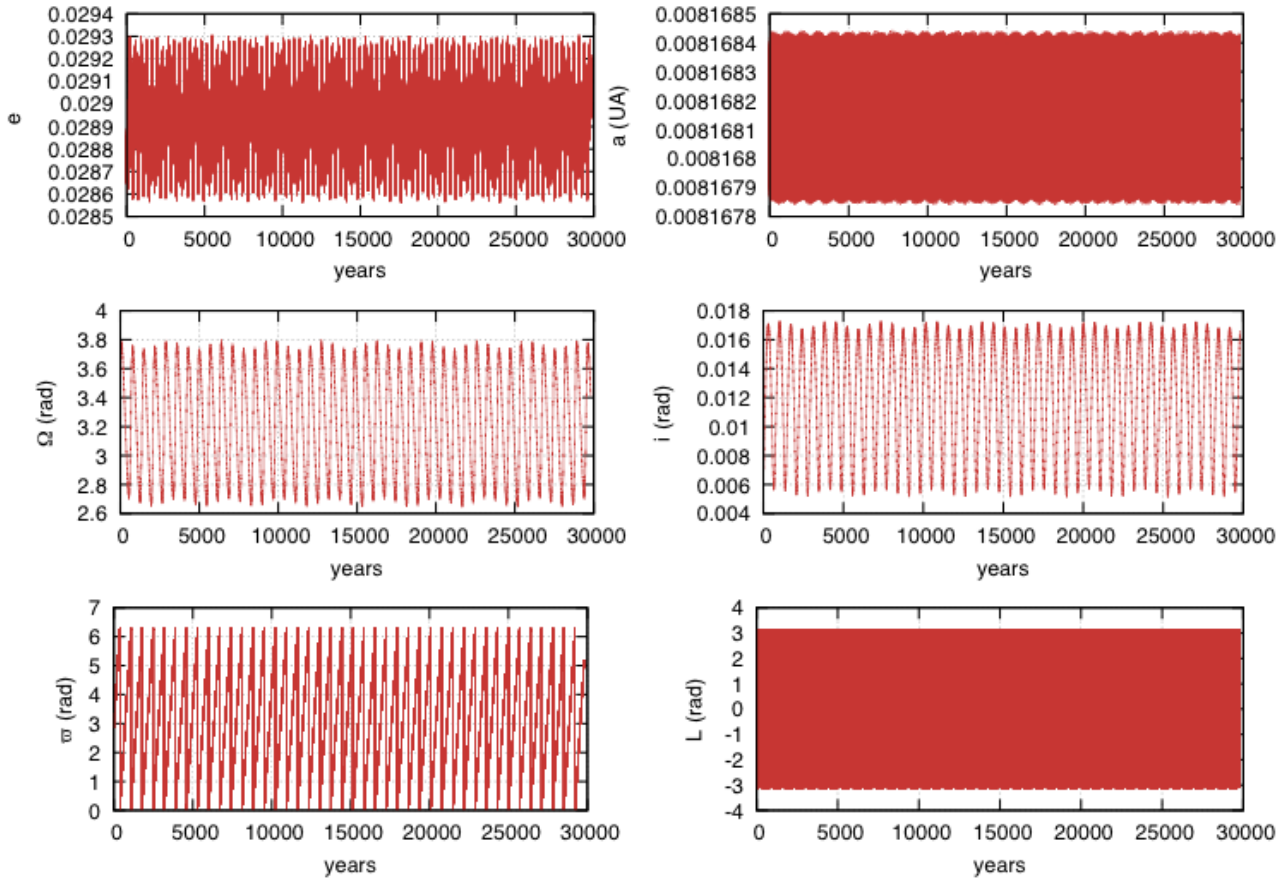


FIGURE 5.4: Elements orbitaux obtenus avec l'éphéméride TASS sur 30000 ans. La date initiale est J2000. e est l'excentricité, a le demi-grand axe exprimé en unités astronomiques (1 UA = 149597870, 7 km), Ω la longitude du noeud ascendant de l'orbite, i l'inclinaison, ϖ la longitude du péricentre et L la longitude moyenne du satellite.

correspondant aux possibles arguments 19μ , $\phi_6 - \phi_8$, $-\Phi_6 + \Phi_8$ est compatible avec ces trois combinaisons de fréquences. Les fréquences obtenues dans ces analyses nous permettent ensuite d'identifier les termes obtenus dans l'analyse de la longitude vraie corrigée $\nu - L$ (Table 5.5).

Pour comparaison directe des éléments orbitaux avec ceux obtenus avec Horizons, nous analysons TASS sur la même période de temps de 400 ans. L'écart entre les éphémérides TASS et Horizons pour les différents éléments orbitaux est en général inférieur à 1% (Fig. 5.5) sur cette période. Ces écarts relativement faibles des éléments orbitaux traduisent un comportement très proche entre les deux éphémérides, ce que confirme la comparaison de la longitude vraie corrigée $\nu - L$ (Fig. 5.6), où les deux éphémérides ne s'écartent que de 0.01%. L'influence des termes de très longues périodes dans la perturbation orbitale est donc négligeable sur la période considérée.

5.3 Identification des fréquences

Les fréquences obtenues dans l'analyse des variables z_6 , ζ_6 et L_6 nous servent de fréquences de référence pour l'identification des termes de l'analyse de la longitude vraie corrigée dans la

TABLE 5.2: Analyse en fréquence de la variable $z_6 = e_6 \exp i\varpi_6$ de Titan obtenue à partir de l'éphéméride TASS sur 30000 ans. La variable est décomposée sous la forme $z_6 = \sum_j H_j \exp i(\omega_j t + \alpha_j)$, avec H_j l'amplitude, ω_j la fréquence et α_j la phase. La date initiale est J2000. Les termes d'amplitude inférieure à 3 arcsecondes n'apparaissent pas dans la table. D'après [Vienne and Duriez \(1995\)](#), L_{o6} désigne la partie linéaire de L_6 tel que $L_{o6} = Nt + L_{o6}^{(o)} + \delta L_6$. où $L_{o6}^{(o)}$ est la phase et δL_6 est la partie périodique.

Fréquence (rad/jours)	Période	Amplitude (")	Phase (degrés)	Identification
0.00002446	703.29 ans	5966.5264	164.2271	ϕ_6
-0.00002446	-703.29 ans	39.6287	24.4266	$-\phi_6$
0.00114350	15.04 ans	15.3596	-41.7400	$-\phi_6 + 2L_9$
0.39404257	15.94 jours	12.4005	-32.3317	L_{o6}
0.00001919	896.43 ans	5.0110	-94.2970	$\phi_6 + \Phi_8$
0.00002973	578.62 ans	4.9331	-118.0946	$\phi_6 - \Phi_8$
0.00000541	3181.14 ans	3.5498	-161.6026	ϕ_8

TABLE 5.3: Analyse en fréquence de la variable $\zeta_6 = \sin \frac{i_6}{2} \exp i\Omega_6$ de Titan obtenue à partir de l'éphéméride TASS sur 30000 ans. La variable est décomposée sous la forme $\zeta_6 = \sum_j H_j \exp(\omega_j t + \alpha_j)$, avec H_j l'amplitude, ω_j la fréquence et α_j la phase. La date initiale est J2000. Les termes d'amplitude inférieure à 3 arcsecondes n'apparaissent pas dans la table.

Fréquence (rad/jours)	Période (années)	Amplitude (")	Phase (degrés)	Identification
0.000000000		1157.18738	-175.4933	-
-0.00002445	-703.57	575.467126081	-14.7297	Φ_6
-0.00000527	-3264.22	27.069648582	-73.1903	Φ_8
0.00116796	14.73	23.218626876	117.4463	$2L_9$
-0.00058398	-29.46	3.953412763	47.4992	$-L_9$

Table 5.5. Cette table peut être directement comparée avec l'analyse sur 400 ans de la longitude vraie corrigée de l'éphéméride Horizons (Table 5.1).

Les fréquences 0.000584 rad/jour, 0.001168 rad/jour et 0.001752 rad/jour correspondent aux périodes de 29.43, 14.73 et 9.82 ans respectivement. Il s'agit des périodes annuelle, semi-annuelle et tri-annuelle de Saturne. La présence de ces termes dans les perturbations de l'orbite de Titan est due à l'influence gravitationnelle exercée par le Soleil sur Titan lors de la révolution de Saturne (L_9 , $2L_9$ et $3L_9$). Nous remarquons ensuite la présence de termes de longues périodes qui n'apparaissent pas avec Horizons. Le terme de période 703 ans correspond à la précession de l'orbite de Titan, tandis que le terme à 3263 ans correspond à une perturbation orbitale due au mouvement du noeud de l'orbite de Japet. Une autre particularité concerne la fréquence de 0.394067 rad/jours identifiée à l'argument $L_6 - \Phi_6$. Une fréquence proche de 0.394081 rad/jours apparaît dans la table 5.1 obtenue avec Horizons, mais l'amplitude associée à cette dernière est environ 30% plus faible que celle du terme identifié avec TASS. Les phases sont également

TABLE 5.4: Analyse en fréquence de la longitude moyenne corrigée $L_6 - Nt$ ($N = 0.3940425677$ rad/jour) de Titan obtenue à partir de l'éphéméride TASS sur 30000 ans. La variable est décomposée sous la forme $L_6 - Nt = \sum_j H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$, avec H_j l'amplitude, ω_j la fréquence et α_j la phase. 19μ est un argument associé à la grande inégalité entre Saturne et Jupiter (Vienne and Duriez, 1995). La date initiale est J2000. Seuls les termes d'amplitudes supérieure à 5 arcsecondes sont affichés.

Fréquence (rad/jours)	Période (années)	Amplitude (")	Phase (degrés)	Identification
0.00000527	3264.22	307.1614	259.0674	$-\Phi_8$
0.00002445	703.57	129.5003	19.6297	$-\Phi_6$
0.00116796	14.73	42.5844	-66.3772	$2L_9$
0.00058398	29.46	37.9513	138.3886	L_9
0.00001880	915.02	6.6113	146.5804	$19\mu/\phi_6 - \phi_8/ - \Phi_6 + \Phi_8$
0.00175194	9.82	6.0037	250.1016	$3L_9$
0.00004892	351.64	5.7400	139.9871	$2\phi_6$

TABLE 5.5: Analyse en fréquence de la longitude moyenne corrigée $\nu - L$ ($N = 0.3940425677$ rad/jour) de Titan obtenue à partir de l'éphéméride TASS sur 30000 ans. La variable est décomposée sous la forme $\nu - L = \sum_j H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$, avec H_j l'amplitude, ω_j la fréquence et α_j la phase. La date initiale est J2000. Seuls les termes d'amplitude supérieure à 30 arcsecondes sont affichés.

Fréquence (rad/jours)	Période	Amplitude (")	Phase (degrés)	Identification
0.394018108	15.9464 jours	11932.9535	163.4419	$L_6 - \phi_6$
0.000005271	3263.5978 ans	307.1614	259.0674	$-\Phi_8$
0.788036216	7.9732 jours	215.7493	-33.1162	$2L_6 - 2\phi_6$
0.000024453	703.4892 ans	129.5003	19.6297	$-\Phi_6$
0.394067027	15.9444 jours	79.0396	-56.7558	$L_6 - \Phi_6$
0.001167962	14.7286 ans	42.5843	-66.3772	$2L_9$
0.000583981	29.4571 ans	37.9513	138.3886	L_9
0.392899065	15.9918 jours	30.8696	9.4118	$L_6 - \Phi_6 - 2L_9$

différentes de 11.4 degrés.

La fréquence associée à l'argument $L_6 - \Phi_6$ est proche de la première fréquence dont l'argument est $L_6 - \phi_6$. La différence entre les deux fréquences est de l'ordre de $\Delta f = 4.89188 \cdot 10^{-5}$ rad/jours. Par conséquent, ces deux fréquences ne peuvent être résolues que si la fenêtre de temps analysée est supérieure à $2\pi/\delta f \sim 351$ ans. La fenêtre de Horizons de 400 ans pourrait être trop faible pour permettre une bonne résolution de ces deux fréquences.

Afin de s'assurer de cette hypothèse, nous reconstruisons la longitude vraie corrigée à partir de la série de Fourier décrite dans la table 5.5, et analysons le résultat sur 400 ans. Ainsi, les fréquences présentes dans le signal d'origine sont parfaitement connues. Le résultat de l'analyse est donné dans la table 5.3. On remarque que le terme associé à l'argument $L_6 - \Phi_6$ dans la

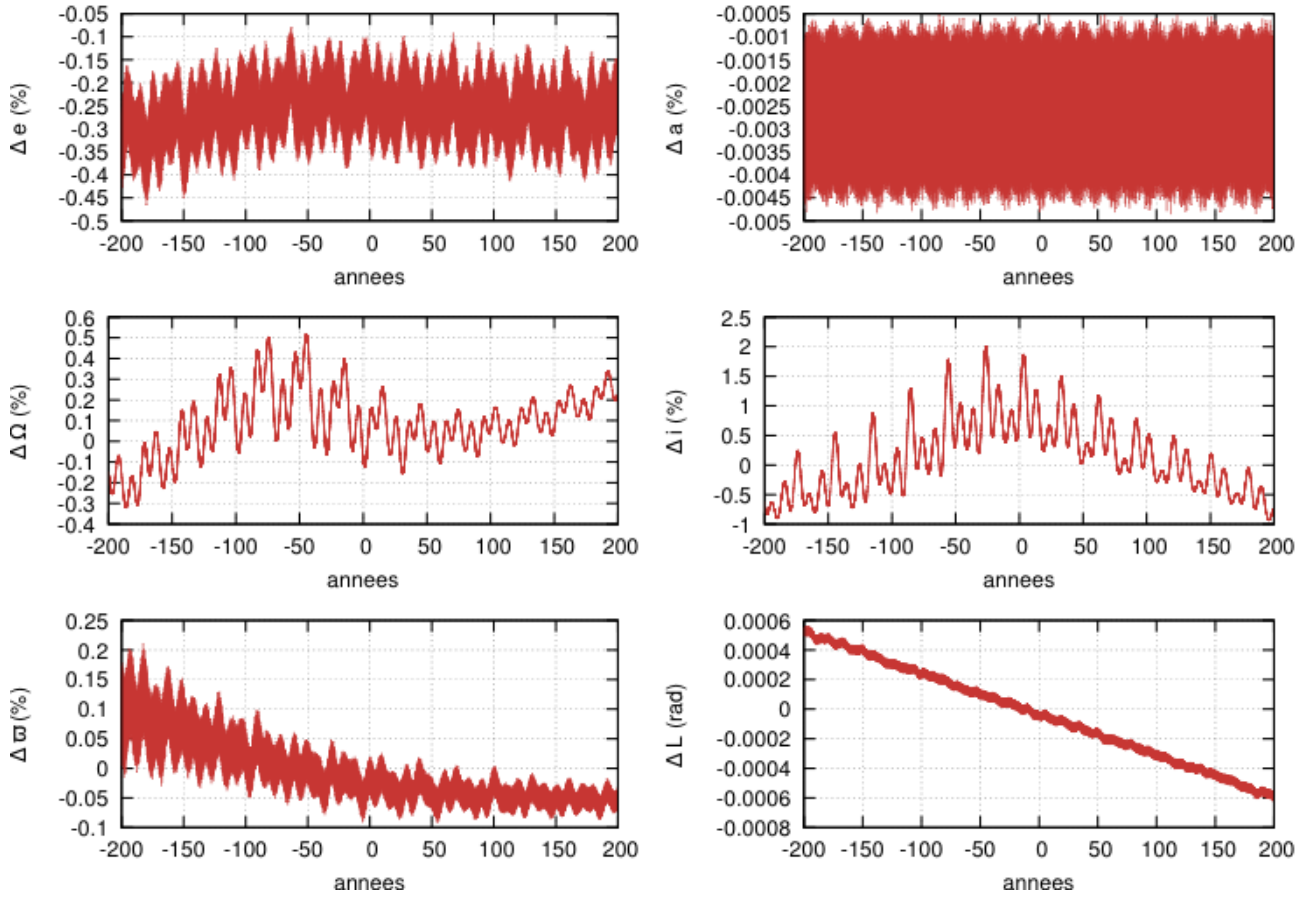


FIGURE 5.5: Différence relative entre les éléments orbitaux des éphémérides Horizons et TASS pour l'excentricité e , le demi-grand axe a , la longitude du noeud Ω , l'inclinaison i , la longitude du périastre ϖ et la longitude moyenne L . La date initiale est J2000.

série de Fourier a , cette fois, une fréquence de 0.394088 rad/jours et une amplitude réduite de 41%. Ce test montre clairement que la détermination de cette fréquence est rendue peu précise du fait de la taille de la fenêtre de 400 ans qui ne permet pas d'obtenir une résolution suffisante sur les fréquences. Nous pouvons donc associer le terme à 15.9439 jours à l'argument $L_6 - \Phi_6$, tout en notant que ce terme possède une mauvaise détermination dans le cas de l'éphéméride Horizons. L'identification des fréquences de la longitude vraie de Titan effectuée dans l'article de [Richard et al. \(2014\)](#) nécessite des corrections compte tenu des résultats présentés ici, notamment l'identification du terme attribué à une perturbation de Japet.

Le terme de période 134743 jours (soit 369 ans) présent uniquement dans TASS et non-identifié pourrait être un terme résiduel dû à une mauvaise détermination des termes de périodes 703 ans et 3263 ans.

Malgré le très bon accord entre les éphémérides TASS et Horizons et la présence de termes de longues périodes dans la série de Fourier de la théorie analytique, nous travaillons avec Horizons car cette éphéméride est ajustée aux observations récentes de la mission Cassini. TASS est utilisée ici pour identifier les fréquences du système.

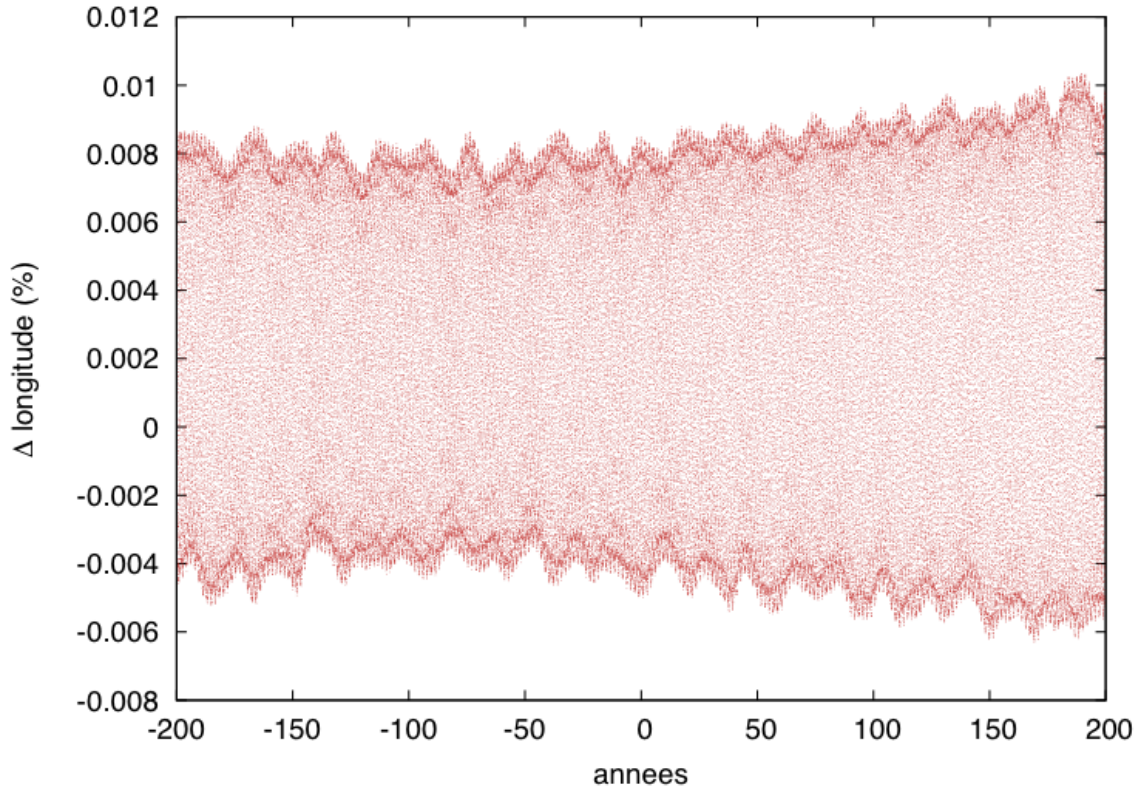


FIGURE 5.6: Différence relative entre les longitudes vraies ν des éphémérides Horizons et TASS. La date initiale est J2000.

TABLE 5.6: Analyse en fréquence sur 400 ans de la série de Fourier de la longitude vraie de Titan obtenue à partir de l'éphéméride TASS. La série est décomposée sous la forme $\nu - L - \lambda_o = \sum_j H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$, avec λ_o la valeur initiale de l'angle de rotation du satellite mesurée depuis la ligne des noeuds, H_j l'amplitude, ω_j la fréquence et α_j la phase. La date initiale est J2000. Seuls les termes d'amplitude supérieure à 30 arcsecondes sont affichés.

Fréquence (rad/jours)	Période (jours)	Amplitude (")	Phase (degrés)	Identification
0.394018265	15.9464	11971.1092	162.5890	$L_6 - \phi_6$
0.788037334	7.9732	219.6175	-38.5796	$2L_6 - 2\phi_6$
0.394087851	15.9436	46.5917	211.0125	$L_6 - \Phi_6$
0.000046701	134541.2550	62.7362	-58.8490	-
0.001168277	5378.1647	41.9675	-65.7686	$2L_9$
0.000583889	10760.9222	38.1038	140.4993	L_9
0.392900609	15.9918	30.0899	2.5420	$L_6 - \Phi_6 - 2\theta$

Chapitre 6

Solutions de la libration

Sommaire

6.1	Librations pour un modèle rigide	81
6.1.1	Solutions forcées de la libration rigide	82
6.1.2	Analyse des solutions	86
6.1.3	Application aux modèles	88
6.2	Librations pour un modèle élastique	92
6.2.1	Solution de la libration élastique	92
6.2.2	Application aux modèles de Titan	100
6.3	Comparaisons et études complémentaires	103
6.3.1	Cas rigide	103
6.3.2	Cas élastique	104
6.3.3	Cas visco-élastique	108
6.4	Résumé	110

6.1 Librations pour un modèle rigide

Dans un premier temps, nous traitons le cas d'un satellite infiniment rigide et entièrement solide, puis à trois couches (deux couches solides et un océan interne). L'hypothèse de rigidité permet de s'affranchir des déformations périodiques et de considérer les moments d'inertie comme constants. Le couple de rappel gravitationnel de Saturne s'exerce dans ce cas sur la forme statique du satellite. Nous posons, dans un premier temps, les équations de la libration (1.19)-(1.21) dans lesquelles sont introduits les couples décrits dans la section 3.1. Nous écrivons ensuite la solution forcée analytique du système d'équations de la libration forcée, et évaluons les paramètres géophysiques influents sur l'amplitude de libration. On suppose dans ce manuscrit que les oscillations libres du système sont amorties sur le long terme par la dissipation du système et nous ne considérons que les librations forcées. Finalement, nous appliquons les solutions analytiques obtenues aux modèles de structure interne sélectionnés dans la section 4.2.

6.1.1 Solutions forcées de la libration rigide

6.1.1.1 Cas sans océan

Le cas le plus simple est celui d'un Titan entièrement solide. L'équation d'Euler-Liouville pour un corps solide (1.13) et rigide ($\dot{I}_{33} = 0$) devient, en introduisant l'angle de rotation du satellite λ et la longitude ϕ de la planète dans le repère du corps et en supposant que la planète évolue dans le plan équatorial du satellite ($\theta = \pi/2$) (e.g. Danby (1988)),

$$C\ddot{\lambda} = \frac{3}{2}n^2(B - A)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2\phi, \quad (6.1)$$

où A , B et C sont les principaux moments d'inertie du corps rigide, a le demi-grand axe de l'orbite du satellite, r le rayon vecteur satellite-planète, n est le moyen mouvement du satellite et le membre de droite est l'expression du couplage gravitationnel externe donné par l'équation (3.11). En utilisant la définition de l'angle de libration γ tel que $\lambda = L + \gamma + \lambda_o$ où L est la longitude moyenne et λ_o la valeur initiale de l'angle de rotation, et avec $\phi = \nu - \lambda$, on peut écrire l'équation de libration au premier ordre en γ et en excentricité e

$$C\ddot{\gamma} + 3n^2(B - A)\gamma = 3n^2(B - A)(\nu - L - \lambda_o). \quad (6.2)$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre correspondant à l'équation d'un pendule, mais ici ν dépend du temps.

En utilisant le développement en série de Fourier de

$$\nu - L - \lambda_o = \sum_{j=1}^{\infty} H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

où H_j est l'amplitude du terme de forçage de fréquence ω_j et de phase α_j , on cherche les solutions de l'équation (6.2) sous la forme

$$\gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad (6.3)$$

de sorte que γ_j est l'amplitude de la libration en réponse au forçage de fréquence ω_j et de phase α_j . En posant ω_f la fréquence propre du système définie par

$$\omega_f = n\sqrt{\frac{3(B - A)}{C}}, \quad (6.4)$$

la solution forcée de l'équation de libration à la fréquence ω_j s'écrit alors simplement (e.g. Danby (1988))

$$\gamma_j = \frac{H_j \omega_f^2}{\omega_f^2 - \omega_j^2}. \quad (6.5)$$

On remarque notamment que cette solution tend vers l'infini lorsque ω_j tend vers ω_f , c'est-à-dire lorsque la fréquence de forçage est proche de la fréquence propre du système. On parle alors de résonance.

6.1.1.2 Cas avec océan

A partir des équations d'Euler-Liouville (1.19)-(1.21) pour un satellite à trois couches, on peut écrire, sachant que le couple total sur l'océan est nul (*c.f.* section 3.1.5) (Van Hoolst et al., 2009; Rambaux et al., 2011b)

$$C_s \ddot{\lambda}_s = \frac{K_s}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2\phi_s + K_{int} \sin 2(\phi_i - \phi_s), \quad (6.6)$$

$$C_i \ddot{\lambda}_i = \frac{K_i}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2\phi_i - K_{int} \sin 2(\phi_i - \phi_s), \quad (6.7)$$

où λ_l est l'angle de rotation de la couche l (coquille ou intérieur), ϕ_l l'angle entre l'axe principal de la couche l et la direction de la planète, a le demi-grand axe de l'orbite du satellite, r le rayon vecteur satellite-planète, $\phi_i - \phi_s$ l'angle entre les axes principaux de la surface et du noyau, K_l est l'amplitude du couple gravitationnel exercé par la planète sur la couche l et K_{int} l'amplitude du couplage gravitationnel interne. En utilisant les relations (3.36) et (3.41) obtenues dans la section 3.1, on a, en supposant $\theta = \pi/2$ et les couches étant homogènes,

$$K_s = 3 \frac{GM_p}{a^3} [(B_s - A_s) + (B'_s - A'_s)], \quad (6.8)$$

$$K_i = 3 \frac{GM_p}{a^3} [(B_i - A_i) - (B'_i - A'_i)], \quad (6.9)$$

$$K_{int} = \frac{4\pi G}{5} [(B_i - A_i) - (B'_i - A'_i)] [(\rho_o - \rho_s)\beta_o + \rho_s\beta_s]. \quad (6.10)$$

Ici, le couple de pression exercé sur les couches solides est exprimé sous la forme d'incrémentes d'inertie ($B'_l - A'_l$) à partir des expressions (3.30) et (3.32), donnés par (Rambaux et al., 2011b)

$$(B'_s - A'_s) = \frac{8\pi}{15} \rho_o \beta_o r_o^5, \quad (6.11)$$

$$(B'_i - A'_i) = \frac{8\pi}{15} \rho_o \beta_i r_i^5, \quad (6.12)$$

où β_o et β_i désignent les aplatissements équatoriaux statiques aux rayons moyens r_o et r_i respectivement. ρ_o désigne ici la densité de l'océan. Les couples d'amplitudes K_s , K_i et K_{int} sont exercés sur la forme d'équilibre du satellite.

En introduisant l'angle de libration γ tel que $\lambda = L + \gamma + \lambda_o$ et en utilisant l'expression de $\phi = \nu - \lambda$, les équations de la libration peuvent se linéariser au premier ordre en γ_s , γ_i et en $\nu - L$

$$C_s \ddot{\gamma}_s + (K_s + 2K_{int})\gamma_s - 2K_{int}\gamma_i = K_s(\nu - L - \lambda_{o,s}), \quad (6.13)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_i + (K_i + 2K_{int})\gamma_i - 2K_{int}\gamma_s = K_i(\nu - L - \lambda_{o,i}). \quad (6.14)$$

En développant le forçage en série de Fourier, on peut décomposer la réponse librationnelle pour chaque fréquence de forçage ω_j . La série de Fourier de $\nu - L$ sera celle obtenue dans le chapitre 5 par l'analyse en fréquence de l'orbite de Titan. De cette façon, on cherche la solution γ_l pour une couche l telle que

$$\gamma_l = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{l,j} \sin(\omega_j t + \alpha_j),$$

et les équations de la libration rigide s'écrivent à la fréquence ω_j

$$-\omega_j^2 C_s \gamma_{s,j} + K_s \gamma_{s,j} + 2K_{int}(\gamma_{s,j} - \gamma_{i,j}) = K_s H_j, \quad (6.15)$$

$$-\omega_j^2 C_i \gamma_{i,j} + K_i \gamma_{i,j} + 2K_{int}(\gamma_{i,j} - \gamma_{s,j}) = K_i H_j. \quad (6.16)$$

En introduisant les fréquences suivantes (Dumberry, 2011)

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{C_s}}, \quad (6.17)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{C_i}}, \quad (6.18)$$

$$\mu = \sqrt{2K_{int} \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_s} \right)}, \quad (6.19)$$

associées respectivement au système sans couplage gravitationnel interne ($K_{int} = 0$) et sans couplage gravitationnel externe ($K_s = K_i = 0$), les expressions des fréquences propres du système (6.15)-(6.16) sont

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\omega_s^2 + \omega_i^2 + \mu^2 + \sqrt{\Delta}), \quad (6.20)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_s^2 + \omega_i^2 + \mu^2 - \sqrt{\Delta}), \quad (6.21)$$

où

$$\Delta = \omega_s^4 + \omega_i^4 + \mu^4 + 2\omega_i^2 \mu^2 + 2\omega_s^2 \mu^2 - 2\omega_i^2 \omega_s^2 - 8\omega_i^2 \frac{K_{int}}{C_s} - 8\omega_s^2 \frac{K_{int}}{C_i}.$$

En utilisant ces fréquences, les solutions à la fréquence ω_j s'écrivent (Van Hoolst et al., 2008; Rambaux et al., 2011b)

$$\gamma_{s,j} = \frac{1}{C_i C_s} \frac{H_j (K_s (K_i + 2K_{int} - C_i \omega_j^2) + 2K_i K_{int})}{(\omega_j^2 - \omega_1^2)(\omega_j^2 - \omega_2^2)}, \quad (6.22)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{C_i C_s} \frac{H_j (K_i (K_s + 2K_{int} - C_s \omega_j^2) + 2K_s K_{int})}{(\omega_j^2 - \omega_1^2)(\omega_j^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.23)$$

Ces solutions sont la réponse librationnelle de la coquille et du noyau au forçage gravitationnel externe de fréquence ω_j . On remarque que les solutions sont inversement proportionnelles au moment d'inertie C_s de la couche de glace. Dans le cas d'une couche de glace très fine, où C_s tend vers zéro, l'amplitude de la libration tend vers l'infini. Le cas limite de la couche fine a notamment été étudié dans le cas de la libration des modèles à trois couches des satellites galiléens (Rambaux et al., 2011b). Les auteurs montrent dans le cas d'Europe que la proximité entre les fréquences propres du système ω_1, ω_2 et les fréquences de forçage ω_j induit des résonances, c'est-à-dire des petits diviseurs dans les solutions (6.22) et (6.23), qui sont à l'origine de librations importantes de la surface. Dans ce cas, la linéarisation des équations de la libration (6.6) et (6.7) n'est plus valable. L'analyse des solutions est effectuée dans la section 6.1.2.

6.1.1.3 Cas avec atmosphère

La prise en compte du couplage atmosphérique se fait en introduisant un terme de forçage Γ_A dans l'équation de la libration de la surface (6.6). Le modèle de circulation atmosphérique

de Tokano and Neubauer (2005) décrit un échange de moment cinétique entre l'atmosphère et la surface avec une composante principale dont la période est d'une demi-année saturnienne (*c.f.* section 3.1.4). Le terme de forçage atmosphérique peut se décomposer en série de Fourier

$$\Gamma_A = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_{A,k} \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

où $\Gamma_{A,k}$ est la magnitude du forçage atmosphérique associé à la fréquence ω_k et à la phase α_k . Si la fréquence ω_k est égale à une fréquence ω_j du couplage orbital, on définit $\Delta\alpha_j$ le déphasage par rapport à α_j , α_j étant la phase du terme de $\nu - L$ associé à la fréquence ω_j . $\Delta\alpha_j$ correspond donc au déphasage entre le forçage atmosphérique et le forçage orbital. Le système à résoudre devient donc

$$C_s \ddot{\gamma}_{s,j} + K_s \gamma_{s,j} + 2K_{int}(\gamma_{s,j} - \gamma_{i,j}) = K_s H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \Gamma_{A,k} \sin(\omega_k t + \alpha_k), \quad (6.24)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_{i,j} + K_i \gamma_{i,j} + 2K_{int}(\gamma_{i,j} - \gamma_{s,j}) = K_i H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j). \quad (6.25)$$

Pour les fréquences $\omega_k = \omega_j$, du fait du déphasage $\Delta\alpha_j$ entre le forçage orbital et le forçage atmosphérique, la solution de ce système pour la surface peut être décomposée en un terme sinusoïdal et un terme cosinusoïdal, tels que

$$\gamma_{s,j} = \gamma_{s,j}^s \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \gamma_{s,j}^c \cos(\omega_j t + \alpha_j),$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_{s,j}^s = \frac{1}{C_i C_s} \frac{H_j (2K_s K_{int} + 2K_{int} K_i + K_i K_s - \omega_j^2 C_i K_s)}{(\omega_j^2 - \omega_1^2)(\omega_j^2 - \omega_2^2)} \\ + \frac{\Gamma_{A,j} \cos(\Delta\alpha_j) (2K_{int} + K_i - \omega_j^2 C_i)}{C_i C_s (\omega_j^2 - \omega_1^2)(\omega_j^2 - \omega_2^2)}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\gamma_{s,j}^c = \frac{\Gamma_{A,j} \sin(\Delta\alpha_j) (2K_{int} + K_i - \omega_j^2 C_i)}{C_i C_s (\omega_j^2 - \omega_1^2)(\omega_j^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.27)$$

On reconnaît dans l'équation (6.26) le premier terme associé à la solution de la libration pour un modèle rigide sans atmosphère (6.22). Le second terme de cette équation correspond à l'incrément de libration induite par le forçage atmosphérique. Cet incrément se décompose en fait en deux parties, un terme sinusoïdal dans $\gamma_{s,j}^s$ et un terme cosinusoïdal $\gamma_{s,j}^c$, du fait de l'écart de phase avec le forçage gravitationnel. Le déphasage est caractérisé par l'écart angulaire $\Delta\alpha_j$. Si les forçages gravitationnel et atmosphérique sont en phase, alors $\Delta\alpha_j = 0$ et la solution est purement sinusoïdale. En revanche, pour $\Delta\alpha_j \neq 0$, la réponse librationnelle au couplage atmosphérique est déphasée par rapport à la réponse au couplage gravitationnel. Cet écart de phase apparaît avec le terme en cosinus $\gamma_{s,j}^c$. Ainsi la solution rigide sera perturbée lorsque l'atmosphère sera prise en compte, de manière d'autant plus importante que la magnitude du forçage $\Gamma_{A,j}$ est grande et que l'écart de phase $\Delta\alpha_j$ est grand.

Si le forçage orbital s'effectue à une fréquence $\omega_k \neq \omega_j$, la solution de la libration forcée devient (Van Hoolst et al., 2009)

$$\gamma_{s,k} = \frac{1}{C_i C_s} \frac{\Gamma_A (2K_{int} + K_i - \omega_k^2 C_i)}{(\omega_k^2 - \omega_1^2)(\omega_k^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.28)$$

L'influence de l'atmosphère de Titan sera décrite dans la section 6.1.3.4.

6.1.2 Analyse des solutions

Pour analyser le comportement dynamique de la surface du satellite, on introduit la fonction de transfert $F(\omega_j)$ telle que $\gamma_j = F(\omega_j)H_j$. La fonction de transfert quantifie ainsi la réponse librationnelle γ_j au forçage de magnitude H_j . Cette fonction permet de déterminer les valeurs de la fréquence de forçage ω_j auxquelles la réponse sera maximale. Nous avons tracé cette fonction pour deux modèles différents, l'un contenant un océan (CA10) et l'autre entièrement solide (F3) (Fig. 6.1). Les solutions de la libration rigide (6.22)-(6.23) peuvent être séparées en trois catégories selon la valeur de la fréquence de forçage par rapport aux fréquences propres ; le premier est un régime basse-fréquence où les fréquences sont inférieures aux fréquences propres et où la fonction de transfert est proche de 1, à gauche de la figure. Dans cette configuration, la réponse librationnelle du corps est de l'ordre de grandeur de la magnitude du forçage. Le second régime à droite de la figure est un régime haute-fréquence où les fréquences sont supérieures aux fréquences propres et où $F(\omega_j) \sim 0$, la réponse librationnelle est fortement réduite. Enfin au centre de la figure, un régime résonant apparaît pour des fréquences de forçage proches des fréquences propres du système. Ces fréquences provoquent de petits diviseurs dans la solution (6.22) et sont à l'origine des pics d'amplitudes de la figure 6.1.

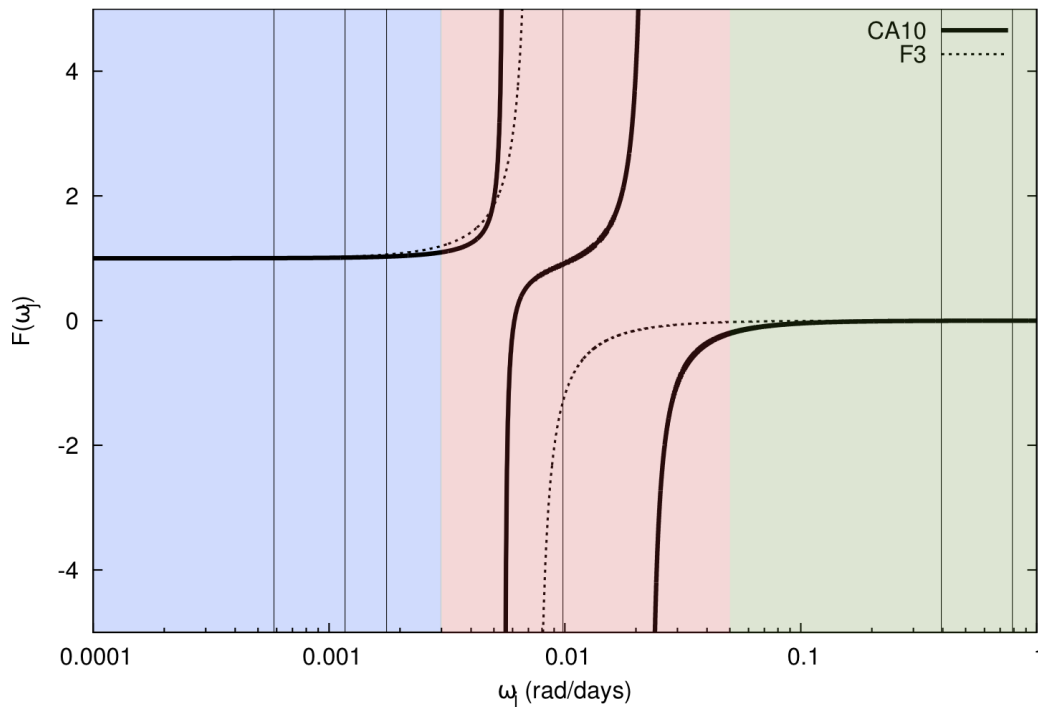


FIGURE 6.1: Fonction de transfert F du modèle F3 et de la couche de glace du modèle CA10 en fonction de la fréquence de forçage ω_j . Les lignes verticales indiquent la position des fréquences du couple gravitationnel obtenues dans l'analyse en fréquence du mouvement orbital de Titan (*c.f.* section 5). La zone bleue correspond au régime basse-fréquence, la zone verte au régime haute-fréquence, et la zone rouge au régime résonant.

Dans le modèle à trois couches, K_s/C_s est 10 à 20 fois supérieur à K_i/C_i et K_{int}/C_i pour les différents modèles de structure interne sélectionnés (*c.f.* Table 6.1). Cet écart s'explique d'une part par la faible inertie de la couche fine de glace comparée à celle du noyau massif, et d'autre part par la valeur de l'amplitude du couple gravitationnel exercé par Saturne plus importante

TABLE 6.1: Amplitudes des couplages gravitationnels et moments d'inertie des couches rigide pour les différents modèles de Titan utilisés (*c.f.* Table 4.3).

	Modèles					
	F1	F2	F3	CA10	MC11	FE10
K_s (jours ⁻²)	1.18804 10 ⁻⁵	1.43147 10 ⁻⁵	-	1.45903 10 ⁻⁵	1.44599 10 ⁻⁵	1.33724 10 ⁻⁵
K_i (jours ⁻²)	6.71859 10 ⁻⁶	4.24736 10 ⁻⁶	-	3.80503 10 ⁻⁶	3.63764 10 ⁻⁶	4.14645 10 ⁻⁶
K (jours ⁻²)	-	-	1.85474 10 ⁻⁵	-	-	-
K_{int} (jours ⁻²)	2.20065 10 ⁻⁶	1.73379 10 ⁻⁶	-	1.58866 10 ⁻⁶	1.50483 10 ⁻⁶	1.57053 10 ⁻⁶
C_s (MR^2)	3.57407 10 ⁻²	3.57407 10 ⁻²	-	3.58136 10 ⁻²	3.58137 10 ⁻²	3.58136 10 ⁻⁶
C_i (MR^2)	0.23202	0.21330	-	0.20951	0.20729	0.20969
C (MR^2)	0.34143	0.34126	0.34126	0.34016	0.33779	0.33362

sur la coquille que sur le noyau, du fait de la forme plus allongée de la première. On peut simplifier les fréquences propres au premier ordre en $\omega_i^2 = K_i/C_i$ et K_{int}/C_i

$$\omega_1^2 \sim \omega_s^2 + \mu^2, \quad (6.29)$$

$$\omega_2^2 \sim \omega_i^2 \left(\frac{\omega_s^2 + 2\frac{K_{int}}{C_s}}{\omega_s^2 + \mu^2} \right) + 2\frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 + \mu^2} \frac{K_{int}}{C_i}. \quad (6.30)$$

Pour un forçage basse-fréquence où $\omega_j^2 \ll \omega_i^2, K_{int}/C_i$, la fonction de transfert tend vers

$$F(\omega_j) \sim \frac{2\omega_s^2 \frac{K_{int}}{C_i} + 2\omega_i^2 \frac{K_{int}}{C_s} + \omega_i^2 \omega_s^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}.$$

En utilisant les relations (6.29) et (6.30), on a $F(\omega_j) \sim 1$. La réponse librationnelle à un forçage basse-fréquence est alors indépendante de la structure interne du corps, et l'amplitude de libration est proche de celle de la perturbation. Dans ce cas, la libration du corps suit le forçage orbital exercé par la planète et l'inertie a un effet secondaire. Ce cas correspond à la partie bleue de la figure 6.1.

Dans le cas d'un forçage haute fréquence, où $\omega_j^2 \gg \omega_i^2, K_{int}/C_i$, la fonction de transfert peut être approximée sous la forme

$$F(\omega_j) = -\frac{\omega_s^2}{\omega_j^2 - (\omega_s^2 + \mu^2)}. \quad (6.31)$$

Si $\omega_j^2 \gg (\omega_s^2 + \mu^2)$, la dynamique est alors dominée par la fréquence ω_s^2 , c'est-à-dire proportionnelle à la différence de moments d'inertie de la coquille ($B_s - A_s$) et son incrément dû à la pression ($B'_s - A'_s$). En utilisant la définition des moments d'inertie (2.18) et (2.19), et en posant pour un corps rigide $d_{22}(r_l) = \beta_l/6$, on a (Van Hoolst et al., 2009)

$$(B_s - A_s) + (B'_s - A'_s) = \frac{8\pi}{15} [\rho_s r_s^5 \beta_s + (\rho_o - \rho_s) r_o^5 \beta_o]. \quad (6.32)$$

De même, l'équation (2.17) donne pour $d_{20} \ll 1$ (pour les modèles sélectionnés, l'aplatissement polaire est de l'ordre de 10^{-4})

$$C_s = \frac{8\pi}{15} \rho_s (r_s^5 - r_o^5). \quad (6.33)$$

La fréquence ω_s peut alors s'écrire

$$\omega_s^2 = 3n^2 \frac{\rho_s r_s^5 \beta_s + (\rho_o - \rho_s) r_o^5 \beta_o}{\rho_s (r_s^5 - r_o^5)}. \quad (6.34)$$

En supposant que l'aplatissement varie peu entre les surfaces externe et interne de la couche de glace (la variation est d'environ 2% pour les modèles sélectionnés, voir la figure 4.9), on a $\beta_o \sim \beta_s$. En posant également $r_s = r_o + h$ où h est l'épaisseur de la couche de glace et en développant au premier ordre en h pour une couche fine, on a alors pour $h \ll r_o$

$$\omega_s^2 \sim 3n^2 \beta_s \left(\frac{\rho_o}{\rho_s} \frac{r_o}{5h} + 1 \right). \quad (6.35)$$

L'erreur faite sur la valeur de ω_s^2 de nos modèles avec cette approximation est de l'ordre de 8%, mais peut être réduite à environ 1% en poursuivant le développement à l'ordre 2 en h . Cependant, dans notre cas, le premier ordre suffit pour décrire le comportement dynamique. Cette relation montre que la dynamique du système à haute fréquence ω_j , proportionnelle à ω_s^2 , est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche de glace h . Le comportement est celui décrit dans la section précédente, où l'amplitude de libration tend vers l'infini lorsque l'épaisseur h tend vers zéro (Rambaux et al., 2011a). Mais on remarque également que le comportement dépend du rapport des densités ρ_o/ρ_s de l'océan et de la couche de glace. Plus le saut de densité est grand, et plus la réponse librationnelle de la surface sera importante. Si, de plus, ω_j^2 est grand devant ω_s^2 , la fonction de transfert est proche de zéro et l'amplitude de libration est très faible. Pour un forçage à haute-fréquence, l'inertie du satellite domine le mouvement et la libration possède la signature de la structure interne. Ce cas correspond à la partie verte de la figure 6.1.

Enfin, le cas résonant correspond au cas où ω_j est proche des fréquences propres ω_1 et ω_2 . Dans ce cas, le dénominateur de la solution (6.22) augmente rapidement et l'angle de libration également. Dans cette configuration, la linéarisation de l'équation de libration faites en supposant l'angle γ petit n'est plus valable. Les développements et conclusions faites ici ne s'appliquent pas au cas résonnant pour des valeurs importantes de γ . Le cas résonant se situe au centre de la figure 6.1.

6.1.3 Application aux modèles

Nous appliquons maintenant les solutions obtenues dans les sections précédentes aux modèles de structures internes sélectionnés dans la section 4.2. Les amplitudes de librations associées aux différents modèles sont données dans la table 6.2, et les fréquences propres de chaque modèle figurent dans la table 6.3. Selon la valeur de la fréquence de forçage, la libration s'effectue suivant un régime haute-fréquence, un régime basse-fréquence ou un régime résonant.

6.1.3.1 Librations basses-fréquences

On remarque dans un premier temps que les amplitudes les plus fortes sont associées aux deux fréquences les plus basses. Il s'agit ici des termes annuel (10750 jours) et semi-annuel (5376 jours) du forçage obtenus dans la section 5, avec des amplitudes de libration d'environ 470 mètres et 552 mètres respectivement. Le terme tri-annuel (3584 jours) est d'amplitude plus faible avec une libration de 72 mètres environ. Ces trois termes sont associés à un forçage

TABLE 6.2: Amplitudes de librations de la couche de glace de Titan (exprimées sous forme de déviation de l'équateur en mètres) pour différents modèles de structure interne avec une couche de glace de 100 km d'épaisseur et différentes fréquences de forçage. Les fréquences sont identifiées dans la table 5.1 et les modèles détaillés dans la table 4.3. La seconde partie de la table correspond aux librations sous l'influence combinée des couplages atmosphérique et gravitationnels, avec l'amplitude du couple atmosphérique issue du modèle TO05 de Tokano and Neubauer (2005) et la valeur récente issue du modèle CH12 de Charnay and Lebonnois (2012) à la fréquence semi-annuelle. Les amplitudes de librations inférieures à 10 mètres ne sont pas listées.

Freq. (rad/jour)	Période (jours)	Amplitudes (m)						Ident.
		F1	F2	F3	CA10	MC11	FE10	
0.394018	15.9464	-319.036	-384.527	-52.032	-391.131	-387.614	-358.397	$L_6 - \varpi_6$
0.001169	5376.6317	552.772	552.309	560.119	552.265	552.284	552.478	$2L_s$
0.000584	10750.4115	470.287	470.183	471.838	470.171	470.174	470.217	L_s
0.001753	3584.9304	72.120	72.000	74.306	71.994	72.002	72.054	$3L_s$
0.009810	640.4878	11.868	16.118	-24.275	16.956	17.351	16.721	-
Libration avec forçage atmosphérique								
0.001169	5376.6317	517.761	515.967	523.095	515.887	515.995	516.814	Tokano 05
0.001169	5376.6317	548.164	548.107	556.305	548.084	548.055	548.028	Charnay 12

basse-fréquence. Comme nous l'avons décrit dans la section précédente, le régime de libration basse-fréquence est indépendant de la structure interne au premier ordre, ce qui explique la faible variation d'amplitude entre les différents modèles à ces fréquences. En effet, la fonction de transfert étant proche de l'unité, la réponse librationnelle est de l'ordre de la magnitude de la perturbation. La table 5.1 donne une magnitude de 43.7313 arcsecondes pour le terme de fréquence semi-annuelle et de 37.5508 arcsecondes pour le terme de fréquence annuelle, soit 546 mètres et 468 mètres environ lorsque l'on projette cet angle sur l'équateur. L'écart plus important avec le modèle sans océan F3 peut être expliqué par la valeur de la fréquence propre du modèle et interprété comme une signature du second ordre de la structure interne.

Les librations basses-fréquences sont dominantes dans le mouvement de libration (Fig. 6.2), elles constituent les variations les plus importantes. Sur la période d'observation de la mission *Cassini* (de 2004 à aujourd'hui), la libration de l'équateur de Titan est de l'ordre de 2 kilomètres. Cette valeur est au-dessus de la précision des observations radars, allant de 300 mètres à 1 kilomètre selon l'orientation de la sonde, et doit être prise en compte dans l'ajustement du modèle de rotation (Meriggiola, 2012).

6.1.3.2 Librations hautes-fréquences

Le terme haute-fréquence de la table 6.2 possède également une amplitude importante, de l'ordre de 380 mètres pour certains modèles. Il s'agit ici de la réponse librationnelle au forçage à la fréquence orbitale n , dont l'amplitude est égale à $2e$, où e est l'excentricité, et domine la décomposition de l'orbite donnée dans la table 5.1. Dans la section précédente, nous avons vu que la fonction de transfert à haute-fréquence est proche de zéro, la libration est donc bien plus faible que l'amplitude du forçage dans ce cas. L'amplitude du terme de fréquence

TABLE 6.3: Fréquences propres des différents modèles d'intérieur sélectionnés pour cette étude et détaillés dans la table 4.3.

	ω_1 (rad jour ⁻¹)	ω_2 (rad jour ⁻¹)	ω_f (rad jour ⁻¹)
F1	2.1476 10 ⁻²	6.5018 10 ⁻³	-
F2	2.2381 10 ⁻²	5.7250 10 ⁻³	-
F3	-	-	7.3722 10 ⁻³
CA10	2.2338 10 ⁻²	5.5170 10 ⁻³	-
MC11	2.2146 10 ⁻²	5.4227 10 ⁻³	-
FE10	2.1544 10 ⁻²	5.6297 10 ⁻³	-

orbitale étant cependant très élevée (égale à $2e$, soit environ 150 km lorsque l'on projette l'angle sur l'équateur), la libration à la fréquence n a malgré tout une amplitude importante. On note également une variation de cette amplitude selon les modèles de structure interne, avec des écarts d'environ 18% entre les modèles avec un océan interne, et d'environ 87% avec le modèle sans océan. La signature de l'océan est très claire à cette fréquence, avec une différence d'amplitude de l'ordre de 340 mètres.

Les variations entre les différents modèles océaniques peuvent être attribuées aux variations de la fréquence ω_s dans l'expression (6.31). Nous avons déterminé l'expression approchée de ω_s (6.35) dans le cas d'une couche de glace mince. Cette approximation montre ainsi que l'amplitude de libration à haute-fréquence est proportionnelle au saut de densité entre la couche de glace et l'océan. Ainsi, les modèles avec un océan plus dense ont une libration plus importante, ce qui apparaît clairement en comparant l'amplitude du modèles F1 de -319.036 mètres ($\rho_o/\rho_s = 1.099$) et celle du modèle F2 avec -384.527 mètres ($\rho_o/\rho_s = 1.376$), soit une variation de 65 mètres correspondant à $\sim 17\%$ d'écart pour une variation de $\sim 20\%$ dans les sauts de densités.

Le modèle entièrement solide F3 a une libration d'environ 52 mètres à la fréquence orbitale, 87% plus faible que les modèles avec océan. Cette amplitude est attribuée à la faible valeur de la fréquence propre ω_f qui détermine le comportement de la solution rigide (6.5). En effet, le moment d'inertie C du corps solide est plus important que le moment C_s associé à la couche de glace, et les fréquences propres inversement proportionnelles à ces moments caractérisent la réponse librationnelle.

On remarque un signe négatif sur l'amplitude des librations à la fréquence orbitale. Ce signe négatif provient de la valeur importante de $\omega_j^2 C_i$ devant $K_s + 2K_{int}$ dans la solution 6.22. L'inertie domine le couplage. En revanche, les librations de basses-fréquences sont dominées par le couplage. De la même façon pour la libration à 640 jours, le modèle F3 a une amplitude négative liée à la différence $(\omega_f^2 - \omega_j^2)$ entre la fréquence propre ω_f du modèle et la fréquence ω_j de forçage.

Les librations hautes-fréquences sont visibles sur la figure 6.2 dans l'épaisseur de la courbe. Elles constituent une cible plus difficile à observer, leur amplitude étant dans le cas rigide à la limite de la précision des observations, mais elles contiennent l'information sur la structure interne et notamment la présence et la densité de l'océan. Nous mettons ici l'accent sur l'hypothèse de rigidité des couches solides dans le cadre de laquelle ces conclusions sont valables. Comme nous le verrons dans la section 6.2, la prise en compte de l'élasticité modifie significativement le comportement du satellite.

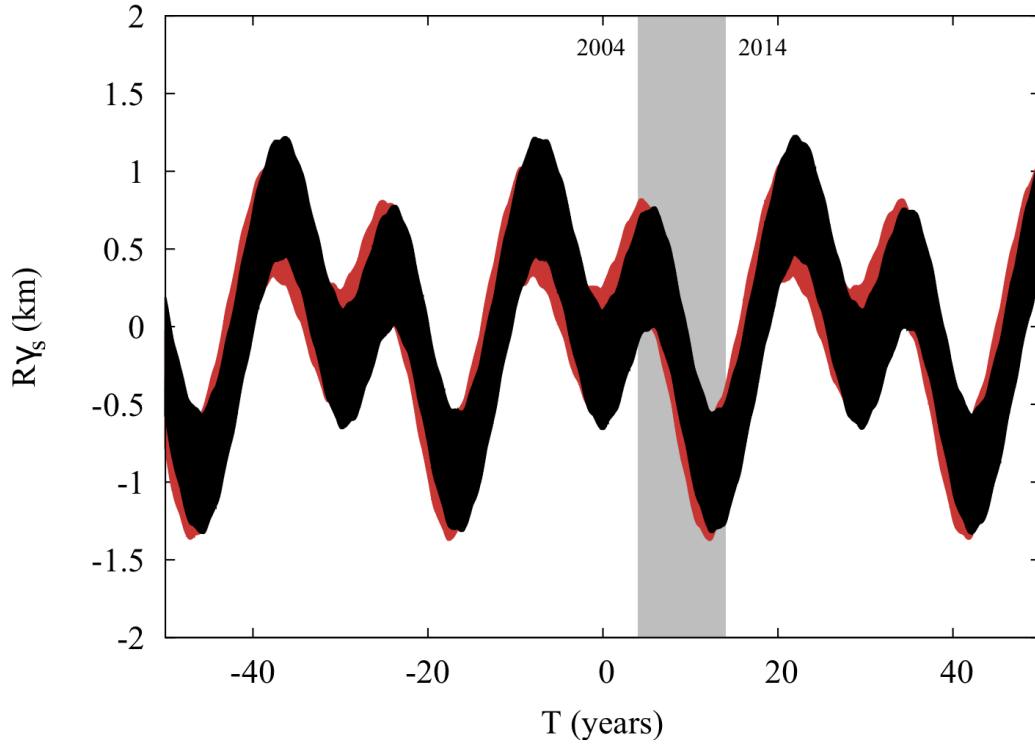


FIGURE 6.2: Angle de libration de la couche de glace rigide du modèle CA10 avec un océan interne projeté sur l'équateur (déviation en kilomètres). La courbe noire ne fait intervenir que les couples gravitationnels tandis que la courbe rouge inclut le couple atmosphérique TO05 de Tokano and Neubauer (2005). La zone grisée correspond à la période d'exploration de la sonde *Cassini*. La date initiale est J2000.

6.1.3.3 Librations intermédiaires

La fréquence de forçage de 0.00981 rad/jour se situe entre les deux fréquences propres des modèles avec océan. Dans ce régime résonant, aucune approximation analytique n'est possible et le comportement des modèles dépend très fortement de la proximité de la fréquence de forçage avec l'une ou l'autre des fréquences propres. Pour le modèle sans océan, la fréquence propre est encore plus proche, et la faible magnitude de la perturbation est amplifiée d'environ 30% donnant une libration de 24 mètres.

6.1.3.4 Influence de l'atmosphère

Les deux dernières lignes de la table 6.2 donnent les amplitudes de libration à la fréquence semi-annuelle de Saturne lorsque le couplage atmosphérique est pris en compte. Le couple atmosphérique induit un terme supplémentaire dans la fonction de transfert (*c.f.* (6.26)). A basse fréquence, on a notamment pour la partie sinusoïdale de la solution

$$\gamma_{s,j}^s \sim H_j \left(1 + \frac{\Gamma_{A,j}}{K_s H_j} \cos(\Delta\alpha_j) \left(1 - \frac{2K_{int}K_i}{2K_{int}(K_s + K_i) + K_iK_s} \right) \right). \quad (6.36)$$

Ce terme est proportionnel au rapport $\Gamma_{A,j}/K_s$ entre l'amplitude du couple atmosphérique et celle du couple gravitationnel. La valeur maximale de $\Gamma_{A,j}$ est obtenue à la période semi-annuelle de Saturne avec une amplitude de $1.6 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ pour le modèle TO05 (*c.f.* fig. (4.10)),

Tokano and Neubauer (2005)). L'analyse en fréquence de l'orbite effectuée dans le chapitre 5 donne une magnitude de perturbation orbitale H_j à la fréquence semi-annuelle de $2.1 \cdot 10^{-4}$ radians, et l'amplitude du couple gravitationnel K_s vaut $1.7 \cdot 10^{21} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ pour le modèle CA10. Le rapport des deux amplitudes vaut $\frac{\Gamma_{A,j}}{H_j K_s} \sim 0.4$. La contribution de l'atmosphère à la fonction de transfert est donc pondérée par un facteur $0.4 \cos(\Delta\alpha_j)$ lorsque le déphasage est pris en compte. Avec le couple atmosphérique issu du modèle TO05 décrit par Karatekin et al. (2008), on obtient $\Delta\alpha_j = -1.94$ rad à J2000. La différence d'amplitude avec la réponse au couplage gravitationnel seul est de l'ordre de 14%, et un ordre de grandeur en dessous lorsque l'on utilise le couple atmosphérique issu du modèle CH12 ($\Gamma_{A,j} = 2.0 \cdot 10^{16} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ et $\Delta\alpha_j = -1.75$ rad).

L'amplitude du modèle avec océan CA10 passe de 552.265 mètres à 515.887 mètres lorsque le couplage TO05 est pris en compte, soit une réduction de 6.6%. Cette réduction est due au déphasage de 111 degrés du couple atmosphérique, visible sur la figure 6.2 et à une amplitude de forçage atmosphérique faible devant le forçage orbital. En utilisant le couple atmosphérique issu du modèle CH12 de Charnay and Lebonnois (2012), l'amplitude diminue jusqu'à 548.084 soit 0.76% avec un déphasage de 100 degrés et une magnitude inférieure d'un ordre de grandeur à celle du couple TO05. La dépendance de la structure interne est également présente dans l'expression (6.36) à travers les amplitudes des couples gravitationnels mais leur contribution est un ordre de grandeur en dessous de 1.

6.2 Librations pour un modèle élastique

La prise en compte de l'élasticité des couches solides est motivée par l'étude de Goldreich and Mitchell (2010) qui montre que celle-ci induit un changement de comportement du satellite. La couche de glace de Titan aura tendance à se déformer sous l'influence du potentiel de marée et à ajuster sa forme au lieu de se réorienter de façon rigide. Cette déformation doit diminuer l'amplitude du forçage orbital et par conséquent l'amplitude de libration de la surface. Ce comportement a été confirmé récemment par Van Hoolst et al. (2013); Jara-Orué and Vermeersen (2014); Richard et al. (2014). Dans cette section, nous explicitons la solution analytique obtenue pour un Titan déformable et comparons les résultats avec la solution rigide obtenue précédemment.

6.2.1 Solution de la libration élastique

6.2.1.1 Cas sans océan

Dans le cas d'un modèle élastique, les moments d'inertie sont périodiques et varient avec la position du satellite sur son orbite. Les variations des moments d'inertie ont été décrites dans la section 3.2, et sont ici incluses dans les expressions des couples obtenues dans la section 3.1. En utilisant l'expression du couple gravitationnel externe (3.11) et les variations des moments d'inertie (3.57)-(3.61), on peut écrire pour un satellite sans océan au premier ordre en excentricité e et $\theta = \pi/2$

$$\Gamma_{ext,z} = \frac{3GM}{2r^3} \left[(B - A) + \frac{3}{2} \Delta I e \cos M \right] \sin^2 \theta \sin 2\phi - 3 \frac{GM}{r^3} \Delta I e \sin M \sin^2 \theta \cos 2\phi. \quad (6.37)$$

Ici les termes en ΔI décrivent le couple gravitationnel exercé par la planète sur les bourrelets périodiques dus à la redistribution de masse à l'intérieur du satellite sous l'influence des marées.

Ces variations s'annulent en moyenne sur une période orbitale, et la figure moyenne est celle d'un satellite rigide, obtenue à l'équilibre hydrostatique par l'équation de Clairaut. L'équation de la libration pour un modèle rigide sans océan (6.2) devient dans le cas élastique

$$C\ddot{\gamma} - n\frac{\Delta I}{2}(n + \dot{\gamma})e \sin M = \frac{1}{2}(K + K^p e \cos M)\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2(\nu - L - \lambda_o - \gamma) - \frac{2}{3}K^p e \sin M \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(\nu - L - \lambda_o - \gamma), \quad (6.38)$$

où l'on a posé

$$K = 3n^2(B - A), \quad (6.39)$$

$$K^p = \frac{9}{2}n^2\Delta I, \quad (6.40)$$

avec K et K^p les amplitudes du couplage gravitationnel externe exercé par la planète sur le bourrelet de marée statique (associé à la forme d'équilibre) et sur les bourrelets de marée périodiques (associés aux déformations élastiques de la surface) respectivement.

Pour résoudre cette équation, la méthode des perturbations est utilisée afin de décomposer la solution γ selon l'ordre de grandeur (*e.g.* Robutel et al. (2011)), tel que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$, où γ_1 est la solution de premier ordre. L'équation de premier ordre est résolue et les solutions sont injectées dans la solution d'ordre supérieur et ainsi de suite.

En développant au premier ordre en excentricité e la différence de la longitude vraie et de la longitude moyenne, $\nu - L - \lambda_o = 2e \sin M + \mathcal{O}(e^2)$, et également $(a/r)^3 = 1 + 3e \cos M + \mathcal{O}(e^2)$, l'équation de libration à la fréquence orbitale n pour un modèle sans océan devient au premier ordre en γ et en excentricité e

$$C\ddot{\gamma}_{1,n} + K\gamma_{1,n} = \left(2K - \frac{2}{3}K^p + n^2\frac{\Delta I}{2}\right)e \sin M, \quad (6.41)$$

où $\gamma_{1,n}$ est la réponse librationnelle de premier ordre à la fréquence de forçage n . Une expression peut également être obtenue pour les hautes-fréquences $2n$ et $3n$, mais leurs faibles amplitudes de libration ne nous intéressent pas ici. En revanche, l'équation au premier ordre en $\gamma_{1,j}$ et e pour les basses-fréquences de forçage ω_j est identique à l'équation du cas rigide présentée dans la section précédente. L'équation au second ordre s'écrit quant à elle pour la fréquence de forçage ω_j

$$C\ddot{\gamma}_{2,j} + K\gamma_{2,j} = (3K + K^p)e \cos M (H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) - \gamma_{1,j}) + n\frac{\Delta I}{2}\dot{\gamma}_{1,j}e \sin M - K^p e^2 \sin 2M, \quad (6.42)$$

où l'on a utilisé l'approximation en série de Fourier de $\nu - L - \lambda_o = \sum_j H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$.

La solution de l'équation au premier ordre et à la fréquence n (6.41) s'écrit de manière similaire au cas rigide

$$\gamma_{1,n} = \frac{2e\left(\omega_f^2 - \frac{\Delta K}{C}\right)}{\omega_f^2 - n^2}, \quad (6.43)$$

où ω_f est la fréquence propre du système définie par l'équation (6.4), et ΔK est défini comme étant

$$\Delta K = \frac{1}{2e}\left(\frac{2}{3}K^p - n^2\frac{\Delta I}{2}\right). \quad (6.44)$$

En comparant cette solution avec l'équation (6.5) obtenue dans le cas rigide, l'influence de l'élasticité du satellite est associée au terme $\Delta K/C$. Ce terme réduit en effet l'amplitude de la libration par rapport au modèle rigide et le rapport $\Delta K/(C\omega_f^2)$ donne le facteur de réduction de la libration.

En introduisant la solution de premier ordre à la fréquence ω_j sous la forme $\gamma_{1,j} \sin(\omega_j t + \alpha_j)$ dans l'équation de second ordre, celle-ci devient, après développement :

$$C\ddot{\gamma}_{2,j} + K\gamma_{2,j} = \left(\frac{H_j e}{2} - \frac{\gamma_{1,j}}{2} \right) (3K + K^p) (\sin(M + \omega_j t + \alpha_j) - \sin(M - \omega_j t - \alpha_j)) \\ + \omega_j n \frac{\Delta I}{4} \gamma_{1,j} e (\sin(M + \omega_j t + \alpha_j) + \sin(M - \omega_j t - \alpha_j)). \quad (6.45)$$

On cherche alors la solution sous la forme

$$\gamma_{2,j} = \gamma_{2,(n-\omega_j)} \sin(M - \omega_j t - \alpha_j) + \gamma_{2,(n+\omega_j)} \sin(M + \omega_j t + \alpha_j),$$

de sorte que l'on a les solutions

$$\gamma_{2,(n-\omega_j)} = \frac{e}{2C} \frac{H_j(3K + K^p) - \gamma_{1,j} \left(3K + K^p + n\omega_j \frac{\Delta I}{2} \right)}{(n - \omega_j)^2 - \omega_f^2}, \quad (6.46)$$

$$\gamma_{2,(n+\omega_j)} = \frac{e}{2C} \frac{-H_j(3K + K^p) + \gamma_{1,j} \left(3K + K^p - n\omega_j \frac{\Delta I}{2} \right)}{(n + \omega_f)^2 - \omega_f^2}, \quad (6.47)$$

où $\gamma_{1,j}$ est la solution de premier ordre à la fréquence de forçage ω_j .

6.2.1.2 Limite fluide

Dans le cas d'un satellite entièrement fluide, la forme doit être symétrique à tout instant autour de l'axe satellite/planète. Dans ce cas, le couple gravitationnel externe est nul. Nous vérifions ici le comportement du couple externe lorsque la rhéologie du corps tend vers celle du fluide. A la fréquence orbitale, le couple externe s'écrit

$$\Gamma_{ext,z} = (6n^2(B - A) - 3n^2 \Delta I) e \sin M,$$

avec par définition (c.f. section 3.2)

$$\Delta I = \frac{8\pi}{15} \rho \Delta d(R) R, \\ \Delta d(R) = 3 \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{R}{a} \right)^3 h_2.$$

De la même façon, on peut écrire en utilisant les relations (2.18) et (2.19)

$$(B - A) = \frac{16\pi}{5} \rho \bar{d}_{2,2}(R) R^5, \\ \bar{d}_{2,2}(R) = -\frac{GM_s}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \frac{q_t}{12} \frac{h_f}{Rg} = \frac{1}{4} \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{a}{r} \right)^3 h_f.$$

Ici, nous avons utilisé le nombre de Love fluide h_f pour décrire la déformation statique du corps (Love, 1911).

L'amplitude du couple externe s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned}\Gamma_{ext,z} &= \left(\frac{96\pi}{5} n^2 \bar{d}_{2,2}(R) \rho R^5 - \frac{24\pi}{15} n^2 \Delta d(R) \rho R^5 \right) e \sin M, \\ &= \left(\frac{24\pi}{5} n^2 e \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \rho R^5 h_f - \frac{24\pi}{5} n^2 e \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \rho R^5 h_2 \right) e \sin M.\end{aligned}$$

Remarquons que le couplage gravitationnel externe est nul lorsque $h_2 = h_f$, c'est-à-dire lorsque le satellite se comporte comme un corps fluide. Dans le cas parfaitement rigide, $h_2 = 0$ et le couplage externe est dû à l'attraction de la planète sur la forme statique du corps rigide déterminé dans la section précédente.

6.2.1.3 Cas avec océan

Dans le cas d'un modèle avec océan, l'influence du couple gravitationnel interne et du couple de pression sur les bourrelets périodiques et statiques doivent être pris en compte. L'expression du couple gravitationnel externe pour une couche l est identique à l'expression (6.37) en remplaçant les moments d'inertie $(B - A)$ et ΔI par leur valeur pour la couche $(B_l - A_l)$ et ΔI_l . De la même façon, le couple gravitationnel interne (3.16) devient au premier ordre en $\tilde{d}_{i,j}$, $e_{2,2}$ et ΔI_i

$$\begin{aligned}\Gamma_{int,z}^i &= -\frac{24\pi G}{5} \left[(B_i - A_i) \sin 2\phi_{is} \right. \\ &\quad - \left. \left(\frac{3}{2} \Delta I_i e \cos M + 2 \Delta I_i e \sin M \right) \cos 2\phi_{is} \right] \int_s \rho(r'_o) \frac{\partial(\bar{d}_{2,2}(r'_o))}{\partial r'_o} dr'_o \\ &\quad - \frac{6\pi G}{5} (B_i - A_i) e \cos M \sin 2\phi_{is} \int_s \rho(r'_o) \frac{\partial \Delta d(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o \\ &\quad + \frac{8\pi G}{5} (B_i - A_i) e \sin M \cos 2\phi_{is} \int_s \rho(r'_o) \frac{\partial \Delta d(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o. \quad (6.48)\end{aligned}$$

Le premier terme de l'expression correspond à l'attraction entre le bourrelet statique de la coquille de glace et le noyau. Dans ce terme, la différence d'inertie $(B_i - A_i)$ décrit le bourrelet statique de marée radiale du noyau, dans le terme suivant les ΔI_i décrivent les bourrelets périodiques de marée radiale et librationnelle du noyau. Les deux termes finaux correspondent à l'attraction des bourrelets périodiques de marée radiale et librationnelle de la coquille sur le bourrelet statique du noyau. Cette expression du couple interne ne fait intervenir que les interactions entre les bourrelets statiques de la graine et de la couche de glace, ainsi que les interactions entre le bourrelet statique de l'un et le bourrelet périodique de l'autre. Toutes les interactions entre les bourrelets périodiques sont négligées car elles sont d'ordre inférieur.

En utilisant ces relations et en introduisant le couple de pression décrit dans la section 3.1.3, les équations de la libration pour un corps à 3 couches élastiques s'écrivent

$$\begin{aligned}C_s \ddot{\gamma}_s - n \frac{\Delta I_s}{2} (n + \dot{\gamma}_s) e \sin M &= \frac{1}{2} (K_s + K_s^p e \cos M) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin 2(\nu - L - \lambda_{o,s} - \gamma_s) \\ &\quad - \frac{2}{3} K_s^p e \sin M \left(\frac{a}{r} \right)^3 \cos 2(\nu - L - \lambda_{o,s} - \gamma_s) + \left(K_{int} + \left(\frac{3}{2} K_{int}^{s/p} + \frac{1}{4} K_{int}^{p/s} \right) e \cos M \right) \sin 2\phi_{is} \\ &\quad + \left(2 K_{int}^{s/p} - \frac{1}{3} K_{int}^{p/s} \right) e \sin M \cos 2\phi_{is}, \quad (6.49)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_i \ddot{\gamma}_i - n \frac{\Delta I_i}{2} (n + \dot{\gamma}_i) e \sin M &= \frac{1}{2} (K_i + K_i^p e \cos M) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2(\nu - L - \lambda_{o,i} - \gamma_i) \\
- \frac{2}{3} K_i^p e \sin M \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(\nu - L - \lambda_{o,i} - \gamma_i) &- \left(K_{int} + \left(\frac{3}{2} K_{int}^{s/p} + \frac{1}{4} K_{int}^{p/s}\right) e \cos M \right) \sin 2\phi_{is} \\
&- \left(2K_{int}^{s/p} - \frac{1}{3} K_{int}^{p/s} \right) e \sin M \cos 2\phi_{is}, \quad (6.50)
\end{aligned}$$

où l'on a posé les amplitudes des couples

$$K_s^p = \frac{9}{2} n^2 (\Delta I_s + \Delta I'_s), \quad (6.51)$$

$$K_i^p = \frac{9}{2} n^2 (\Delta I_i - \Delta I'_i), \quad (6.52)$$

$$K_{int}^{p/s} = \frac{24\pi G}{5} [(\rho_o - \rho_s) \Delta d(r_o) + \rho_s \Delta d(r_s)] [(B_i - A_i) - (B'_i - A'_i)], \quad (6.53)$$

$$K_{int}^{s/p} = \frac{24\pi G}{5} [(\rho_o - \rho_s) \bar{d}_{2,2}(r_o) + \rho_s \bar{d}_{2,2}(r_s)] (\Delta I_i - \Delta I'_i), \quad (6.54)$$

avec $\Delta I'_i$ et $\Delta I'_s$ les contributions du couple de pression sur le bourrelet périodique de la graine et de la coquille de glace respectivement, exprimées sous forme d'incrément d'inertie. Ici, K_s et K_i sont les amplitudes du couple gravitationnel exercé par la planète sur le bourrelet statique de la couche de glace et du noyau respectivement (Fig. 6.3(a)), K_s^p et K_i^p sont les amplitudes du couple gravitationnel externe exercé sur les bourrelets périodiques de la couche de glace et du noyau respectivement (Fig. 6.3(b)), $K_{int}^{p/s}$ correspond au couplage gravitationnel interne exercé par le bourrelet périodique de la couche de glace sur le bourrelet statique du noyau (Fig. 6.3(c)) et $K_{int}^{s/p}$ à l'interaction du bourrelet statique de la couche de glace sur le bourrelet périodique de la graine (Fig. 6.3(d)). Dans les équations (6.49) et (6.50), le second terme du membre de gauche correspond à la variation du moment d'inertie I_{33} . Ce terme est associé à la marée zonale correspondant à la variation de l'aplatissement polaire du satellite.

Les différents couples exprimés dans l'équation (6.49) sont tracés sur la figure 6.4 sur une révolution orbitale. Deux termes dominant le forçage exercé sur la coquille : le couplage gravitationnel externe exercé sur la forme statique (courbe a), et le couplage externe exercé sur le bourrelet de marée librationnel (courbe c). Ces deux termes sont en opposition de phase, ce qui suggère que le terme associé à la marée librationnelle va réduire le couple total exercé sur la forme statique. Les termes de forçage qui ne sont pas tracés sur la figure 6.4 ont une amplitude inférieure à 10^{-10} jours⁻². On note également que les forçages dus au terme de marée zonale (courbe e) et au terme de couplage interne (courbe d) sont d'un ordre de grandeur inférieur mais également d'amplitudes similaires avec une opposition de phase. Leur contribution au couple total sera faible. Le terme associé à la marée radiale (courbe b) est d'un ordre de grandeur inférieur au couplage exercé sur la forme statique.

Remarquons également que dans les équations (6.49)-(6.50), le développement au second ordre en excentricité du terme $K_i^p e \cos M (a/r)^3 (\nu - L - \lambda_{o,i})$ annule le terme de second ordre du développement de $-2/3 K_s^p e \sin M (a/r)^3$. Ceci indique qu'à l'ordre 2 en e , le terme de marée radiale disparaît et seule persiste la contribution de la marée librationnelle.

6.2.1.4 Résolution du système

En utilisant de nouveau la méthode des perturbations, le système d'équations (6.49)-(6.50) peut être décomposé selon l'ordre de grandeur de la solution en posant $\gamma_l = \gamma_{1,l} + \gamma_{2,l} + \dots$ où

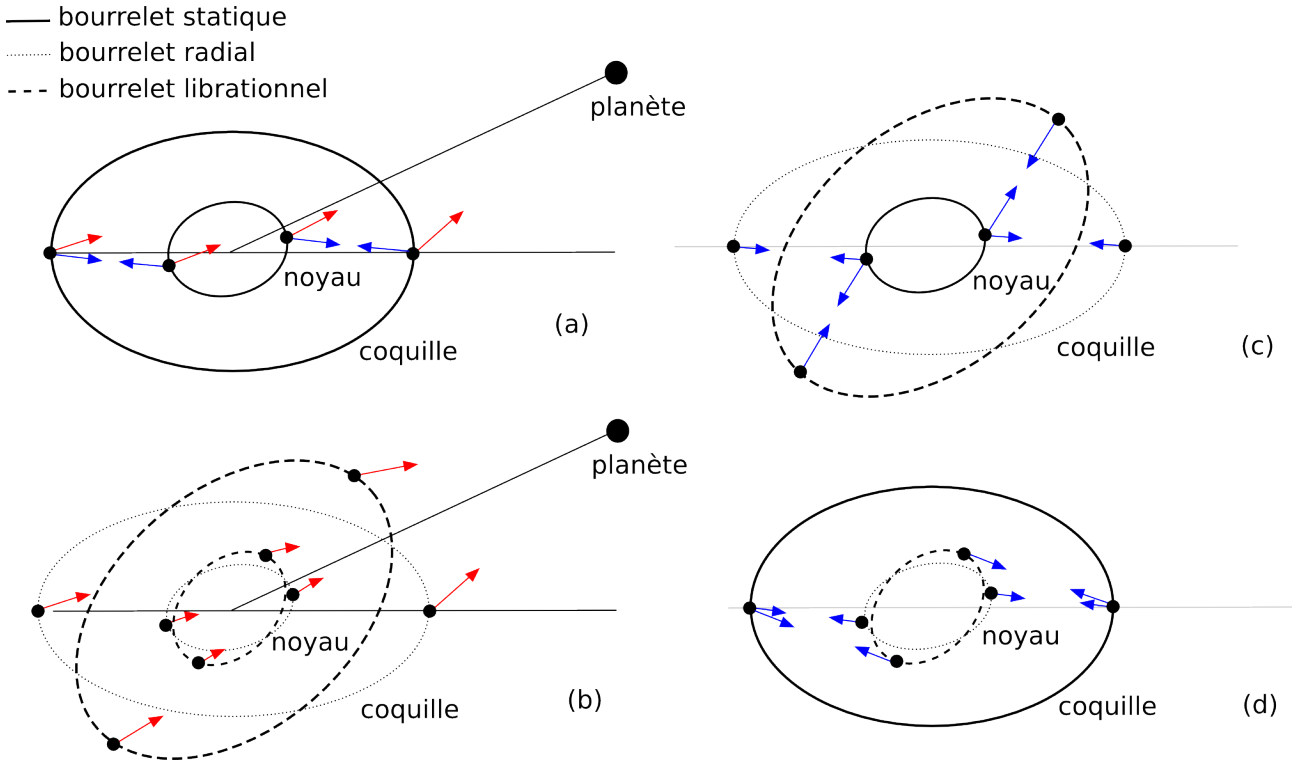


FIGURE 6.3: Représentation schématique des différentes forces agissant sur les bourrelets de marée de la coquille de glace et du noyau en supposant l'anomalie moyenne M du satellite faible et positive. L'angle avec la direction de la planète ainsi que l'amplitude des bourrelets de marée radiale et librationnelle ont été exagérés. Les flèches rouges représentent la force gravitationnelle exercée par la planète et les flèches bleues symbolisent la force gravitationnelle interne exercée entre les couches solides. (a) Les bourrelets statiques sont attirés par la planète et s'attirent également entre eux du fait de leur déphasage. (b) La planète exerce une force gravitationnelle sur les bourrelets radial et librationnel. Les couples résultants de la contribution radiale et librationnelle sont opposés. La force gravitationnelle interne agit également entre les bourrelets radiaux et le bourrelet librationnel du noyau (c) et de la couche de glace (d). L'interaction gravitationnelle entre les bourrelets périodiques n'est pas représentée.

$\gamma_{1,l}$ est la solution au premier ordre en γ_l et excentricité e , de sorte qu'à la fréquence orbitale n

$$C_s \ddot{\gamma}_{1,s,n} + K_s \gamma_{1,s,n} + 2K_{int}(\gamma_{1,s,n} - \gamma_{1,i,n}) = \left(2K_s - \frac{2}{3}K_s^p + 2K_{int}^{s/p} - \frac{1}{3}K_{int}^{p/s} + n^2 \frac{\Delta I_s}{2} \right) e \sin M, \quad (6.55)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_{1,i,n} + K_i \gamma_{1,i,n} - 2K_{int}(\gamma_{1,s,n} - \gamma_{1,i,n}) = \left(2K_i - \frac{2}{3}K_i^p - 2K_{int}^{s/p} + \frac{1}{3}K_{int}^{p/s} + n^2 \frac{\Delta I_i}{2} \right) e \sin M. \quad (6.56)$$

Ici, $\gamma_{1,l,n}$ désigne la réponse librationnelle de la couche l à la fréquence de forçage n . Dans le cas d'un forçage basse-fréquence, le système au premier ordre devient identique au cas rigide développé précédemment

$$C_s \ddot{\gamma}_{1,s,j} + K_s \gamma_{1,s,j} + 2K_{int}(\gamma_{1,s,j} - \gamma_{1,i,j}) = K_s H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad (6.57)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_{1,i,j} + K_i \gamma_{1,i,j} - 2K_{int}(\gamma_{1,s,j} - \gamma_{1,i,j}) = K_i H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j), \quad (6.58)$$

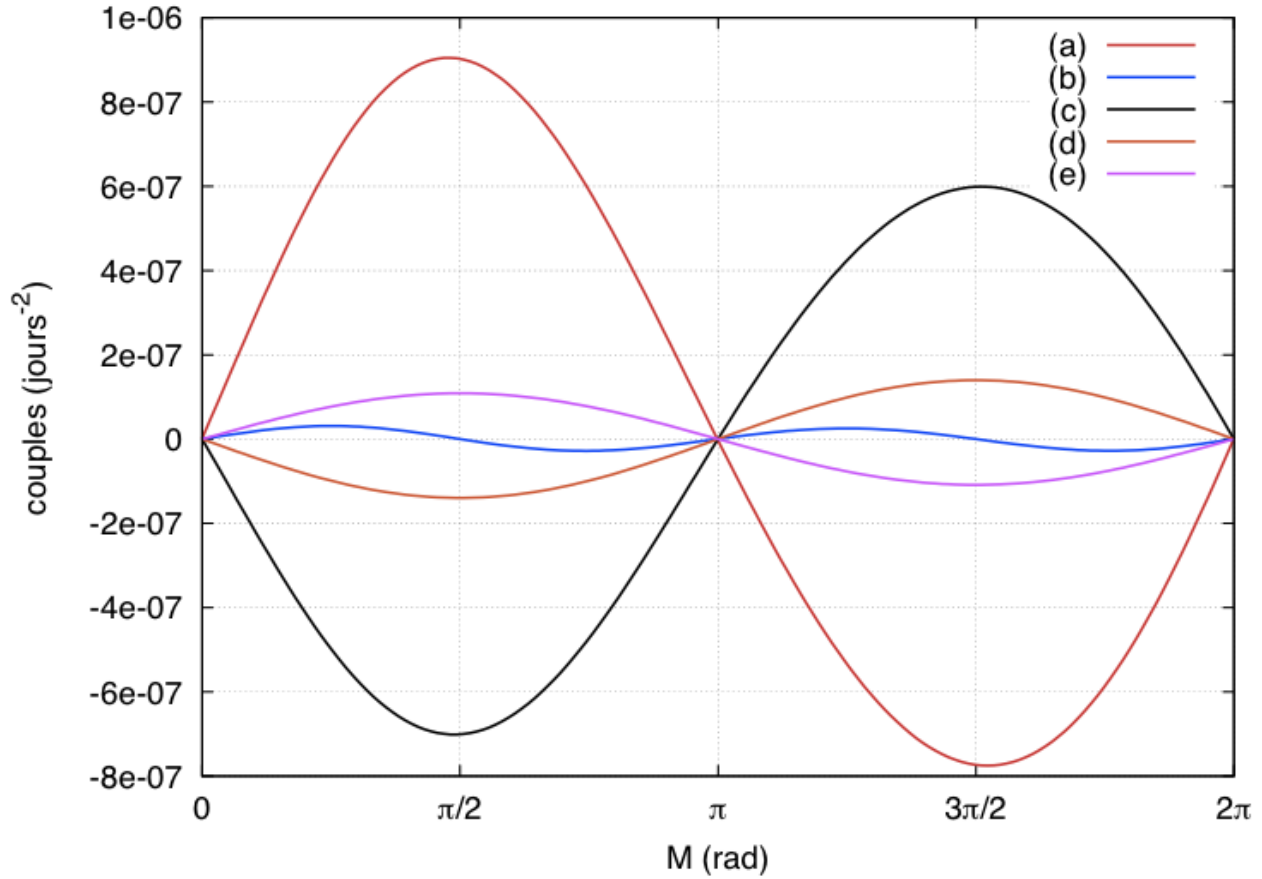


FIGURE 6.4: Evolution des couples exercés sur la coquille de glace au cours d'une révolution orbitale pour le modèle CA10. Nous avons ici tracé les termes suivants : (a) : $1/2K_s(a/r)^3 \sin 2(\nu - L - \gamma_s)$, (b) : $1/2K_s^p e \cos(M)(a/r)^3 \sin 2(\nu - L - \gamma_s)$, (c) : $-2/3K_s^p e \sin(M)(a/r)^3 \cos 2(\nu - L - \gamma_s)$, (d) : $(2K_{int}^{p/s} - 1/3K_{int}^{s/p})e \sin(M) \cos 2(\phi_{is})$ et (e) : $n^2 \Delta I_s / 2e \sin(M)$.

où $\gamma_{1,l,j}$ désigne la réponse librationnelle à la fréquence ω_j . Les termes d'ordre 2 en excentricité sont rejetés dans le système d'équations suivant

$$C_s \ddot{\gamma}_{2,s} + K_s \gamma_{2,s} + 2K_{int}(\gamma_{2,s} - \gamma_{2,i}) = (K_s^p + 3K_s)e \cos M \left(\sum_{j=1}^{\infty} H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) - \gamma_{1,s} \right) + n \frac{\Delta I_s}{2} \dot{\gamma}_{1,s} e \sin M + \left(3K_{int}^{s/p} + \frac{1}{2}K_{int}^{p/s} \right) e \cos M (\gamma_{1,i} - \gamma_{1,s}), \quad (6.59)$$

$$C_i \ddot{\gamma}_{2,i} + K_i \gamma_{2,i} - 2K_{int}(\gamma_{2,s} - \gamma_{2,i}) = (K_i^p + 3K_i)e \cos M \left(\sum_{j=1}^{\infty} H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) - \gamma_{1,i} \right) + n \frac{\Delta I_i}{2} \dot{\gamma}_{1,i} e \sin M - \left(3K_{int}^{s/p} + \frac{1}{2}K_{int}^{p/s} \right) e \cos M (\gamma_{1,i} - \gamma_{1,s}). \quad (6.60)$$

Le système d'équations au premier ordre est résolu analytiquement et les solutions sont injectées dans le système d'ordre supérieur.

6.2.1.5 Solutions

Le système d'équations de la libration au premier ordre et à la fréquence orbitale possède une structure identique aux équations du cas rigide. La différence réside dans la forme du forçage qui contient cette fois la contribution des bourrelets de marées périodiques. La solution des équations (6.55)-(6.56) est obtenue sous la forme $\gamma_{1,l,n} \sin M$ avec

$$\gamma_{1,s,n} = \frac{1}{C_i C_s} \frac{2e[(K_s - \Delta K_s)(K_i + 2K_{int} - n^2 C_i) + 2K_{int}(K_i - \Delta K_i)]}{(n^2 - \omega_1^2)(n^2 - \omega_2^2)}, \quad (6.61)$$

$$\gamma_{1,i,n} = \frac{1}{C_i C_s} \frac{2e[(K_i - \Delta K_i)(K_s + 2K_{int} - n^2 C_s) + 2K_{int}(K_s - \Delta K_s)]}{(n^2 - \omega_1^2)(n^2 - \omega_2^2)}, \quad (6.62)$$

où l'on a posé

$$\Delta K_s = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} K_s^p - 2K_{int}^{s/p} + \frac{1}{3} K_{int}^{p/s} - n^2 \frac{\Delta I_s}{2} \right), \quad (6.63)$$

$$\Delta K_i = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} K_i^p + 2K_{int}^{s/p} - \frac{1}{3} K_{int}^{p/s} - n^2 \frac{\Delta I_i}{2} \right). \quad (6.64)$$

ΔK_s et ΔK_i jouent ici le rôle de réduction du couplage gravitationnel exercé sur les couches solides. Ils quantifient l'écart à la solution rigide. Ils dépendent de l'amplitude des couples interne et externe sur les bourrelets périodiques. Nous posons $F_s = \Delta K_s / K_s$ et $F_i = \Delta K_i / K_i$ les taux de réductions des couples, ces coefficients déterminent ainsi le comportement de la libration lorsque l'on tient compte de l'élasticité.

La solution d'ordre 2 est décomposée sur deux fréquences de sorte que

$$\gamma_{2,l,j} = \gamma_{2,l,(n-\omega_j)} \sin(M - \omega_j t - \alpha_j) + \gamma_{2,l,(n+\omega_j)} \sin(M + \omega_j t + \alpha_j),$$

avec, par exemple pour la fréquence $n - \omega_j$,

$$\begin{aligned} \gamma_{2,s,(n-\omega_j)} = & -\frac{1}{2C_i C_s} \left[\frac{H_j e((K_i - (n - \omega_j)^2 C_i)(K_s^p + 3K_s) + 2K_{int}(K_s^p + 3K_s + K_i^p + 3K_i))}{((n - \omega_j)^2 - \omega_1^2)((n - \omega_j)^2 - \omega_2^2)} \right. \\ & + \frac{\gamma_{1,s,j} e((K_i - C_i(n - \omega_j)^2)(3K_s + K_s^p + 3K_{int}^{s/p} + \frac{1}{2} K_{int}^{p/s} + n\omega_j \frac{\Delta I_s}{2}) - 2K_{int}(3K_s + K_s^p + n\omega_j \frac{\Delta I_s}{2}))}{((n - \omega_j)^2 - \omega_1^2)((n - \omega_j)^2 - \omega_2^2)} \\ & \left. + \frac{\gamma_{1,i,j} e((K_i - (\omega_j - n)^2 C_i)(3K_{int}^{s/p} + \frac{1}{2} K_{int}^{p/s}) - 2K_{int}(3K_i + K_i^p + n\omega_j \frac{\Delta I_i}{2}))}{((n - \omega_j)^2 - \omega_1^2)((n - \omega_j)^2 - \omega_2^2)} \right]. \quad (6.65) \end{aligned}$$

Cette solution dépend de l'amplitude du forçage H_j et des solutions du premier ordre $\gamma_{1,s,j}$ et $\gamma_{1,i,j}$ pour la couche de glace et le noyau. Nous ne détaillons pas ici la solution $\gamma_{2,i,(n+\omega_j)}$ car nous ne l'utilisons pas, mais son expression peut être dérivée de la même façon que celle obtenue pour la couche de glace.

Afin de simplifier, on peut choisir $H_j \gg \gamma_{1,s,j}, \gamma_{1,l,j}$, et si $(n - \omega_j)^2 \ll \omega_1^2, \omega_2^2$, ce qui se produit pour des fréquences de forçage proches de la fréquence orbitale, alors

$$\gamma_{2,s,(n-\omega_j)} \sim -\frac{1}{2C_i C_s} \frac{H_j e(K_i(K_s^p + 3K_s) + 2K_{int}(K_s^p + 3K_s + K_i^p + 3K_i))}{\omega_1^2 \omega_2^2}. \quad (6.66)$$

Ces termes de période $(n \pm \omega_j)$ peuvent être vus comme issus de la modulation de l'amplitude du couple gravitationnel à la fréquence orbitale. Il s'agit de la combinaison des termes de fréquence n provenant de la déformation périodique et des termes de fréquences ω_j du forçage gravitationnel. Ils n'existent donc pas dans un système rigide (Richard et al., 2014).

6.2.2 Application aux modèles de Titan

6.2.2.1 Calcul des déformations

Nous appliquons maintenant les solutions obtenues aux modèles sélectionnés dans la section 4.2. Pour obtenir les expressions des variations de la forme du corps sous l'influence du potentiel de marée, la fonction $H(r)$ associée au nombre de Love h_2 en surface est déterminée. Pour cela, nous utilisons le code numérique SatStress développé par Wahr et al. (2009). Ce code intègre numériquement les équations de Alterman et al. (1959), un système de six équations différentielles qui caractérisent le comportement de la surface et du potentiel du satellite soumis à un potentiel perturbateur.

Pour les différents modèles sélectionnés dans ce manuscrit, les nombres de Love h_2 sont situés entre 1.3 et 1.5 pour les modèles avec un océan interne, et de seulement $6 \cdot 10^{-2}$ pour le modèle solide F3 (table 6.4). Plus le nombre de Love est élevé, et plus la déformation de la surface est importante. Les valeurs limites sont celles d'un corps fluide homogène et incompressible où le nombre de Love h_2 vaut $5/2$ (Love, 1909) et d'un corps homogène parfaitement rigide où $h_2 = 0$. Dans le cas d'un modèle de Titan solide et élastique, Rappaport et al. (2008) explique que les déformations de marées du satellite sont à l'origine de forces internes permettant d'équilibrer la force gravitationnelle de la planète. Les auteurs indiquent que les forces internes dans un solide sont dominées par la contrainte de cisaillement, une force de pression exercée de façon tangentielle à la surface du solide. Dans le cas d'un corps entièrement solide et élastique, seule une faible déformation est nécessaire pour que la contrainte de cisaillement équilibre la force de marée. Le nombre de Love h_2 est donc faible. Si le satellite possède en revanche un océan s'étendant jusqu'à la surface, le fluide qui ne subit pas de contrainte de cisaillement se déforme jusqu'à atteindre l'équilibre hydrostatique, ainsi la force gravitationnelle est équilibrée par la force de pression. Dans ce cas, la déformation est maximale et le nombre de Love est grand. Pour un océan piégé sous une fine couche de glace, la contrainte de cisaillement dans la glace permet d'équilibrer une partie de la force gravitationnelle de la planète. Cette couche étant cependant fine, la déformation de l'océan reste importante et le nombre de Love h_2 également.

De plus, dans les modèles avec océan, la valeur de $H(r)$ obtenue dans la couche de glace de surface est environ 40 fois plus importante qu'à la surface du noyau. La déformation radiale périodique du noyau est donc négligeable comparée à celle de la coquille de glace, de même que son bourrelet de marée librationnelle. Par conséquent, on peut négliger le terme $K_{int}^{p/s}$ correspondant à l'amplitude exercée par le bourrelet statique de marée de la coquille sur le bourrelet périodique du noyau.

6.2.2.2 Amplitudes de libration

La table 6.4 donne les amplitudes de libration en réponse au forçage orbital pour des modèles dont les couches solides sont élastiques. Comme décrit dans la section précédente, les couples gravitationnels exercés sur la couche de glace et le noyau sont réduits d'un facteur F_s et F_i respectivement. Ces facteurs quantifient la réduction de la réponse librationnelle lorsque l'élasticité est prise en compte.

Pour le modèle CA10, $F_s \sim 81\%$ et $F_i \sim -63\%$, ce qui signifie que le couple exercé sur la couche de glace est réduit d'un facteur $4/5$, tandis que le couple exercé sur le noyau est augmenté d'un facteur $2/3$. Cette opposition dans les comportements s'explique par le fait que le bourrelet librationnel de la coquille est attiré par le bourrelet statique du noyau (Fig. 6.3(c))

et par la planète (Fig. 6.3(b)), et ces forces s'opposent au mouvement du bourrelet statique de la coquille (Fig. 6.3(a)). Au contraire, le bourrelet librationnel de la coquille attire le bourrelet statique du noyau et tend à augmenter son angle de rotation (Fig. 6.3(d)). Ainsi, le modèle CA10 voit son amplitude de libration à la période orbitale passer de 319.131 mètres pour le cas rigide à 72.751 mètres pour le cas élastique, soit une réduction d'environ 81%. Il s'agit du taux de réduction F_s du couple gravitationnel exercé sur la coquille de glace obtenu d'après l'équation (6.61).

L'amplitude de la libration à la fréquence orbitale pour le modèle solide F3 passe de 52.032 mètres dans le cas rigide à 50.661 mètres pour le cas élastique, soit une réduction d'environ 2%. Ce taux de réduction peut s'expliquer par la faible déformation des couches du modèle entièrement solide, associée à la faible valeur de h_2 à la surface.

Par rapport aux librations obtenues dans le cas rigide (*c.f.* Table 6.2), deux nouvelles fréquences apparaissent dans la libration. La première correspond à une période de 99027 jours, et la seconde à une période de 5606 jours. Il s'agit là de deux termes de longues périodes provenant de la solution de second ordre de fréquence $(n - \omega_j)$ avec $\omega_j = 0.394081$ rad/jour (d'argument $L_6 - \Phi_6$) et $\omega_j = 0.392897$ rad/jour (d'argument $L_6 + \Omega_6 - 2L_s$ dû au mouvement de Saturne autour du Soleil). Ces fréquences correspondent à des termes de faible magnitude dans le forçage orbital, mais leur proximité avec la fréquence orbitale de 0.394018 rad/jour donne une solution d'ordre 2 en excentricité dont l'amplitude n'est pas négligeable. Cette condition correspond à l'équation (6.66) où l'amplitude est inversement proportionnelle aux fréquences propres du système.

Les librations obtenues par exemple à ces deux fréquences pour le modèle CA10 sont de 51.9 mètres et 29.1 mètres respectivement. Pour le modèle F3, elles sont de 31.5 mètres et 17.9 mètres, des valeurs plus petites qui sont dues à la faible déformation de ce modèle. Une différence de l'ordre de la dizaine de mètres existe donc entre la libration d'un modèle avec océan et d'un modèle solide. Ces deux termes de libration à basses fréquences contiennent l'information sur la présence d'un océan interne avec une période de l'ordre de 30 et 50 ans. En effet, ces termes proviennent de la modulation d'un terme du forçage haute-fréquence à la fréquence orbitale, par conséquent la réponse librationnelle bien que de basse-fréquence dépend de la structure interne et de l'inertie du corps.

Afin de vérifier la validité de notre solution analytique, nous la comparons avec la solution de l'intégration numérique des équations (6.49)-(6.50). L'analyse en fréquence de la solution numérique obtenue est retranscrite dans la table 6.5. La comparaison avec la solution analytique (table 6.4) montre un très bon accord entre les deux séries. Les deux termes de fréquences $n - \omega_j$, avec n la fréquence orbitale et ω_j les fréquences de perturbation dues d'une part à l'argument $L_6 - \Phi_6$ et d'autre part au mouvement de Saturne autour du Soleil, sont retrouvés. Les faibles écarts d'amplitudes entre les deux solutions peuvent être attribués à l'approximation au second ordre de la solution analytique.

La solution élastique pour le modèle CA10 est tracée en bleu sur la figure 6.5. La courbe noire correspond à la libration rigide détaillée dans la section précédente. La réduction de l'amplitude de libration à la période orbitale est nettement visible, bien que le comportement à longue période reste identique. La prise en compte du couple atmosphérique TO05 n'induit encore une fois qu'un déphasage de la courbe de libration sans modifier de façon importante l'amplitude.

Il est important de noter que l'introduction de l'élasticité amène les modèles avec et sans océan à une amplitude de libration à la fréquence orbitale du même ordre de grandeur. La

TABLE 6.4: Amplitudes analytiques de libration de la couche de glace (exprimées en terme de déviation de l'équateur en mètres) pour différents modèles de structure interne de Titan élastique avec une couche de glace de 100 kilomètres d'épaisseur et différentes fréquences de forçage. La seconde partie du tableau est la libration en réponse aux forçages atmosphérique et gravitationnel combinés, avec l'amplitude issue du modèle TO05 de Tokano and Neubauer (2005) et une valeur plus récente obtenue à partir du modèle CH12 de Charnay and Lebonnois (2012) à la fréquence semi-annuelle de Saturne. La dernière partie du tableau contient l'amplitude de libration pour les modèles avec des couches rigides (*c.f.* section 6.1), les taux de réduction d'amplitude par rapport au cas rigide F_s et les nombres de Love h_2 à la surface obtenus numériquement. Les termes d'amplitudes inférieures à 10 mètres n'apparaissent pas dans la table.

Amplitudes (m)					
Freq. (rad/jour)	Période (jours)	F1	F2	F3	Identification
0.394018	15.946441	-62.061	-86.257	-50.661	$L_6 - \phi_6$
0.001169	5376.6317	552.772	552.309	560.119	$2L_s$
0.000584	10750.4115	470.287	470.183	471.838	L_s
0.001753	3584.9304	72.120	72.000	74.306	$3L_s$
0.000063	99027.4111	47.477	50.171	31.500	$\phi_6 - \Phi_6$
0.001121	5606.2511	26.687	28.182	17.978	$2L_s - \Omega_6 - \phi_6$
0.009810	640.4878	11.868	16.118	-24.275	-
0.001169	5376.6317	517.761	515.967	523.095	Tokano 05
0.001169	5376.6317	548.164	548.107	556.305	Charnay 12
0.394018	15.9464	-319.036	-384.527	-52.032	Cas rigide
		80.40	77.50	2.47	F_s (%)
		1.32	1.44	0.06	h_2
Amplitudes (m)					
Freq. (rad/jour)	Période (jours)	CA10	MC11	FE10	Identification
0.394018	15.946441	-72.751	-76.679	-75.420	$L_6 - \varpi_6$
0.001169	5376.6317	552.265	552.284	552.478	$2L_s$
0.000584	10750.4115	470.171	470.174	470.217	L_s
0.001753	3584.9304	71.994	72.002	72.054	$3L_s$
0.000063	99027.4111	51.963	51.996	50.714	$\phi_6 - \Phi_6$
0.001121	5606.2511	29.185	29.205	28.492	$2L_s - \Omega_6 - \varpi_6$
0.009810	640.4878	16.956	17.351	16.721	-
0.001169	5376.6317	515.887	515.995	516.814	Tokano 05
0.001169	5376.6317	548.084	548.055	548.028	Charnay 12
0.394018	15.9464	-391.131	-387.614	-358.397	Cas rigide
		81.32	80.15	79.00	F_s (%)
		1.46	1.48	1.42	h_2

TABLE 6.5: Analyse en fréquence de la solution numérique pour le modèle de structure interne CA10 constitué de couches solides élastiques.

Freq. (rad/days)	Period (days)	Amplitude (m)	Phase (degree)
0.001169	5374.8365	552.182	-66.023
0.000584	10758.8791	470.257	138.483
0.394018	15.9464	74.036	-16.628
0.001753	3584.2472	72.003	250.141
0.000063	99590.2556	51.704	128.468
0.001120	5605.5072	29.068	-27.509
0.009810	640.4878	16.958	-77.290

différence entre les modèles n'est plus aussi distincte que dans le cas rigide, ce qui rend difficile la détection d'un océan par l'observation de cette libration. Une précision de l'ordre de la dizaine de mètres est nécessaire pour pouvoir détecter cette différence.

6.3 Comparaisons et études complémentaires

6.3.1 Cas rigide

Noyelles et al. (2008) ont étudié un modèle de rotation à trois dimensions de Titan, contenant les variations de la rotation selon les axes **I**, **J** et **K**. En utilisant le formalisme hamiltonien, les auteurs décrivent les états d'équilibres de la rotation de Titan considéré comme étant un corps rigide, et obtiennent le mouvement de libration du satellite autour de ces états d'équilibre. Les résultats numériques obtenus ne permettent cependant pas une comparaison directe car les auteurs n'ont pas choisi d'utiliser les conditions initiales d'intégration correspondant au centre de libration, de ce fait le mouvement est dominé par les librations libres du satellite. Le terme principal de libration forcée du papier est un terme de période 15.6612 jours et d'amplitude proche de 64 mètres. Ce terme pourrait correspondre à notre libration à la fréquence orbitale bien que sa période soit sensiblement différente de 15.94 jours, peut-être à cause des conditions initiales choisies.

Van Hoolst et al. (2009) ont déterminé les librations physiques en longitude pour différents modèles rigides de Titan contenant un océan interne. Ils ont également évalué l'impact du couplage atmosphérique issu du modèle d'atmosphère TO05, sans cependant tenir compte du forçage orbital à la même fréquence car l'orbite étudiée est képlérienne. En utilisant un modèle contenant un océan de densité 950 kg m^{-3} et une couche de glace d'environ 70 kilomètres d'épaisseur, les auteurs obtiennent une libration en longitude à la fréquence orbitale de l'ordre de $1.49 \cdot 10^{-4}$ radians, soit 383 mètres de déviation lorsque l'on projette cet angle sur l'équateur. Cette valeur est en accord avec l'ordre de grandeur de nos librations rigides à cette fréquence bien que nos modèles contiennent tous des couches de glace de 100 kilomètres et des densités de l'océan plus importantes. La diminution de l'amplitude de libration due à la faible densité de l'océan du modèle de Van Hoolst et al. (2009) est compensée par la couche de glace plus fine qui induit une augmentation de l'amplitude, donnant au final une amplitude de 383 mètres.

Van Hoolst et al. (2009) donnent également l'amplitude de la libration forcée par le couple atmosphérique seul. L'amplitude obtenue pour la libration à la fréquence semi-annuelle varie

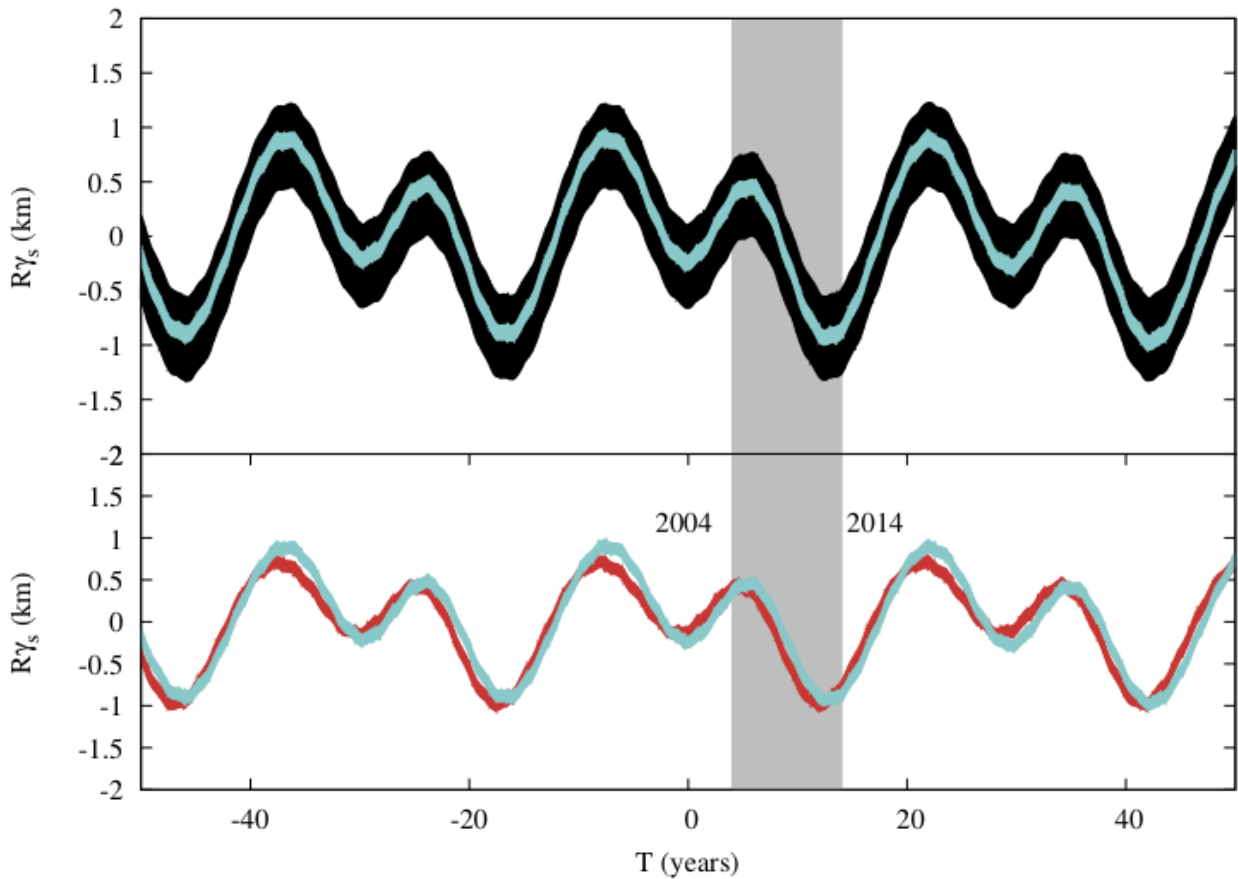


FIGURE 6.5: Déviation de l'axe principal de la couche de glace de Titan sur 100 ans pour le modèle de structure interne CA10 (*c.f.* table 4.3). La courbe noire est la libration du modèle CA10 où les couches solides sont considérées rigides, la courbe bleue est la libration du même modèle avec les couches solides supposées élastiques et la courbe rouge est la libration de la couche de glace élastique soumise à l'excitation atmosphérique de Tokano and Neubauer (2005) à la fréquence semi-annuelle de Saturne. La date initiale est J2000. La bande grise représente la période d'exploration de la mission *Cassini* jusqu'à aujourd'hui.

entre 184 mètres et 311 mètres selon le modèle. Dans le cas de notre modèle CA10, l'amplitude de la libration due au couplage atmosphérique uniquement (6.28) est de l'ordre de 244 mètres. Il faut cependant se rappeler que les perturbations orbitales à cette fréquence donnent un couple gravitationnel dont l'amplitude de $1.7 \cdot 10^{21} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ est plus importante que le couplage atmosphérique d'amplitude $1.6 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Comme nous l'avons montré dans la section 6.1.3.4, le mouvement de libration forcée à la fréquence semi-annuelle de Saturne est dominé par les perturbations orbitales.

6.3.2 Cas élastique

Goldreich and Mitchell (2010) ont étudié la dynamique d'une coquille de glace fine recouvrant un corps fluide en rotation synchrone. Les auteurs décrivent que sous l'effet du potentiel gravitationnel exercé par la planète, la réponse du satellite est régie par la combinaison de l'énergie élastique due à la déformation de la surface et de l'énergie gravitationnelle due à sa

réorientation par rotation, définies telles que

$$E_{elas} = \frac{48\pi}{5} \left(\frac{1+v}{1-v} \right) (1+k_f)^2 q_r^2 \mu d R^2 \phi^2, \quad (6.67)$$

$$E_{grav} = \frac{3}{2} k_f \frac{GM^2}{R} q_r^2 \phi^2, \quad (6.68)$$

où μ est la rigidité de la couche de glace, v est le coefficient de Poisson correspondant au rapport de l'expansion transversale du matériau sur sa compression axiale, ϕ est l'angle que forme l'axe principal de la coquille avec la direction de la planète et q_r le rapport entre l'accélération centrifuge et l'accélération gravitationnelle du satellite. La première de ces énergies, l'énergie élastique, dépend du comportement rhéologique de la coquille via le coefficient de Poisson et la rigidité de la glace. La seconde, l'énergie gravitationnelle, dépend de la masse du satellite et de son orientation. Les deux énergies dépendent cependant de la forme statique du satellite exprimée par le nombre de Love fluide k_f . Le rapport $\mathcal{R} = E_{elas}/E_{grav}$ de ces deux énergies permet de quantifier si le satellite agit de manière solide ou élastique. Dans le cas des satellites de glace Europe et Titan, les auteurs estiment notamment que $\mathcal{R} \ll 1$ (on estime que $\mathcal{R} = 0.157$ pour $v = 1/3$ et $\mu = 10.995 \cdot 10^9$ Pa s (Fortes, 2012)) et la dynamique est influencée par la déformation de la surface sous l'attraction de la planète. Ils donnent alors l'expression d'un couple élastique correspondant à la pression exercée par l'océan sur la coquille de glace suite à sa déformation, défini tel que

$$\Gamma_{elas} = - \frac{\partial E_{elas}}{\partial \phi'}, \quad (6.69)$$

où ϕ' est la longitude. En introduisant l'effet de ce couple élastique, les auteurs estiment les librations de Titan à la fréquence orbitale à une valeur de $\gamma_s = 5''$, soit environ 62 mètres lorsque l'on projette cet angle sur l'équateur. Bien que cette valeur soit proche des amplitudes que nous avons obtenus pour Titan dans le cas de modèles élastiques, la comparaison directe doit être faite avec précaution. En effet, Goldreich and Mitchell (2010) utilisent un modèle ne possédant pas de noyau, par conséquent l'attraction gravitationnel interne entre les couches solides est inexistante.

Les résultats que nous avons décrit dans la section précédente sont en accord avec les amplitudes de libration obtenues par Van Hoolst et al. (2013) pour Titan à la fréquence orbitale. La différence entre les deux approches réside essentiellement dans le fait que les auteurs ont pris en compte d'une orbite Képlérienne pour le mouvement de Titan. Dans notre modèle, nous avons utilisé les éphémérides contenant les perturbations orbitales nous permettant ainsi d'obtenir la réponse librationnelle aux hautes et basses-fréquences de forçage. Van Hoolst et al. (2013) utilisent également une décomposition des nombres de Love sur chaque couche. Nous souhaitons ici montrer l'analogie entre les deux approches.

Nous avons ici utilisé le potentiel décrit par Giampieri (2004) développé au premier ordre en excentricité et en anomalie moyenne (*c.f.* (3.48)). Van Hoolst et al. (2013) utilisent un potentiel similaire mais tiennent compte également de l'angle de libration γ , de sorte que le potentiel de marée s'écrit

$$W_2 = - \frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'}{R} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{q_t}{6} \left(P_2^0(\cos \theta') - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta') \cos 2(\phi' - \nu + L + \gamma) \right). \quad (6.70)$$

Nous avons, dans ce manuscrit, négligé l'influence des librations devant $\nu - L$, l'amplitude de la libration à la fréquence orbitale étant trois ordres de grandeur plus faible que la magnitude

du forçage. Cependant, si celles-ci sont conservées, le potentiel peut se mettre sous la forme

$$W_2 = -\frac{1}{2} \frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{q_t}{3} \left[P_2^0(\cos \theta') - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta') \cos 2\phi' \cos 2\phi - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta') \sin 2\phi' \sin 2\phi \right], \quad (6.71)$$

où $\phi = \nu - L - \gamma$. Ainsi, en utilisant la définition des coefficients de déformations (3.46) et (3.47), ainsi que les expressions des moments d'inertie (2.17)-(2.22), on a pour une couche homogène l de rayon compris entre r_{l-1} et r_l

$$I_{12}^l = -\frac{2\pi}{15} \rho_l \frac{GM_s}{R^3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 q_t \sin 2\phi \left(r_l^6 \frac{\tilde{H}(r_l)}{g} - r_{l-1}^6 \frac{\tilde{H}(r_{l-1})}{g} \right), \quad (6.72)$$

$$B^l - A^l = \frac{4\pi}{15} \rho_l \frac{GM_s}{R^3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 q_t \cos 2\phi \left(r_l^6 \frac{\bar{H}(r_l)}{g} - r_{l-1}^6 \frac{\bar{H}(r_{l-1})}{g} \right), \quad (6.73)$$

où \bar{H} quantifie les déformations statiques de sorte que $\bar{H} = h_f$ en surface, h_f étant le nombre de Love fluide, et \tilde{H} quantifie les déformations périodiques de la surface. Il s'agit ici de prendre en compte la différence de moment d'inertie statique $B - A$ en plus de sa variation périodique. I_{12} en revanche ne possède qu'une composante périodique.

Ainsi, le couple gravitationnel externe exercé sur la couche l défini par (*c.f.* section 3.1.1) s'écrit au premier ordre en excentricité e

$$\Gamma_{ext,z}^l = \frac{3}{2} \frac{GM_p}{r^3} [(B^l - A^l) \sin^2 \theta \sin 2\phi + 2I_{12}^l \sin^2 \theta \cos 2\phi], \quad (6.74)$$

peut s'écrire pour $\theta = \pi/2$

$$\Gamma_{ext,z}^l = \frac{3}{2} \frac{GM_p}{r^3} (B_l - A_l) \left[1 - \frac{4\pi}{5} \rho_l \frac{G}{R^5} \left(r_l^6 \frac{\tilde{H}(r_l)}{gh_f^l} - r_{l-1}^6 \frac{\tilde{H}(r_{l-1})}{gh_f^l} \right) \right] \sin 2\phi, \quad (6.75)$$

où le terme en I_{12}^l de l'expression (6.74) est exprimé en fonction de $(B_l - A_l)$ en utilisant la relation

$$q_t = \frac{3(B_l - A_l)}{M_s R^2 h_f^l}, \quad (6.76)$$

où h_f^l est défini comme étant un nombre de Love fluide effectif de la couche l . Puisque l'expression de I_{12}^l contient du $\sin 2\phi$, tous les moments d'inertie sont factorisés dans l'expression du couple (6.75). On pose alors la définition des nombres de Love suivants

$$h_f^l = \frac{4\pi G}{5R^3} \rho_l \left(r_l^4 \frac{\bar{H}(r_l)}{g} \left(\frac{r_l}{R}\right)^2 - r_{l-1}^4 \frac{\bar{H}(r_{l-1})}{g} \left(\frac{r_{l-1}}{R}\right)^2 \right), \quad (6.77)$$

$$h_2^l = \frac{4\pi G}{5R^3} \rho_l \left(r_l^4 \frac{\tilde{H}(r_l)}{g} \left(\frac{r_l}{R}\right)^2 - r_{l-1}^4 \frac{\tilde{H}(r_{l-1})}{g} \left(\frac{r_{l-1}}{R}\right)^2 \right), \quad (6.78)$$

tels que $h_2 = \sum_l h_2^l$. Ici, le nombre de Love h_2 est décomposé sur chaque couche de sorte que h_2 à la surface correspond à la somme des nombres de Love h_2^l associé à chaque couche du satellite. En posant

$$u_r(r_l) = -y_l W_2(R, \theta', \phi') = -\frac{H(r_l)}{g} W_2(R, \theta', \phi'). \quad (6.79)$$

où W_2 est le potentiel perturbateur de degré 2, et y_l la déformation radiale de la couche l , on retrouve par exemple pour la surface la définition du nombre de Love k_2^s défini tel que $W^l(R) = k_2^l W_2(R)$ où $W^l(R)$ est le potentiel de la couche l exprimé à la surface ((21) et (24) de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#)) et

$$k_2^s = \frac{4\pi G}{5R^3} \rho_l (R^4 y_s - r_o^4 y_o), \quad (6.80)$$

où r_o est le rayon moyen de l'océan et y_s, y_o sont les déplacements de marée radiaux de la couche de glace et de l'interface océan/glace respectivement, et l'expression (30) du couple gravitationnel externe de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#) est obtenue

$$\Gamma_{ext,z}^l = \frac{3}{2} \frac{GM_p}{r^3} (B_l - A_l) \frac{k_f^l - k_2^l}{k_f^l} \sin 2\phi. \quad (6.81)$$

Cette expression sous forme de différence de nombres de Love permet d'identifier directement le cas limite fluide. Si la couche l se comporte comme un fluide, alors $k_2^l = k_f^l$ et le couple exercé sur cette couche est nul. De même, pour le cas rigide où $k_2^l = 0$, le couple s'exerce uniquement sur la forme statique du corps. Ainsi, les expressions (54) et (55) de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#) correspondant aux couples exercés par la planète sur les bourrelets statiques et périodiques des couches solides sont analogues à notre expression (3.12) où les moments d'inerties sont développés de façon similaire aux expressions (6.72) et (6.73). Le couplage interne exercé sur la couche de glace donné par l'expression (B.12) de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#) est similaire à notre expression (3.17). Les trois termes de l'expression (B.12) contiennent respectivement l'attraction entre les bourrelet statiques du noyau, représenté par la différence de moments d'inertie ($B_i - A_i$), et de la coquille de glace écrit en fonction de l'aplatissement β , l'interaction entre le bourrelet statique du noyau et le bourrelet périodique de la coquille et l'interaction entre le bourrelet périodique du noyau et le bourrelet statique de la coquille.

La comparaison directe entre les solutions de la libration des modèles de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#) et de notre manuscrit est rendue difficile par la différence de potentiel. En tenant compte de la libration dans le potentiel perturbateur de marée, les fréquences propres du système sont modifiées. Nos fréquences propres sont identiques au cas rigide. Cependant, on remarque une structure similaire entre notre solution (6.61) et la solution pour la surface donnée par l'équation (62) de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#)

$$\gamma_s = \frac{4e(K_3(K_5 - n^2 C_I) - K_2 K_6)}{C_i C_s (n^2 - \sigma_1^2)(n^2 - \sigma_2^2)}, \quad (6.82)$$

où σ_1 et σ_2 sont les fréquences propres du système et K_3 est associé à l'amplitude du couple gravitationnel exercé par la planète sur la couche de glace, K_5 et K_2 sont associés aux amplitudes du couple interne et K_6 est associé à l'amplitude du couple gravitationnel exercé par la planète sur le noyau.

Les librations à la fréquence orbitale obtenues par [Van Hoolst et al. \(2013\)](#) sont de l'ordre de 32 mètres à 55 mètres suivant les modèles utilisés, soit entre 61% et 85% de réduction par rapport au cas rigide. Les 528 modèles utilisés dans leur étude couvrent de nombreux paramètres de la structure interne tels que l'épaisseur de la couche de glace ou sa densité, la taille du noyau et la densité de l'océan. Les librations retrouvées dans ce manuscrit sont de l'ordre de 60 et 80 mètres selon les modèles, l'ordre de grandeur est donc le même bien que des différences

subsistent, celles-ci pouvant notamment provenir des différences entre les modèles de structures internes et les valeurs des nombres de Love associés. Le nombre de Love k_2 est déterminé par [Iess et al. \(2012\)](#) à 0.637 ± 0.112 , une incertitude suffisamment grande pour être compatible avec une large gamme de modèles différents. Dans notre étude, nous avons sélectionnés six modèles représentatifs des différents groupes de structure interne présents dans la littérature, ils ne sont cependant pas représentatifs de l'ensemble des paramètres possibles (taille et nombre de couches, densités).

Rappelons finalement que l'étude de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#) est basée sur une orbite Képlérienne de Titan, ce qui ne permet pas de comparer les librations associées aux fréquences des perturbations orbitales, pas plus que les deux termes de libration issus de la modulation de l'amplitude du couplage gravitationnel que nous avons découvert.

6.3.3 Cas visco-élastique

[Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#) ont développé un modèle décrivant le comportement librationnel pour le satellite Europe à trois couches visco-élastiques. Cependant, les auteurs se concentrent uniquement sur la libration à la fréquence orbitale en indiquant que cette libration est dépendante de la structure interne du satellite. L'importance de la visco-élasticité dans le comportement du satellite est caractérisée par le temps caractéristique de Maxwell τ défini tel que

$$\tau = \frac{\mu}{\eta},$$

où η est la viscosité et μ la rigidité. Ainsi, si le temps de Maxwell est très grand devant la période orbitale du satellite, cela signifie que la surface n'a pas le temps de se relaxer sous l'effet d'une perturbation. La réponse de la surface à un potentiel perturbateur sera élastique. Si le temps de Maxwell est très petit devant la période orbitale, alors la surface se relaxe plus rapidement que la perturbation. La réponse de la surface au potentiel perturbateur est celle d'un fluide. La visco-élasticité devient importante lorsque le temps de Maxwell est de l'ordre de grandeur de la période orbitale. Dans le cas de Titan, en utilisant les valeurs de $\eta = 5 \cdot 10^{13}$ Pa s ([Tobie et al., 2005](#)) et $\mu = 10.995^{19}$ Pa ([Fortes, 2012](#)), le temps de Maxwell est de l'ordre de 25 jours.

La prise en compte de la visco-élasticité dans le comportement dynamique du satellite passe par une écriture de la surface du satellite sous la forme

$$r = r_o - h_f(r_o) \frac{\bar{W}_2}{g} - h_2(r_o, t) * \frac{\tilde{W}_2}{g}, \quad (6.83)$$

où le potentiel perturbateur à l'ordre 2 W_2 est découpé en une partie statique \bar{W}_2 (indépendante du temps) et une partie dynamique \tilde{W}_2 . La réponse de la surface au potentiel statique se quantifie par le nombre de Love fluide h_f tandis la réponse au potentiel dynamique est quantifiée par le nombre h_2 . Dans ce modèle, le nombre de Love h_2 dépend du temps. Cependant, contrairement au cas élastique que nous avons développé dans ce chapitre, les auteurs prennent en compte l'effet de la visco-élasticité en liant le nombre de Love h_2 et le potentiel perturbateur dynamique par un produit de convolution.

En utilisant l'expression du potentiel gravitationnel externe (3.7) développé à l'ordre 2, on

a dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) :

$$W_{ext} = -\frac{4\pi G}{5}r^2 \left[\int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial \bar{d}_{2,2}}{\partial r'_o} dr'_o Y_2^2(\pi/2, \phi) + \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial \tilde{d}_{2,2}}{\partial r'_o} dr'_o Y_2^2(\pi/2, \phi) + \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial e_{2,2}}{\partial r'_o} dr'_o Y_2^{-2}(\pi/2, \phi) \right]. \quad (6.84)$$

En utilisant les relations (3.54) et (3.55), ce potentiel peut s'écrire sous la forme

$$W_{ext} = -\frac{2\pi G}{15}r^2 \left[\int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial \beta}{\partial r'_o} dr'_o \cos 2\phi + \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(-\frac{9n^2}{2} r'_o \frac{H(r'_o)}{g} e \cos M \right) dr'_o \cos 2\phi + \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(-6n^2 r'_o \frac{H(r'_o)}{g} e \sin M \right) dr'_o \sin 2\phi \right]. \quad (6.85)$$

En introduisant les notations de [Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#)

$$\zeta_c^0 = \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial \beta}{\partial r'_o} dr'_o,$$

$$\zeta_d^0 = \int_0^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{3}{2} n^2 r'_o \frac{H(r'_o)}{g} \right) dr'_o,$$

le potentiel prend la forme

$$W_{ext} = -\frac{2\pi G}{15}r^2 \left[\zeta_c^0 \cos 2\phi - \zeta_d^0 3e \cos M \cos 2\phi - \zeta_d^0 4e \sin M \sin 2\phi \right]. \quad (6.86)$$

Cette expression est semblable à l'équation (27) de [Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#), à l'exception du produit de convolution puisque notre cas est purement élastique et que notre fonction $H(r'_o)$ ne dépend pas du temps. De plus, nous avons utilisé l'expression du potentiel de [Giamperri \(2004\)](#) pour déterminer les déformations périodiques des surfaces, et cette expression ne contient pas les angles de librations. Comme dans la comparaison avec les développements de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#), notre potentiel manque d'un terme contenant l'angle de libration γ_s , dont l'amplitude est petite devant la magnitude du forçage à la fréquence orbitale.

Les couples de forces associés à l'interaction gravitationnelle interne, exercés sur la coquille de glace et sur le noyau, peuvent être retrouvés en utilisant les mêmes changements de variables. Ils diffèrent cependant encore une fois de nos expressions des couples par l'absence des termes de librations dans les variations des moments d'inertie.

Les conclusions apportées par l'étude numérique de [Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#) sont en accord avec nos travaux : la déformation à la fréquence orbitale de la coquille de glace réduit considérablement l'amplitude du couplage gravitationnel exercé sur celle-ci, et le couplage interne est renforcé par l'attraction gravitationnelle du noyau rigide sur les bourrelets de marée dynamiques de la coquille de glace.

Cependant, l'étude du modèle visco-élastique menée par les auteurs montre que l'amplitude de libration à la fréquence orbitale est dominée par les valeurs de rigidité et de viscosité de la couche de glace. En effet, une rigidité plus importante de la couche de glace rapproche la solution du cas purement rigide présenté dans ce chapitre, dont l'amplitude de libration est importante. De même, plus la viscosité est importante, et plus la libration l'est également. Ceci

peut s'expliquer par le fait qu'une couche de glace de faible viscosité à un comportement qui se rapproche du fluide puisque le temps caractéristique de Maxwell diminue. Dans ce cas, les déformations périodiques de la surface sont importantes et diminuent d'autant plus l'amplitude du couple gravitationnel externe et des librations à la fréquence orbitale. Pour Europe, l'incertitude sur la valeur de rigidité (entre 0.4 et 10 GPa) et sur la valeur de viscosité (comprise entre 10^{13} et 10^{15} Pa s) de la couche de glace donne des amplitudes de librations à la fréquence orbitale allant de 50 à 250 mètres pour un modèle dont l'épaisseur de glace est de 60 kilomètres. Les auteurs concluent qu'il est nécessaire de déterminer précisément les valeurs de viscosité et rigidité de la couche de glace pour pouvoir effectuer de bonnes prédictions sur les librations à hautes-fréquences.

6.4 Résumé

En résumé, nous avons vu au cours de ce chapitre les différents aspects de la libration en longitude de Titan. Dans un premier temps, l'analyse en fréquence de l'orbite a montré que l'approximation Képlérienne de la trajectoire n'est pas suffisante, des termes provenant de l'interaction avec le Soleil notamment possèdent des amplitudes importantes et doivent être pris en compte dans la dynamique rotationnelle de Titan.

Les solutions de la libration rigide de Titan, étudiées notamment par [Van Hoolst et al. \(2008, 2009\)](#), permettent de déterminer l'influence de l'océan sur la dynamique, ainsi que l'impact du forçage atmosphérique sur la couche de glace de surface. Nous noterons à ce titre que la libration en longitude de Titan considéré comme rigide est dominée par le forçage orbital à longue période. Le couplage dû à l'atmosphère ne contribue que pour quelques pourcents ou dixièmes de pourcent selon le modèle de circulation atmosphérique utilisé.

En introduisant l'élasticité des couches, [Goldreich and Mitchell \(2010\)](#) prédisaient une forte réduction de la libration en longitude à la fréquence orbitale. Ce résultat est confirmé par les études indépendantes de [Van Hoolst et al. \(2013\)](#); [Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#), et [Richard et al. \(2014\)](#) développés dans cette thèse. Les librations à la fréquence orbitale sont réduites de près de 80% dans les modèles avec océan par rapport à celles obtenues dans le cas rigide. Cette réduction amène les librations des modèles avec et sans océan au même ordre de grandeur, et rend difficile la distinction entre les deux types de modèles compte tenu de la précision des observations actuelles.

Nous avons également déterminé que la déformation périodique des couches du satellite induit l'apparition de nouvelles basses fréquences de libration que l'on peut associer à une modulation de l'amplitude du couple gravitationnel. Ces termes de longues périodes contiennent vraisemblablement de l'information sur la structure interne, et notamment la présence éventuelle d'un océan interne. La difficulté réside cependant dans la détection de ces librations de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

Troisième partie

Etude des librations en longitude de Mimas

Chapitre 7

Présentation et mouvement orbital de Mimas

Sommaire

7.1 Description de Mimas	113
7.2 Analyse de l'orbite	116

7.1 Description de Mimas

Mimas est un satellite de Saturne découvert en 1789 par l'astronome allemand William Herschel (1790). L'astronome a d'ailleurs laissé son nom au gigantesque cratère d'environ 135 kilomètres de diamètre visible à la surface du satellite (Fig. 7.1). Avec un rayon moyen R_M de 198.2 kilomètres (Thomas et al., 2007), Mimas fait partie des lunes de taille moyenne séparant la lune massive Titan des petits satellites proches des anneaux (fig. 4.1). Parmi ces lunes intermédiaires, on trouve Encelade, Téthys, Dioné et Rhéa. La densité moyenne de Mimas est de 1150 kg m^{-3} , une valeur faible qui suppose un corps composé essentiellement d'un mélange de glace et de roche partiellement différencié (c.f. Dermott and Thomas (1988)).

L'orbite de Mimas possède une excentricité de 0.0196 et sa rotation synchrone autour de Saturne s'effectue avec une période de 0.942 jours (Jacobson, 2010, Sat339, JPL Ephemerides). La décomposition en série de Fourier des éléments orbitaux de Mimas fournis par Vienne and Duriez (1995) montre que le mouvement de Mimas est principalement perturbé par Téthys, en résonance de moyen mouvement avec Mimas.

La caractéristique principale de la surface de Mimas est le cratère *Herschel* mesurant 135 kilomètres de diamètre pour une profondeur de 10 à 12 kilomètres (Moore et al., 2004). Il a été découvert grâce aux photographies de la sonde Voyager 1 prises en novembre 1980. La formation de ce cratère résulte probablement d'un impact massif qui a pu bouleverser la structure interne du satellite et créer de la porosité dans les couches inférieures, modifiant la distribution de masse du satellite et son orientation.

La surface de Mimas n'est pas à l'équilibre hydrostatique. La forme du satellite est paramétrée par le facteur $F = (b - c)/(a - c)$, où a , b et c sont les axes principaux de l'ellipsoïde.

Dans le cas d'un corps à l'équilibre hydrostatique, ce facteur F vaut 0.25 (*e.g.* Dermott (1979)). Cependant, Thomas et al. (2007) montrent que le facteur F observé pour Mimas est de 0.37, soit un écart de 48% avec la valeur à l'équilibre. Contrairement à l'étude menée pour Titan dans le chapitre précédent, la surface de Mimas n'est pas considérée comme une équipotentielle. La forme gelée de la surface du satellite est fixée par les observations, et nous supposons que l'intérieur du satellite est à l'équilibre hydrostatique.

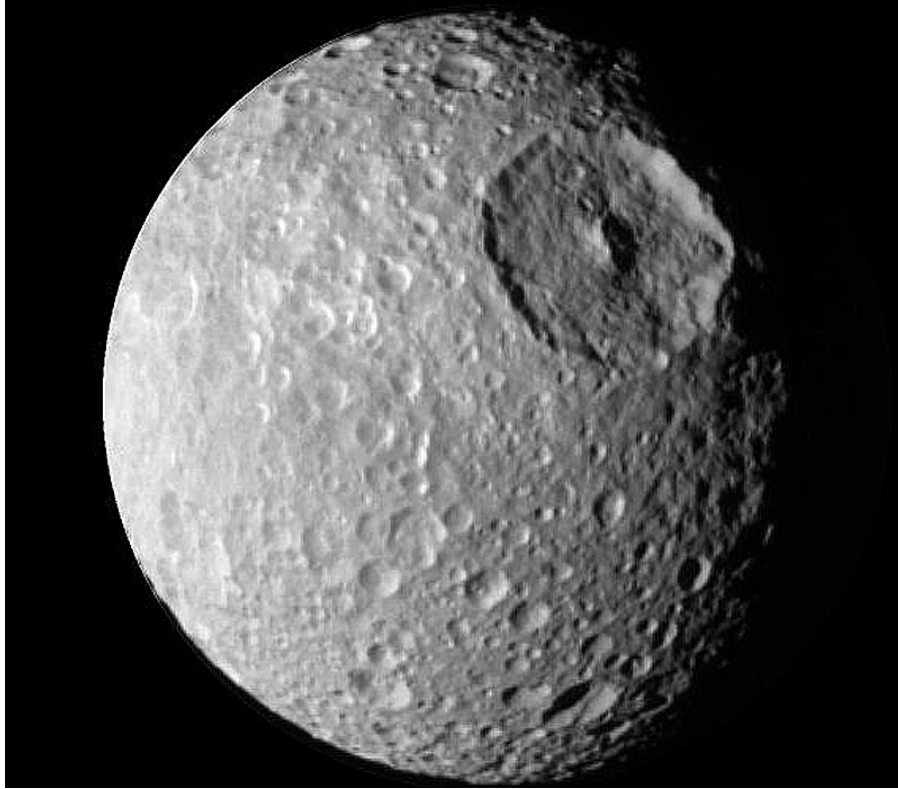


FIGURE 7.1: Photographie de Mimas prise en Août 2005 par la sonde *Cassini*. Le cratère *Herschel* est visible en haut à droite de l'image (Source : Cassini Imaging Team, ISS, JPL, ESA, NASA).

Les librations en longitude de Mimas ont été observées par Tajeddine (2013). Les amplitudes observées sont en accord avec celles prédites par la théorie de Noyelles et al. (2011) (Table 7.2) pour un modèle de Mimas solide, excepté pour la libration à la fréquence orbitale dont l'amplitude est observée à 45.9 ± 0.87 arcminutes, soit presque deux fois plus importante que la valeur théorique estimée à 26.07 arcminutes. Cet écart important dans la libration à la fréquence orbitale suggère une signature de la structure interne particulière du satellite. Les autres termes de la libration sont des réponses au forçage de basse-fréquence, et par conséquent ne dépendent pas, au premier ordre, de la structure interne du satellite comme nous l'avons vu dans le cas du modèle rigide de Titan (*c.f.* section 6.1).

Plusieurs scénarios ont été étudiés pour expliquer cette forte libration observée à la période orbitale. Le premier suggère une anomalie de masse due au cratère *Herschel* qui modifie la réponse rotationnelle du satellite. Le second est la présence d'un noyau fortement allongé fossilisé sous la couche de glace qui modifie également la réponse librationnelle du satellite. Enfin, l'existence d'un océan sous la surface glacée de Mimas permet d'augmenter l'amplitude

TABLE 7.1: Paramètres de Mimas

Paramètre	Valeur	Source
R (km)	198.2	Thomas et al. (2007)
M_s (kg)	$3.7495 \cdot 10^{19}$	Jacobson et al. (2006)
$\tilde{\rho}_o$ (kg m^{-3})	1150	Thomas et al. (2007)
n (rad jour^{-1})	6.667061	Jacobson, 2010, Sat339
a (km)	185539	Jacobson, 2010, Sat339
e	0.0196	Jacobson, 2010, Sat339
M_p (kg)	$5.6832592 \cdot 10^{26}$	Jacobson et al. (2006)

de libration à la période orbitale comme nous l'avons vu dans le cas de Titan. Ces trois scénarios sont détaillés dans le papier de Tajeddine et al. (2014) auquel j'ai contribué. Ici nous ne nous intéressons seulement qu'au troisième scénario, celui de l'océan interne. Il est basé sur les développements effectués dans cette thèse et présentés dans le chapitre précédent.

TABLE 7.2: Amplitudes et fréquences de la libration en longitude de Mimas obtenues à partir du modèle de Noyelles et al. (2011) pour la colonne "Amplitude théorique" et des observations astrométriques analysées par Tajeddine et al. (2014) pour la colonne "Amplitude mesurée". La date initiale est J2000.

Fréquence (rad/jours)	Période (jours)	Amp. mesurée	Amp. théorique.	Phase théorique (degrés)
0.000244	25772.63	$43.86 \pm 0.05^\circ$	43.61°	51.354
0.000731	8590.879	44.5 ± 1.1 arcmin	43.26 arcmin	-25.913
6.649591	0.944898	45.9 ± 0.87 arcmin	26.07 arcmin	101.35
0.027919	225.0453	8.4 ± 1.1 arcmin	7.828 arcmin	-157.744
0.027676	227.0273	3.7 ± 1.2 arcmin	3.657 arcmin	-119.032
0.028163	223.0972	2.7 ± 1.2 arcmin	3.532 arcmin	-16.309

Les modèles de structure interne de Mimas que nous utilisons sont contraints par la densité moyenne de 1150 kg m^{-3} et le rayon moyen de 198.2 kilomètres. Les modèles utilisés pour Mimas possédant un océan interne explorent les deux densités extrémales possibles pour l'océan : 1000 kg m^{-3} pour un océan d'eau pure, et 1300 kg m^{-3} pour un océan enrichi en sels, semblable à celui de Titan (*c.f.* section 4.2). L'origine et la constitution de l'océan sont ici purement hypothétiques et les valeurs choisies ne servent qu'à définir les limites d'un éventuel océan sur Mimas. La couche de glace possède une densité d'environ 900 kg m^{-3} , et le noyau de silicates peut avoir une densité comprise entre 1500 et 3500 kg m^{-3} selon la quantité de glace présente. Les modèles explorés sont résumés dans la table 7.3. Nos modèles peuvent avoir une couche de glace de 97.7 kilomètres à seulement 1.5 kilomètres d'épaisseur, et nous permettent d'explorer toute une gamme de modèles possédant une épaisseur de glace variable et compatible avec la densité moyenne du satellite. Pour compenser cette variation de l'épaisseur de la couche de glace, l'épaisseur de l'océan varie de 1.7 kilomètres d'épaisseur à 134.9 kilomètres.

TABLE 7.3: Gamme de paramètres des modèles de structure interne de Mimas utilisés. Les modèles sélectionnés vérifient la densité moyenne du satellite.

	Epaisseur	Densité
Couche	R (km)	ρ (kg m ⁻³)
Coquille de glace	1.5 - 97.7	900 - 930
Océan	1.7 - 134.9	1000 - 1300
Noyau	34.3 - 146.9	1500 - 3500

TABLE 7.4: Fréquences de référence du mouvement orbital (Vienne and Duriez, 1995). ω_1 correspond à l'argument de libration de la résonance de moyen mouvement Mimas-Téthys, ϕ_1 est proche de l'argument du péricentre de Mimas, $\rho_1 = L_1 - 2L_3$ où L_3 est la longitude moyenne de Téthys et Φ_1 est proche de l'argument du noeud de l'orbite de Mimas.

Fréq. (rad/jours)	Période	Argument
0.000243793	70.56 ans	ω_1
0.027919652	226.45 jours	ϕ_1
-0.010448839	1.65 ans	$-\rho_1$
6.667061729	0.94 jours	L_1
-0.006731679	898.06 ans	Φ_1

7.2 Analyse de l'orbite

Nous déterminons le mouvement orbital de Mimas sur une période de 400 ans en utilisant l'éphéméride TASS. Vienne and Duriez (1995) fournissent les fréquences propres du mouvement orbital présentées dans la table 7.4. La plus longue période détectée dans l'analyse de la longitude vraie est de l'ordre de 70 ans, notre choix de 400 ans pour la période de l'éphéméride est donc suffisant. Les éléments orbitaux obtenus sont tracés sur la figure 7.2 dans le plan équatorial de Saturne. La série de Fourier issue de l'analyse en fréquence de $\nu - L$ est détaillée dans la table 7.5. Les notations utilisées pour les arguments sont celles de Vienne and Duriez (1995), où ω_1 correspond à l'argument de libration de la résonance de moyen mouvement Mimas-Téthys, ϕ_1 est proche de l'argument du péricentre de Mimas, $\rho_1 = L_1 - 2L_3$ où L_3 est la longitude moyenne de Téthys et Φ_1 est proche de l'argument du noeud de l'orbite de Mimas. On remarque que contrairement au cas de Titan, le terme dominant dans le forçage orbital n'est pas un terme Képlerien, il s'agit d'un terme de période avoisinant les 70 ans et correspondant au mouvement de précession du périastre de Mimas.

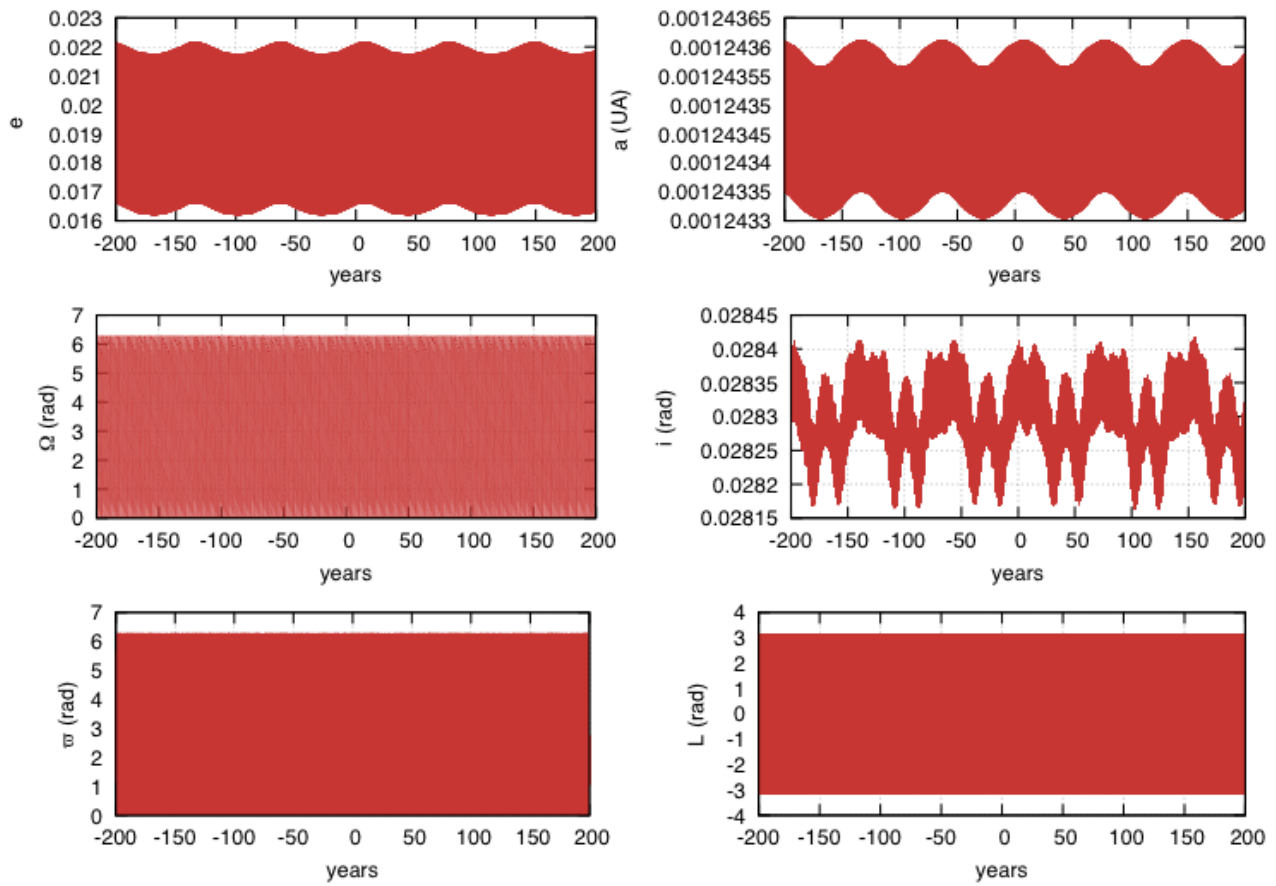


FIGURE 7.2: Elements orbitaux de Mimas au cours du temps obtenus avec l'éphéméride TASS (Vienne and Duriez, 1995). La date de référence est J2000. e est l'excentricité, a le demi-grand axe exprimé en unités astronomiques ($1 \text{ UA} = 149597870,7 \text{ km}$), Ω la longitude du noeud ascendant de l'orbite, i l'inclinaison, ϖ la longitude du périhélie et L la longitude moyenne du satellite.

TABLE 7.5: Analyse en fréquence de la longitude vraie de Mimas obtenue à partir de l'éphéméride TASS sur 400 ans. La différence entre la longitude vraie ν et la longitude moyenne $L = Nt$, où N est le moyen mouvement moyen, est décomposée sous la forme $\nu - L - \lambda_o = \sum_j H_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)$, avec λ_o la valeur initiale de l'angle de rotation du satellite mesurée depuis la ligne des noeuds, H_j l'amplitude, ω_j la fréquence et α_j la phase. L'identification est effectuée grâce à l'éphéméride TASS et à l'analyse de [Noyelles et al. \(2011\)](#). La date initiale est J2000.

Fréquence (rad/jours)	Période (jours)	Amplitude	Phase (degrés)	Identification
0.000243786	25773.3143	43.3957 °	141.3594	ω_1
6.649590951	0.944898	113.1910 amin	11.7880	$L_1 - \phi_1 + \rho_1$
6.649347137	0.944933	47.3676 amin	50.4316	$L_1 - \omega_1 - \phi_1 + \rho_1$
0.000731375	8590.9178	42.7371 amin	64.0885	$3\omega_1$
6.649834893	0.944863	46.0665 amin	153.1572	$L_1 + \omega_1 - \phi_1 + \rho_1$
0.027919564	225.0460	7.7913 amin	-67.7430	ϕ_1
0.027675843	227.0278	3.6446 amin	-29.0934	$\omega_1 - \phi_1$
0.028163425	223.0973	3.5151 amin	73.6307	$\omega_1 + \phi_1$

Chapitre 8

Librations de Mimas

Sommaire

8.1 Observations	119
8.2 Modèles rigides	120
8.3 Modèles élastiques	120
8.4 Résumé	122

8.1 Observations

Tajeddine (2013) a déterminé le mouvement de libration en longitude de Mimas en utilisant les images de Mimas prises par la sonde *Cassini*. La méthode utilisée, appelée stéréophotogrammétrie, consiste à effectuer des mesures tri-dimensionnelles de positions de cratères à la surface du corps en utilisant pour cela plusieurs photographies prises sous des angles différents par la Narrow Angle Camera (NAC) de *Cassini*. Ainsi, une carte topographique constituée de 260 points répartis sur la surface a été ajustée par moindres carrés sur 40 images de ces repères.

En utilisant un modèle de réduction astrométrique des images, la plupart des amplitudes de libration prédites par le modèle numérique de Noyelles et al. (2011) sont retrouvées. Cependant, le terme de libration prédit à la fréquence orbitale du satellite a une amplitude deux fois supérieure à celle observée (*c.f.* Table 7.2). Le modèle utilisé par Noyelles et al. (2011) pour décrire le mouvement de libration de Mimas est basé sur un satellite entièrement solide vérifiant la forme observée de la surface. Il est constitué d'un noyau peu dense (1200 kg m^{-3}) de 189 kilomètres de rayon recouvert d'un manteau de 800 kg m^{-3} . La faible densité du noyau suggère une forte porosité de la roche. Ce modèle est peu probable selon Tajeddine (2013) car un corps massif et poreux n'aurait pas survécu à l'impact responsable de la formation du cratère *Herschel*.

8.2 Modèles rigides

L'amplitude de libration observée à la fréquence orbitale (*c.f.* table 7.2) peut être retrouvée en utilisant un modèle de Mimas possédant un océan interne et des couches solides rigides. L'équation (6.22) décrit le mouvement de la surface de ce type de modèle. Nous avons également déterminé l'approximation analytique de cette solution pour une couche de glace fine et une haute fréquence de forçage (équations (6.31) et (6.35)). Dans le cas de Mimas, la petite taille du satellite R comparée à l'épaisseur de la couche de glace h impose un développement à l'ordre 3 en h pour obtenir une approximation satisfaisante, de telle sorte que

$$\omega_s^2 \sim 3n^2\beta_s \left(1 + \frac{\rho_o}{\rho_s} \frac{r_o}{5h + 10\frac{h^2}{r_o} + 10\frac{h^3}{r_o^2}} \right). \quad (8.1)$$

En utilisant cette approximation analytique, il est possible de tracer l'amplitude de la libration pour des modèles rigides avec un océan interne dont la densité varie. La figure 8.1 donne l'amplitude de la libration de la surface des modèles rigides en fonction de l'épaisseur de la couche de glace h et pour différentes valeurs du rapport de densité ρ_o/ρ_s allant de 1 à 1.89. La couche de glace étant supposée de densité constante à 900 kg m^{-3} , nous faisons varier dans nos modèles la densité de l'océan jusqu'à 1700 kg m^{-3} , une valeur volontairement exagérée afin de visualiser l'évolution de la solution. On remarque que l'augmentation du rapport de densité entre l'océan et la couche de glace induit une épaisseur de glace plus importante pour atteindre la libration observée. Suivant la valeur du rapport ρ_o/ρ_s , l'épaisseur de la couche de glace varie entre 30 et 38 kilomètres environ pour les modèles sélectionnés.

8.3 Modèles élastiques

En introduisant l'élasticité des couches solides, l'amplitude de la libration à la fréquence orbitale est réduite comme dans le cas de Titan (*c.f.* (6.61)). Cependant dans le cas de Mimas, la petite taille du satellite induit de faibles déformations élastiques de ses couches. La réduction de l'amplitude de libration à la fréquence orbitale est alors très faible comme le montrent les valeurs de la table 8.1 pour un modèle contenant un noyau de silicate ($r_i = 85.2 \text{ km}$, $\rho_i = 1500 \text{ kg m}^{-3}$), un océan ($r_o = 165.8 \text{ km}$, $\rho_o = 1300 \text{ kg m}^{-3}$) et une couche de glace ($\rho_s = 900 \text{ kg m}^{-3}$). En suivant les conclusions de [Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#), nous avons introduit la viscosité dans le calcul de la fonction de déformation $H(r)$ de la couche de glace, ce qui modifie le comportement dynamique de la surface. En utilisant une viscosité faible de 10^{12} Pa s , la déformation de la surface plus importante permet de réduire l'amplitude de libration. Dans la table 8.1, la libration à la période orbitale passe de 45.06 arcmin pour un modèle élastique à 38.79 arcmin pour un modèle visco-élastique.

La figure 8.2 représente l'évolution de l'amplitude de la libration à la fréquence orbitale en fonction de l'épaisseur de la couche de glace pour le modèle rigide et le modèle visco-élastique ($\eta = 10^{12} \text{ Pa s}$). Les bandes noires représentent la valeur de libration observée et son incertitude. La déformation visco-élastique a pour effet de réduire l'épaisseur de la couche de glace des modèles compatibles avec la libration observée. Les amplitudes de libration de la figure 8.2 sont celles de modèles possédant un océan de densité 1000 kg m^{-3} et un noyau de 1500 kg m^3 . La valeur de libration observée est atteinte pour des modèles ayant une couche de glace de 24 kilomètres lorsque la visco-élasticité est prise en compte, contre 31 kilomètres pour les modèles rigides. Si l'épaisseur de la couche de glace est faible, cela signifie que la température

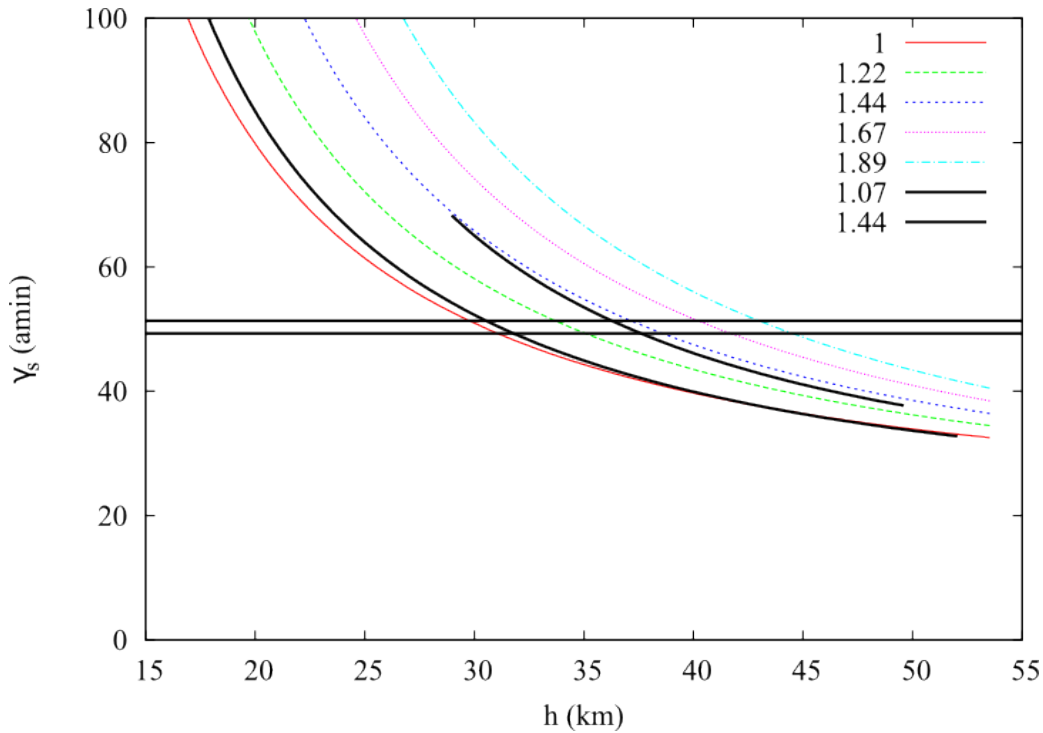


FIGURE 8.1: Amplitudes de libration de la surface de Mimas à la fréquence orbitale pour des modèles contenant un océan interne et des couches rigides. Les courbes de couleurs sont l'approximation obtenue au troisième ordre en h pour différents rapports de densités ρ_o/ρ_s . Les courbes noires sont les solutions obtenues à partir des modèles de structure interne décrits dans la table 7.3. Les noyaux des modèles utilisés pour les courbes noires ont des densités de 1500 kg m^{-3} et la couche de glace une densité de 900 kg m^{-3} . Les lignes horizontales sont l'amplitude de libration observée et son incertitude données dans la table 7.2.

TABLE 8.1: Amplitudes analytiques de libration de la couche de glace (exprimées en terme de déviation de l'équateur en mètres) pour un modèle de structure interne de Mimas avec océan de densité 1300 kg m^{-3} et une couche de glace de 40 kilomètres d'épaisseur pour différentes fréquences de forçage. Les solutions du cas rigide, élastique et visco-élastique sont comparées. Les termes de libration inférieure à 3 arcmin n'apparaissent pas. Les librations d'un modèle solide sont données dans la table 7.2 d'après le modèle de [Noyelles et al. \(2011\)](#).

Freq. (rad/jour)	Période (jours)	Amplitude			Identification
		Rigide	Elastique	Visco-élastique	
6.67004829	0.94199	-45.25 arcmin	-45.06 arcmin	-38.79 arcmin	$L_1 - \phi_1 + \rho_1$
0.00024379	25773.314	43.40 °	43.40 °	43.40 °	ω_1
0.00073137	8590.918	42.74 arcmin	42.74 arcmin	42.74 arcmin	$3\omega_1$
0.02791956	225.0459	7.79 arcmin	7.79 arcmin	7.79 arcmin	ϕ_1
0.02767584	227.0278	3.64 arcmin	3.64 arcmin	3.64 arcmin	$\omega_1 - \phi_1$
0.02816342	223.0973	3.51 arcmin	3.51 arcmin	3.51 arcmin	$\omega_1 + \phi_1$

augmente de manière rapide dans la couche de glace de façon à ce que la température de fusion de l'eau soit atteinte rapidement. Il est difficile de trouver un argument physique pour expliquer

un gradient important de la température dans la couche de glace ; par conséquent, une couche de glace épaisse semble être un scénario plus approprié. Pour cela, un océan plus riche en sels permet d'atteindre des couches de glace plus épaisses vérifiant la libration observée comme nous le montrons dans la figure 8.1. Rappelons que notre modèle de déformation est construit sur une faible valeur de viscosité, ce qui permet de suggérer que la courbe visco-élastique et la courbe rigide forment les deux extrêmes attendues pour les modèles de Mimas.

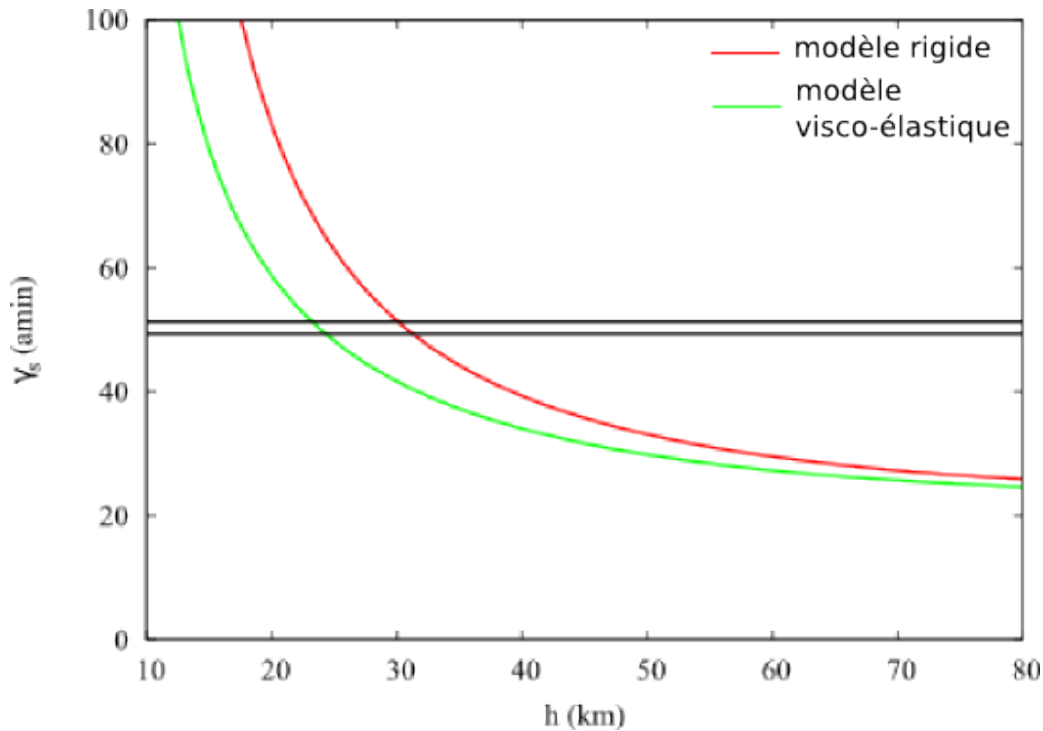


FIGURE 8.2: Amplitudes de libration de la surface de Mimas à la fréquence orbitale pour des modèles contenant un océan interne. Le noyau a une densité de 3500 kg m^{-3} , l'océan une densité de 1000 kg m^{-3} et la couche de glace une densité de 900 kg m^{-3} . La courbe rouge correspond à la libration pour un modèle composé de couches rigides tandis que la courbe verte est la réponse d'un modèle aux couches élastiques. Les lignes horizontales indiquent la valeur de libration observée et ses barres d'erreur (*c.f.* table 7.2).

8.4 Résumé

La présence d'un océan à l'intérieur de Mimas pourrait donc expliquer l'amplitude de libration observée, deux fois supérieure à celle attendue pour un modèle solide. Cependant, la petite taille de Mimas ne permettrait pas à un océan de subsister à l'intérieur du satellite depuis sa formation, et la présence d'un océan jeune serait à l'origine de nombreuses interrogations. Cette étude contribue à de nouvelles réflexions sur l'évolution et la formation de Mimas (Tajeddine et al., 2014).

Conclusion

Nous avons repris la définition des librations en longitude fournie par [Eckhardt \(1965\)](#) pour étudier le comportement dynamique d'un satellite sous l'influence de l'attraction gravitationnelle de la planète ([Goldreich and Peale, 1966](#)). Dans la première partie, nous avons posé les équations d'Euler-Liouville pour un satellite à trois couches (une couche fluide comprise entre deux couches solides) décrivant la rotation d'un corps soumis à différents couples de forces exercés sur chacune des couches. Nous avons déterminé les expressions du couple de rappel exercé par la planète, du couple gravitationnel interne exercé entre les couches solides du satellite et le couple dû aux forces de pressions exercées sur les interfaces avec le fluide. Nous avons également décrit pour Titan le couple provenant de l'interaction entre la surface du satellite et l'atmosphère qui l'entoure. Nous avons également déterminé les variations des moments d'inertie dues aux déformations de marée en suivant le formalisme de [Love \(1909\)](#).

Librations de Titan

Dans la seconde partie, nous avons appliqué ce modèle à Titan. Nous avons sélectionné six modèles de structure interne représentatifs des différents groupes présents dans la littérature. Ils décrivent les variations de la composition du noyau et de l'hydrosphère (couches glacées et océan recouvrant le noyau). Le mouvement orbital du satellite de Saturne est analysé en fréquence en utilisant la méthode développée par [Laskar \(1988, 2003\)](#) de manière à identifier les différentes fréquences du forçage gravitationnel exercé par la planète.

Librations rigides

La réponse librationnelle à chacune des fréquences de forçage est ensuite déterminée pour les modèles sélectionnés en supposant que les couches solides sont rigides. Cette approche a déjà été étudiée pour les satellites de glace, notamment les satellites galiléens ([Rambaux et al., 2011b](#)), Encelade ([Rambaux et al., 2010](#)) et Titan ([Van Hoolst et al., 2008](#)). Nous prenons en compte ici une orbite non-Képlérienne et explorons l'influence de la structure interne sur les librations hautes et basses-fréquences.

La signature de la présence de l'océan est très nette lorsque l'on regarde la libration à la fréquence orbitale. Elle diffère d'un ordre de grandeur entre un modèle solide (~ 50 mètres d'amplitude) et un modèle avec océan interne (~ 380 mètres d'amplitude). Les librations hautes-fréquences dépendent de la structure interne tandis que les librations basses-fréquences sont dominées par le forçage orbital.

L'influence de l'atmosphère sur le mouvement de libration est modélisée en utilisant deux modèles de circulation atmosphérique ([Tokano and Neubauer, 2005](#); [Charnay and Lebonnois, 2012](#)). Le couple atmosphérique possède une composante principale à la fréquence semi-annuelle

de Saturne. Cette fréquence existe également dans le couplage orbital dû à la perturbation indirecte du Soleil lors du mouvement orbital de Saturne. En introduisant le couplage atmosphérique, la libration à la fréquence semi-annuelle n'est modifiée que de quelques pourcents, et son amplitude est dominée par la perturbation orbitale.

Librations élastiques

Nous avons ensuite introduit l'élasticité des couches solides en suivant la remarque de [Goldreich and Mitchell \(2010\)](#). Sous l'effet de l'attraction gravitationnelle de la planète, les couches rigides du satellite ont tendance à tourner pour se réorienter, l'amplitude de la libration est alors maximale. Mais en introduisant l'élasticité, les couches peuvent se déformer et diminuer l'amplitude de libration.

Nous avons posé les équations de la libration en tenant compte des variations périodiques des moments d'inertie et de la surface des couches sous l'effet du potentiel de marée. Les déformations sont décomposées à l'ordre 2 en harmoniques sphériques en deux bourrelets : une partie radiale correspondant à la variation de l'élongation du satellite, et une partie librationnelle déphasée de $\pi/4$ par rapport à l'axe principal du satellite. Nous avons montré que le couple gravitationnel exercé sur les bourrelets dynamiques de la coquille de glace réduit le couple exercé sur le bourrelet statique. L'amplitude de libration est fortement diminuée.

La réduction de l'amplitude de libration est estimée à $\sim 80\%$ pour les modèles contenant un océan, et d'environ 2% lorsque le modèle est entièrement solide. Ainsi, les librations à la période orbitale sont du même ordre de grandeur lorsque le modèle possède ou non un océan (~ 60 à 80 mètres contre ~ 50 mètres pour le cas solide élastique). La détection de l'océan dans la libration à la fréquence orbitale est alors rendue très difficile car une résolution de l'ordre de la dizaine de mètres est nécessaire sur les observations.

Finalement, l'effet du forçage gravitationnel périodique sur les bourrelets dynamiques de marée entraîne l'apparition de deux nouveaux termes de libration de fréquences 0.000063 rad/jours et 0.001120 rad/jours. Ces termes ont une amplitude de l'ordre de 30 et 50 mètres pour les modèles avec océans, et de l'ordre de 20 et 30 mètres pour un modèle solide. Ils contiennent donc la signature de la présence d'un océan, mais leur détection nécessite également une excellente résolution sur les observations de la surface.

Librations de Mimas

Mimas est un petit satellite de Saturne. Récemment, [Tajeddine \(2013\)](#) a utilisé les images de la sonde *Cassini* pour déterminer les librations du satellite. La comparaison avec les amplitudes théoriques déterminées par [Noyelles et al. \(2011\)](#) montre que les librations mesurées à la fréquence orbitale sont deux fois supérieures à celles prédites pour un modèle d'intérieur solide. Cette valeur élevée peut trouver pour origine l'existence d'un noyau allongé et fossilisé ou la présence d'un océan interne. C'est ce dernier scénario que nous avons testé. En reprenant le modèle de libration d'un corps à trois couches, nous avons estimé la réponse librationnelle de Mimas au forçage gravitationnel pour différents modèles de structure. Certains modèles obtiennent des amplitudes en accord avec les librations observées, notamment pour des couches de glace de l'ordre de 30 à 40 kilomètres. La solution compatible avec les observations dépend cependant de la valeur de la viscosité de la couche de glace. Cette étude permet notamment d'envisager la possibilité d'un océan sur Mimas, et laisse la porte ouverte aux questions sur son existence et le mécanisme à l'origine de sa formation.

Perspectives

Ce modèle de librations à trois couches est un premier pas dans l'étude des librations physiques. En se basant sur les développements existants pour le cas rigide, nous avons développé une extension de la théorie pour le cas élastique. Le modèle pourrait être amélioré en incluant les déformations visco-élastiques, suivant l'approche proposée par [Jara-Orué and Vermeersen \(2014\)](#). Ceci permettrait d'étudier l'effet de la dissipation sur le mouvement de rotation à long terme des satellites de glace.

Cette approche utilisée pour les librations en longitude pourrait dans le futur être transposée aux librations physiques en latitude. Le système à résoudre sera alors de deux équations par couche (selon les composantes X et Y) et contiendra les couples de pression et inertiel que nous avons négligés dans le cadre des librations en longitude.

Le modèle de librations à trois couches élastiques peut trouver une application directe avec d'autres satellites de glace, et notamment Encelade dont la surface présente de nombreuses fractures, traces d'une activité importante sous l'effet des déformations de marées. Dans le cadre de la mission spatiale JUICE en direction du système de Jupiter, le modèle peut également être appliqué à Europe et Ganymède pour obtenir des prévisions sur les librations en longitude de ces satellites.

L'application du modèle à d'autres satellites de glace, et dans une plus large extension, aux corps planétaires et exoplanétaires permettrait d'améliorer le modèle en le confrontant à différents cas tout en généralisant le procédé à des corps situés en dehors de la rotation synchrone. Ce modèle de librations d'un corps multi-couches élastiques est un outil pour le sondage des structures internes des corps célestes dont les améliorations et applications possibles sont encore nombreuses.

Annexe A

Axes de Tisserand

Le référentiel centré sur le centre de masse du satellite est défini tel qu'à tout instant, la moyenne des rayons vecteurs \mathbf{r}' pondérés par les masses soit nulle,

$$\langle \mathbf{r}' \rangle = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r}' dM = 0. \quad (\text{A.1})$$

En dérivant cette relation, on a

$$\int_V \frac{d\mathbf{r}'}{dt} dM = 0. \quad (\text{A.2})$$

On peut alors introduire la vitesse moyenne de déformation $\langle \mathbf{v} \rangle$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{M} \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{dt} dM = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{v} dM = 0. \quad (\text{A.3})$$

Un référentiel associé au centre de masse et vérifiant cette relation pour la vitesse moyenne de déformation permet de garder le corps indéformable en moyenne (Tisserand, 1891). Ce référentiel est appelé référentiel de Tisserand.

On définit le moment cinétique \mathbf{H} par

$$\mathbf{H} = \int_V \rho(\mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}') dV, \quad (\text{A.4})$$

où, dans le référentiel lié au corps en rotation à la vitesse $\boldsymbol{\omega}$, on a

$$\dot{\mathbf{r}}' = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad (\text{A.5})$$

où $\partial \mathbf{r}' / \partial t$ est la vitesse par rapport au référentiel en rotation. Le moment cinétique s'écrit alors

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dM + \mathbf{h}, \quad (\text{A.6})$$

où \mathbf{h} est le moment cinétique de déformation défini par

$$\mathbf{h} = \int_V (\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}) dM. \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, les axes choisis tels que

$$\mathbf{h} = 0 \quad (\text{A.8})$$

sont appelés axes de Tisserand. Ils forment un référentiel moyen dans lequel les déformations ne contribuent pas au moment cinétique, c'est-à-dire que le champ de déformation ne contient pas de rotation (Moritz and Mueller, 1987).

Annexe B

Polynomes de Legendre

B.1 Equation de Legendre

Soit un potentiel gravitationnel W satisfaisant l'équation de Laplace

$$\nabla^2 W = 0. \quad (\text{B.1})$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) où θ est la colatitute et ϕ la longitude, cette équation s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{B.2})$$

En cherchant une solution du potentiel telle que $W = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ (Kaula, 1968), on peut écrire l'équation de Laplace en coordonnées sphériques (en divisant par $R\Theta\Phi/r^2$)

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Le terme en r est isolé et doit être constant. La constante est fixée égale à $n(n+1)$, de sorte que l'on obtient

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0, \quad (\text{B.4})$$

ce qui nous donne deux solutions pour R telles que

$$R = Ar^n + Br^{-n-1}, \quad (\text{B.5})$$

avec A et B des constantes d'intégration. Puisque le potentiel gravitationnel doit s'annuler en l'infini, on obtient que $A = 0$. En injectant cette solution dans l'équation de Laplace et en multipliant par $\sin^2 \theta$, on obtient

$$n(n+1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Le terme en ϕ est isolé et doit être constant. La constante est choisie égale à $-m^2$ et l'on obtient

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (\text{B.7})$$

ce qui nous donne la solution

$$\Phi = C \cos(m\phi) + S \sin(m\phi), \quad (\text{B.8})$$

où C et S sont des constantes d'intégration.

Finalement, en injectant cette solution dans l'équation de Laplace et en multipliant par $\Theta/\sin^2 \theta$, il reste

$$\left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}\right)\Theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0. \quad (\text{B.9})$$

On introduit alors la variable $\mu = \cos \theta$ de sorte que l'équation de Laplace devient

$$\left(n(n+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)}\right)\Theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\mu} \frac{d\mu}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\mu} \frac{d\mu}{d\theta}\right) = 0, \quad (\text{B.10})$$

d'où

$$\left(n(n+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)}\right)\Theta + \frac{d}{d\mu} \left((1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu}\right) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation différentielle de Legendre.

B.2 Polynômes de Legendre

Dans le cas d'un corps à symétrie azimutale (indépendant de la longitude ϕ , *i.e.* pas de terme en m^2 dans l'équation de Legendre), les solutions de l'équation (B.11) sont les polynômes de Legendre $P_n(\mu)$ définis par (*e.g.* Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006))

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\mu^2 - 1)^n}{d\mu^n}. \quad (\text{B.12})$$

Ces solutions définissent les harmoniques zonaux. Les premiers termes sont

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad (\text{B.13})$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad (\text{B.14})$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \quad (\text{B.15})$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta). \quad (\text{B.16})$$

B.3 Fonctions associées de Legendre

En revanche, dans le cas d'un corps où la symétrie azimutale n'est pas vérifiée, l'équation de Legendre généralisée (B.11) a pour solution les fonctions associées de Legendre $P_n^m(\mu)$ définies telles que (*e.g.* Hofmann-Wellenhof and Moritz (2006))

$$P_n^m(\mu) = (-1)^m (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d(\mu^2)^m} (P_n(\mu)). \quad (\text{B.17})$$

La solution générale de l'équation de Laplace (B.2) peut donc s'écrire à partir des solutions (B.5) (avec $A = 0$, $B = 1$), (B.8) et (B.17)

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) (C_{n,m} \cos(m\phi) + S_{n,m} \sin(m\phi)). \quad (\text{B.18})$$

Les fonctions de $P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$ et $P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$ sont appelées harmoniques tesseraux, et le cas particulier où $n = m$ constitue l'ensemble des harmoniques sectoraux. Les coefficients $C_{n,m}$ et $S_{n,m}$ sont appelés coefficients de Stokes (Whittaker and Watson, 1927).

Les premiers termes sont

$$P_0^0(\cos \theta) = 1, \quad (\text{B.19})$$

$$P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta, \quad (\text{B.20})$$

$$P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta, \quad (\text{B.21})$$

$$P_2^0(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \quad (\text{B.22})$$

$$P_2^1(\cos \theta) = -3 \sin \theta \cos \theta, \quad (\text{B.23})$$

$$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta. \quad (\text{B.24})$$

Annexe C

Harmoniques sphériques

La solution complexe de l'équation (B.7) s'écrit

$$\Phi = Ce^{im\phi} + Se^{-im\phi}. \quad (\text{C.1})$$

En combinant les solutions Φ et Θ , on définit les harmoniques sphériques par

$$Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi}, \quad (\text{C.2})$$

et la normalisation choisie est telle que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \phi) Y_k^{l*}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(2-\delta_{m0})(n-m)!} \delta_{ml} \delta_{nk}, \quad (\text{C.3})$$

où Y_k^{l*} est le complexe conjugué de Y_k^l et δ_{nm} le symbole de Kronecker égal à 1 si $n = m$ et 0 sinon. Dans ce manuscrit, nous utilisons les notations

$$Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi, \quad (\text{C.4})$$

$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi, \quad (\text{C.5})$$

pour désigner respectivement les parties réelle et imaginaire des harmoniques sphériques définies précédemment. Les harmoniques sphériques peuvent être décomposées en trois catégories selon leur effet :

- $m = 0$, harmoniques zonales indépendantes de la longitude,
- $n = m$, harmoniques sectoriales indépendantes de la colatitude,
- $n \neq m$ et $m \neq 0$, harmoniques tesserales dépendantes de la colatitude et de la longitude.

Il existe de plus une relation entre les polynômes de Legendre $P_n(\cos \alpha)$ et les harmoniques sphériques $Y_n^m(\cos \theta)$. Le théorème d'addition des harmoniques sphériques s'écrit (Kaula, 1968)

$$P_n(\cos \chi) = \sum_{m=-n}^n \frac{(2-\delta_{n0})(n-m)!}{(n+m)!} Y_n^m(\mathbf{r}_1) Y_n^m(\mathbf{r}_2), \quad (\text{C.6})$$

où χ est l'angle entre les vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . En détaillant les harmoniques sphériques, on peut écrire le théorème en fonction des fonctions associées de Legendre $P_n^m(\cos \theta)$

$$P_n(\cos \chi) = \sum_{m=-n}^n \frac{(2-\delta_{n0})(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos m(\phi - \phi'), \quad (\text{C.7})$$

où (θ, ϕ) et (θ', ϕ') sont les coordonnées angulaires de \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 respectivement.

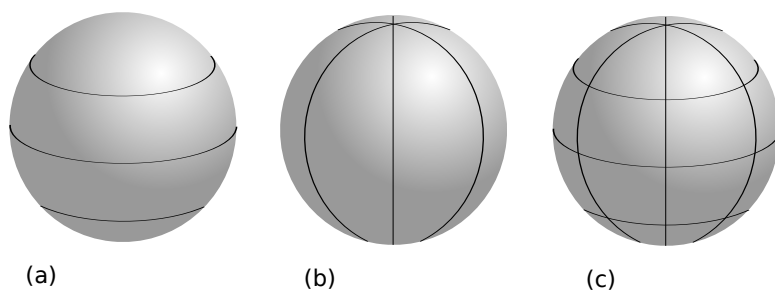


FIGURE C.1: Exemples de découpage de la sphère en harmoniques sphériques zonales (a), sectoriales (b) et tesserales (c).

Annexe D

Coefficients du champ de gravité

D.1 Coefficients de Stokes

En utilisant la définition des coefficients de Stokes à l'ordre 2, on obtient, pour un corps solide triaxial,

$$C_{20} = \frac{1}{2MR^2} \int_{V'} \rho(r') r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) dV', \quad (\text{D.1})$$

$$= \frac{1}{2MR^2} \int_{V'} \rho(r') (3z'^2 - r'^2) dV', \quad (\text{D.2})$$

$$= -\frac{1}{MR^2} \left(I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right), \quad (\text{D.3})$$

$$C_{22} = \frac{2}{24MR^2} \int_{V'} \rho(r') r'^2 3 \sin^2 \theta \cos 2\phi dV', \quad (\text{D.4})$$

$$= \frac{1}{4MR^2} \int_{V'} \rho(r') (x'^2 - y'^2) dV', \quad (\text{D.5})$$

$$= \frac{1}{MR^2} \frac{I_{22} - I_{11}}{4}, \quad (\text{D.6})$$

où (x', y', z') sont les coordonnées Cartésiennes du point considéré, et I_{11} , I_{22} et I_{33} les principaux moments d'inertie associés aux trois axes principaux de l'ellipsoïde de révolution (définis tels que $I_{11} < I_{22} < I_{33}$). Dans le cas d'un corps rigide axisymétrique, le choix du repère des axes de Tisserand coïncidant avec les axes principaux d'inertie du corps permet d'annuler les composantes non-diagonales du tenseur d'inertie.

Le terme $-C_{20}$ est plus familièrement connu sous le nom de coefficient J_2 et quantifie l'aplatissement polaire du corps, tandis que C_{22} quantifie l'aplatissement équatorial. Le développement des coefficients de Stokes montre que le potentiel gravitationnel est une fonction de la distribution de masse à travers les moments d'inertie du corps. Les coefficients C_{20} et C_{22} permettent de définir un ellipsoïde triaxial dans le repère défini par les trois axes d'inertie. Pour un corps possédant une forme complexe, les autres coefficients de Stokes d'ordre 2 sont fonctions des composantes non-diagonales du tenseur d'inertie dues aux dissymétries de la distribution

de masse, tels que

$$C_{21} = \frac{1}{MR^2} \int_{V'} x' z' \rho(r') dV', \quad (\text{D.7})$$

$$= -\frac{1}{MR^2} I_{13}, \quad (\text{D.8})$$

$$S_{21} = \frac{1}{MR^2} \int_{V'} y' z' \rho(r') dV', \quad (\text{D.9})$$

$$= -\frac{1}{MR^2} I_{23}, \quad (\text{D.10})$$

$$S_{22} = \frac{1}{2MR^2} \int_{V'} y' x' \rho(r') dV', \quad (\text{D.11})$$

$$= -\frac{1}{MR^2} \frac{I_{12}}{2}. \quad (\text{D.12})$$

Les moments d'inertie du corps sont directement reliés au champ de gravité et à ses variations. Une variation dans la distribution de masse laissera donc une signature identifiable dans le tenseur d'inertie.

D.2 Composantes statiques et élastiques

Les coefficients C_{20} et C_{22} peuvent être exprimés de façon théorique en calculant le potentiel du corps en réponse aux potentiels perturbateurs. Un satellite en rotation à la vitesse ω est soumis au potentiel centrifuge W_{cent}

$$W_{cent} = -\frac{r'^2 \omega^2}{3} (1 - P_{20}(\cos \theta)), \quad (\text{D.13})$$

et au potentiel de marée W_2 exercé par une planète de masse M_p située à la distance r du centre

$$W_t = -\frac{GM_p}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2^0(\cos \chi) \quad (\text{D.14})$$

où χ est l'angle entre les vecteurs \mathbf{r}' et \mathbf{r} . En supposant que l'obliquité du satellite est nulle, dans le référentiel lié au satellite la colatitute de la planète vaut $\theta_p = \pi/2$ et le polynôme associé de Legendre dépend uniquement de la longitude de la planète ϕ_p

$$P_2^0(\cos \chi) = -\frac{1}{4}(3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{3}{4} \sin^2 \theta \cos 2(\phi - \phi_p). \quad (\text{D.15})$$

On peut alors l'écrire en fonction des polynômes associés du satellite et en posant la longitude $\phi_p = \nu - L$ où ν est la longitude vraie et L la longitude moyenne du satellite, on a pour un satellite synchrone

$$P_2^0(\cos \chi) = -\frac{1}{2} P_2^0(\cos \theta) + \frac{1}{4} P_2^2(\cos \theta) \cos 2(\phi - \nu + L). \quad (\text{D.16})$$

Donc le potentiel de marée s'écrit

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{GM_p}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \left[P_2^0(\cos \theta) - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta) \cos 2(\phi - \nu + L) \right]. \quad (\text{D.17})$$

En utilisant les facteurs q_r et q_t définis tels que

$$q_r = \frac{\omega^2 R^3}{GM_s}, \quad (D.18)$$

$$q_t = -3 \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{R}{a}\right)^3, \quad (D.19)$$

on peut écrire les potentiels sous la forme

$$W_{cent} = -\frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'}{R}\right)^2 \frac{q_r}{3} (1 - P_2^0(\cos \theta)), \quad (D.20)$$

$$W_2 = -\frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{q_t}{6} \left(P_2^0(\cos \theta) - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta) \cos 2(\phi - \nu + L)\right). \quad (D.21)$$

En utilisant les développements en excentricité e de $(a/r)^3$ et $(a/r)^3 \cos 2(\phi - \nu + L)$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + 3e \cos M + 0(e^2), \quad (D.22)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos 2(\phi - \nu + L) = \cos 2\phi + \frac{1}{2} e [7 \cos(2\phi - M) - \cos(2\phi + M)], \quad (D.23)$$

le potentiel de marée s'écrit (Giampieri, 2004)

$$W_2 = \frac{GM_s}{R} \left(\frac{r'}{R}\right)^2 q_t \left[-\frac{1}{6} P_2^0(\cos \theta) + \frac{1}{12} P_2^2(\cos \theta) \cos 2\phi \right. \\ \left. + e \left[-\frac{1}{2} P_2^0(\cos \theta) \cos M + P_2^2(\cos \theta) \left(\frac{1}{3} \sin 2\phi \sin M + \frac{1}{4} \cos 2\phi \cos M \right) \right] \right]. \quad (D.24)$$

Il peut donc être séparé en une partie statique \bar{W}_2 indépendante de M et une partie périodique \tilde{W}_2 . La partie statique correspond à la réponse hydrostatique du corps face au potentiel perturbateur, il est donc proportionnel au nombre de Love fluide k_f . La partie périodique correspond à la réponse élastique et est proportionnelle au nombre de Love k_2 .

En identifiant le potentiel en $r' = R$ écrit comme la réponse aux potentiels centrifuge et de marée (Kaula, 1968)

$$W = (1 + k_f)(W_{cent} + \bar{W}_2) + k_2 \tilde{W}_2, \quad (D.25)$$

avec le potentiel du satellite développé à l'ordre 2 en coefficients de Stokes

$$W = \sum_{m=0}^2 \frac{GM_s}{R} P_2^m(\cos \theta) (C_{2,m} \cos(m\phi) + S_{2,m} \sin(m\phi)), \quad (D.26)$$

les coefficients de Stokes non-nuls s'écrivent

$$C_{20} = -(1 + k_f) \left(\frac{2q_r - q_t}{6} \right) + k_2 \frac{q_t}{2} e \cos M, \quad (D.27)$$

$$C_{22} = -(1 + k_f) \frac{q_t}{12} - k_2 \frac{q_t}{4} e \cos M, \quad (D.28)$$

$$S_{22} = -k_2 \frac{q_t}{3} e \sin M. \quad (D.29)$$

D.3 Relation hydrostatique

Dans le cas d'un satellite en orbite synchrone, on a

$$q_t = -3 \frac{M_p}{M_s} \left(\frac{R}{a} \right)^3 = -3 \frac{n^2 R^3}{GM_s}, \quad (\text{D.30})$$

avec $n = \omega$, d'où

$$q_t = -3q_r. \quad (\text{D.31})$$

Dans ce cas, à l'équilibre hydrostatique (de forme statique avec kf non-nul, c'est-à-dire pour laquelle la déformation élastique est nulle, $k_2 = 0$) on a :

$$\frac{C_{20}}{C_{22}} = -\frac{10}{3}. \quad (\text{D.32})$$

Annexe E

Equation de Clairaut

L'équation de Clairaut permet de déterminer la déformation hydrostatique d'une surface soumise au potentiel gravitationnel, au potentiel centrifuge et aux marées.

On suppose un corps dont les couches ont leurs surfaces paramétrées par

$$r' = r'_o \left(1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=-i}^i d_{ij}(r'_o) Y_i^j(\theta', \phi') \right). \quad (\text{E.1})$$

Afin d'alléger l'écriture sous forme de sommes, nous avons posé ici $e_{ij} Y_i^{-j} = d_{i,-j} Y_i^{-j}$.

Le potentiel gravitationnel en un point r'' situé à l'intérieur du corps hétérogène s'écrit comme la contribution d'un corps de rayon r'' et d'une coquille d'épaisseur $R - r''$ (Jeffreys, 1970)

$$W = -\frac{4\pi G}{3} \int_0^{r''} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{r'_o{}^3}{r''} + \sum_{i,j} \frac{3}{2i+1} \frac{r'_o{}^{i+3}}{r''^{i+1}} d_{ij} Y_i^j(\theta'', \phi'') \right) dr'_o \\ - \frac{4\pi G}{3} \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{3}{2} r'_o{}'^2 + \sum_{i,j} \frac{3}{2i+1} \frac{r''^i}{r'_o{}^{i+2}} d_{ij}(r'_o) Y_i^j(\theta'', \phi'') \right) dr'_o. \quad (\text{E.2})$$

Dans le cas d'une planète soumise au potentiel de marée W_2 et au potentiel centrifuge W_{cent} , W_2 et W_{cent} s'ajoutent au potentiel gravitationnel et s'expriment

$$W_{cent} = -\frac{r^2 \omega^2}{3} (1 - P_2^0(\cos \theta')), \quad (\text{E.3})$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{GM_p}{r} \left(\frac{r''}{r} \right)^2 \left[P_2^0(\cos \theta'') - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta'') \cos 2\phi'' \right]. \quad (\text{E.4})$$

Cependant, afin d'alléger la démonstration, nous n'utiliserons ici que le potentiel gravitationnel, la démarche étant ensuite la même pour tout potentiel développé en harmoniques sphériques.

Le potentiel gravitationnel s'écrit alors en posant $r'' = r''_o (1 + \sum_{i,j} d_{ij}(r''_o) Y_i^j(\theta'', \phi''))$ et

en développant au premier ordre en d_{ij}

$$\begin{aligned}
 W = & -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{(1 - \sum_{i,j} d_{ij}(r''_o) Y_i^j(\theta'', \phi''))}{r''_o} \int_0^{r'} 3\rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o \right. \\
 & \left. + \sum_{i,j} \frac{3}{2i+1} Y_i^j(\theta'', \phi'') \left(\frac{1}{r''_o^{i+1}} \int_0^{r''} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{i+3} d_{ij}(r'_o)) dr'_o \right) \right] \\
 & - \frac{4\pi G}{3} \int_{r''}^R 3\rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o - \frac{4\pi G}{3} \sum_{i,j} \frac{3}{2i+1} Y_i^j(\theta'', \phi'') r_o''^i \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{d_{ij}(r'_o)}{r_o'^{i-2}} \right) dr'_o. \quad (\text{E.5})
 \end{aligned}$$

Ici, W est le potentiel ressenti à la surface r'' de densité constante ρ . En supposant que la densité varie radialement uniquement, alors W est une fonction de r'' . Les coefficients des fonctions $Y_i^j(\theta'', \phi'')$ doivent donc s'annuler le long de la surface équipotentielle tels que

$$\begin{aligned}
 -\frac{d_{ij}(r'')}{r''} \int_0^{r''} \rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o + \frac{1}{2i+1} \left(\frac{1}{r''^{i+1}} \int_0^{r''} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{i+3} d_{ij}(r'_o)) dr'_o \right. \\
 \left. + r''^i \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{d_{ij}(r'_o)}{r_o'^{i-2}} \right) dr'_o \right) = 0. \quad (\text{E.6})
 \end{aligned}$$

Cette équation est alors multipliée par r''^{i+1}

$$\begin{aligned}
 -r''^i d_{ij}(r'') \int_0^{r''} \rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o + \frac{1}{2i+1} \left(\int_0^{r''} \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} (r_o'^{i+3} d_{ij}(r'_o)) dr'_o \right. \\
 \left. + r''^{2i+1} \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{d_{ij}(r'_o)}{r_o'^{i-2}} \right) dr'_o \right) = 0, \quad (\text{E.7})
 \end{aligned}$$

et en dérivant par rapport à r'' on a alors

$$\begin{aligned}
 -\left(i r''^{i-1} d_{ij}(r'') + r''^i \frac{\partial d_{ij}(r'')}{\partial r''} \right) \int_0^{r''} \rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o - r''^i d_{ij}(r'') \rho r''^2 \\
 + \frac{1}{2i+1} \left(\rho(i+3) r''^{i+2} d_{ij}(r'') + \rho r''^{i+3} \frac{\partial d_{ij}(r'')}{\partial r''} \right) + r''^{2i} \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial}{\partial r'_o} \left(\frac{d_{ij}(r'_o)}{r_o'^{i-2}} \right) dr'_o \\
 - \frac{r''^{2i+1}}{2i+1} \left(\rho(2-i) d_{ij}(r'') r''^{1-i} + \rho r''^{2-i} \frac{\partial d_{ij}(r'')}{\partial r''} \right) = 0. \quad (\text{E.8})
 \end{aligned}$$

Au degré 2, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 -\left(2r'' d_{2j}(r'') + r''^2 \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) \int_0^{r''} \rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o - r''^4 d_{2j}(r'') \rho \\
 + \frac{1}{5} \left(5\rho r''^4 d_{2j}(r'') + \rho r''^5 \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) + r''^4 \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial d_{2j}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o \\
 - \frac{r''^5}{5} \rho \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} = 0, \quad (\text{E.9})
 \end{aligned}$$

soit, après simplification,

$$-\left(2r'' d_{2j}(r'') + r''^2 \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) \int_0^{r''} \rho(r'_o) r_o'^2 dr'_o + r''^4 \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial d_{2j}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o = 0. \quad (\text{E.10})$$

On divise alors par r''^4

$$- \left(2 \frac{d_{2j}(r'')}{r''^3} + \frac{1}{r''^2} \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) \int_0^{r''} \rho(r'_o) r'_o{}'^2 dr'_o + \int_{r''}^R \rho(r'_o) \frac{\partial d_{2j}(r'_o)}{\partial r'_o} dr'_o = 0, \quad (\text{E.11})$$

et, en dérivant de nouveau par rapport à r'' , on obtient

$$\begin{aligned} - \left(-6 \frac{d_{2j}(r'')}{r''^4} + \frac{2}{r''^3} \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} - \frac{2}{r''^3} \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} + \frac{1}{r''^2} \frac{\partial^2 d_{2j}(r'')}{\partial r''^2} \right) \int_0^{r''} \rho(r'_o) r'_o{}'^2 dr'_o \\ - \left(2 \frac{d_{2j}(r'')}{r''^3} + \frac{1}{r''^2} \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) \rho r''^2 - \rho \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Après simplification on a

$$\left(\frac{1}{r''^2} \frac{\partial^2 d_{2j}(r'')}{\partial r''^2} - 6 \frac{d_{2j}(r'')}{r''^4} \right) \int_0^{r''} \rho(r'_o) r'_o{}'^2 dr'_o + 2 \rho r''^2 \left(\frac{d_{2j}(r'')}{r''^3} + \frac{1}{r''^2} \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) = 0. \quad (\text{E.13})$$

En introduisant la définition de la densité moyenne sous la surface r'' telle que

$$\tilde{\rho} = \frac{4\pi \int_0^{r''} \rho(r'_o) r'_o{}'^2 dr'_o}{\frac{4\pi}{3} r''^3}, \quad (\text{E.14})$$

d'où

$$\tilde{\rho} = \frac{3}{r''^3} \int_0^{r''} \rho(r'_o) r'_o{}'^2 dr'_o, \quad (\text{E.15})$$

on peut finalement écrire l'équation (E.13) sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2 d_{2j}(r'')}{\partial r''^2} - 6 \frac{d_{2j}(r'')}{r''^2} \right) \tilde{\rho} + \frac{6\rho}{r''} \left(\frac{d_{2j}(r'')}{r''} + \frac{\partial d_{2j}(r'')}{\partial r''} \right) = 0. \quad (\text{E.16})$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Clairaut (voir par exemple [Kaula \(1968\)](#)), et permet de calculer la forme d'une surface équipotentielle à l'équilibre hydrostatique.

Annexe F

Equation de Darwin-Radau

L'équation (E.10) peut être écrite à l'ordre $j = 0$ pour un rayon r quelconque telle que

$$- \left(r^2 \frac{\partial d_{20}(r)}{\partial r} + 2r d_{20}(r) \right) \frac{r^3}{3} \tilde{\rho} + r^4 \int_r^R \rho(r_o) \frac{\partial d_{20}(r_o)}{\partial r_o} dr_o = \frac{5r_1^4 \omega^2}{12\pi G}, \quad (\text{F.1})$$

où le membre de droite est la contribution du potentiel centrifuge (E.3) qui a été introduit dans cette annexe dans le développement de l'équation de Clairaut pour l'harmonique $Y_2^0(\theta, \phi)$. A la surface du satellite, on a $r = R$, $d_{20}(R) = -\frac{2}{3}\alpha$ et $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_o$ où $\tilde{\rho}_o$ est la densité moyenne du satellite. On a donc en surface

$$\frac{2}{2} R^3 \tilde{\rho}_o \left(R^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2R\alpha \right) = \frac{5R^4 \omega^2}{4\pi G}, \quad (\text{F.2})$$

et en posant q_r le rapport entre l'accélération centrifuge et l'accélération gravitationnelle

$$q_r = \frac{\omega^2 R^3}{GM_s} = \frac{3\omega_2}{4\pi G \tilde{\rho}_o}, \quad (\text{F.3})$$

on obtient alors (Cook, 1980)

$$R \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2\alpha = \frac{5}{2} q_r. \quad (\text{F.4})$$

On pose Λ tel que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = \Lambda \frac{\alpha}{r}, \quad (\text{F.5})$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} = \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \frac{\alpha}{r} + \Lambda \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} r - \alpha \right) \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\Lambda^2 - \Lambda}{r^2} \right) \alpha, \quad (\text{F.6})$$

et l'équation de Clairaut (E.16), exprimée en fonction de α ,

$$\tilde{\rho} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} - \frac{6}{r^2} \alpha \right) + \frac{6\rho}{r} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\alpha}{r} \right) = 0, \quad (\text{F.7})$$

devient, après le changement de variables (F.5) et simplifications,

$$r \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \Lambda^2 - \Lambda - 6 + \frac{6\rho}{\tilde{\rho}} (\Lambda + 1) = 0. \quad (\text{F.8})$$

Or on a défini

$$\tilde{\rho} = \frac{3}{r^2} \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (\text{F.9})$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} = -\frac{9}{r^4} \int_0^r \rho(r_o) r_o^2 dr_o + \frac{3}{r} \rho(r) = \frac{3}{r} (\rho - \tilde{\rho}). \quad (\text{F.10})$$

On peut alors écrire

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{r}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r}, \quad (\text{F.11})$$

et, en injectant cette expression dans l'équation (F.8), on obtient après développements :

$$\frac{r}{2(\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{r}{\tilde{\rho}} (\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{(5\Lambda - \Lambda^2)}{2(\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{F.12})$$

De plus, on a :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\rho} r^5 (\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} r^5 + 5r^4 \tilde{\rho} \right) (\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}} + \tilde{\rho} r^5 \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} (\Lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{F.13})$$

$$= \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \frac{5}{r} + \frac{1}{2(\Lambda + 1)} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right) \tilde{\rho} r^5 (\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{F.14})$$

$$= 5\tilde{\rho} a^4 \left[\frac{1}{5} (\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}} r \left(\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \frac{5}{r} + \frac{1}{2(\Lambda + 1)} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right) \right], \quad (\text{F.15})$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\rho} r^5 (\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}) = 5\tilde{\rho} r^4 \left[(1 + \Lambda)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{5\tilde{\rho}} (1 + \Lambda)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \frac{r}{10} \frac{1}{(\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right]. \quad (\text{F.16})$$

En injectant (F.12) dans (F.16), on peut écrire

$$5\tilde{\rho} r^4 \left[(1 + \Lambda)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{5\tilde{\rho}} (1 + \Lambda)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} + \frac{r}{10} \frac{1}{(\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right] = 5\tilde{\rho} r^4 \left[1 - \frac{1}{10} \Lambda^2 + \frac{1}{2} \Lambda \right] \frac{1}{(\Lambda + 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{F.17})$$

de sorte que l'on obtient pour $\Lambda \ll 1$ (Cook, 1980)

$$\frac{\partial}{\partial r} [\tilde{\rho} r^5 (1 + \Lambda)^{\frac{1}{2}}] \sim 5\tilde{\rho} r^4. \quad (\text{F.18})$$

Or le moment d'inertie du satellite est défini par

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr, \quad (\text{F.19})$$

d'où, en introduisant l'équation (F.11),

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \left(\tilde{\rho} + \frac{1}{3} r \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} \right) r^4 dr, \quad (\text{F.20})$$

$$= \frac{8\pi}{9} \int_0^R \left(3\tilde{\rho} r^4 + r^5 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} \right) dr. \quad (\text{F.21})$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\frac{8\pi}{3} \int_0^R r^5 \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} dr = \frac{8\pi}{9} \left[r^5 \tilde{\rho} \right]_0^R - \frac{8\pi}{9} \int_0^R 5r^4 \tilde{\rho} dr, \quad (\text{F.22})$$

$$= \frac{8\pi}{9} \left(\tilde{\rho}_o R^5 - 5 \int_0^R r^4 \tilde{\rho} dr \right), \quad (\text{F.23})$$

et le moment d'inertie s'écrit alors

$$I = \frac{8\pi}{9} \left(\tilde{\rho}_o R^5 - 2 \int_0^R \tilde{\rho} r^4 dr \right). \quad (\text{F.24})$$

Or, d'après l'équation (F.18),

$$\int_0^R \tilde{\rho} r^4 dr = \frac{1}{5} \tilde{\rho}_o R^5 (1 + \Lambda_o)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{F.25})$$

où Λ_o est la valeur de Λ à la surface. En introduisant ce résultat dans l'équation (F.24), on a

$$I = \frac{8\pi}{9} \left(\tilde{\rho}_o R^5 - \frac{2}{5} \tilde{\rho}_o R^5 (1 + \Lambda_o)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{F.26})$$

D'après la définition de Λ , on a

$$\Lambda_o = \frac{R}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r}. \quad (\text{F.27})$$

Or, en utilisant (F.4), on a

$$\frac{R}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial r} = \frac{5}{2} \frac{q_r}{\alpha} - 2 = \Lambda_o. \quad (\text{F.28})$$

On peut alors écrire le moment d'inertie sous la forme

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} \frac{q_r}{\alpha} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{F.29})$$

En tenant compte également de la déformation liée au potentiel de marée, le potentiel d'ordre 2 et degré 0 en un point r du satellite s'écrit en utilisant les potentiels (E.3) et (E.4) pour $e \ll 1$

$$W = W_{cent,2}^0 + W_2^0 \sim \frac{1}{3} \omega^2 r^2 P_2^0(\cos \theta) + \frac{1}{2} \frac{GM_p}{a} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2^0(\cos \theta), \quad (\text{F.30})$$

d'où, en effectuant le changement de variables pour un satellite synchrone,

$$\frac{M_p}{a^3} = \frac{n^2}{G} = \frac{\omega^2}{G}, \quad (\text{F.31})$$

on obtient

$$W = \left(\frac{1}{3} \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right) P_2^0(\cos \theta) = \frac{5}{2} W_{cent,2}^0. \quad (\text{F.32})$$

Le moment d'inertie d'un satellite déformé par la rotation et les marées s'écrit donc

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{5} \left(\frac{25}{4} \frac{q_r}{\alpha} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (\text{F.33})$$

Cette relation est connue sous le nom d'équation de Darwin-Radau et relie le moment d'inertie I du satellite à son aplatissement α .

Annexe G

Matrices de rotation

Les matrices de rotation $R_1(x)$, $R_2(x)$ et $R_3(x)$ sont définies telles que :

$$R_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad (\text{G.1})$$

$$R_2(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & -\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}, \quad (\text{G.2})$$

$$R_3(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.3})$$

Liste des publications

Conférences

Short period librations in a three-layer Titan, Rambaux, N.; Richard, A., *Titan Through Time ; Unlocking Titan's Past, Present and Future*, NASA Goddard Space Flight Center, April 3th - 5th, 2012. Edited by V. Cottini, C. Nixon, and R. Lorenz., 04/2012.

Librational response of a three-layer Titan, Richard, A.; Rambaux, N., *SF2A-2012 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*. Eds. : S. Boissier, P. de Laverny, N. Nardetto, R. Samadi, D. Valls-Gabaud and H. Wozniak, pp.155-158, 12/2012.

Librations of Titan with atmospheric and orbital couplings, Richard, A.; Rambaux, N.; Charnay, B., *EGU General Assembly 2013, held 7-12 April, 2013 in Vienna, Austria*, id. EGU2013-11790, 04/2013.

Mimas' physical forced libration places strong constraints on its interior and origin., Tajeddine, R.; Rambaux, N.; Lainey, V.; Charnoz, S.; Rivoldini, A.; Richard, A.; Noyelles, B., *American Astronomical Society, DDA meeting 45*, 05/2014.

Articles à comité de lecture

Librational response of a deformed 3-layer Titan perturbed by non-Keplerian orbit and atmospheric couplings, Richard, A.; Rambaux, N.; Charnay, B., *Planetary and Space Science*, Volume 93, p. 22-34, 04/2013.

Constraints on Mimas' interior and origin from Cassini ISS Measurements of physical forced libration, Tajeddine, R., Rambaux, N., Lainey, V., Charnoz, S., Rivoldini, A., Richard, A., Noyelles, B., *Science*, Volume 346 Issue 6207, p. 322-324, 10/2014.

Bibliographie

- Alterman, Z., Jarosch, H., Pekeris, C.L., 1959. Oscillations of the Earth. Royal Society of London Proceedings Series A 252, 80–95.
- Anderson, J.D., Jacobson, R.A., McElrath, T.P., Moore, W.B., Schubert, G., Thomas, P.C., 2001. Shape, Mean Radius, Gravity Field, and Interior Structure of Callisto. *Icarus* 153, 157–161.
- Anderson, J.D., Lau, E.L., Sjogren, W.L., Schubert, G., Moore, W.B., 1996. Gravitational constraints on the internal structure of Ganymede. *Nature* 384, 541–543.
- Baland, R.M., Van Hoolst, T., 2010. Librations of the Galilean satellites : The influence of global internal liquid layers. *Icarus* 209, 651–664.
- Baland, R.M., van Hoolst, T., Yseboodt, M., Karatekin, Ö., 2011. Titan’s obliquity as evidence of a subsurface ocean ? *A&A* 530, A141. [1104.2741](#).
- Béghin, C., Randriamboarison, O., Hamelin, M., Karkoschka, E., Sotin, C., Whitten, R.C., Berthelier, J.J., Grard, R., Simões, F., 2012. Analytic theory of Titan’s Schumann resonance : Constraints on ionospheric conductivity and buried water ocean. *Icarus* 218, 1028–1042.
- Bills, B.G., Nimmo, F., 2008. Forced obliquity and moments of inertia of Titan. *Icarus* 196, 293–297.
- Bois, E., 2000. Connaissance de la libration lunaire à l’ère de la télémétrie laser–lune. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series {IV} - Physics* 1, 809 – 823.
- Bougault, P., Sadourny, R., 2001. *Dynamique de l’atmosphère et de l’océan*. Éd. de l’École polytechnique.
- Carr, M.H., Belton, M.J.S., Chapman, C.R., Davies, M.E., Geissler, P., Greenberg, R., McEwen, A.S., Tufts, B.R., Greeley, R., Sullivan, R., Head, J.W., Pappalardo, R.T., Klaasen, K.P., Johnson, T.V., Kaufman, J., Senske, D., Moore, J., Neukum, G., Schubert, G., Burns, J.A., Thomas, P., Veverka, J., 1998. Evidence for a subsurface ocean on Europa. *Nature* 391, 363.
- Cassini, J., 1693. *De l’Origine et du progrès de l’astronomie et de son usage dans la géographie et dans la navigation*, par M. Cassini. Impr. royale.
- Castillo-Rogez, J.C., Lunine, J.I., 2010. Evolution of Titan’s rocky core constrained by Cassini observations. *Geophys. Res. Lett.* 37, 20205.

- Castillo-Rogez, J.C., Lunine, J.I., 2012. Tidal Response of Titan's Interior Models Consistent with Cassini-Derived Constraints, in : Lunar and Planetary Science Conference, p. 1707.
- Charnay, B., 2014. Dynamique troposphérique et évolution climatique de Titan et de la Terre primitive. Ph.D. thesis.
- Charnay, B., Lebonnois, S., 2012. Two boundary layers in Titan's lower troposphere inferred from a climate model. *Nature Geoscience* 5, 106–109.
- Clairaut, A., 1743. *Théorie de la figure de la terre*. Ed. David fils (Paris).
- Colombo, G., 1966. Cassini's second and third laws. *AJ* 71, 891.
- Comstock, R.L., Bills, B.G., 2003. A solar system survey of forced librations in longitude. *Journal of Geophysical Research (Planets)* 108, 5100.
- Cook, A.H., 1980. *Interiors of the planets*. Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1980. 357 p.
- Coustenis, A., Sohl, F., Hussmann, H., Solomonidou, A., Moussas, X., Bratsolis, E., Kyriakopoulos, K., Bampasidis, G., Hirtzig, M., Seymour, K., 2012. Compared habitability potential of icy moons, in : 39th COSPAR Scientific Assembly, p. 368.
- Danby, J.M.A., 1988. *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond, Va., U.S.A. : Willmann-Bell, 1988. 2nd ed.
- Darwin, G.H., 1899. Earth, theory of the figure of the. *MNRAS* 60, 82.
- Deparis, V., Legros, H., 2000. *Voyage à l'intérieur de la terre : De la géographie antique à la géophysique moderne. Une histoire des idées*. CNRS Éditions.
- Dermott, S.F., 1979. Shapes and gravitational moments of satellites and asteroids. *Icarus* 37, 575–586.
- Dermott, S.F., Thomas, P.C., 1988. The shape and internal structure of Mimas. *Icarus* 73, 25–65.
- Deschamps, F., Mousis, O., Sanchez-Valle, C., Lunine, J.I., 2010. The Role of Methanol in the Crystallization of Titan's Primordial Ocean. *ApJ* 724, 887–894.
- Dumberry, M., 2011. The free librations of Mercury and the size of its inner core. *Geophys. Res. Lett.* 38, 16202.
- Eckhardt, D.H., 1965. Computer solutions of the forced physical librations of the moon. *AJ* 70, 466.
- Eckhardt, D.H., 1981. Theory of the libration of the moon. *Moon and Planets* 25, 3–49.
- Euler, L., 1765. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 14, 1765.
- Fortes, A.D., 2012. Titan's internal structure and the evolutionary consequences. *Planetary and Space Science* 60, 10–17.

- Fortes, A.D., Grindrod, P.M., Trickett, S.K., Vočadlo, L., 2007. Ammonium sulfate on Titan : Possible origin and role in cryovolcanism. *Icarus* 188, 139–153.
- Gastineau, M., Laskar, J., 2012. TRIP 1.2.0. TRIP Reference manual. IMCCE. Paris Observatory. <http://www.imcce.fr/trip/>.
- Giampieri, G., 2004. A note on the tidally induced potential of a satellite in eccentric orbit. *Icarus* 167, 228–230.
- Giorgini, J.D., Yeomans, D.K., Chamberlin, A.B., Chodas, P.W., Jacobson, R.A., Keesey, M.S., Lieske, J.H., Ostro, S.J., Standish, E.M., Wimberly, R.N., 1996. JPL's On-Line Solar System Data Service, in : AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #28, p. 1158.
- Goldreich, P., Peale, S., 1966. Spin-orbit coupling in the solar system. *AJ* 71, 425.
- Goldreich, P.M., Mitchell, J.L., 2010. Elastic ice shells of synchronous moons : Implications for cracks on Europa and non-synchronous rotation of Titan. *Icarus* 209, 631–638. [0910.0032](#).
- Grasset, O., Dougherty, M.K., Coustenis, A., Bunce, E.J., Erd, C., Titov, D., Blanc, M., Coates, A., Drossart, P., Fletcher, L.N., Hussmann, H., Jaumann, R., Krupp, N., Lebreton, J.P., Prieto-Ballesteros, O., Tortora, P., Tosi, F., Van Hoolst, T., 2013. JUper ICy moons Explorer (JUICE) : An ESA mission to orbit Ganymede and to characterise the Jupiter system. *Planet. Space Sci.* 78, 1–21.
- Grasset, O., Sotin, C., 1996. The Liquidus of H₂O-NH₃ up to 1.5 GPa : Implications for the Presence of a Liquid Shell in Titan's Interior, in : Lunar and Planetary Science Conference, p. 453.
- Grasset, O., Sotin, C., Deschamps, F., 2000. On the internal structure and dynamics of Titan. *Planet. Space Sci.* 48, 617–636.
- Greenberg, R., Geissler, P., Hoppa, G., Tufts, B.R., Durda, D.D., Pappalardo, R., Head, J.W., Greeley, R., Sullivan, R., Carr, M.H., 1998. Tectonic Processes on Europa : Tidal Stresses, Mechanical Response, and Visible Features. *Icarus* 135, 64–78.
- Henrard, J., 2005. The Rotation of Europa. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 91, 131–149.
- Herschel, W., 1790. Account of the Discovery of a Sixth and Seventh Satellite of the Planet Saturn ; With Remarks on the Construction of Its Ring, Its Atmosphere, Its Rotation on an Axis, and Its Spheroidal Figure. By William Herschel, LL.D. F. R. S. Royal Society of London Philosophical Transactions Series I 80, 1–20.
- Hinderer, J., Legros, H., Amalvict, M., 1982. A search for Chandler and nearly diurnal free wobbles using Liouville equations. *Geophysical Journal International* 71, 303–332.
- Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H., 2006. Physical geodesy. SpringerWienNewYork, Wien, New York.
- Hubbard, W.B., Anderson, J.D., 1978. Possible flyby measurements of Galilean satellite interior structure. *Icarus* 33, 336–341.

- Iess, L., Jacobson, R.A., Ducci, M., Stevenson, D.J., Lunine, J.I., Armstrong, J.W., Asmar, S.W., Racioppa, P., Rappaport, N.J., Tortora, P., 2012. The Tides of Titan. *Science* 337, 457–459.
- Iess, L., Rappaport, N.J., Jacobson, R.A., Racioppa, P., Stevenson, D.J., Tortora, P., Armstrong, J.W., Asmar, S.W., 2010. Gravity Field, Shape, and Moment of Inertia of Titan. *Science* 327, 1367–1369.
- Ingersoll, A.P., Orton, G.S., Munch, G., Neugebauer, G., Chase, S.C., 1980. Pioneer Saturn infrared radiometer - Preliminary results. *Science* 207, 439–443.
- Jacobson, R.A., Antreasian, P.G., Bordi, J.J., Criddle, K.E., Ionasescu, R., Jones, J.B., Mackenzie, R.A., Meek, M.C., Parcher, D., Pelletier, F.J., Owen, Jr., W.M., Roth, D.C., Roundhill, I.M., Stauch, J.R., 2006. The Gravity Field of the Saturnian System from Satellite Observations and Spacecraft Tracking Data. *The Astronomical Journal* 132, 2520–2526.
- Jara-Oru e, H.M., Vermeersen, B.L.A., 2014. The forced libration of Europa’s deformable shell and its dependence on interior parameters. *Icarus* 229, 31–44.
- Jeffreys, H., 1970. *The earth. Its origin, history and physical construction*. Cambridge : University Press, 1970.
- Karatekin,  . , Van Hoolst, T., Tokano, T., 2008. Effect of internal gravitational coupling on Titan’s non-synchronous rotation. *Geophys. Res. Lett.* 35, 16202.
- Kaula, W.M., 1968. *An introduction to planetary physics - The terrestrial planets*. Space Science Text Series, New York : Wiley, 1968.
- Konopliv, A.S., Park, R.S., Yuan, D.N., Asmar, S.W., Watkins, M.M., Williams, J.G., Fahnestock, E., Kruizinga, G., Paik, M., Strelakov, D., Harvey, N., Smith, D.E., Zuber, M.T., 2013. The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission. *Journal of Geophysical Research (Planets)* 118, 1415–1434.
- Kuiper, G.P., 1944. Titan : a Satellite with an Atmosphere. *ApJ* 100, 378.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1969. *Mechanics. Course of Theoretical Physics*, Oxford : Pergamon Press, 1969, 2nd ed.
- Landau, L.D., Lifshitz, E.M., Sykes, J.B., Reid, W.H., 1959. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press Oxford, England.
- Laskar, J., 1988. Secular evolution of the solar system over 10 million years. *A&A* 198, 341–362.
- Laskar, J., 2003. Frequency map analysis and quasiperiodic decompositions. ArXiv Mathematics e-prints [arXiv:math/0305364](https://arxiv.org/abs/math/0305364).
- Laskar, J., 2010. Le Système solaire est-il stable ?, in : *S eminaire Poincaré XIV*, pp. 221–246.
- Lebonnois, S., Burgalat, J., Rannou, P., Charnay, B., 2012. Titan global climate model : A new 3-dimensional version of the IPSL Titan GCM. *Icarus* 218, 707–722.

- Leftz, M., Legros, H., Hinderer, J., 1991. Non-linear equations for the rotation of a viscoelastic planet taking into account the influence of a liquid core. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 52, 13–43.
- Lemoine, F.G., Goossens, S.J., Sabaka, T.J., Nicholas, J.B., Mazarico, E., Rowlands, D.D., Loomis, B.D., Caprette, D., Chinn, D.S., Neumann, G.A., Zuber, M.T., Smith, D.E., 2013. Gravity fields of the Moon derived from GRAIL Primary and Extended Mission Data, in : EGU General Assembly Conference Abstracts, p. 12347.
- Lindal, G.F., Wood, G.E., Hotz, H.B., Sweetnam, D.N., Eshleman, V.R., Tyler, G.L., 1983. The atmosphere of Titan - an analysis of the Voyager 1 radio occultation measurements. *Icarus* 53, 348–363.
- Liouville, J., 1858. Développements sur un chapitre de la Mécanique de Poisson. *Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 3.
- Lorenz, R.D., 2006. The exploration of Titan. Johns Hopkins APL Technical digest, Volume 27, number 2.
- Lorenz, R.D., Stiles, B.W., Kirk, R.L., Allison, M.D., Persi del Marmo, P., Iess, L., Lunine, J.I., Ostro, S.J., Hensley, S., 2008. Titan's Rotation Reveals an Internal Ocean and Changing Zonal Winds. *Science* 319.
- Love, A.E.H., 1909. Earth, the yielding of the, to disturbing forces. *MNRAS* 69, 476.
- Love, A.E.H., 1911. Some problems of geodynamics : being an essay to which the Adams prize in the University of Cambridge was adjudged in 1911. Cornell University Library historical math monographs, University Press.
- Lunine, J., Choukroun, M., Stevenson, D., Tobie, G., 2010. The Origin and Evolution of Titan in Titan : Interior, Surface, Atmosphere, and Space Environment. pp. 35–59.
- Lunine, J.I., Stevenson, D.J., 1987. Clathrate and ammonia hydrates at high pressure - Application to the origin of methane on Titan. *Icarus* 70, 61–77.
- Ma, C., Arias, E.F., Eubanks, T.M., Fey, A.L., Gontier, A.M., Jacobs, C.S., Sovers, O.J., Archinal, B.A., Charlot, P., 1998. The International Celestial Reference Frame as Realized by Very Long Baseline Interferometry. *The Astronomical Journal* 116, 516–546.
- Margot, J.L., Peale, S.J., Jurgens, R.F., Slade, M.A., Holin, I.V., 2007. Large Longitude Libration of Mercury Reveals a Molten Core. *Science* 316.
- Mathews, P.M., Buffett, B.A., Herring, T.A., Shapiro, I.I., 1991. Forced nutations of the earth : Influence of inner core dynamics. I - Theory. II - Numerical results and comparisons. III - Very long interferometry data analysis. *J. Geophys. Res.* 96, 8219–8257.
- McCullagh, J., 1855. On the Attraction of Ellipsoids with a New Demonstration of Clairaut's Theorem. *Transactions of the Royal Irish Academy, Dublin* 22, 379–395.
- McKinnon, W.B., Bland, M.T., 2011. Core Evolution in Icy Satellites and Kuiper Belt Objects, in : Lunar and Planetary Science Conference, p. 2768.

- Meriggiola, R., 2012. The Determination of the rotational state of celestial bodies. Ph.D. thesis.
- Meriggiola, R., Iess, L., 2012. A new rotational model of Titan from Cassini SAR data, in : European Planetary Science Congress 2012, p. 593.
- Moore, J.M., Schenk, P.M., Bruesch, L.S., Asphaug, E., McKinnon, W.B., 2004. Large impact features on middle-sized icy satellites. *Icarus* 171, 421–443.
- Moritz, H., Mueller, I.I., 1987. Earth rotation : theory and observation. New York : Ungar, 1987.
- Mousis, O., Gautier, D., Bockelée-Morvan, D., 2002. An Evolutionary Turbulent Model of Saturn's Subnebula : Implications for the Origin of the Atmosphere of Titan. *Icarus* 156, 162–175.
- Murray, C.D., Dermott, S.F., 1999. Solar system dynamics. Cambridge University Press.
- Nimmo, F., Bills, B.G., 2010. Shell thickness variations and the long-wavelength topography of Titan. *Icarus* 208, 896–904.
- Noyelles, B., Karatekin, Ö., Rambaux, N., 2011. The rotation of Mimas. *A&A* 536, A61. [1109.4867](#).
- Noyelles, B., Lemaître, A., Vienne, A., 2008. Titan's rotation. A 3-dimensional theory. *A&A* 478, 959–970. [0710.4950](#).
- Noyelles, B., Nimmo, F., 2014. New insights on Titan's interior from its obliquity. ArXiv e-prints [1403.2276](#).
- Peale, S.J., 1969. Generalized Cassini's Laws. *AJ* 74, 483.
- Peale, S.J., 2005. The free precession and libration of Mercury. *Icarus* 178, 4–18. [astro-ph/0507117](#).
- Poincaré, H., 1902. Figures d'équilibre d'une masse fluide. Cours de Physique Mathématique, Ed. Gauthier-Villars et Cie.
- Poincaré, H., 1910. Sur la précession des corps déformables. *Bulletin Astronomique, Serie I* 27, 321–356.
- Radau, R., 1890. Mémoires et observations. Sur la loi des densités à l'intérieur de la terre. *Bulletin Astronomique, Serie I* 7, 76–92.
- Rambaux, N., 2013. Rotational and librational motion of solar system bodies, in : Journées Systèmes de Références.
- Rambaux, N., Castillo-Rogez, J., 2013. Tides on Satellites of Giant Planets, in : Souchay, J., Mathis, S., Tokieda, T. (Eds.), *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, p. 167.
- Rambaux, N., Castillo-Rogez, J., Dehant, V., Kuchynka, P., 2011a. Constraining Ceres' interior from its rotational motion. *A&A* 535, A43. [1107.2051](#).

- Rambaux, N., Castillo-Rogez, J.C., Le Maistre, S., Rosenblatt, P., 2012. Rotational motion of Phobos. *A&A* 548, A14.
- Rambaux, N., Castillo-Rogez, J.C., Williams, J.G., Karatekin, Ö., 2010. Librational response of Enceladus. *Geophys. Res. Lett.* 37, 4202.
- Rambaux, N., van Hoolst, T., Dehant, V., Bois, E., 2007. Inertial core-mantle coupling and libration of Mercury. *A&A* 468, 711–719.
- Rambaux, N., van Hoolst, T., Karatekin, Ö., 2011b. Librational response of Europa, Ganymede, and Callisto with an ocean for a non-Keplerian orbit. *A&A* 527, A118.
- Rappaport, N., Bertotti, B., Giampieri, G., Anderson, J.D., 1997. Doppler Measurements of the Quadrupole Moments of Titan. *Icarus* 126, 313–323.
- Rappaport, N.J., Iess, L., Wahr, J., Lunine, J.I., Armstrong, J.W., Asmar, S.W., Tortora, P., Di Benedetto, M., Racioppa, P., 2008. Can Cassini detect a subsurface ocean in Titan from gravity measurements? *Icarus* 194, 711–720.
- Richard, A., Rambaux, N., Charnay, B., 2014. Librational response of a deformed 3-layer Titan perturbed by non-Keplerian orbit and atmospheric couplings. *Planet. Space Sci.* 93, 22–34. [1402.2493](#).
- Robutel, P., Rambaux, N., Castillo-Rogez, J., 2011. Analytical description of physical librations of saturnian coorbital satellites Janus and Epimetheus. *Icarus* 211, 758–769. [1003.0557](#).
- Roncoli, R.B., 2005. JPL Technical Document D-32296. JPL Technical Document. JPL.
- Sasao, T., Okubo, S., Saito, M., 1980. A Simple Theory on Dynamical Effects of Stratified Fluid Core upon Nutational Motion of the Earth, in : Duncombe, R.L. (Ed.), *Nutation and the Earth's Rotation*, p. 165.
- Shida, T., 1912. *On the Elasticity of the Earth and the Earth's Crust*. Kyoto Imperial University, College of Science and Engineering. Memoirs, Kyoto Imperial University.
- Smith, P.H., Lemmon, M.T., Lorenz, R.D., Sromovsky, L.A., Caldwell, J.J., Allison, M.D., 1996. Titan's Surface, Revealed by HST Imaging. *Icarus* 119, 336–349.
- Stiles, B.W., Kirk, R.L., Lorenz, R.D., Hensley, S., Lee, E., Ostro, S.J., Allison, M.D., Callahan, P.S., Gim, Y., Iess, L., Perci del Marmo, P., Hamilton, G., Johnson, W.T.K., West, R.D., Cassini RADAR Team, 2008. Determining Titan's Spin State from Cassini RADAR Images. *AJ* 135, 1669–1680.
- Stiles, B.W., Kirk, R.L., Lorenz, R.D., Hensley, S., Lee, E., Ostro, S.J., Allison, M.D., Callahan, P.S., Gim, Y., Iess, L., Perci del Marmo, P., Hamilton, G., Johnson, W.T.K., West, R.D., Cassini RADAR Team, 2010. Erratum : "Determining Titan's Spin State from Cassini Radar Images". *AJ* 139, 311.
- Szeto, A.M.K., Xu, S., 1997. Gravitational coupling in a triaxial ellipsoidal Earth. *J. Geophys. Res.* 102, 27651–27658.

- Tajeddine, R., 2013. Mimas et Encelade : Formation et Structure interne par contraintes observationnelles des images ISS de la sonde spatiale Cassini. Ph.D. thesis.
- Tajeddine, R., Rambaux, N., Lainey, V., Charnoz, S., Richard, A., Rivoldini, A., Noyelles, B., 2014. Constraints on Mimas' interior from Cassini ISS libration measurements. *Science* 346, 322–324.
- Takeuchi, H., Saito, M., 1972. Seismic surface waves. *Methods in computational physics* 11, 217–295.
- Thomas, P.C., Burns, J.A., Helfenstein, P., Squyres, S., Veverka, J., Porco, C., Turtle, E.P., McEwen, A., Denk, T., Giese, B., Roatsch, T., Johnson, T.V., Jacobson, R.A., 2007. Shapes of the saturnian icy satellites and their significance. *Icarus* 190, 573–584.
- Tiscareno, M.S., Thomas, P.C., Burns, J.A., 2009. The rotation of Janus and Epimetheus. *Icarus* 204, 254–261.
- Tisserand, F., 1891. *Traité de mécanique céleste : Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*. 1891. *Traité de mécanique céleste*, Gauthier-Villars et fils.
- Tobie, G., Grasset, O., Lunine, J.I., Mocquet, A., Sotin, C., 2005. Titan's internal structure inferred from a coupled thermal-orbital model. *Icarus* 175, 496–502.
- Tobie, G., Lunine, J., Monteux, J., Mousis, O., Nimmo, F., 2012. The Origin and Evolution of Titan, in : Muller-Wodarg, Griffith, Lellouch, Cravens (Eds.), *Titan : Interior, Surface, Atmosphere and Space Environment*, pp. 24–50.
- Tokano, T., Neubauer, F.M., 2002. Tidal Winds on Titan Caused by Saturn. *Icarus* 158, 499–515.
- Tokano, T., Neubauer, F.M., 2005. Wind-induced seasonal angular momentum exchange at Titan's surface and its influence on Titan's length-of-day. *Geophys. Res. Lett.* 32, 24203.
- Van Hoolst, T., Baland, R.M., Trinh, A., 2013. On the librations and tides of large icy satellites. *Icarus* 226, 299–315.
- Van Hoolst, T., Dehant, V., 2002. Influence of triaxiality and second-order terms in flattenings on the rotation of terrestrial planets. I. Formalism and rotational normal modes. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 134, 17–33.
- Van Hoolst, T., Rambaux, N., Karatekin, Ö., Baland, R.M., 2009. The effect of gravitational and pressure torques on Titan's length-of-day variations. *Icarus* 200, 256–264.
- Van Hoolst, T., Rambaux, N., Karatekin, Ö., Dehant, V., Rivoldini, A., 2008. The librations, shape, and icy shell of Europa. *Icarus* 195, 386–399.
- Van Hoolst, T., Rivoldini, A., Baland, R.M., Yseboodt, M., 2012. The effect of tides and an inner core on the forced longitudinal libration of Mercury. *Earth and Planetary Science Letters* 333, 83–90.
- Vienne, A., Duriez, L., 1995. TASS1.6 : Ephemerides of the major Saturnian satellites. *A&A* 297, 588.

- Wahr, J., Selvens, Z.A., Mullen, M.E., Barr, A.C., Collins, G.C., Selvens, M.M., Pappalardo, R.T., 2009. Modeling stresses on satellites due to non-synchronous rotation and orbital eccentricity using gravitational potential theory. *Icarus* 200, 188–206.
- Whittaker, E.T., Watson, G.N., 1927. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press. fourth edition. Reprinted 1990.
- Williams, J.G., Boggs, D.H., Yoder, C.F., Ratcliff, J.T., Dickey, J.O., 2001. Lunar rotational dissipation in solid body and molten core. *J. Geophys. Res.* 106, 27933–27968.
- Williams, J.G., Konopliv, A.S., Boggs, D.H., Park, R.S., Yuan, D.N., Lemoine, F.G., Goossens, S., Mazarico, E., Nimmo, F., Weber, R.C., Asmar, S.W., Melosh, H.J., Neumann, G.A., Phillips, R.J., Smith, D.E., Solomon, S.C., Watkins, M.M., Wiczorek, M.A., Andrews-Hanna, J.C., Head, J.W., Kiefer, W.S., Matsuyama, I., McGovern, P.J., Taylor, G.J., Zuber, M.T., 2014. Lunar interior properties from the grail mission. *Journal of Geophysical Research : Planets* 119, 1546–1578.
- Willner, K., Oberst, J., Hussmann, H., Giese, B., Hoffmann, H., Matz, K.D., Roatsch, T., Duxbury, T., 2010. Phobos control point network, rotation, and shape. *Earth and Planetary Science Letters* 294, 541–546.